

به نام خدا

فارادون

ریاضی تجربی یازدهم

مهندس آرش عمید

انتشارات
علمی
فار
phare
www.pharepub.com

تقدیریم به شما

مقدمه‌ی مؤلف

اهمیت درس ریاضی و تأثیر زیاد آن در قبولی داوطلبان رشته تجربی در رشته‌های خاص برکسی پوشیده نیست. در این راستا کتابی که بتواند بدون اضافه‌گویی، با سؤالات استاندارد و داشتن ایده‌های نو داوطلبان را در این مسیر همراهی کند، بسیار راهگشا است. کتابی که پیش روی شماست منطبق بر کتاب ریاضی یازدهم تجربی به همین منظور نوشته شده است. در این کتاب به بهانه طرح سؤالات سخت از آوردن مطالب خارج از کتاب پرهیز شده است. سؤالات بسیار نو و در حد کنکور تجربی، پاسخ‌های واقعا تشریحی و درس‌نامه مفید و منطبق بر کتاب درسی از ویژگی‌های بارز این کتاب است. در مسیر سخت تألیف این کتاب همکاران عزیزم در انتشارات فاخر فار زحمات زیادی را متحمل شدند و بدون کمک آن‌ها این کتاب به سرانجام نمی‌رسید، قدردان زحمات تک‌تک این عزیزان هستیم. در ادامه با ساختار کتاب و نحوه مطالعه درس ریاضی آشنا می‌شوید.

راهنمای استفاده از کتاب

۱- **آزمون‌های مویرگی:** ابتدای هر فصل، با آزمون‌های مویرگی شروع می‌شود. این آزمون‌ها مبحث به مبحث طراحی شده‌اند تا هر یک از مباحث یک فصل را گام به گام پوشش دهند. برای پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها لازم است ابتدا مبحث مورد نظر را به طور دقیق از روی جزوه دبیر یا درسنامه کتاب که در انتهای این کتاب قرار گرفته است، (که در عین کوتاه بودن کامل و دقیق است) مطالعه کنید و سپس به سراغ این آزمون‌ها بروید. حتماً در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه کامل و تشریحی آن را به طور دقیق مطالعه کنید. حتی پاسخ تست‌هایی که درست پاسخ داده‌اید را دوباره بررسی کنید، این کار سبب می‌شود راه‌های ساده‌تر و نکات مربوط به هر تست را فرا بگیرید. از آن جایی که آزمون‌های مویرگی برای تکمیل آموزش ریزبخش‌های هر فصل طراحی شده است لذا رعایت وقت پیشنهادی ضرورتی ندارد بنابراین بدون نگرانی از زمان و به قصد یادگیری از این آزمون‌ها استفاده کنید.

۲- **آزمون‌های جامع هر فصل:** در پایان هر فصل آزمون‌هایی از مباحث کل فصل طراحی شده است. که به مرور مطالب و نکات آن فصل می‌پردازد. این آزمون‌ها را وقتی پاسخ دهید که مطالعه فصل را به طول کامل انجام داده و مطالب را کاملاً فرار گرفته‌اید. باز هم در پایان هر آزمون پاسخ‌نامه را دقیق مورد بررسی قرار دهید. در این آزمون‌ها سعی کنید کم‌کم بحث زمان‌بندی را هم تمرین کنید.

۳- **آزمون‌ها دوره‌ای و مروری:** در پایان بعضی از فصول کتاب آزمون‌هایی قرار دارد که ۲ یا ۳ فصل قبلی را مورد ارزیابی قرار می‌دهد؛ این آزمون‌ها برای مرور فصل‌های قبلی در نظر گرفته شده است و باعث می‌شود تا با سؤالات ترکیبی از آن چند فصل روبه‌رو شوید و هم‌چنین دوره‌ای از آن فصل و فصل‌های گذشته داشته باشید. در این آزمون‌ها حتماً وقت پیشنهادی را برای پاسخ‌گویی در نظر بگیرید.

۴- **آزمون‌های جامع پایان کتاب:** این آزمون‌ها برای دوره کامل مطالب کتاب طراحی شده است. معمولاً زمان پاسخ‌گویی به این آزمون‌ها حوالی اردیبهشت‌ماه است (البته دانش‌آموزان پایه دهم و داوطلبان کنکور می‌توانند هر زمان که مطالب کتاب ریاضی دهم را به طور کامل آموختند سراغ این آزمون‌ها بروند). این آزمون‌ها محک خوبی برای آموخته‌های شما از کتاب ریاضی دهم است. باز هم توصیه می‌کنم پاسخ‌نامه هر یک از آزمون‌ها که به طور جامع و تشریحی نوشته شده است را در پایان هر آزمون به دقت بررسی کنید.

در انتها توصیه می‌کنیم هر آزمون را در چند نوبت و با فاصله زمانی مناسب، از خودتان امتحان بگیرید و نتیجه را در هر نوبت یادداشت کنید تا نقاط ضعف خود را به طور کامل پوشش داده باشید. همچنین به یاد داشته باشید با توجه به این که ضریب ریاضی گروه تجربی در کنکور سراسری ۶ می‌باشد تمرین مداوم و استفاده از آزمون‌های این کتاب می‌تواند تأثیر بسیاری برای آمادگی شما در امتحانات سال یازدهم و کنکور سراسری داشته باشد..

موفق باشید

ولفگانگ گهلر یکی از دانشمندان علم روانشناسی (متولد ۱۸۸۷) آزمایشی را روی یک میمون به نام سلطان انجام داد. او یک موز را با فاصله زیاد خارج از قفس سلطان قرار می دهد و سه تکه چوب کوچک، متوسط و بزرگ را در داخل قفس می گذارد و با دوربین حرکات سلطان را زیر نظر می گیرد. سلطان که بسیار گرسنه بود سعی می کند با دست و پا آن موز را بردارد اما به دلیل فاصله زیاد موفق نمی شود. از چوب متوسط و بعد از آن بقیه چوبها استفاده می کند ولی باز موفق نمی شود. دقایق زیادی این تلاش ادامه می یابد و در آخر سلطان بسیار خسته و نا امید در گوشه ای از قفس می افتد و با چشمانی خسته نظاره گر موز، قفس و چوبها می شود. بعد از چند دقیقه مکث از جای خودش بلند می شود و انتهای چوبها که دارای نری و مادگی بوده را به درون هم چفت کرده و آن چوب را کامل کرده و به بیرون قفس می اندازد و موفق می شود تا موز را به سمت خود بکشد و در نهایت با حس رضایت آن موز را نوش جان می کند. فردای همان روز آقای گهلر آزمایش دیگری ترتیب می دهد و برای دومین بار یک موز از بالای قفس آویزان می کند و چند جعبه چوبی در قفس می اندازد. در این آزمایش سلطان بدون فکر کردن بلافاصله جعبهها را روی هم می گذارد و به موز دست پیدا می کند و سریع آن را می بلعد. این آزمایشها ثابت کرد که تا قبل از توجه کافی به مسأله، سلطان نتوانست نکته را بیابد. یعنی سلطان می خواست موز را به داخل قفس بکشد ولی توجه کافی به وسایل دور و برش مثل چوبها نداشت اما بعد از توجه عمیق روی مسأله متوجه شده که نری و مادگی (نکته اصلی مسأله) در سر و ته چوبها است که می تواند آن ها را به هم وصل کند و چوب بزرگتری که احیاناً به موز می رسد را بسازد؛ که بعد از این عمل موفق به خوردن موز شد. گهلر نتیجه می گیرد: ۱- تا زمانی که سلطان به عمق مسأله پی نبرد نتوانست موفق عمل کند. ۲- وقتی سلطان به همه ابزارهای داخل قفس به خوبی نگاه کرد و در ذهنش راه حل را به طور کامل چید (یک پارچگی راه حل) و آن وقت نتوانست بلافاصله بدون هیچ اشتباهی مسأله را حل کند. ۳- وقتی که سلطان با مسأله ای مواجه شد و با تلاش زیاد و تفکر عمیق و یک پارچه آن را حل کرد این موضوع باعث شد تا بتواند مسایل مشابه را راحت تر و با صرف وقت کم تر حل نماید (مثل آزمایش دوم که سلطان باید موز آویزان شده از قفس را بدست می آورد).

در سال های بعدی دانشمندان دیگری روی موضوع حل مسأله کار کردند و نتیجه گرفتند کسانی که به دنبال حل مسأله هستند را می توان به دو گروه تقسیم کرد:

تازه کاران و کهنه کاران

- ۱- کهنه کاران به دلیل حل مسائل زیاد و تمرین های پی در پی، الگوی حل مسائل مختلف را در ذهن می پروراند و از اینکه با مسائل سخت روبه رو شوند نمی ترسند و ساعتها با آن کلنجار می روند ولی تازه کاران حوصله بررسی مسأله را ندارند و با چند یا حتی یک خطا سریع به پاسخ آن در پاسخنامه رجوع می کنند بنابراین الگوها در ذهنشان تثبیت نمی شود.
- ۲- کهنه کاران تا به یک پارچگی در حل سوال نرسند شروع به حل نمی کنند و صرفاً با کشیدن شکل و برانداز کردن سوال سعی در پیدا کردن نکته سوال می کنند و بعد از اینکه توانستند به خوبی سوال را کالبدشکافی کنند به صورت یک پارچه شروع به پاسخ می کنند. ولی تازه کاران از همان ابتدا با دیدن سوال شروع به حل می کنند و به طور پراکنده هر چه به ذهنشان می رسد را می نویسند و در آخر نه تنها حل آن را نیافته اند بلکه سردرگم تر شده اند.
- ۳- کهنه کاران بر روی سوال تمرکز می کنند تا بتوانند ابتدا محتوا و خواست اصلی سوال را دقیق و درست بفهمند، پس از آن است که جواب از دل سوال بیرون می آید ولی تازه کاران حل مسأله به صورت سوال توجه کافی ندارند و معمولاً شتاب زده از روی سوال می گذرانند و تمرکزشان بر روی جواب است، غافل از این که جواب سوال را نباید ابداع کرد. بلکه جواب را باید در درون سوال کشف کرد. این دانشمندان بعد از چنین آزمایش هایی توصیه می کنند که:
- ۱- برای حل مسأله از دیگران کمک نگیرید و سعی کنید خودتان با گذاشتن وقت و بدون خستگی سوال را موشکافی کنید تا نکته های آن را درک نمایید.
- ۲- از کشیدن شکل و توضیح موضوع برای خودتان غافل نشوید تا درک بصری از مسأله پیدا کنید.
- ۳- وقتی مسأله ای را حل کردید چند مسأله مشابه آن را مجدد حل کنید.
- ۴- بعد از حل مسأله هایی که نکته دار هستند خودتان پارامترهای آن مسأله را تغییر دهید و یک مسأله شبیه آن طرح کنید این کار باعث می شود خودتان را جای طراح سوال حس نمایید.

۵. برای جا افتادن الگوهای متعددی که در مسأله‌های مربوط به یک فصل حل کرده‌ای بعد از چند روز دوباره آن‌ها را تکرار کنید تا آن الگوها در ذهنتان نقش ببندد.

حال با توجه به مطالب بالا می‌توان گفت:

- ۱- سعی کنید به طور مستمر در هفته روی درس ریاضی وقت بگذارید مثلاً ۳ روز از هفته به تمرین ریاضی بپردازید.
 - ۲- بلافاصله بعد از تدریس بخشی از درس توسط دبیر خود، یک بار دیگر به جزوه، کتاب و نکته‌های خود در منزل نگاهی بیندازید و مثال‌های حل شده توسط دبیر را مجدد خودتان بدون نگاه کردن به جواب حل کنید.
 - ۳- در روزهای بعدی تمرین‌های کتاب درسی و کمک آموزشی خود را بدون نگاه کردن به پاسخ‌نامه حل کنید حتی اگر سوال وقت‌گیر بود نگران نشوید و بدون توجه به زمان مشغول حل آن شوید. فراموش نکنید آنالیز سوال است که، شما را توانمند خواهد کرد و به مرور توان حل مسأله را در شما افزایش خواهد داد. مطمئن باشید که پاسخ همیشه در محتوای سوال مستتر و پنهان است و اگر با دقت سوال را آنالیز کنید حتماً پاسخ را خواهید یافت.
- به سوال زیر دقت کنید شاید کمی پیچیده به نظر برسد ولی با اندکی دقت و بررسی شکل و محتوای سوال متوجه خواهید شد که سوال کاملاً برایتان آشنا است.

مثال . منحنی به معادله $y = (2x + 1)(x + 8) - mx$ ، خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m کدام است؟

- (۱) $9 < m < 25$ (۲) $15 < m < 23$ (۳) $7 < m < 15$ (۴) $5 < m < 13$

پاسخ: اگر قرار باشد نقطه مشترک نداشته باشد یعنی معادله $mx - (2x + 1)(x + 8) = 0$ جواب نداشته باشد. این معادله تشکیل معادله

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	موافق a	مخالف a	موافق a	

درجه ۲ می‌دهد، در صورتی جواب ندارد که $\Delta < 0$ باشد.

حالا به یک تعیین علامت می‌رسیم. باید یک عبارت درجه ۲ را تعیین

علامت کنیم. عبارت درجه ۲ را باید به صورت زیر تعیین علامت کنیم:

پس مفهوم جواب نداشتن معادله این است که عبارت درجه ۲ فاقد ریشه بوده و Δ این معادله منفی باشد.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که سوال‌هایی به ظاهر، پیچیده مثل سوال بالا با اندکی دقت، ابتکار و پردازش به سوالی ساده تبدیل شده و قابل حل می‌شود.

۴- حتماً بعد از انجام تمرین در بخش مورد نظر به کتاب فارآزمون مراجعه کنید و از همان بخش، از خودتان آزمون بگیرید. آزمون‌های اولیه این کتاب موثرگی هستند و به شما کمک می‌کنند تا آن درس در ذهنتان جا بیفتد. از آن جایی که سوالات در آزمون‌ها پراکندگی دارند و باعث تمرکز بیش‌تر روی مبحث می‌شوند و ضمناً هنر آزمون دادن را نیز از همین ابتدا به شما آموزش می‌دهند. به علاوه آزمون دادن باعث جمع‌بندی مطالب خوانده شده می‌شود.

۵- ضمناً سوالاتی را که از کتاب درسی، کمک آموزشی و فارآزمون نتوانسته‌اید جواب بدهید یا نکته‌دار بوده‌اند را در روزهای بعدی دوباره حل کنید؛ حتی این کار می‌تواند بیش از دو بار اتفاق بیفتد. یادتان باشد با حل مجدد سوالات، ویژگی‌های مطالب یاد گرفته شده و نکته‌های حل مسأله در ذهنتان تثبیت شده و الگوهای لازم (کلید حل مسأله) در حافظه‌تان شکل می‌گیرد؛ یعنی شما را از یک تازه‌کار به یک کهنه‌کار حل مسأله تبدیل می‌کند.

در انتها توصیه می‌کنیم که هرگز از ماشین حساب برای بدست آوردن جواب استفاده نکنید. چنانچه یک روز در میان به مقدار یک ساعت و نیم تا دو ساعت مطالعه و تمرین داشته باشید و سعی کنید که خودتان بدون کمک پاسخ‌نامه و یا دیگران پاسخ را بیابید حتماً در ۴ ماه آینده از پیشرفتتان تعجب خواهید کرد.

خدایا می‌دانم نگاه مهربان تو همیشه حامی من است

موفق و پیروز باشید

آرش عمید

پاییز ۹۶

آزمون‌های فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

- ۲ آزمون ۱ هندسه تحلیلی ۲
 آزمون ۲ هندسه تحلیلی ۱۱
 آزمون ۳ هندسه تحلیلی ۱۲
 آزمون ۴ معادله درجه دوم و تابع درجه دو ۱۳
 آزمون ۵ معادله درجه دوم و تابع درجه دو ۱۴
 آزمون ۶ معادله درجه دوم و تابع درجه دو ۱۵
 آزمون ۷ جامع ۱ ۱۶
 آزمون ۸ جامع ۲ ۱۷

آزمون‌های فصل دوم: هندسه

- ۱۰ آزمون ۹ ترسیم‌های هندسی ۱۰
 آزمون ۱۰ استدلال و قضیه تالس ۱۱
 آزمون ۱۱ تشابه مثلث‌ها ۱۱
 آزمون ۱۲ تشابه مثلث‌ها ۱۳
 آزمون ۱۳ جامع ۱ ۱۴
 آزمون ۱۴ جامع ۲ ۱۵
 آزمون ۱۵ مروری (فصل ۱ و ۲) ۱۶
 آزمون ۱۶ مروری (فصل ۱ و ۲) ۱۷

آزمون‌های فصل سوم: تابع

- ۲۰ آزمون ۱۷ آشنایی با تابع و برخی از انواع آن ۲۰
 آزمون ۱۸ آشنایی با تابع و برخی از انواع آن ۲۱
 آزمون ۱۹ تابع یک‌به‌یک و وارون ۲۲
 آزمون ۲۰ تابع یک‌به‌یک و وارون ۲۳
 آزمون ۲۱ اعمال روی توابع ۲۴
 آزمون ۲۲ جامع ۱ ۲۵
 آزمون ۲۳ جامع ۲ ۲۶
 آزمون ۲۴ مروری (فصل ۱ و ۲ و ۳) ۲۷
 آزمون ۲۵ مروری (فصل ۱ و ۲ و ۳) ۲۸

آزمون‌های فصل چهارم: مثلثات

- ۳۰ آزمون ۲۶ واحدهای اندازه‌گیری و روابط مثلثاتی ۳۰
 آزمون ۲۷ واحدهای اندازه‌گیری و روابط مثلثاتی ۳۱
 آزمون ۲۸ روابط مثلثاتی ۳۱
 آزمون ۲۹ توابع مثلثاتی ۳۲
 آزمون ۳۰ جامع ۱ ۳۴
 آزمون ۳۱ جامع ۲ ۳۵
 آزمون ۳۲ مروری (فصل ۱ تا ۴) ۳۶
 آزمون ۳۳ مروری (فصل ۱ تا ۴) ۳۷

آزمون‌های فصل پنجم: تابع نمایی و لگاریتم

- ۴۰ آزمون ۳۴ تابع نمایی و ویژگی‌های آن ۴۰
 آزمون ۳۵ تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن ۴۱
 آزمون ۳۶ تابع لگاریتمی و کاربردها ۴۲
 آزمون ۳۷ جامع ۱ ۴۳
 آزمون ۳۸ جامع ۲ ۴۴
 آزمون ۳۹ جامع ۳ ۴۵
 آزمون ۴۰ جامع ۴ ۴۶

آزمون‌های فصل ششم: حد و پیوستگی

- ۴۸ آزمون ۴۱ فرایندهای حدی و محاسبه حد توابع ۴۸
 آزمون ۴۲ محاسبه حد توابع ۴۹
 آزمون ۴۳ محاسبه حد توابع ۵۰
 آزمون ۴۴ محاسبه حد توابع و پیوستگی ۵۱
 آزمون ۴۵ جامع ۱ ۵۲
 آزمون ۴۶ جامع ۲ ۵۳
 آزمون ۴۷ مروری (فصل ۵ و ۶) ۵۵
 آزمون ۴۸ مروری (فصل ۵ و ۶) ۵۶

آزمون‌های فصل هفتم: آمار و احتمال

- ۵۸ آزمون ۴۹ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۵۸
 آزمون ۵۰ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۵۹
 آزمون ۵۱ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۶۰
 آزمون ۵۲ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل ۶۱
 آزمون ۵۳ آمار توصیفی ۶۲
 آزمون ۵۴ آمار توصیفی ۶۳
 آزمون ۵۵ جامع ۱ ۶۴
 آزمون ۵۶ جامع ۲ ۶۵
 آزمون ۵۷ جامع ۱ (فصل ۵ و ۶ و ۷) ۶۶
 آزمون ۵۸ مروری فصل ۵، ۶، ۷ ۶۷

آزمون‌های فصل هشتم: جامع کل کتاب

- ۶۸ آزمون ۵۹ جامع ۱ (کل کتاب) ۶۸
 آزمون ۶۰ جامع ۲ (کل کتاب) ۶۹
 آزمون ۶۱ جامع ۳ (کل کتاب) ۷۰
 آزمون ۶۲ جامع ۴ (کل کتاب) ۷۱
 آزمون ۶۳ جامع ۵ (کل کتاب) ۷۲

پاسخ‌نامه آزمون ۳۳ مروری (فصل ۱ تا ۴)..... ۱۳۶

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل پنجم ۱۴۰

پاسخ‌نامه آزمون ۳۴ تابع نمایی و ویژگی‌های آن..... ۱۴۰
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۵ تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن..... ۱۴۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۶ تابع لگاریتمی و کاربردها..... ۱۴۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۷ جامع ۱..... ۱۴۶
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۸ جامع ۲..... ۱۴۷
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۹ جامع ۳..... ۱۴۹
 پاسخ‌نامه آزمون ۴۰ جامع ۴..... ۱۵۱

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل ششم ۱۵۴

پاسخ آزمون ۴۱ فرآیندهای حدی و محاسبه حد توابع..... ۱۵۴
 پاسخ آزمون ۴۲ محاسبه حد توابع..... ۱۵۶
 پاسخ آزمون ۴۳ محاسبه حد توابع..... ۱۵۷
 پاسخ آزمون ۴۴ محاسبه حد توابع و پیوستگی..... ۱۵۹
 پاسخ آزمون ۴۵ جامع ۱..... ۱۶۱
 پاسخ آزمون ۴۶ جامع ۲..... ۱۶۳
 پاسخ‌نامه آزمون ۴۷ مروری (فصل ۵ و ۶)..... ۱۶۵
 پاسخ‌نامه آزمون ۴۸ مروری (فصل ۵ و ۶)..... ۱۶۷

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل هفتم ۱۷۰

پاسخ‌نامه آزمون ۴۹ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل..... ۱۷۰
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۰ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل..... ۱۷۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۱ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل..... ۱۷۳
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۲ احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل..... ۱۷۵
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۳ آمار توصیفی..... ۱۷۷
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۴ آمار توصیفی..... ۱۷۹
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۳ جامع ۱..... ۱۸۱
 پاسخ‌نامه آزمون ۵۶ جامع ۲..... ۱۸۳
 پاسخ آزمون ۵۷ مروری (فصل ۵، ۶ و ۷)..... ۱۸۶
 پاسخ آزمون ۵۸ مروری (فصل ۵، ۶ و ۷)..... ۱۸۷

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل هشتم ۱۹۰

پاسخ‌نامه آزمون ۵۹ جامع ۱ (کل کتاب)..... ۱۹۰
 پاسخ‌نامه آزمون ۶۰ جامع ۲ (کل کتاب)..... ۱۹۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۶۱ جامع ۳ (کل کتاب)..... ۱۹۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۶۲ جامع ۴ (کل کتاب)..... ۱۹۶
 پاسخ‌نامه آزمون ۶۳ جامع ۵ (کل کتاب)..... ۱۹۷

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل اول ۷۴

پاسخ‌نامه آزمون ۱ هندسه تحلیلی..... ۷۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۲ هندسه تحلیلی..... ۷۶
 پاسخ‌نامه آزمون ۳ هندسه تحلیلی..... ۷۸
 پاسخ‌نامه آزمون ۴ معادله درجه دوم و تابع درجه دو..... ۸۰
 پاسخ‌نامه آزمون ۵ معادله درجه دوم و تابع درجه دو..... ۸۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۶ معادله درجه دوم و تابع درجه دو..... ۸۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۷ جامع ۱..... ۸۷
 پاسخ‌نامه آزمون ۸ جامع ۲..... ۸۹

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل دوم ۹۲

پاسخ‌نامه آزمون ۹ ترسیم‌های هندسی..... ۹۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۰ استدلال و قضیه تالس..... ۹۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۱ تشابه مثلث‌ها..... ۹۶
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۲ تشابه مثلث‌ها..... ۹۸
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۳ جامع ۱..... ۱۰۰
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۴ جامع ۲..... ۱۰۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۵ مروری (فصل ۱ و ۲)..... ۱۰۳
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۶ مروری (فصل ۱ و ۲)..... ۱۰۵

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل سوم ۱۰۸

پاسخ‌نامه آزمون ۱۷ آشنایی با تابع و برخی از انواع آن..... ۱۰۸
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۸ آشنایی با تابع و برخی از انواع آن..... ۱۰۹
 پاسخ‌نامه آزمون ۱۹ تابع یک‌به‌یک و وارون..... ۱۱۱
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۰ تابع یک‌به‌یک و وارون..... ۱۱۲
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۱ اعمال روی تابع..... ۱۱۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۲ جامع ۱..... ۱۱۶
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۳ جامع ۲..... ۱۱۸
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۴ آزمون مروری (فصل ۱ و ۲ و ۳)..... ۱۱۹
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۵ آزمون مروری (فصل‌های ۱ و ۲ و ۳)..... ۱۲۰

پاسخ‌نامه آزمون‌های فصل چهارم ۱۲۴

پاسخ‌نامه آزمون ۲۶ واحدهای اندازه‌گیری و روابط مثلثاتی..... ۱۲۴
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۷ واحدهای اندازه‌گیری و روابط مثلثاتی..... ۱۲۶
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۸ روابط مثلثاتی..... ۱۲۷
 پاسخ‌نامه آزمون ۲۹ توابع مثلثاتی..... ۱۲۹
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۰ جامع ۱..... ۱۳۱
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۱ جامع ۲..... ۱۳۳
 پاسخ‌نامه آزمون ۳۲ مروری (فصل ۱ تا ۴)..... ۱۳۴

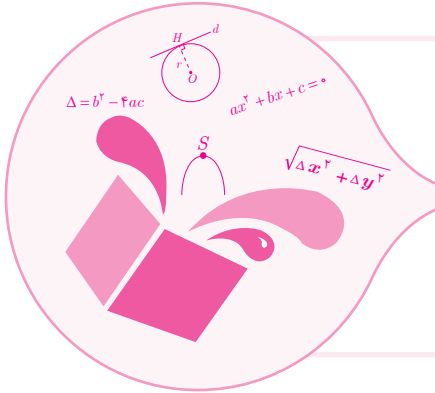
۲۴۰	درس نامه فصل چهارم	۲۰۲	درس نامه فصل اول
۲۴۰.....	واحدهای اندازه گیری زاویه	۲۰۲.....	هندسه مختصاتی
۲۴۴.....	توابع مثلثاتی	۲۱۰.....	معادله درجه دوم و تابع درجه دو
۲۴۶	درس نامه فصل پنجم	۲۱۸.....	معادلات گویا و معادلات رادیکالی
۲۴۶.....	تابع نمایی	۲۲۰	درس نامه فصل دوم
۲۴۸.....	لگاریتم	۲۲۰.....	ترسیم های هندسی
۲۵۶	درس نامه فصل ششم	۲۲۳.....	استدلال و قضیه تالس
۲۶۴	درس نامه فصل هفتم	۲۲۵.....	تالس
۲۶۴.....	احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۲۲۶.....	تشابه
۲۶۶.....	آمار توصیفی	۲۳۰	درس نامه فصل سوم
		۲۳۰.....	آشنایی با برخی از انواع تابع

بخش اول

آزمون‌ها

آزمون‌های فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر



۱۵ دقیقه

آزمون ۱ هندسه تحلیلی

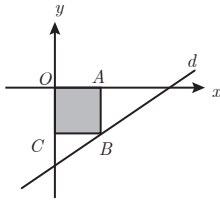
- به ازای کدام مقدار m سه نقطه $A(3, 5)$ ، $B(4, 2)$ و $C(2, m)$ بر روی یک خط قرار دارند؟
 ۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸
- قرینه نقطه $A(4, 2)$ نسبت به خط $y - 2x + 1 = 0$ است. فاصله نقطه A' از مبدأ مختصات کدام است؟
 ۱) ۳ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۴ ۴) ۲
- فاصله بین دو خط به معادلات $y = x\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟
 ۱) $2 - \sqrt{3}$ ۲) $\sqrt{3} - 1$ ۳) $\sqrt{3} + 1$ ۴) $2 + \sqrt{3}$
- در شکل مقابل، $OA = OB$ و $C(3, -4)$ است. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث رنگی کدام است؟
 ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $2 - \sqrt{2}$
- مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ ، $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟
 ۱) ۶ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{7}{5}$
- در شکل مقابل، چهارضلعی مربع است. مجموع مؤلفه‌های نقطه B کدام است؟
 ۱) ۱۹ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) ۱۶
- نقاط $A(-1, 7)$ ، $B(3, 5)$ و $M(2, 2)$ در صفحه مفروض اند. اگر قرینه نقطه B نسبت به نقطه M را C بنامیم، میانه نظیر رأس B در مثلث ABC از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟
 ۱) $(2, 1)$ ۲) $(1, -3)$ ۳) $(-3, 1)$ ۴) $(-1, -1)$
- خط گذرنده از نقاط $A(a-1, a+1)$ و $B(a+2, 2a)$ بر خط $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ عمود است. مقدار a کدام است؟
 ۱) $\frac{13}{4}$ ۲) $\frac{7}{4}$ ۳) $\frac{9}{4}$ ۴) $\frac{11}{4}$
- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟
 ۱) $7/2$ ۲) $9/6$ ۳) $11/4$ ۴) $12/8$
- خط گذرنده بر نقطه $(4, -2)$ و موازی خط به معادله $2y - x = 4$ از نقطه‌ای با کدام مختصات می‌گذرد؟
 ۱) $(2, -4)$ ۲) $(6, -1)$ ۳) $(8, -1)$ ۴) $(10, 2)$

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲
۲	۱	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲

پاسخ آزمون ۱ در صفحه ۷۲

۱. خط $L: 3x - 4y + 9 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, 5)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π
(۳) 3π (۴) 4π



۲. در شکل مقابل، معادله خط d به صورت $y = 2x - 6$ است. مساحت مربع رنگی کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴
(۳) ۶ (۴) ۹

۳. نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند.

تقریبی ۹۰

مختصات وسط قطر آن کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$
(۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 3)$

۴. نقاط A و B روی خط $y + 2x = 5$ به گونه‌ای قرار دارند که فاصله آن‌ها از خط $3x + 4y = 10$ برابر ۲ است. طول پاره خط AB

کدام است؟

- (۱) $\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

۵. عرض از مبدأ خط گذرا بر دو نقطه $(3, -2)$ و $(1, 2)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

۶. نقاط $A(3t - 3, t + 3)$ و $B(t + 1, -3t + 5)$ به ازای مقادیر مختلف t در صفحه حرکت می‌کنند. نقطه وسط پاره خط AB روی

کدام خط حرکت خواهد کرد؟

- (۱) $x + 2y - 7 = 0$ (۲) $2x - y + 7 = 0$
(۳) $x + 2y + 7 = 0$ (۴) $x - 2y - 7 = 0$

۷. سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ ، $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث

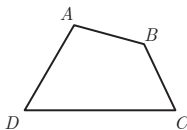
تقریبی ۸۹

مفروض کدام است؟

- (۱) $9y - 4x = 15$ (۲) $9y - 6x = 17$
(۳) $3y - 2x = 7$ (۴) $3y + 2x = 9$

۸. در شکل مقابل $A(1, 4)$ ، $B(6, 1)$ ، $C(8, -5)$ و $D(-4, -3)$ است. مساحت چهارضلعی

$ABCD$ کدام است؟



- (۱) ۴۲ (۲) ۴۸
(۳) ۵۰ (۴) ۵۹

۹. یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ که بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است، از کدام

نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(3, 2)$ (۲) $(1, -1)$ (۳) $(4, 0)$ (۴) $(2, 5)$

۱۰. دو خط $3x - 2y + m = 0$ و $2y + 3x - 6 = 0$ روی محور OX متقاطع‌اند. مقدار m کدام است؟

- (۱) -۸ (۲) -۶ (۳) -۴ (۴) -۲

- ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۲ در صفحه ۷۴

۱. برای رسیدن از نقطه A به نقطه B ، ابتدا ۴ واحد به چپ و سپس ۳ واحد به طرف پایین حرکت می‌کنیم. اگر خط گذرا از نقاط A و B

- محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع کند، عرض از مبدأ آن کدام است؟
- (۱) $-۲/۵$ (۲) $-۳/۵$ (۳) $-۴/۵$ (۴) $-۵/۵$

۲. فاصله مبدأ مختصات از نقطه تلاقی دو خط به معادلات $۳y = ۲x + ۱۱$ و $۲y + x = ۵$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{۸}$ (۳) ۳ (۴) $\sqrt{۱۰}$

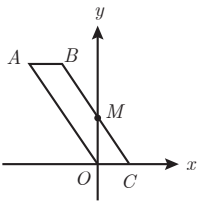
۳. مساحت ناحیه محدود بین دو خط $۳x + y = ۳$ و $۵y + ۳x = ۱۵$ و محورهای مختصات کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) $۷/۵$

۴. دو خط $y = (m - ۳)x + ۸$ و $y = ۳mx + ۱۱ = ۰$ موازی اند. نزدیک‌ترین نقطه خط $۲y - (m - ۴)x + ۱۲ = ۰$ به نقطه $A(۶, -۶)$

کدام است؟

- (۱) $(۲, ۳)$ (۲) $(۲, -۲)$
(۳) $(۴, -۴)$ (۴) $(۳, -۳)$



۵. در شکل مقابل، چهارضلعی $ABCO$ متوازی الاضلاع است. اگر M وسط ضلع BC و $A(-۴, ۶)$ باشد،

مساحت متوازی الاضلاع کدام است؟

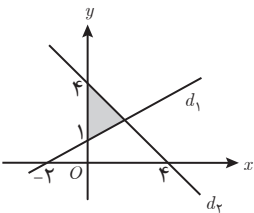
- (۱) ۱۶ (۲) ۱۲
(۳) ۱۸ (۴) ۲۰

۶. یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله $y = x + ۲$ و نقطه $A(۳, -۱)$ یک رأس آن است. اندازه قطر مربع کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) $۳\sqrt{۲}$ (۴) $۶\sqrt{۲}$

۷. مساحت ناحیه رنگی شکل مقابل کدام است؟

- (۱) $۲/۵$ (۲) ۳
(۳) $۳/۵$ (۴) ۴



۸. فاصله دو خط موازی $۲x + my - ۱۲ = ۰$ و $y - ۲x + ۲ = ۰$ کدام است؟

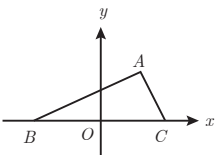
- (۱) $\sqrt{۵}$ (۲) $۲\sqrt{۳}$
(۳) ۴ (۴) $۲\sqrt{۵}$

۹. مساحت مثلث ABC برابر ۵ است. اگر $A(۲, -۱)$ و $B(-۲, ۲)$ باشد، رأس C روی کدام خط زیر قرار دارد؟

- (۱) $۳x - ۴y + ۱۲ = ۰$ (۲) $۳x + ۴y - ۱۲ = ۰$
(۳) $۳x - ۴y + ۸ = ۰$ (۴) $۳x + ۴y - ۸ = ۰$

۱۰. در شکل زیر، رأس قائم مثلث ABC است. اگر $OB = OC$ باشد، طول وتر BC کدام است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸
(۳) ۹ (۴) ۱۰



- ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۳ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

۱. به ازای کدام مقدار m معادله $x^2 + 4x + m^2 - 4 = 0$ دارای دو ریشه مختلف علامت است؟
 (۱) $(-2, 1) \cup (2, +\infty)$ (۲) $(-2, 2)$
 (۳) $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$
۲. ریشه کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کم‌تر است؟
 (۱) $x^2 - 3x + 1 = 0$ (۲) $x^2 + 3x + 1 = 0$
 (۳) $x^2 - 5x + 2 = 0$ (۴) $x^2 + 5x + 2 = 0$
۳. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 + (2-a)x + a - 3 = 0$ باشند به ازای کدام مقدار a رابطه $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 < 0$ همواره برقرار است؟
 (۱) $0 < a < 1$ (۲) $a < -1$
 (۳) $2 < a < 3$ (۴) $1 < a < 2$
۴. اگر معادله $x^2 - (m+2)x^2 + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد، مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟
 (۱) $m < -4$ (۲) $m > 4$
 (۳) $-4 < m < 4$ (۴) $4 < m < 9$
۵. راکتی به طور عمودی رو به بالا شلیک شده است. t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین با معادله $h(t) = 100t - 5t^2$ قرار می‌گیرد. ارتفاع نقطه اوج راکت کدام است؟
 (۱) ۴۰۰ (۲) ۳۵۰ (۳) ۴۵۰ (۴) ۵۰۰
۶. اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x - 3$ نسبت به خط $x = -2$ متقارن باشد، این منحنی محور x را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶
۷. خط به معادله $y = -\frac{5}{4}x$ محور تقارن منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟
 (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲
۸. به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ محور x را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟
 (۱) $m > 2$ (۲) $-1 < m < 2$
 (۳) هر مقدار m (۴) هیچ مقدار m
۹. اگر $x = 4$ یکی از جواب‌های معادله $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟
 (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) جواب دیگر ندارد.
۱۰. در معادله $x + \frac{2x-1}{x-4} = -2$ جواب‌ها چگونه‌اند؟
 (۱) دو جواب قرینه (۲) دو جواب وارون هم
 (۳) دو جواب مساوی (۴) فقط یک جواب قابل قبول

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۴ در صفحه ۷۸

۱. در معادله درجه دوم $6x^2 + (m+1)x + m = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه مثبت آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$
(۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۲. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می باشد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۳. ریشه های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیش تر است. b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۴. تعداد جواب های حقیقی معادله $x^6 + 10x^2 + 9 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۵. به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت است؟

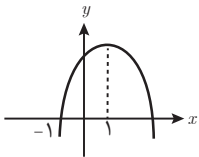
- (۱) $(-\infty, -4) - \{-5\}$ (۲) $(-\infty, -4)$
(۳) $(4, +\infty) - \{5\}$ (۴) $(4, +\infty)$

۶. اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x را در دو نقطه به طول های مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

ریاضی ۸۷

- (۱) $m > 3$ (۲) $3 < m < 4$
(۳) $3 < m < 5$ (۴) $4 < m < 5$

۷. شکل روبه روبرو نمودار تابع $y = -2x^2 + ax + b$ است. b کدام است؟



- (۱) ۳ (۲) ۴
(۳) ۵ (۴) ۶

۸. جواب های معادله $3x + 4 = \sqrt{x^2 + 6}$ چگونه است؟

- (۱) یک جواب منفی (۲) یک جواب مثبت
(۳) دو جواب منفی (۴) یک جواب مثبت، یک جواب منفی

۹. مجموع جواب های معادله $(x^2 - \frac{4}{x^2})(\frac{x}{3x+2}) = \frac{x^2+2}{x}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۰. در یک زمین گل خانه ای، اگر با فاصله یکسان، ۴۰ بوته گوجه فرنگی کاشته شود به طور متوسط از هر بوته ۸ کیلو محصول به دست می آید. به ازای هر بوته اضافی که کاشته شود، به مقدار $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین محصول بوته ها کاسته می شود. در این صورت بیش ترین محصول برداشتی کدام است؟

- (۱) ۳۳۶ (۲) ۳۳۸
(۳) ۳۴۰ (۴) ۳۴۲

- ۱ (۱) (۲) (۳) (۴) ۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۵ (۱) (۲) (۳) (۴) ۷ (۱) (۲) (۳) (۴) ۹ (۱) (۲) (۳) (۴)
۲ (۱) (۲) (۳) (۴) ۴ (۱) (۲) (۳) (۴) ۶ (۱) (۲) (۳) (۴) ۸ (۱) (۲) (۳) (۴) ۱۰ (۱) (۲) (۳) (۴)

۱. به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می‌باشد؟

تبریزی ۹۳

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱
(۳) $-\frac{9}{5}, 1$ (۴) $-\frac{9}{5}, 1, -1$

۲. یکی از جواب‌های کدام معادله زیر $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ می‌باشد؟

- (۱) $x^2 + 2x - \frac{1}{4} = 0$ (۲) $x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$
(۳) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ (۴) $4x^2 - 2x + 1 = 0$

۳. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x+3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به

ریاضی ۹۰

صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۹ (۳) ۲۸ (۴) ۳۱

۴. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{9}{x^2} + \frac{x^2}{4} + 6\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right) + 6 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۴ (۳) -۶ (۴) -۵

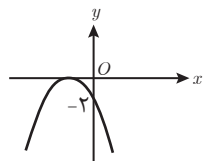
۵. به ازای چند عدد صحیح m نمودار تابع $f(x) = (1-m)x^2 + x + (m-2)$ از هر چهار ناحیه محور مختصات می‌گذرد؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) بی‌شمار

۶. اگر بیشترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۱

۷. شکل روبه‌رو، نمودار کدام تابع زیر است؟



- (۱) $y = -2x^2 + 4x - 2$ (۲) $y = -2x^2 - 4x - 2$
(۳) $y = -x^2 - 2x - 2$ (۴) $y = 2x^2 + 4x - 2$

۸. محور تقارن سهمی $y = \frac{1}{4}(x-2)(x+3)$ کدام است؟

- (۱) $x = \frac{1}{4}$ (۲) $x = \frac{5}{4}$
(۳) $x = -\frac{1}{4}$ (۴) $x = -\frac{5}{4}$

۹. جواب معادله $\sqrt{4x+5} = x$ ریشه معادله $x^2 - (m+2)x + 4m = 0$ است. مقدار m کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

۱۰. در یک کارگاه تولیدی، یکی از کارگران متعهد شده است که در پایان هر هفته ۸۰ قطعه با دستمزد هر قطعه ۴۵۰ تومان تحویل دهد. به

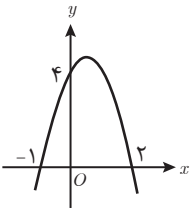
ازای هر قطعه اضافه بر تعهد، مبلغ ۵ تومان از دستمزد هر قطعه تحویلی کسر می‌شود. بیشترین دستمزد کارگر کدام است؟

- (۱) ۳۶۰۷۵ (۲) ۳۶۱۲۵ (۳) ۳۶۱۷۵ (۴) ۳۶۲۲۵

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۶ در صفحه ۸۲

۱. به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = mx + m - 3$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟
- (۱) $0 \leq m \leq 3$ (۲) $m \geq 3$
- (۳) $m \leq 0$ (۴) هیچ مقدار m
۲. مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادله‌های $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟
- (۱) ۵ (۲) ۶
- (۳) ۷ (۴) ۸
۳. نقاط $A(-1, 2)$ و $B(x_0, y_0)$ مفروض‌اند. اگر $x - y + 5 = 0$ معادله عمود منصف پاره خط AB باشد، فاصله نقطه B از مبدأ مختصات کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) $2\sqrt{3}$
- (۳) ۵ (۴) $2\sqrt{5}$
۴. اگر $A(3, 5)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رئوس مثلث ABC باشند، معادله میانه BM کدام است؟
- (۱) $2y = x + 6$ (۲) $2y = x + 4$
- (۳) $4y = x + 4$ (۴) $4y = x + 6$
۵. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟
- (۱) ۳/۵ (۲) ۴
- (۳) ۴/۵ (۴) ۵
۶. اگر $2\alpha - 1$ و $2\beta - 1$ ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1, \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟
- (۱) $x^2 + 16x - 23 = 0$ (۲) $x^2 - 16x + 23 = 0$
- (۳) $4x^2 + 16x - 23 = 0$ (۴) $4x^2 - 16x - 23 = 0$
۷. مجموع جواب‌های مثبت معادله $(x^2 - 4x)^2 - 2x^2 + 8x - 15 = 0$ کدام است؟
- (۱) ۶ (۲) ۷
- (۳) ۸ (۴) ۹
۸. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 5\beta^2 - 2\beta$ کدام است؟
- (۱) ۱۰۰ (۲) ۹۵
- (۳) ۹۰ (۴) ۸۵
۹. معادله سهمی شکل رو به رو کدام است؟
- (۱) $y = -x^2 + 2x + 4$ (۲) $y = 2x^2 - 2x - 4$
- (۳) $y = -2x^2 - 2x + 4$ (۴) $y = -2x^2 + 2x + 4$
۱۰. جواب بزرگ‌تر معادله $-1 = \frac{x+5}{x+4} - \frac{x}{x+2}$ چند برابر جواب معادله $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5$ است؟
- (۱) ۲ (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{3}$



۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۳	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

۱. نقاط $A(1, 2)$ ، $B(-1, 3)$ و $C(0, 1)$ رئوس مثلث ABC هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع BC کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (۲) $\frac{2}{\sqrt{5}}$
 (۳) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{5}}$

۲. نقاط $A(2m, m)$ و $B(m+3, m-4)$ دورأس مثلث ABC و معادله میانه نظیر رأس C خط $y = 5$ می باشد، مختصات وسط AB کدام است؟

- (۱) $(5, 9)$ (۲) $(5, 12)$
 (۳) $(9, 5)$ (۴) $(12, 5)$

۳. عرض از مبدأ خطی که از نقطه $(2, -3)$ موازی خط گذرنده بر دو نقطه $(1, 4)$ و $(-1, 5)$ رسم شود کدام است؟

- (۱) -4 (۲) -2
 (۳) 3 (۴) 4

۴. به ازای یک مقدار m ، ریشه های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟

- (۱) $-1/5$ (۲) $1/5$
 (۳) 2 (۴) 3

۵. کدام گزینه در مورد معادله $x^2 - 2x + 3)^2 + 4x^2 - 8x = 0$ صحیح است؟

- (۱) دو ریشه مختلف علامت دارد. (۲) دو ریشه متمایز مثبت دارد.
 (۳) یک ریشه مضاعف منفی دارد. (۴) یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

۶. به ازای کدام مقدار a نقطه مینیمم نمودار تابع با ضابطه $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + 5$ بر روی خط $y = 1$ واقع است؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$
 (۳) 1 (۴) 2

۷. نمودار تابع با ضابطه $y = x^2 - 3x - 10$ را حداقل چند واحد به طرف x های مثبت انتقال دهیم تا طول نقاط تلاقی نمودار حاصل با محور x ها غیر منفی باشد؟

تبدیلی خارج ۹۳

- (۱) 1 (۲) $1/5$
 (۳) 2 (۴) 3

۸. اگر m جواب معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 8(x + \frac{1}{x}) + 16 = 0$ باشد، حاصل $m^3 + \frac{1}{m^3}$ کدام است؟

- (۱) 48 (۲) 50
 (۳) 52 (۴) 56

۹. ریشه بزرگتر معادله $\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3$ چند برابر ریشه کوچکتر آن است؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۱۰. از بین مربع هایی که عدد مساحت آن از عدد محیط کم تر است، بیشترین مقدار فزونی عدد محیط از عدد مساحت کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

۱	(۱) (۲) (۳) (۴)	۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۵	(۱) (۲) (۳) (۴)	۷	(۱) (۲) (۳) (۴)	۹	(۱) (۲) (۳) (۴)
۲	(۱) (۲) (۳) (۴)	۴	(۱) (۲) (۳) (۴)	۶	(۱) (۲) (۳) (۴)	۸	(۱) (۲) (۳) (۴)	۱۰	(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ آزمون ۸ در صفحه ۸۷

بخش دوم

پاسخنامه تشریحی



پاسخنامه فصل اول

هندسه تحلیلی و جبر

پاسخنامه آزمون ۱ هندسه تحلیلی

۱. **روش اول:** چون نقاط A ، B و C روی یک خط قرار دارند، اگر شیب خط را به وسیله هر دو نقطه به دست آوریم، باید با هم برابر شوند. با توجه به این که فقط در مؤلفه‌های نقطه C مجهول وجود دارد پس بهتر است یکی از شیب‌هایی که به دست می‌آوریم، شیب خط AB باشد:

$$m_{AB} = m_{AC} \Rightarrow \frac{5-2}{3-4} = \frac{5-m}{3-2} \Rightarrow -3 = 5-m \Rightarrow m = 8$$

روش دوم: چون A ، B و C روی یک خط هستند پس مساحت مثلث ایجادشده توسط این سه نقطه صفر است:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} \Rightarrow S = \frac{1}{2} |(6+4m+10) - (3m+4+20)| \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} |16+4m-3m-24| \Rightarrow |m-8| = 0 \Rightarrow m = 8$$

۲. **روش ۱:** برای به دست آوردن قرینه نقطه A نسبت به خط d ، باید از A بر d عمود کرده تا نقطه H به دست آید. سپس A را نسبت به H قرینه کنیم. چون شیب خط $y-2x+1=0$ برابر ۲ است پس شیب خط گذرا از A و عمود بر آن برابر $-\frac{1}{2}$ می‌باشد. بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$y-2 = -\frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$$

حال نقطه H از تلاقی خط‌های $y = -\frac{1}{2}x + 4$ و $y - 2x + 1 = 0$ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases} \Rightarrow 2x - 1 = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 5 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow H(2, 3)$$

حال کافی است نقطه $A(4, 2)$ را نسبت به نقطه $H(2, 3)$ قرینه کنیم:

$$H = \frac{A+A'}{2} \Rightarrow 2H = A+A' \Rightarrow A' = 2H - A = (4, 6) - (4, 2) = (0, 4)$$

بنابراین فاصله نقطه $A'(0, 4)$ از مبدأ مختصات برابر $\sqrt{0^2 + 4^2} = 4$ می‌باشد.

۳. **روش ۱:** دو خط داده شده موازی‌اند. برای استفاده از فرمول فاصله، ابتدا ضرایب x و y را در دو خط یکسان می‌کنیم:

$$y = x\sqrt{3} + 2 \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \sqrt{3}y = 3x + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0$$

حال فاصله دو خط $\sqrt{3}y - 3x - 2\sqrt{3} = 0$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|6 - (-2\sqrt{3})|}{\sqrt{3+9}} = \frac{6+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{6+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} + 1 = \sqrt{3} + 1$$

۴. عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط d با هم برابرند، پس شیب خط d برابر است با:

$$m_d = -\frac{\text{عرض از مبدأ}}{\text{طول از مبدأ}} = -1$$

حال به کمک نقطه C معادله خط d را می نویسیم:

$$y - (-4) = -(x - 3) \Rightarrow y + 4 = -x + 3 \Rightarrow y + x + 1 = 0$$

فاصله مبدأ مختصات از خط d همان طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث رنگی می باشد. پس:

$$OH = \frac{|0 + 0 + 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

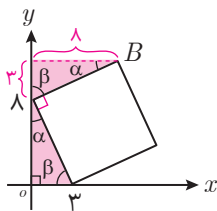
۵. به کمک رابطه مقابل داریم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(0+6+0) - (4+0+15)| = \frac{1}{2} |6-19| = \frac{13}{2} = 6.5$$

۶. از رأس B بر محور y ها عمودی رسم می کنیم. دو مثلث قائم الزاویه رنگی هم نهشت

هستند و در نتیجه اضلاع متناظر آنها برابرند. بنابراین مختصات نقطه B برابر $(8, 1)$ خواهد بود

و داریم:

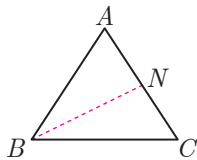


$$B \text{ مجموع مؤلفه های نقطه } B = 8 + 1 = 19$$

۷. با توجه به شکل مقابل داریم:

$$\Rightarrow M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow C = 2M - B = 2(2, 2) - (3, 5) = (4, 4) - (3, 5) = (1, -1)$$

میانه نظیر رأس B از وسط ضلع AC می گذرد پس:



$$N = \frac{A+C}{2} \Rightarrow N\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right) = (0, 3)$$

حال معادله خط گذرا از B و N را می نویسیم:

$$m_{BN} = \frac{5-3}{3-0} = \frac{2}{3} \Rightarrow BN: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 3$$

با توجه به گزینه ها BN از نقطه $(-3, 1)$ می گذرد زیرا $(-3, 1)$ در معادله $y = \frac{2}{3}x + 3$ صدق می کند.

۸. شیب خط گذرنده از نقاط $A(a-1, a+1)$ و $B(a+2, 2a)$ برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{2a - (a+1)}{a+2 - (a-1)} = \frac{a-1}{3}$$

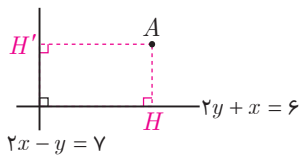
از طرفی شیب خط $1 = \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \frac{4x+y}{12}$ برابر $-\frac{4}{3}$ است. چون این دو خط بر هم عمودند پس حاصل ضرب شیب آنها باید برابر -1 شود:

$$\frac{a-1}{3} \times \frac{-4}{3} = -1 \Rightarrow \frac{a-1}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow a-1 = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{13}{4}$$

۹. با توجه به این که مختصات نقطه $A(8, 5)$ در معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$

صدق نمی کند، پس نحوه قرارگیری آنها به صورت مقابل است. بنابراین اگر

فاصله نقطه A تا دو خط را به دست آوریم، طول و عرض مستطیل به دست می آید:



$$AH = \frac{|2(5) + 8 - 6|}{\sqrt{4+1}} = \frac{12}{\sqrt{5}}, \quad AH' = \frac{|2(8) - 5 - 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$S = \frac{12}{\sqrt{5}} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9.6$$

بنابراین مساحت مستطیل برابر است با:

۱۰. **پرتله ۲** وقتی خطی با خط $2y - x = 4$ موازی است یعنی شیب آن نیز برابر $\frac{1}{2}$ است. حال که شیب و یک نقطه از خط را

داریم معادله آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 4$$

با توجه به گزینه‌ها فقط نقطه $(6, -1)$ در معادله $y = \frac{1}{2}x - 4$ صدق می‌کند.

پاسخنامه آزمون ۲ هندسه تحلیلی

۱. **پرتله ۱** فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است. پس:

$$r = \frac{|3(2) - 4(5) + 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-5|}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

مساحت دایره به شعاع r برابر πr^2 است پس مساحت این دایره برابر $\pi(1)^2 = \pi$ می‌باشد.

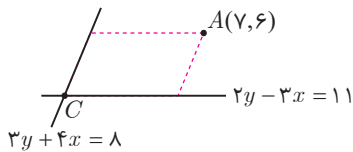
۲. **پرتله ۲** چون نقطه B روی خط $y = 2x - 6$ است پس مختصات B به صورت $B(\alpha, 2\alpha - 6)$ است. از طرفی چون

چهارضلعی $OABC$ مربع است، پس $BA = BC$ است. اندازه BA برابر $-y_B$ و اندازه BC برابر x_B است. پس:

$$BA = BC \Rightarrow -y_B = x_B \Rightarrow -(2\alpha - 6) = \alpha \Rightarrow -2\alpha + 6 = \alpha \Rightarrow 3\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2$$

بنابراین طول ضلع مربع برابر ۲ و مساحت آن برابر $S = 2^2 = 4$ است.

۳. **پرتله ۳** چون مختصات نقطه A در معادله هیچ کدام از دو خط $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ صدق نمی‌کند، پس وضعیت قرارگیری آن‌ها به صورت مقابل



است. حال کافی است نقطه تلاقی دو خط $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ را

به دست آوریم تا رأس C متوازی‌الاضلاع مشخص شود:

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} 6y - 9x = 33 \\ 6y + 8x = 16 \end{cases} \Rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C(-1, 4)$$

حال که مختصات دو سر قطر متوازی‌الاضلاع را داریم، مختصات وسط قطر را به دست می‌آوریم:

$$\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right) = \left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + 4}{2} \right) = (3, 5)$$

۴. **پرتله ۴** چون نقاط A و B روی خط $y = -2x + 5$ قرار دارند، پس مختصات آن‌ها به فرم $(\alpha, -2\alpha + 5)$ است. حال فاصله

این نقطه را از خط $3x + 4y = 10$ برابر ۲ قرار می‌دهیم تا α مشخص شود:

$$2 = \frac{|3\alpha + 4(-2\alpha + 5) - 10|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow 2 = \frac{|-5\alpha + 10|}{5} \Rightarrow 2 = \frac{5|-\alpha + 2|}{5} \Rightarrow |-\alpha + 2| = 2 \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2 = 2 \Rightarrow \alpha = 0 \\ -\alpha + 2 = -2 \Rightarrow \alpha = 4 \end{cases}$$

بنابراین $A(0, 5)$ و $B(4, -3)$ می‌باشند که طول پاره خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

۵. **پرتله ۱** ابتدا معادله خط گذرا از نقاط $A(3, -2)$ و $B(1, 2)$ را نوشته، سپس عرض از مبدأ خط را به دست می‌آوریم:

$$m_{AB} = \frac{2 - (-2)}{1 - 3} = -2 \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \xrightarrow[\text{عرض از مبدأ}]{x=0} y - 2 = -2(0 - 1) \Rightarrow y = 4$$

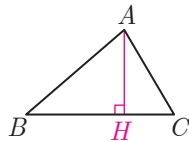
۶. مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را به دست می آوریم:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right) = \left(\frac{3t-3+t+1}{2}, \frac{t+3+(-3t+5)}{2}\right) = (2t-1, -t+4)$$

حال کافی است ارتباط بین x_M و y_M را به دست آوریم تا معادله خط مورد نظر مشخص شود:

$$M(2t-1, -t+4) \Rightarrow \begin{cases} x=2t-1 \Rightarrow t = \frac{x+1}{2} \\ y=-t+4 \Rightarrow t = 4-y \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2} = 4-y \Rightarrow x+1 = 8-2y \Rightarrow x+2y-7=0$$

۷. با توجه به شکل مقابل، برای نوشتن معادله ارتفاع AH باید مختصات نقطه A و شیب AH را داشته باشیم. دقت کنید که چون AH بر BC عمود است، پس شیب AH قرینه و عکس شیب BC است:

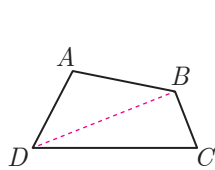


$$\begin{cases} AB: 2y-x=3 \\ AC: y-2x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y-2x=6 \\ y-2x=5 \end{cases} \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$BC: 2y+3x=6 \Rightarrow m_{BC} = \frac{-2}{3} \Rightarrow m_{AH} = \frac{3}{2}$$

حال معادله AH را می نویسیم: $y - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) \Rightarrow 2y - 2 = 3x + 2 \Rightarrow 3y - 2x = 4 \Rightarrow 9y - 6x = 12$

۸. یکی از قطرهای چهارضلعی $ABCD$ را رسم می کنیم تا به دو مثلث تبدیل شود. سپس مساحت هر یک از مثلثها را به دست می آوریم و باهم جمع می کنیم:



$$S_{ABD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{1}{2} |(1 \cdot 18 - 16) - (-3 \cdot 4 + 24)| = \frac{1}{2} |-33 - 17| = 25$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow S_{BCD} = \frac{1}{2} |(-30 - 24 - 4) - (-18 + 20 + 8)| = \frac{1}{2} |-58 - 10| = 34$$

$$S = 25 + 34 = 59$$

بنابراین مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با:

۹. شیب دسته خطوط داده شده برابر $\frac{-2k}{k+1}$ است. از طرفی شیب خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ برابر

$$\frac{3 - (-1)}{8 - 2} = \frac{4}{6}$$

است. حاصل ضرب شیبها را برابر -1 قرار می دهیم تا k مشخص شود:

$$\frac{-2k}{k+1} \times \frac{4}{6} = -1 \Rightarrow \frac{-2k}{k+1} = -\frac{6}{4} \Rightarrow 8k = 6k + 6 \Rightarrow k = 3$$

بنابراین خط مورد نظر به ازای $k = 3$ به دست می آید. با قرار دادن $k = 3$ در معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ داریم:

$$k = 3 \Rightarrow 4y + 6x - 2 = 0 \Rightarrow 2y + 3x = 1$$

با توجه به گزینهها خط $2y + 3x = 1$ از نقطه $(1, -1)$ می گذرد زیرا فقط $(1, -1)$ در معادله $2y + 3x = 1$ صدق می کند.

۱۰. ابتدا مختصات نقطه تلاقی خط $2y + 3x - 6 = 0$ و محور x ها را به دست می آوریم. این نقطه در معادله خط

$$3x - 2y + m = 0$$

نیز صدق می کند:

$$2y + 3x - 6 = 0 \xrightarrow[y=0]{\text{تلاقی با محور } x \text{ ها}} 2(0) + 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow A(2, 0)$$

حال نقطه $A(2, 0)$ را در خط $3x - 2y + m = 0$ جای گذاری می کنیم:

$$3x - 2y + m = 0 \xrightarrow{A(2, 0)} 3(2) - 2(0) + m = 0 \Rightarrow m = -6$$

۱. **پرسش ۳** وضعیت قرارگیری نقاط A و B به صورت شکل مقابل است. بنابراین شیب خط گذرنده از A و B برابر $\frac{3}{4} = \frac{-3}{-4} = \frac{\text{تفاوت عرضها}}{\text{تفاوت طولها}}$ است. از آنجایی که این خط محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۶ قطع می‌کند پس نقطه $(6, 0)$ یک نقطه از خط می‌باشد و داریم:

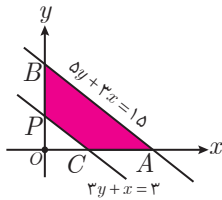
$$y - 0 = \frac{3}{4}(x - 6) \Rightarrow 4y = 3x - 18 \Rightarrow 4y - 3x = -18 \xrightarrow{x=0} 4y = -18 \Rightarrow y = \frac{-18}{4} = -4 \frac{1}{2}$$

۲. **پرسش ۴** ابتدا نقطه تلاقی دو خط $3y = 2x + 11$ و $2y + x = 5$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3y = 2x + 11 \\ 2y + x = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x = 11 \\ 4y + 2x = 10 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 7y = 21 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1, 3)$$

حال فاصله مبدأ مختصات یعنی $O(0, 0)$ را از نقطه $A(-1, 3)$ به دست می‌آوریم:

$$OA = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$



۳. **پرسش ۲** مساحت ناحیه رنگی شکل مقابل را می‌خواهیم، بنابراین باید مساحت مثلث OCD را

از مساحت مثلث OAB کم کنیم، برای این منظور عرض از مبدأ و طول از مبدأ هر کدام از خطوط را به دست می‌آوریم:

$$3y + x = 3 \xrightarrow{y=0} x = 3 \Rightarrow \text{طول از مبدأ} = 3 \quad \text{و} \quad 3y + x = 3 \xrightarrow{x=0} y = 1 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = 1$$

$$5y + 3x = 15 \xrightarrow{y=0} x = 3 \Rightarrow \text{طول از مبدأ} = 3 \quad \text{و} \quad 5y + 3x = 15 \xrightarrow{x=0} y = 3 \Rightarrow \text{عرض از مبدأ} = 3$$

$$S_{\text{رنگی}} = \frac{1}{2} |5 \times 3| - \frac{1}{2} |3 \times 1| = 6$$

بنابراین مساحت قسمت رنگی برابر است با:

۴. **پرسش ۴** شیب خط $y = (m - 3)x + 8$ برابر $m - 3$ و شیب خط $6y - 3mx + 11 = 0$ برابر $\frac{3m}{6} = \frac{m}{2}$ است چون این دو

$$m - 3 = \frac{m}{2} \Rightarrow \frac{m}{2} = 3 \Rightarrow m = 6$$

خط موازی اند داریم:

حال به ازای $m = 6$ معادله خط $2y - (m - 3)x + 12 = 0$ به صورت $2y - 3x + 12 = 0$ یا $y - x + 6 = 0$ می‌شود. می‌خواهیم

نزدیک‌ترین نقطه خط $y - x + 6 = 0$ را از نقطه $A(6, -6)$ بیابیم. با توجه به شکل مقابل نقطه H مدنظر سؤال است. بنابراین کافی است معادله AH را نوشته و با خط $y - x + 6 = 0$ تلاقی دهیم تا نقطه H به دست آید. شیب خط $y - x + 6 = 0$ برابر ۱ است، بنابراین شیب خط AH

$$AH: y - (-6) = -1(x - 6) \Rightarrow y = -x$$

برابر ۱- خواهد بود. به کمک نقطه A داریم:

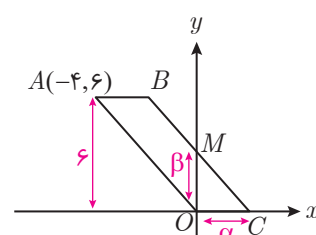
$$\begin{cases} y - x + 6 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow H(3, -3)$$

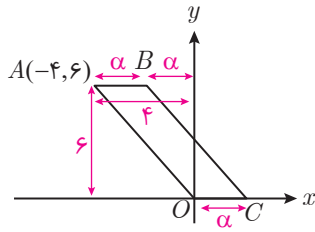
بنابراین مختصات نقطه H برابر است با:

۵. **پرسش ۲** با توجه به این که نقطه C روی محور x ها و نقطه M روی محور y ها است،

فرض می‌کنیم $C(\alpha, 0)$ و $M(0, \beta)$ باشد. با توجه به مختصات رأس A ، ارتفاع متوازی الاضلاع برابر ۶ است. چون M وسط BC است داریم:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow (0, \beta) = \frac{B + (\alpha, 0)}{2} \Rightarrow (0, 2\beta) = B + (\alpha, 0) \Rightarrow B(-\alpha, 2\beta)$$





می دانیم در متوازی الاضلاع، اضلاع روبه‌رو برابرند. با توجه به مختصات نقاط A و

$$2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$$

B ، اندازه‌ها به صورت مقابل هستند و داریم:

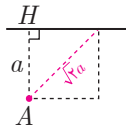
بنابراین مساحت متوازی الاضلاع برابر است با:

$$S = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = 2 \times 6 = 12$$

۶. مختصات رأس A در معادله خط $y = x + 2$ صدق نمی‌کند. پس وضعیت

قرارگیری آن‌ها به صورت مقابل است:

فاصله نقطه A از خط $y - x - 2 = 0$ برابر طول ضلع مربع است، پس:



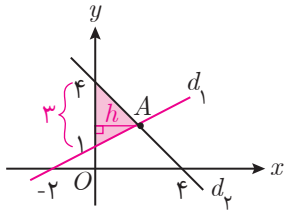
$$AH = a = \frac{|-1 - 3 - 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

طول قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است، پس طول قطر مربع برابر $\sqrt{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} = 6$ است.

۷. ابتدا معادله دو خط d_1 و d_2 را می‌نویسیم. طول از مبدأ و عرض از مبدأ هر دو خط را داریم. پس:

$$d_1: \frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1 \Rightarrow x - 2y = -2$$

$$d_2: \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \Rightarrow x + y = 4$$



حال از تلاقی دو خط d_1 و d_2 مختصات نقطه A را به دست می‌آوریم. طول نقطه A برابر ارتفاع مثلث رنگی است:

$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(-)} \begin{cases} x - 2y = -2 \\ -3y = -6 \end{cases} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow h = 2$$

$$S = \frac{1}{2} \times \text{قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$$

بنابراین مساحت مثلث رنگی برابر است با:

۸. ابتدا ضرایب x و y را در دو خط موازی یکسان می‌کنیم:

$$\begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ 2x + my - 12 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ -my - 2x + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|2 - 12|}{\sqrt{2 + (-2)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

۹. فرض می‌کنیم $C(x, y)$ باشد. پس:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ x & y \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} |(4 - 2y - x) - (2y + 2x + 2)| \Rightarrow 10 = |-4y - 3x + 2|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4y - 3x + 2 = 10 \Rightarrow -4y - 3x - 8 = 0 \Rightarrow 4y + 3x + 8 = 0 \\ -4y - 3x + 2 = -10 \Rightarrow -4y - 3x + 12 = 0 \Rightarrow 4y + 3x - 12 = 0 \end{cases}$$

همان‌طور که می‌بینید $4y + 3x - 12 = 0$ در گزینه‌ها وجود دارد.

۱۰. چون O وسط وتر BC است پس AO میانه وارد بر وتر مثلث ABC است. طول AO را به دست می‌آوریم:

$$AO = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

می‌دانیم میانه وارد بر وتر، نصف وتر است. پس $BC = 2 \times 5 = 10$ می‌باشد.

۱. **بژه ۱** چون دو ریشه معادله مختلف‌العلامت هستند، پس $P = \frac{c}{a} < 0$ است:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m^2 - 4}{1 - m} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} m & -2 & 1 & 2 \\ \hline \text{عبارت} & + & - & + \\ & \circ & \circ & \circ \\ & - & + & - \end{array} \Rightarrow (-2, 1) \cup (2, +\infty)$$

۲. **بژه ۲** فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ هستند. باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌اش $\frac{1}{\alpha} - 1$ و $\frac{1}{\beta} - 1$ باشند. بنابراین داریم:

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{-3}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

حال باید P و S معادله جدید را به دست آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} - 1 + \frac{1}{\beta} - 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} - 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} - 2 = -3 - 2 = -5$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\left(\frac{1}{\beta} - 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) + 1 = \frac{1}{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + 1 = -2 - (-3) + 1 = 2$$

بنابراین معادله جدید به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-5)x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0$$

۳. **بژه ۳** رابطه $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ رابطه‌ای متقارن بر حسب x_1 و x_2 (ریشه‌های معادله) است پس می‌توان آن را بر حسب S و P نوشت:

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = PS$$

$$PS < 0 \Rightarrow \left(\frac{a-3}{1}\right)\left(-\frac{2-a}{1}\right) < 0 \Rightarrow (a-3)(a-2) < 0 \Rightarrow 2 < a < 3$$

پس باید $PS < 0$ باشد. لذا داریم:

۴. **بژه ۴** ابتدا فرض می‌کنیم $x = t$ است. پس معادله داده شده به معادله درجه دوم $t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0$ تبدیل می‌شود. برای این که معادله $x^2 - (m+2)x + m + 5 = 0$ دارای ۴ ریشه حقیقی متمایز باشد باید معادله $t^2 - (m+2)t + m + 5 = 0$ دو ریشه حقیقی متمایز مثبت داشته باشد. پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-(m+2))^2 - 4(1)(m+5) > 0 \Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0 \Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4$$

$$S > 0 \Rightarrow -\frac{-(m+2)}{1} > 0 \Rightarrow m+2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

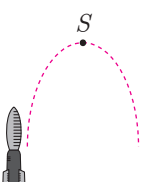
$$P > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m > -5$$

از اشتراک مقادیر به دست آمده برای m ، مقادیر قابل قبول $m > 4$ می‌باشد.

۵. **بژه ۵** با توجه به معادله $h(t) = 100t - 5t^2$ درمی‌یابیم که مسیر حرکت راکت یک سهمی رو به پایین

است. بنابراین ارتفاع نقطه اوج راکت همان y رأس سهمی می‌باشد. پس:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-((100)^2 - 4(-5)(0))}{4(-5)} = \frac{10000}{20} = 500$$



۶. چون $x=2$ محور تقارن سهمی است پس طول رأس سهمی برابر ۲- می باشد. بنابراین داریم:

$$-2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -2 = -\frac{1}{2(a-1)} \Rightarrow 4(a-1) = 1 \Rightarrow a-1 = \frac{1}{4}$$

پس معادله سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 3$ می باشد. حال ریشه های سهمی را به دست می آوریم:

$$\frac{1}{4}x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x+6)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \end{cases}$$

بنابراین سهمی محور x ها را با طول مثبت ۲ قطع می کند.

۷. تابع به معادله $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$ معادله یک سهمی است. چون خط $y = -\frac{5}{4}$ محور تقارن سهمی را روی خود سهمی قطع می کند، پس این نقطه، رأس سهمی است. بنابراین عرض رأس سهمی برابر $-\frac{5}{4}$ است:

$$-\frac{5}{4} = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow -\frac{5}{4} = \frac{-(9-4(\frac{1}{4})(a))}{4(\frac{1}{4})} \Rightarrow -\frac{5}{4} = \frac{-9+2a}{2} \Rightarrow -9+2a = -5 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

۸. منحنی $y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$ یک سهمی است. چون محور x ها را در دو نقطه به طول های منفی قطع می کند پس داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 48m + 96 > 0 \Rightarrow m^2 - 10m + 25 > 0$$

$$\Rightarrow (m-5)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 5$$

$$S < 0 \Rightarrow -\frac{-2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

اشتراک مقادیر به دست آمده برای m تهی است، پس هیچ مقداری برای m وجود ندارد.

۹. می دانیم ریشه معادله در معادله صدق می کند. پس با قرار دادن $x=4$ در معادله مقدار a را به دست می آوریم:

$$4+a = \sqrt{\Delta(4)-4^2} \Rightarrow 4+a = \sqrt{20-16} \Rightarrow 4+a = \sqrt{4} \Rightarrow 4+a = 2 \Rightarrow a = -2$$

حال معادله $x-2 = \sqrt{5x-x^2}$ را حل می کنیم:

$$x-2 = \sqrt{5x-x^2} \Rightarrow (x-2)^2 = 5x-x^2 \Rightarrow x^2-4x+4 = 5x-x^2 \Rightarrow 2x^2-9x+4 = 0$$

$$\Delta = 81-4(2)(4) = 49 \Rightarrow x = \frac{9 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{2}$ را در معادله جای گذاری می کنیم تا ببینیم در معادله صدق می کند یا خیر. به ازای $x = \frac{1}{2}$ سمت چپ تساوی منفی می شود

پس معادله به جز $x=4$ ریشه دیگری ندارد.

توجه کنید که می توانستیم بعد از به دست آوردن مقدار a ، گزینه ها را در معادله جای گذاری کنیم تا ببینیم می توانند ریشه دیگر معادله باشند یا خیر.

 ۱۰. **پایه ۱** طرفین معادله را در $(x-4)$ ضرب می‌کنیم:

$$x(x-4)+2x-1=-2(x-4) \Rightarrow x^2-4x+2x-1=-2x+8 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

و $x=3$ و $x=-3$ مخرج کسر $\frac{2x-1}{x-4}$ را صفر نمی‌کنند. پس هر دو قابل قبول هستند. یعنی معادله دارای دو ریشه قرینه است.

پاسخنامه آزمون ۵ معادله درجه دوم و تابع درجه دو

 ۱. **پایه ۲** چون مجموع دو ریشه معادله $\frac{1}{6}$ است یعنی $-\frac{b}{a}=\frac{1}{6}$ است. بنابراین داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{6} \Rightarrow -\frac{m+1}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow -(m+1) = 1 \Rightarrow m+1 = -1 \Rightarrow m = -2$$

حال به ازای $m = -2$ معادله به صورت $6x^2 - x - 2 = 0$ می‌شود و داریم:

$$\Delta = (-1)^2 - 4(6)(-2) = 49 \Rightarrow \alpha, \beta = \frac{1 \pm 7}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \quad \beta = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

 ۲. **پایه ۴** اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ باشند، با توجه به این که در صورت سؤال گفته

شده $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2$ است داریم:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = 4 \Rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 4 \quad (*)$$

حال $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را از معادله $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{\lambda} = 0$ به دست آورده و در رابطه (*) جای گذاری می‌کنیم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{-(m+1)}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{m+1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{2} = \frac{1}{2\lambda}$$

با جای گذاری $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ در رابطه (*) داریم:

$$\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2\lambda}} = 4 \Rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 4 \Rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 \Rightarrow m+2 = 8 \Rightarrow m = 6$$

 ۳. **پایه ۲** فرض می‌کنیم α و β ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ باشند. پس:

$$\alpha + \beta = -\frac{7}{3}, \quad \alpha\beta = \frac{1}{3}$$

حال باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\alpha + 1$ و $\beta + 1$ باشند. بنابراین S و P معادله جدید را به دست می‌آوریم:

$$S = \alpha + 1 + \beta + 1 = \alpha + \beta + 2 = -\frac{7}{3} + 2 = -\frac{1}{3}$$

$$P = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = \frac{1}{3} + (-\frac{7}{3}) + 1 = -1$$

بنابراین معادله مطلوب به صورت زیر است:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - (-\frac{1}{3})x + (-1) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$$

با مقایسه معادله $x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$ با معادله $x^2 + ax + b = 0$ مقدار $b = -1$ است.

 ۴. **پایه ۱** با فرض $x^2 = t$ معادله $x^2 + 10x^2 + 9 = 0$ به معادله درجه دوم $t^2 + 10t + 9 = 0$ تبدیل می‌شود. حال ریشه‌های

معادله $t^2 + 10t + 9 = 0$ را به دست می‌آوریم:

$$t^2 + 10t + 9 = 0 \Rightarrow (t+1)(t+9) = 0 \Rightarrow t = -1, t = -9$$

چون هر دو مقدار t منفی شده است، پس هیچ جوابی برای x پیدا نمی‌شود.

۵. ابتدا معادله $x^2 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4$ را ساده تر می کنیم تا شاید بتوانیم از دل آن یک معادله درجه دوم استخراج کنیم:

$$x^2 + (a-1)x^2 + (4-a)x = 4 \rightarrow x^2 + ax^2 - x^2 + 4x - ax - 4 = 0 \Rightarrow \underline{x^2 - x^2} + \underline{ax^2 - ax} + \underline{4x - 4} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}} x^2(x-1) + ax(x-1) + 4(x-1) = 0 \xrightarrow[\text{فاکتور می گیریم}]{(x-1)} (x-1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

واضح است که یک ریشه معادله $x=1$ است. برای آن که معادله دارای سه ریشه حقیقی متمایز باشد باید معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ نیز دو ریشه حقیقی متمایز مثبت داشته باشد. پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 4(1)(4) > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{4}{1} > 0 \Rightarrow 4 > 0$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0$$

اشتراک مقادیر به دست آمده برای a برابر $a < -4$ است، دقت کنید فقط $x=1$ نباید ریشه معادله $x^2 + ax + 4 = 0$ باشد، چون جواب های معادله باید متمایز باشند:

$$x=1 \Rightarrow (1)^2 + a(1) + 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq -5$$

بنابراین مقادیر a به صورت $(-\infty, -4) - \{-5\}$ می باشد.

۶. منحنی $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ یک سهمی است. چون محور x ها را در دو نقطه به طول های مثبت قطع می کند. پس در معادله $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ باید $\Delta > 0$ ، $P > 0$ و $S > 0$ باشد پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 16 - 4(2)(m-3) > 0 \xrightarrow{(\neq 1)} 2 - (m-3) > 0 \Rightarrow m-3 < 2 \Rightarrow m < 5$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{m-3}{2} > 0 \Rightarrow m-3 > 0 \Rightarrow m > 3$$

$$S > 0 \Rightarrow -\frac{-4}{2} > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

اشتراک مقادیر به دست آمده برای m به صورت $3 < m < 5$ می باشد.

۷. **روش اول:** چون خط $x=1$ محور تقارن سهمی و یکی از ریشه ها $x=-1$ که دو واحد کم تر از ۱ است پس ریشه دیگر دو واحد بیش تر از یک بوده و برابر $x=3$ می باشد. حال چون b را می خواهیم کافی است حاصل ضرب ریشه ها یعنی P را به دست آوریم:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow -1 \times 3 = \frac{b}{-2} \Rightarrow -3 = \frac{b}{-2} \Rightarrow b = 6$$

روش دوم: با توجه به شکل یک ریشه سهمی $x=-1$ است، پس $x=-1$ در معادله $-2x^2 + ax + b = 0$ صدق می کند:

$$-2(-1)^2 + a(-1) + b = 0 \Rightarrow -a + b = 2$$

$$1 = -\frac{\text{ضریب } x}{2(\text{ضریب } x^2)} \Rightarrow 1 = -\frac{a}{2(-2)} \Rightarrow a = 4$$

از طرفی طول رأس سهمی برابر ۱ است. پس:

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow b = 6$$

بنابراین داریم:

۸. طرفین معادله را به توان ۲ می رسانیم و داریم:

$$3x+4 = \sqrt{x^2+6} \Rightarrow (3x+4)^2 = x^2+6 \Rightarrow 9x^2+24x+16 = x^2+6 \Rightarrow 8x^2+24x+10=0$$

$$\Delta = (24)^2 - 4(8)(10) = 576 - 320 = 256 \Rightarrow x = \frac{-24 \pm 16}{16} \Rightarrow x = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}, \quad x = \frac{-40}{16} = -\frac{5}{2}$$

با قرار دادن $x = -\frac{5}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$ در معادله داریم:

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} + 4 = \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \Rightarrow \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$x = -\frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{15}{2} + 4 = \sqrt{\frac{25}{4} + 6} \Rightarrow \text{منفی}$$

بنابراین معادله دارای یک جواب منفی است.

۹. ابتدا معادله $(x^2 - \frac{4}{x^2})(\frac{x}{3x+2}) = \frac{x^2+2}{x}$ را ساده‌تر کنیم:

$$(x^2 - \frac{4}{x^2})(\frac{x}{3x+2}) = \frac{x^2+2}{x} \Rightarrow (x - \frac{2}{x})(x + \frac{2}{x})(\frac{x}{3x+2}) = \frac{x^2+2}{x} \Rightarrow (x - \frac{2}{x})(\frac{x}{3x+2}) = 1$$

حال طرفین معادله را در $x(3x+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$(x^2 - 2)(x) = x(3x+2) \Rightarrow x^3 - 2x = 3x^2 + 2x \Rightarrow x^3 - 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4, x = -1$$

هر دو ریشه، مخرج هیچ کدام از کسرها را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول هستند. پس مجموع ریشه‌ها برابر $4 + (-1) = 3$ است.

۱۰. مقدار محصول برداشتی برابر حاصل ضرب تعداد بوته‌ها در میانگین محصول هر بوته است. از طرفی گفته شده اگر x بوته اضافه شود، به ازای هر بوته $\frac{1}{8}$ کیلو از میانگین محصول بوته‌ها کاسته می‌شود پس در این حالت تعداد بوته‌ها $x + 40$ و میانگین $(8 - \frac{1}{8}x)$ خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\text{کل محصول} = (40+x)(8 - \frac{x}{8}) = 320 - 5x + 8x - \frac{1}{8}x^2 = -\frac{1}{8}x^2 + 3x + 320$$

همان‌طور که می‌بینید معادله به‌دست آمده مربوط به یک سهمی رو به پایین است. پس بیش‌ترین مقدار که همان عرض رأس سهمی می‌باشد برابر است با:

$$\text{بیش‌ترین محصول} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(9 - 4(-\frac{1}{8})(320))}{4(-\frac{1}{8})} = \frac{-169}{-\frac{1}{2}} = 338$$

پاسخنامه آزمون ۶ معادله درجه دوم و تابع درجه دو

۱. اگر α و β ریشه‌های معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ باشند، طبق فرض سؤال $\alpha^2 + \beta^2 = 6$ است. چون

$\alpha^2 + \beta^2$ رابطه‌ای متقارن برحسب ریشه‌های معادله است پس می‌توان آن را برحسب S و P نوشت:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \Rightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 6 \Rightarrow S^2 - 2P = 6$$

حال از معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ مقادیر S و P را به‌دست می‌آوریم و در $S^2 - 2P = 6$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S = -\frac{-(m+3)}{m} = \frac{m+3}{m}, \quad P = \frac{5}{m} \xrightarrow{S^2 - 2P = 6} \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \xrightarrow{(\times m^2)} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$$

چون مجموع ضرایب معادله $5m^2 + 4m - 9 = 0$ برابر صفر است، پس یک ریشه ۱ و دیگری $\frac{c}{a} = -\frac{9}{5}$ است. حال باید بررسی

کنیم که آیا به ازای $m = 1$ و $m = -\frac{9}{5}$ معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ دارای دو ریشه است یا خیر:

$$m = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(1)(5) < 0 \Rightarrow \text{معادله ریشه ندارد.}$$

با توجه به گزینه‌ها $m = -\frac{9}{5}$ حتماً جواب سؤال است.

۲ در معادله با ضرایب گویا اگر یک ریشه $m + \sqrt{n}$ باشد، ریشه دیگر $m - \sqrt{n}$ است. با توجه به گزینه‌ها می‌بینیم که ضرایب تمام معادلات، گویا هستند پس ریشه دیگر معادله حتماً $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ است و داریم:

$$S = \frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$P = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{4-3}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

۳ ابتدا مقادیر $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ را در معادله $x(\Delta x + 3) = 2$ به دست می‌آوریم:

$$x(\Delta x + 3) = 2 \Rightarrow \Delta x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{3}{\Delta} \\ \alpha\beta = \frac{-2}{\Delta} \end{cases}$$

حال S و P را در معادله‌ای که ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha^2}$ و $\frac{1}{\beta^2}$ است به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{\left(-\frac{3}{\Delta}\right)^2 - 2\left(\frac{-2}{\Delta}\right)}{\left(\frac{-2}{\Delta}\right)^2} = \frac{\frac{9}{\Delta^2} + \frac{4}{\Delta}}{\frac{4}{\Delta^2}} = \frac{\frac{9}{\Delta} + \frac{4}{1}}{\frac{4}{\Delta}} = \frac{29}{4}$$

$$P = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2\beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{\left(\frac{-2}{\Delta}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{\Delta^2}} = \frac{\Delta^2}{4}$$

بنابراین معادله مطلوب به صورت $x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{\Delta^2}{4} = 0$ است. با مقایسه با معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ کافی است طرفین معادله را در ۴ ضرب کنیم:

$$x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{\Delta^2}{4} = 0 \xrightarrow{(\times 4)} 4x^2 - 29x + 25 = 0 \xrightarrow{4x^2 - kx + 25 = 0} k = 29$$

۴ ابتدا معادله را برحسب $\frac{x}{y} - \frac{3}{x}$ مرتب می‌کنیم:

$$\frac{9}{x^2} + \frac{x^2}{4} + 6\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right) + 6 = 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right) + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{3}{x}\right) + 6\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right) + 6 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right)^2 + 3 + 6\left(\frac{x}{y} - \frac{3}{x}\right) + 6 = 0$$

با فرض $t = \frac{x}{y} - \frac{3}{x}$ معادله به یک معادله درجه دوم تبدیل می‌شود:

$$t^2 + 3 + 6t + 6 = 0 \Rightarrow t^2 + 6t + 9 = 0 \Rightarrow (t+3)^2 = 0 \Rightarrow t = -3$$

بنابراین $\frac{x}{y} - \frac{3}{x} = -3$ است، پس داریم:

$$\frac{x}{y} - \frac{3}{x} = -3 \xrightarrow{(\times 2x)} x^2 - 6 = -6x \Rightarrow x^2 + 6x - 6 = 0 \Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = -6$$

۵ برای آن که یک سهمی از هر چهار ناحیه محورهای مختصات بگذرد باید یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی داشته باشد. برای این منظور کافی است $\frac{c}{a} < 0$ باشد، پس:

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{1-m} < 0 \Rightarrow m < 1 \text{ یا } m > 2 \Rightarrow \text{بی‌شمار مقدار صحیح برای } m \text{ وجود دارد.}$$

دقت کنید در این حالت نیازی به بررسی مثبت بودن Δ نیست، چون a و c مختلف‌العلامت هستند، قطعاً $\Delta > 0$ است.

پ **توجه**

 تابع $f(x)$ یک تابع درجه دوم است. بیشترین مقدار تابع همان عرض رأس سهمی می‌باشد. پس:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow 0 = \frac{-(16 - 4(k+3)(k))}{4(k+3)} \Rightarrow 16 - 4(k^2 + 3k) = 0 \Rightarrow 4 - (k^2 + 3k) = 0$$

$$\Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0 \Rightarrow (k+4)(k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = -4 \\ k = 1 \end{cases}$$

$k=1$ غیرقابل قبول است زیرا به ازای $k=1$ ضریب x^2 بزرگ‌تر از صفر می‌شود و سهمی رو به بالا خواهد بود که دارای بیشترین مقدار نخواهد بود.

پ **توجه**

 چون سهمی رو به پایین است پس باید ضریب x^2 منفی باشد. پس گزینه «۴» نادرست است. از طرفی طول رأس

سهمی منفی است، پس $-\frac{b}{2a}$ باید منفی باشد که در گزینه «۱» این چنین نیست، زیرا طول رأس سهمی $y = -2x^2 + 4x - 2$

برابر $x_S = -\frac{4}{2(-2)} = 1$ است. چون سهمی بر محور x مماس است باید $\Delta = 0$ باشد. بنابراین Δ سهمی‌های گزینه‌های «۲»

و «۳» را چک می‌کنیم:

$$۲) y = -2x^2 - 4x - 2 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-2)(-2) = 16 - 16 = 0$$

$$۳) y = -x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4$$

بنابراین گزینه «۲» صحیح است.

س **توجه**

$x = -3$ و $x = 2$ ریشه‌های سهمی $y = \frac{1}{2}(x-2)(x+3)$ هستند. پس:

$$x = x_S = \frac{2 + (-3)}{2} = -\frac{1}{2}$$

س **توجه**

ابتدا جواب معادله $\sqrt{4x+5} = x$ را به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{4x+5} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x+5 = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ سمت راست تساوی را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست. بنابراین جواب معادله $x = 5$ است. حال چون گفته شده

$x = 5$ ریشه معادله $x^2 - (m+2)x + 4m = 0$ است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$25 - (m+2)(5) + 4m = 0 \Rightarrow 25 - 5m - 10 + 4m = 0 \Rightarrow m = 15$$

پ **توجه**

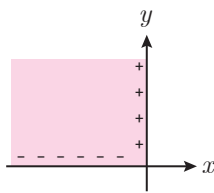
اگر کارگر x قطعه اضافه تحویل دهد یعنی $(80+x)$ قطعه تحویل دهد، $5x$ تومان از دستمزد هر قطعه تحویلی توسط

وی کم می‌شود یعنی دستمزد هر قطعه $(450 - 5x)$ خواهد شد. بنابراین میزان دستمزد کارگر برابر است با:

$$\text{دستمزد} = (80+x)(450-5x) = 36000 - 400x + 450x - 5x^2 = -5x^2 + 50x + 36000$$

بنابراین تابع دستمزد کارگر یک تابع درجه دوم است. بیشترین مقدار تابع همان عرض رأس سهمی است. پس:

$$\text{بیشترین دستمزد} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{50^2 - 4(-5)(36000)}{4(-5)} = -\frac{2500 + 720000}{-20} = \frac{722500}{20} = 36125$$



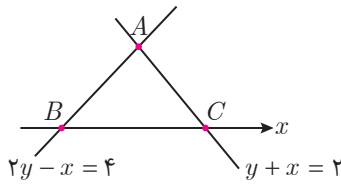
۱. برای آن که خط $y = mx + m - 3$ از ناحیه دوم نگذرد، باید طول از مبدأ خط منفی و عرض از مبدأ آن مثبت نباشد. ابتدا طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط را به دست می آوریم:

$$y = mx + m - 3 \xrightarrow[y=0]{\text{طول از مبدأ}} 0 = mx + m - 3 \Rightarrow x = \frac{3-m}{m}$$

$$y = mx + m - 3 \xrightarrow[x=0]{\text{عرض از مبدأ}} y = m(0) + m - 3 \Rightarrow y = m - 3$$

حال باید $\frac{3-m}{m} \geq 0$ و $m - 3 \leq 0$ باشند پس:

$$\begin{cases} \frac{3-m}{m} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq m \leq 3 \\ m - 3 \leq 0 \Rightarrow m \leq 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 0 \leq m \leq 3$$



۲. با توجه به شکل مقابل، باید نقاط A ، B و C را پیدا کنیم. می دانیم معادله محور x ها برابر $y = 0$ می باشد. پس:

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ 2y - x = 4 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0, 2)$$

$$\begin{cases} y + x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C(2, 0), \quad \begin{cases} 2y - x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \Rightarrow B(-4, 0)$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(0+0-8) - (0+0+4)| = \frac{1}{2} |-12| = 6$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

۳. عمودمنصف پاره خط AB ، در وسط پاره خط بر آن عمود است. پس اولاً مختصات وسط پاره خط AB در معادله عمودمنصف صدق می کند. ثانیاً شیب عمودمنصف، قرینه و عکس شیب پاره خط AB است:

$$M = \frac{A+B}{2} \Rightarrow M\left(\frac{x_0-1}{2}, \frac{y_0+2}{2}\right) \xrightarrow{\text{بای کزری}} \frac{x_0-1}{2} - \left(\frac{y_0+2}{2}\right) + 5 = 0 \Rightarrow x_0 - y_0 + 7 = 0$$

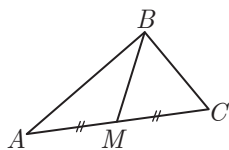
$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-y_0}{-1-x_0} \Rightarrow \frac{2-y_0}{-1-x_0} \times 1 = -1 \Rightarrow 2-y_0 = 1+x_0 \Rightarrow x_0 + y_0 = 1 \\ m_{\text{عمودمنصف}} = 1 \end{cases}$$

حال کافی است دو تساوی اخیر را در یک دستگاه حل کنیم تا نقطه B معلوم شود:

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = -7 \\ x_0 + y_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x_0 = -6 \Rightarrow x_0 = -3, y_0 = 4 \Rightarrow B(-3, 4)$$

فاصله نقطه B از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OB = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



۴. با توجه به شکل مقابل، M وسط ضلع AC است. پس:

$$M = \frac{A+C}{2} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = (2, 2)$$

حال معادله خط گذرا از دو نقطه $M(2, 2)$ و $B(-2, 1)$ را می نویسیم:

$$m_{BM} = \frac{1-2}{-2-2} = \frac{1}{4} \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \xrightarrow{(\times 4)} 4y - 8 = x - 2 \Rightarrow 4y = x + 6$$

۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + 9 = 0$ باشند، آن‌گاه طبق فرض مسئله $\alpha = 2\beta$ است.

مثال ۳

$$\alpha\beta = \frac{9}{2} \xrightarrow{\alpha=2\beta} 2\beta \times \beta = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \pm \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ریشه مثبت}} \beta = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

بنابراین مجموع ریشه‌های مثبت این معادله $3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ است.

۶. ابتدا در معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

مثال ۲

$$(2\alpha - 1) + (2\beta - 1) = -\frac{-3}{2} \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = \frac{5}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{5}{4}$$

$$(2\alpha - 1)(2\beta - 1) = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow 4\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 1 = -2 \xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{5}{4}} \alpha\beta = \frac{1}{8}$$

حال باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{1}{\alpha} + 1$ و $\frac{1}{\beta} + 1$ باشند. پس S و P این معادله را به دست می‌آوریم:

$$S = \frac{1}{\alpha} + 1 + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{8}} + 2 = 10 + 2 = 12$$

$$P = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{8}} + \frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{8}} + 1 = 8 + 10 + 1 = 19$$

بنابراین معادله مورد نظر به صورت $x^2 - 12x + 19 = 0$ است.

۷. ابتدا معادله $(x^2 - 4x)^2 - 2x^2 + 8x - 15 = 0$ را به صورت $(x^2 - 4x)^2 - 2(x^2 - 4x) - 15 = 0$ بازنویسی

مثال ۴

می‌کنیم. حال با فرض $x^2 - 4x = t$ داریم:

$$t^2 - 2t - 15 = 0 \Rightarrow (t - 5)(t + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -1 \end{cases}$$

بنابراین حالات مقابل را داریم:

$$x^2 - 4x = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

مجموع جواب‌های مثبت معادله برابر $5 + 1 + 3 = 9$ می‌باشد.

۸. چون عبارت $\alpha^3 + 5\beta^2 - 2\beta$ رابطه‌ای نامتقارن بر حسب ریشه‌های معادله است، پس نمی‌توانیم آن را بر حسب S

مثال ۲

و P بنویسیم. با توجه به این عبارت و خود معادله، کافی است β را در معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ جایگذاری کنیم، در این صورت

$\beta^2 - 5\beta + 2 = 0$ خواهد بود. پس داریم:

$$\beta^2 - 5\beta + 2 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 5\beta - 2 \xrightarrow{(\times\beta)} \beta^3 = 5\beta^2 - 2\beta$$

بنابراین عبارت $\alpha^3 + 5\beta^2 - 2\beta$ به رابطه متقارن $\alpha^3 + \beta^3$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS = (5)^3 - 3(2)(5) = 125 - 30 = 95$$

۹. ریشه‌های سهمی $x = 2$ و $x = -1$ هستند پس معادله آن به فرم $y = a(x+1)(x-2)$ است. چون سهمی محور

مثال ۴

y را با عرض ۴ قطع می‌کند پس نقطه $(0, 4)$ در معادله سهمی صدق می‌کند:

$$y = a(x+1)(x-2) \Rightarrow 4 = a(0+1)(0-2) \Rightarrow 4 = -2a \Rightarrow a = -2$$

بنابراین معادله سهمی به صورت $y = -2(x+1)(x-2)$ یا همان $y = -2x^2 + 2x + 4$ است.

۱.۰ **پژوه ۴** ابتدا جواب معادله $\frac{x+5}{x+4} - \frac{x}{x+2} = -1$ را به دست می آوریم. برای این منظور طرفین معادله را در $(x+4)(x+2)$

ضرب می کنیم:

$$\frac{x+5}{x+4} - \frac{x}{x+2} = -1 \Rightarrow (x+5)(x+2) - x(x+4) = -(x+4)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x + 10 - x^2 - 4x = -x^2 - 6x - 8 \Rightarrow x^2 + 9x + 18 = 0 \Rightarrow (x+6)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -3 \end{cases}$$

حال جواب معادله $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5$ را به دست می آوریم:

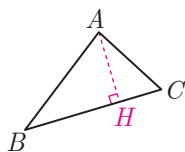
$$\sqrt{x-5} = 5 - \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} x - 5 = 25 - 10\sqrt{x} + x \Rightarrow 10\sqrt{x} = 30 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$$

بنابراین جواب بزرگتر معادله اولی یعنی -3 ، $-\frac{1}{3}$ برابر جواب معادله دومی یعنی 9 است.

پاسخنامه آزمون ۱ جامع ۲

۱. **پژوه ۳** **روش اول:** با توجه به شکل مقابل، کافی است فاصله نقطه A از خط گذرا از نقاط B و C

را به دست آوریم، پس ابتدا معادله خط BC را می نویسیم:



$$m_{BC} = \frac{1-3}{0-(-1)} = \frac{-2}{1} = -2 \Rightarrow BC: y-1 = -2(x-0) \Rightarrow y = -2x+1$$

حال فاصله نقطه $A(1,2)$ را از خط $y = -2x+1$ به دست می آوریم. ابتدا معادله خط را به صورت $y+2x-1=0$ می نویسیم و

$$AH = \frac{|2+2(1)-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{داریم:}$$

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(3-1+0) - (1+0-2)| = \frac{1}{2} |3| = \frac{3}{2} \quad \text{روش دوم: ابتدا مساحت مثلث } ABC \text{ را به دست می آوریم:}$$

$$BC = \sqrt{(-1-0)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad \text{حال طول ضلع } BC \text{ را به دست می آوریم:}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \times AH \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times AH \Rightarrow AH = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \text{بنابراین طول ارتفاع } AH \text{ برابر است با:}$$

۲. **پژوه ۴** میانه نظیر رأس C از وسط ضلع AB می گذرد. پس مختصات وسط AB در معادله میانه صدق می کند:

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{2m+m+3}{2}, \frac{m+m-4}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}m + \frac{3}{2}, m-2 \right)$$

چون معادله میانه $y=5$ است، پس $m-2=5$ در نتیجه $m=7$ خواهد بود. پس مختصات نقطه M وسط ضلع AB برابر $M(12,5)$ می باشد.

۳. **پژوه ۲** شیب خطی که موازی خط گذرنده بر دو نقطه $B(1,4)$ و $C(-1,5)$ است با شیب خط گذرنده از B و C برابر است،

پس:

$$m = m_{BC} = \frac{4-5}{1-(-1)} = \frac{-1}{2}$$

بنابراین معادله خط گذرنده از نقطه $A(2,-3)$ با شیب $-\frac{1}{2}$ به صورت زیر است که عرض از مبدأ آن برابر است با:

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y+3 = -\frac{1}{2}x+1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x-2 \xrightarrow[\text{عرض از مبدأ } x=0]{\text{عرض از مبدأ}} y = -2$$

۴. ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + 2m + 6 = 0$ معکوس یکدیگرند، پس حاصل ضرب ریشه‌ها برابر ۱ است:

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{2m+6}{2} = 1 \Rightarrow 2m+6=2 \Rightarrow 2m=-4 \Rightarrow m=-2$$

به ازای $m = -2$ معادله به صورت $2x^2 - 6x + 2 = 0$ می‌شود که مجموع ریشه‌هایش برابر است با:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{2} = 3$$

۵. ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2 - 2x + 3)^2 + 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 3)^2 + 4(x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 3)^2 + 4(x^2 - 2x + 3) - 12 = 0$$

با فرض $x^2 - 2x + 3 = t$ معادله به معادله درجه دوم $t^2 + 4t - 12 = 0$ تبدیل می‌شود، پس:

$$t^2 + 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t+6)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -6 \text{ یا } t = 2$$

حال می‌توان گفت:

$$t = -6 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = -6 \Rightarrow x^2 - 2x + 9 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

این معادله ریشه ندارد.

$$t = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

یک ریشه مضاعف مثبت دارد.

۶. تابع $y = ax^2 - 2\sqrt{2}x + 5$ یک سهمی است. چون مینیمم سهمی روی خط $y = 1$ است، پس عرض رأس سهمی برابر ۱ می‌باشد:

$$y_s = 1 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{-((-2\sqrt{2})^2 - 4(a)(5))}{4a} = 1 \Rightarrow \frac{-(8 - 20a)}{4a} = 1 \Rightarrow -8 + 20a = 4a \Rightarrow -8 = -16a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

۷. ابتدا ریشه‌های سهمی $y = x^2 - 3x - 10$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

ریشه منفی سهمی $y = x^2 - 3x - 10$ برابر $x = -2$ است، پس اگر سهمی را ۲ واحد به سمت x ‌های مثبت انتقال دهیم طول نقاط

تلاقی نمودار حاصل با محور x ‌ها که همان ریشه‌های سهمی هستند غیرمنفی می‌شود.

۸. با فرض $x + \frac{1}{x} = t$ معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 8(x + \frac{1}{x}) + 16 = 0$ به معادله درجه دوم $t^2 - 8t + 16 = 0$ تبدیل می‌شود و داریم:

$$t^2 - 8t + 16 = 0 \Rightarrow (t-4)^2 = 0 \Rightarrow t = 4$$

چون m ریشه معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 8(x + \frac{1}{x}) + 16 = 0$ است، پس $m + \frac{1}{m} = 4$ می‌باشد. حال داریم:

$$m^3 + \frac{1}{m^3} = (m + \frac{1}{m})^3 - 3m \times \frac{1}{m} (m + \frac{1}{m}) \Rightarrow m^3 + \frac{1}{m^3} = (4)^3 - 3(4) = 64 - 12 = 52$$

۹. طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخارج‌ها یعنی $3x(x-1)$ ضرب می‌کنیم و داریم:

$$\frac{6x}{x-1} + \frac{x-1}{3x} = 3 \Rightarrow 18x^2 + (x-1)^2 = 9x(x-1) \Rightarrow 18x^2 + x^2 - 2x + 1 = 9x^2 - 9x$$

$$\Rightarrow 10x^2 + 7x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 40 = 9 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm 3}{20} \Rightarrow x = -\frac{1}{5}, x = -\frac{1}{4}$$

ریشه بزرگ‌تر معادله $x = -\frac{1}{5}$ و ریشه کوچک‌تر $x = -\frac{1}{4}$ است، پس داریم:

$$\frac{\text{ریشه بزرگ‌تر}}{\text{ریشه کوچک‌تر}} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

۱۰. **مثال ۲** فرض می‌کنیم طول ضلع مربع x باشد پس مساحت آن x^2 و محیط آن $4x$ است. با توجه به این که عدد مساحت

از عدد محیط کم‌تر است، پس مقدار فزونی عدد محیط از عدد مساحت به صورت زیر است:

$$\text{مقدار فزونی} = 4x - x^2 = -x^2 + 4x$$

همان‌طور که می‌بینیم تابع فزونی یک سهمی است، پس بیش‌ترین مقدار آن همان عرض رأس سهمی است:

$$\text{بیش‌ترین مقدار فزونی} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(16 - 4(-1)(0))}{4(-1)} = \frac{-16}{-4} = 4$$

یادداشت: