سرشناسه: موسوی، سید شجاع‌الدین
عنوان و نام پدیدآور: ریاضی یازدهم تجربی/ سید شجاع‌الدین موسوی
علیرضا شعبانی نصر
مشخصات نشر: تهران: انتشارات بین‌المللی گاج؛ ۱۳۹۷
مشخصات ظاهری: ۴۰۰ ص. مصور.
فروست: این‌کتاب از مجموعه کتاب‌های آس گاج می‌باشد.
بها: ۴۵۰۰۰ تومان
شابک: ۶-۸۲۵-۳۵۹-۶۰۰-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپای مختصر.
شمارهٔ کتابشناسی ملی: ۵۱۳۰۲۹۶

آس
مجموعه کتاب‌های آموزش ساده

[ناشر: انتشارات بین‌المللی گاج]
[مدیر مسئول: مهندس ابوالفضل جوکار]
[معاونت علمی: مهندس محمد جوکار]
[مدیر تألیف: علیرضا مزرعتی]
[واحد پژوهش و برنامه‌ریزی کتاب‌های: آس]
[عنوان کتاب: ریاضی یازدهم تجربی]
[مؤلفان: سید شجاع‌الدین موسوی ـ علیرضا شعبانی نصر]
[برنامه‌ریزی و امور اجرایی: نیلوفر حاجیلو] + [ویرایش علمی: علی عیوضی ـ مینا پروین ـ محمدحسن دیندارلو]
[مدیر واحد فنی و گرافیک: صغری قربانی] + [نظارت بر تایپ و صفحه‌آرایی: محمد یوسفی]
[صفحه‌آرایی: ساناز عاشقی ـ مریم نایبی ـ فرزانه رجبی] + [اجرا: مهسا هوشیار ـ الناز دارانی ـ لیلا فرجی امین]
[طراح شکل: وحیده معینی ـ ملیکا فدایی] + [کارتونیست: مجید باقرزادگان] + [طراح جلد: منصور سماواتی]
[مدیر چاپ: علی مزرعتی] + [لیتوگرافی، چاپ‌خانه و صحافی: گاج]
[نوبت چاپ: اول (۱۳۹۷)] + [شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه]
[دفتر مرکزی: تهران، خیابان انقلاب، بین چهار راه ولیعصر(عج)
و خیابان فلسطین، شماره ۹۱۹] + [تلفن: ۶۴۲۰ - ۰۲۱]
[سرویس پیام کوتاه (SMS): ۱۰۰۰۴۲۵]
[صندوق پستی: ۳۷۷ ـ ۱۳۱۴۵]
[پایگاه اینترنتی: www.gaj.ir]
[**قیمت: ۴۵۰۰۰ تومان**]

مقدمه مؤلفان

سخن اوّل

سلام بچه‌ها. از سال ۱۳۹۰ که تغییرات کتاب‌های درسی ابتدایی و بعد متوسطه شروع شد درباره این که کتب دبیرستان و آزمون کنکور بالاخره چه شکلی میشه، حرف‌های زیادی می‌شنیدیم. به‌خصوص شماها که از اولین نسل‌هایی بودین که هر سال با کتاب‌های درسی جدید برخورد می‌کردین! بعضی معلم‌ها از کتاب‌های جدید خیلی راضی هستند و بعضی هم نه! اما آن چیزی که از همه اینا مهمتره اینه که «اصلاً چرا باید درس بخوانیم؟! و این همه دانش‌ها و آموخته‌هامون، کی و کجا قراره به دردمون بخورن؟» خصوصاً سؤال همیشگی‌تون: «ریاضیات به این سختی بالاخره به چه دردی میخوره؟!». البته به‌نظر ما هر دانش‌آموزی که برای این سؤال‌ها جوابی داشته باشه، دیگه درس خوندن براش سخت نیست!

ویژگی‌های بارز کتاب

در تألیف کتب درسی جدید، به کاربردهای علم در زندگی توجه ویژه‌ای شده، طوری که بر روش بیان و مراحل آموزش مفهومی هم تاثیر گذاشته است. اما متأسفانه اکثر کتاب‌های کمک درسی همچنان دارند با همان روش‌های قدیمی و برخلاف اهداف آموزش مفهومی در کتب درسی جدیدالتألیف پیش می‌روند، یعنی با سؤالات و مثال‌های تکراری بیش از حد و نکته‌های حفظی و کلیشه‌ای، به بمباران ذهن خواننده می‌پردازند. در حالی‌که تحولات کتب درسی جدید همسو با پیشرفت‌های آموزشی جهان بوده و نباید در مقابلش ایستادگی کرد! بنابراین ما هم با توجه به خلأ موجود در کتب کمک درسی فعلی کشور و همچنین الگو برداری از روش های کارآمد کتب خودآموز برتر جهان، بر آن شدیم تا نسل جدیدی از کتابهای کمک درسی را منطبق بر آخرین تغییرات محتوای کتب درسی جدید التالیف و رعایت روابط طولی و عرضی در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. این سری کتابها، همان طور که می دانید، در واحد تالیف انتشارات بین المللی گاج، نام «آس» به خود گرفت که مخفف «آموزش ساده» است و تمام قابلیت های نسل های قبلی کتب کمک درسی چه برای مطالعه در منزل و چه برای تمرین در مدرسه، یک‌جا در آن‌ها گنجانده شده است. در سری کتاب‌های آس، سعی بر این بوده تا ضمن مطالعه مطالب درسی، شما بتوانید با کشف کاربردهای‌شان در زندگی روزمره، لذت یادگیری واقعی و تفکر خلاق را بچشید.
کتاب آموزش ساده «ریاضی یازدهم تجربی» که اکنون پیش روی شماست، هم از این قاعده مستثنی نیست و مانند کتاب درسی ریاضی (۲) رشته تجربی دارای هفت فصل و در هر فصل دارای تعدادی درس است. در ادامه به توضیح ساختار کتاب برای راهنمایی نحوه استفاده از آن می‌پردازیم.

CONTENTS

فهرست مطالب

آس | ریاضی یازدهم تجربی

فصـــل اول Analytic Geometry and Algebra

۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

در این فصل به سه مطلب اساسی می‌پردازیم.

اول: یافتن معادل‌هایی برای مفاهیم هندسی در صفحهٔ مختصات.

کی دو خط موازی‌اند؟ کی عمودند؟ مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خطی که مختصات دو انتهای آن را می‌دانیم، چیست؟ فاصلهٔ دو نقطه در صفحه چه‌قدر است و ....

دوم: بحثی حول سهمی، برخی ویژگی‌های آن و مختصات رأس آن و نقاط تقاطع آن با محور x ها و بحثی حول این نکته که کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار یک معادلهٔ درجهٔ ۲ کجا رخ می‌دهد و حل چند مسئله با کمک این مطلب.

سوم: تبدیل برخی معادلات که نه معادلهٔ خطی‌اند و نه معادلهٔ درجهٔ ۲، به معادلات خطی یا درجهٔ ۲ و سپس حل آن‌ها.

سپهر و سامان نوجوان ۱۳ و ۱۴ ساله هر روز صبح ساعت ۷ در مسیر یک جاده کوهستانی که بین قُهرود[1] و قمصر[2] کشیده شده به دوچرخه‌سواری می‌پردازند. طول مسیر بین این دو روستا، ۲۷ کیلومتر است و چون مسیر شیب دارد، سرعت افراد در مسیر رفت و برگشت متفاوت است.

سامان از قمصر شروع به دوچرخه‌سواری می‌کند و سپهر از قُهرود و هر کدام سه‌بار این مسیر را به‌طور متوالی می‌روند و برمی‌گردند.

سرعت سپهر در رفت و برگشت به‌ترتیب ۲۰ و ۳۰ است و سرعت سامان در رفت و برگشت به‌ترتیب ۲۵ و ۱۵ است. سامان و سپهر طی دوچرخه‌سواری هر روزه، چندبار از کنار همدیگر عبور می‌کنند؟ کی و کجا؟ سعی کنید با رسم نمودار مکان ـ زمان این دو نفر، پاسخ را بررسی کنید.

۱. نام روستایی است که در ۴۵ کیلومتری شهرستان کاشان قرار دارد.
۲. قمصر از توابع شهرستان کاشان می‌باشد و گلاب آن معروف است.

درس اول: هندسه تحلیلی

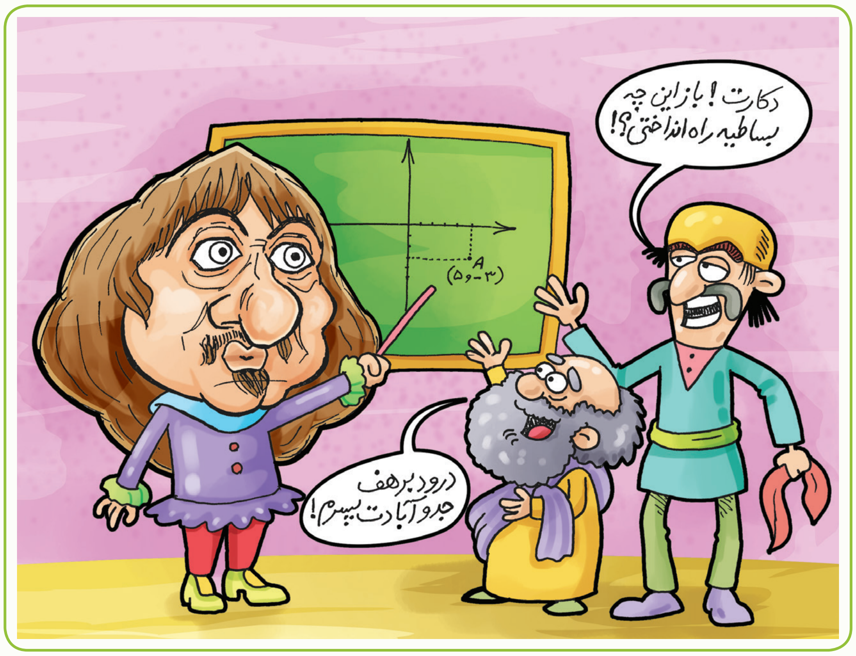
مختصات و معادله خط

◆ یکی از مهم‌ترین کارهای بشر در تاریخ ریاضیات ساختن صفحهٔ مختصات و نمودار بوده است، این کار با تمام سادگی‌اش گام مهمی بود و زمینه را برای پیشرفت ریاضیات و سایر علوم فراهم کرد. این ایدهٔ با ارزش را دکارت مطرح کرد. شاید شنیده باشید که گرگ پیر، یک نویسندهٔ سرخ‌پوست از داکوتای شمالی گفته:

اگه فیثاغورس زنده بود وقتی که دکارت ایدهٔ خود را مطرح کرد حتماً بلند می‌شد و به دکارت می‌گفت: «درود بر تو دکارت و بر هفت جدّ و آبادت».

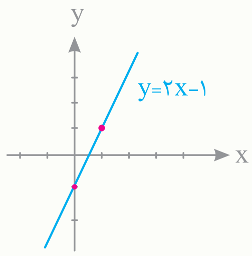

رنه دکارت (۱۶۵۰ - ۱۵۹۶)


نویسنده سرخ‌پوست، گرگ پیر (... - ۱۹۸۱)

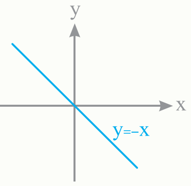


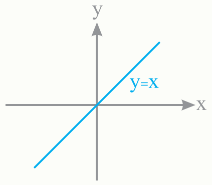
◆ بگذریم، کاری که دکارت کرد با حال بود، بالاخره یک صفحهٔ مختصات ارائه کرد و برای هر نقطه در صفحه یک مختصات (درواقع یک آدرس) ارائه کرد و این کمک کرد تا بتوانیم برای نمودارها معادله‌ای ارائه کنیم و برای معادله‌ها نموداری بسازیم.

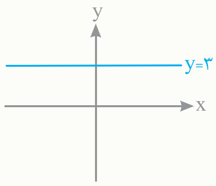
دکارت بعد از این‌که صفحهٔ مختصات را معرفی کرد، رو به حاضرین گفت: «حالا هر رابطه‌ای برحسب x، y که در نظر بگیرید، اگر مجموعهٔ نقاطی از صفحه که مختصاتشان در آن رابطه صدق می‌کنند را در صفحهٔ مختصات مشخص کنید تصویری به‌دست می‌آید که نمودار آن رابطه است.» بعد گفت: «مثلاً رابطهٔ $y = ۲x - ۱$ را در نظر بگیرید، نقاط $(۲,۳)$، $(۱,۱)$، $(۰,-۱)$، $(-۱,-۳)$ و ... در این رابطه صدق می‌کنند پس اگر مجموعهٔ همهٔ نقاطی که در رابطهٔ $y = ۲x - ۱$ صدق می‌کنند را مشخص کنیم به نمودار روبه‌رو می‌رسیم.»

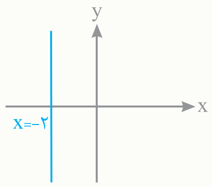


دکارت چند نمونه دیگر را هم رسم کرد:









نکته: می‌بینیم که نمودار رابطهٔ $x = a$ خطی موازی محور y است و نمودار رابطهٔ $y = b$ خطی موازی محور x است.

درس دوم: معادلهٔ درجه دوم و تابع درجه ۲

جواب معادلهٔ درجه ۲

یادت میاد در کتاب دهم معادلهٔ درجهٔ ۲ رو حل کردیم. یعنی در حالت کلی بررسی کردیم که معادله‌ای به شکل $ax^2+bx+c=0$ در چه شرایطی جواب داره و جواباش به چه صورتی هستند؟ به این نتیجه رسیدیم که تعداد جواب‌های این معادله به علامت b^2-4ac که اون رو Δ نامیدیم بستگی داره.

۱ اگر $\Delta>0$ باشد. ⇐ معادله دو جواب دارد.

۲ اگر $\Delta=0$ باشد. ⇐ معادله یک جواب مضاعف دارد.

۳ اگر $\Delta<0$ باشد. ⇐ معادله جواب ندارد.

راه به‌دست آوردن جواب هم به‌صورت زیر بود:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

حال اگر $\Delta>0$ باشد، عبارت بالا را می‌شود به شکل مقابل نوشت:

$$a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)=a\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

و از آن‌جا که اگر حاصل‌ضرب دو عدد صفر باشد، حداقل یکی از آن‌ها صفر می‌باشد، از صفر بودن عبارت فوق هم‌نتیجه می‌گیریم که $x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ یا $x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ است. حال در نهایت جوابهای معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست می‌آیند.

$$\boxed{x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \text{یا} \quad \boxed{x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

نکته: دو تا حالت خاص هم وجود دارد که در این حالت‌ها جواب معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ خیلی راحت به دست می‌آیند.

۱) در معادلهٔ درجه دوم وقتی $a+b+c=0$، آن‌گاه یکی از جواب‌ها $x=1$ است و دیگری $x=\frac{c}{a}$.

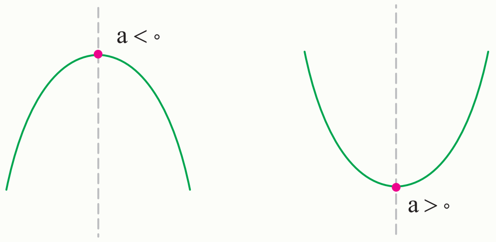
۲) در معادلهٔ درجه دوم وقتی $a+c=b$، آن‌گاه یکی از جواب‌ها $x=-1$ است و دیگری $x=\frac{-c}{a}$.

دلیل دو نکتهٔ فوق را هم می‌توان به‌صورت زیر عنوان کرد:

۱) ax^2+bx+c به ازای $x=1$ برابر $a+b+c$ است.

۲) ax^2+bx+c به ازای $x=-1$ برابر $a-b+c$ است.

◆ در کتاب دهم دیدیم که نمودار منحنی $y=ax^2+bx+c$ به شکل سهمی است که با توجه به علامت a، سهمی رو به بالا یا سهمی رو به پایین می‌باشد.



با توجه به شکل‌ها معلوم است که نمودار هر منحنی درجهٔ ۲ یا یک بالاترین نقطه دارد و یا یک پایین‌ترین نقطه که آن را رأس سهمی می‌نامیم و دیدیم که هر سهمی به صورت $y=a(x-h)^2+k$ که در آن $a\neq 0$ است، رأسی به مختصات (h,k) و خط تقارنی با معادلهٔ $x=h$ دارد و از آن‌جا که:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

معلوم می‌شود که مختصات رأس منحنی $y=ax^2+bx+c$ برابر $\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ و خط تقارن این منحنی هم برابر $x=\frac{-b}{2a}$ است.

مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

◆ در یک معادلهٔ درجهٔ دوم بدون تعیین کردن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم می‌توانیم مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله را به‌دست آوریم، حال اگر α و β ریشه‌های عبارت درجهٔ دوم $y = ax^۲ + bx + c$ باشند مجموع این دو ریشه را $S = \alpha + \beta$ و حاصل‌ضرب این دو ریشه را $P = \alpha.\beta$ می‌نامیم.

چون α و β ریشه‌های چندجمله‌ای $ax^۲ + bx + c$ هستندپس می‌توانیم عبارت درجهٔ دوم را به‌صورت $y = a(x - \alpha)(\alpha - \beta)$ نیز بنویسیم. حال اگر $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ را باز کنیم داریم:

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta) = a(x^۲ - \beta x - \alpha x + \alpha\beta) = ax^۲ - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta$$

با توجه به معادلهٔ به‌دست آمده می‌توانیم به‌راحتی مقادیر S و P را بیابیم.

اصل‌ضرب ریشه‌ها : $a\alpha\beta = c \Rightarrow \boxed{\alpha\beta = \frac{c}{a}}$

مجموع ریشه‌ها : $-a(\alpha+\beta) = b \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta = \frac{-b}{a}}$

بنابراین اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، می‌توانیم معادلهٔ درجهٔ دوم را با استفاده از مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها نیز بازنویسی کنیم.

$$x^۲ - \underbrace{(\alpha+\beta)}_{S}x + \underbrace{\alpha.\beta}_{P} = x^۲ - Sx + P$$

البته با استفاده از فرمول Δ و روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم نیز می‌توانستیم به این نتیجه برسیم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac \Rightarrow x_{۱,۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

حال کافی است یک‌بار این دو را با هم جمع و بار دیگر این دو را در هم ضرب نماییم.

جمع ریشه‌ها: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-b-b}{۲a} = \frac{-۲b}{۲a} = \frac{-b}{a}$

ضرب ریشه‌ها: $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{b^۲ - \Delta}{۴a^۲} = \frac{b^۲ - (b^۲ - ۴ac)}{۴a^۲} = \frac{\cancel{۴}ac}{\cancel{۴}a^{\cancel{۲}}} = \frac{c}{a}$

سؤال

مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های چندجمله‌ای $۵x^۲ + ۹x + ۳$ را بیابید.

پاسخ مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دو $ax^۲ + bx + c = ۰$ به‌ترتیب برابر با $\frac{-b}{a}$ و $\frac{c}{a}$ هستند. (البته به شرط اینکه معادله جواب داشته باشد) بنابراین چون $\Delta = ۹^۲ - (۴ \times ۳ \times ۵) = ۲۱ > ۰$ است نتیجه می‌شود مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌های چندجمله‌ای $۵x^۲ + ۹x + ۳$ به‌ترتیب برابرند با:

$$S = \frac{-۹}{۵} \quad , \quad P = \frac{۳}{۵}$$

سؤال

مجموع و حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $۳x^۲ - x + ۱ = ۰$ را بیابید.

پاسخ باتوجه به اینکه $\Delta = (-۱)^۲ - ۴ \times ۳ = -۱۱ < ۰$ معلوم می‌شود که اصلاً این معادله جواب ندارد تا مجموع و حاصلضرب جواب‌ها داشته باشد.

سؤال

چندجمله‌ای درجهٔ دومی معرفی کنید که مجموع ریشه‌هایش برابر ۵ باشد و حاصل‌ضرب ریشه‌هایش ۲ باشد.

پاسخ مجموع ریشه‌های چندجمله‌ای $x^۲ - Sx + P$ برابر است با S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن برابراست با P . (البته به شرط اینکه چندجمله‌ای ریشه داشته باشد یعنی $S^۲ - ۴P > ۰$ باشد.)

پس چندجمله‌ای $x^۲ - ۵x + ۲$ می‌تواند یک جواب برای این سؤال باشد (دقت کنید که $(۵^۲ - (۴ \times ۲)) > ۰$ می‌باشد).

حال بررسی می‌کنیم کدام‌یک از این اعداد جواب معادله هستند؟

$$x=۲ \Rightarrow \sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{۲-۱}+\sqrt{۴-۳}=۲ \quad \checkmark$$

$$x=۲۶ \Rightarrow \sqrt{x-۱}+\sqrt{۲x-۳}=\sqrt{۲۵}+\sqrt{۴۹}=۱۲ \quad \times$$

پس فقط $x=۲$ جواب این معادله است.

و) $$\sqrt{x-۵}-۲\sqrt{x}+\sqrt{x+۷}=۰ \Rightarrow \sqrt{x-۵}-۲\sqrt{x}=-\sqrt{x+۷} \Rightarrow (\sqrt{x-۵}-۲\sqrt{x})^۲=(-\sqrt{x+۷})^۲ \Rightarrow x-۵+۴x-۴\sqrt{x(x-۵)}=x+۷$$

$$\Rightarrow -۴\sqrt{x(x-۵)}=-۴x+۱۲ \Rightarrow -\sqrt{x(x-۵)}=-x+۳ \Rightarrow x(x-۵)=(-x+۳)^۲ \Rightarrow x^۲-۵x=x^۲-۶x+۹ \Rightarrow x=۹$$

حال بررسی می‌کنیم که آیا $x=۹$ جواب معادله است؟

$$\sqrt{۹-۵}-۲\sqrt{۹}+\sqrt{۹+۷}=۲-۶+۴=۰ \quad \checkmark$$

بنابراین، $x=۹$ جواب معادله است.

یافتن نقاطی از خط با ویژگی خاص

بعضی‌وقت‌ها مسأله از ما می‌خواهد نقاطی را روی یک خط خاص پیدا کنیم که فاصله‌شان از یک نقطهٔ ثابت مقدار معینی باشد. پاسخ به این سؤال معمولاً به یک معادلهٔ رادیکالی می‌انجامد، که باید از مهارت‌هایی که تا الان در مورد حل معادلات رادیکالی آموختیم استفاده کنیم. شاید ظاهر سؤال‌های مطرح شده در این قسمت خیلی ارتباطی با حل معادلات رادیکالی نداشته باشد. اما وقتی به حل سؤال می‌پردازید با یک معادلهٔ رادیکالی مواجه خواهید شد.

سؤال

همهٔ نقاط روی خط $y=-۲x+۱$ را بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(۱,-۱)$ برابر ۵ باشد.

پاسخ مختصات همهٔ نقاطی که روی خط $y=-۲x+۱$ قرار دارند به شکل $(x,-۲x+۱)$ است، فاصلهٔ دو نقطهٔ $(x,-۲x+۱)$ و $(۱,-۱)$ برابر است با:

$$d=\sqrt{(x-۱)^۲+(-۲x+۱-(-۱))^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(-۲x+۲)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+۴(x-۱)^۲}=\sqrt{۵(x-۱)^۲}=\sqrt{۵}\,|x-۱|$$

اگر این فاصله برابر ۵ باشد، خواهیم داشت:

$$\sqrt{۵}\,|x-۱|=۵ \Rightarrow |x-۱|=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵} \Rightarrow \begin{cases} x-۱=\sqrt{۵} \Rightarrow x=۱+\sqrt{۵} \Rightarrow y=-۲x+۱=-۱-۲\sqrt{۵} \\ x-۱=-\sqrt{۵} \Rightarrow x=۱-\sqrt{۵} \Rightarrow y=-۲x+۱=-۱+۲\sqrt{۵} \end{cases}$$

پس نقاط خواسته شده عبارتند از $(۱+\sqrt{۵}, -۱-۲\sqrt{۵})$ و $(۱-\sqrt{۵}, -۱+۲\sqrt{۵})$.

در این مورد دیدیم که برخوردی با معادلهٔ رادیکالی صورت نگرفت. ***اما در سؤال بعد با معادلهٔ رادیکالی سرشاخ می‌شویم.***

سؤال

همهٔ نقاط روی خط $y=x-۱$ را بیابید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $(۳,۰)$ برابر ۴ واحد است.

پاسخ معلوم است که مختصات همهٔ نقاطی که روی خط $y=x-۱$ قرار دارند به‌صورت $(x,x-۱)$ است. فاصلهٔ دو نقطهٔ $(x,x-۱)$ و $(۳,۰)$ برابر است با:

$$d=\sqrt{(x-۳)^۲+(x-۱)^۲}$$

و اگر این فاصله برابر ۴ باشد، به معادلهٔ رادیکالی زیر می‌رسیم:

$$\sqrt{(x-۳)^۲+(x-۱)^۲}=۴ \xrightarrow[\text{۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به توان}} (x-۳)^۲+(x-۱)^۲=۴^۲ \Rightarrow x^۲-۶x+۹+x^۲-۲x+۱=۱۶$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-۸x-۶=۰ \Rightarrow x^۲-۴x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۴\pm\sqrt{۲۸}}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x=۲+\sqrt{۷} \\ x=۲-\sqrt{۷} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=۲+\sqrt{۷} \Rightarrow y=x-۱=۱+\sqrt{۷} \\ x=۲-\sqrt{۷} \Rightarrow y=x-۱=۱-\sqrt{۷} \end{cases}$$

پس دو نقطهٔ $(۲+\sqrt{۷}, ۱+\sqrt{۷})$ و $(۲-\sqrt{۷}, ۱-\sqrt{۷})$ جواب‌های این مسأله هستند.

حال شما سعی کنید به‌عنوان یک تمرین این مسأله را بدون برخورد با معادلهٔ رادیکالی و حتی بدون برخورد با حل معادلهٔ درجهٔ ۲ حل کنید.

Geometry فصـل دوم

۲ هنـدسـه

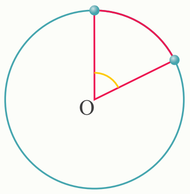
درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه

◆ معروف‌ترین واحد اندازه‌گیری زاویه، درجه است. زاویهٔ یک درجه با تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ قسمت مساوی به دست می‌آید. شاید بپرسید چرا ۳۶۰؟

پاسخ این است که این فقط یک قرارداد است، همان‌طور که مثلاً یک روز ۲۴ ساعت است و می‌توانستیم از اول یک روز را به گونهٔ دیگری تقسیم کنیم.

◆ واحدهای دیگری هم برای اندازه‌گیری زاویه وجود دارد که از تقسیم محیط دایره به اعدادی دیگر به دست می‌آید.

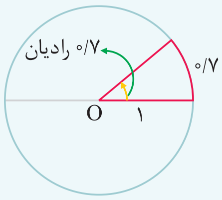
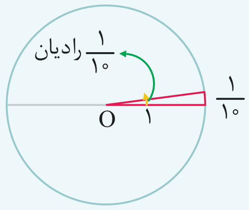
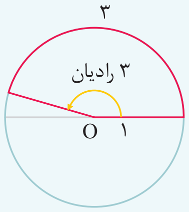
اگر مانند شکل زیر دایره‌ای به شعاع ۱ را رسم کنید و کمانی با طول معلوم را روی آن مشخص کنید، می‌توانید با استفاده از آن یک واحد جدید برای زاویه معرفی کنید.



به عنوان مثال در شکل مقابل می‌توان زاویهٔ مشخص شده را یک رادیان نامید و گفت:

تعریف یک رادیان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۱ در دایره‌ای به شعاع ۱ است.

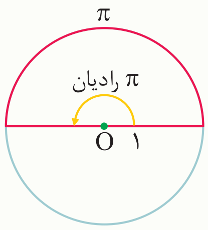
با این تعریف می‌توانیم بگوییم که:

زاویهٔ روبه‌رو به کمانی به طول ۰/۷ واحد برابر، ۰/۷ رادیان است.	زاویهٔ روبه‌رو به کمانی به طول $\frac{1}{10}$ واحد برابر $\frac{1}{10}$ رادیان است.	زاویهٔ روبه‌رو به کمانی به طول ۳ واحد برابر ۳ رادیان است.
		

◆ با قدری دقت دیده می‌شود که با تعریفی که برای واحد «رادیان» داشتیم می‌توانیم بگوییم:

«اندازهٔ هر زاویه برحسب رادیان برابر است با طول کمان روبه‌رو به آن در دایره‌ای به شعاع یک واحد.»

چون محیط دایره‌ای به شعاع ۱ واحد برابر ۲π است، معلوم است که طول کمان یک نیم‌دایره در دایره‌ای به شعاع واحد برابر π است. با توجه به شکل مقابل می‌توان گفت:



π رادیان = ۱۸۰ درجه

◆ رابطهٔ فوق، ارتباط میان واحدهای درجه و رادیان را مشخص می‌کند و با استفاده از تناسب می‌توانیم، وقتی که اندازهٔ زاویه را برحسب درجه داشتیم، آن را برحسب رادیان به‌دست آوریم و بالعکس. بعد از این هرگاه اندازهٔ یک زاویه را بدون واحد اندازه‌گیری گفتیم، واحد اندازه‌گیری رادیان است.

به عنوان مثال اندازهٔ زاویهٔ A برابر $\frac{\pi}{2}$ است، یعنی $\frac{\pi}{2}$ رادیان است و اندازهٔ زاویهٔ B برابر ۲ است، یعنی ۲ رادیان است.

شاید بپرسید چرا رادیان را معرفی کردید؟ واقعیت این است که معرفی واحد رادیان برای اندازه‌گیری زاویه در ریاضیات بی‌دلیل نبوده است. دلیل آن مطلبی است مرتبط با حد و مشتق که با آن در سال دوازدهم آشنا خواهید شد.

سؤال

طول کمان مقابل به زاویهٔ α رادیان در دایره‌ای به شعاع r را بیابید.

پاسخ این کمان در واقع $\frac{\alpha}{2\pi}$ قسمت از محیط دایره است. پس طول آن برابر خواهد بود با:

$$\frac{\alpha}{2\pi}\times 2\pi r=\alpha r$$

ماجرا چیه؟!

خیلی از تغییرات به‌صورت آرام، آرام و به‌طور پیوسته رخ می‌دهند.

به‌عنوان مثال تغییرات قد شما یک فرایند پیوسته است، به این معنا که اگر زمانی قد شما ۱۴۵ سانتی‌متر بود و الان ۱۷۰ سانتی‌متر است؛ حتماً زمانی قدتان ۱۵۰ سانتی‌متر بوده، زمانی ۱۶۰ و ... . و هر عددی که در بین ۱۴۵ و ۱۷۰ بگویید زمانی قد شما آن بوده.

یعنی با یک تغییرات پیوسته قد شما ۱۷۰ سانتی‌متر شده‌است

بعضی از تغییرات هم ناگهانی هستند و آن حالت پیوستگی را ندارند.

مثل قیمت هر متر مکعب گاز که هزینه آن پلکانی محاسبه می‌شود و پیوسته نیست.

۰ تا ۴۵ متر مکعب ۱۰۸۱ ریال

۴۶ تا ۹۵ متر مکعب ۱۳۱۱ ریال

و ...

و به‌طور مشابه هزینهٔ یک کیلووات برق، برخی قوانین مالیاتی، قیمت بربری در طول تاریخ و ... نیز ساختاری ناپیوسته دارند. مباحث حد و پیوستگی شروع بحث دربارهٔ تفاوت‌های این دو گروه از مسائل است.

◆ تصاویر زیر در یک غار باستانی یافت شده است. باستان‌شناسان موفق شده‌اند زیرنویس‌های تصاویر را ترجمه کنند.

۳) مقدار واریانس و انحراف معیار را برای داده‌های زیر محاسبه کنید.

$-10, -10, -10, 0, 10, 10, 10$

پاسخ باز هم برای محاسبهٔ واریانس ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه کرده و سپس میانگین را از داده‌ها کم کرده و به توان ۲ می‌رسانیم و در نهایت مجموع آنها را بر تعداد داده‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\bar{x} = \frac{-10-10-10+0+10+10+10}{7} = 0$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-10-0)^2+(-10-0)^2+(-10-0)^2+(0-0)^2+(10-0)^2+(10-0)^2+(10-0)^2}{7} = \frac{6\times 10^2}{7} \simeq ۸۵/۷$$

حال کافی است از واریانس جذر گرفته و انحراف معیار را به دست بیاوریم. توجه داشته باشید که انحراف معیار شاخصی بهتر برای پراکندگی است.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{6\times 10^2}{7}} \simeq ۹/۲۵$$

دربارهٔ شاخص‌های پراکندگی

◆ با دقت در مثال قبل به نظر می‌رسد که واریانس معیار خوبی برای پراکندگی نیست، زیرا درحالیکه دامنه تغییرات برابر $20 = (-10) - 10$ است، واریانس تقریباً ۸۵/۷ است و مقدار آن خیلی بیشتر از دامنه تغییرات است در حالی‌که ما انتظار نداریم که یک شاخص پراکندگی، مقدار پراکندگی را بیشتر از دامنهٔ تغییرات نشان دهد.

البته انصافاً انحراف معیار اینگونه نبود و مقدار انحراف معیار کمتر از دامنهٔ تغییرات بود. در حالت کلی هم وضعیت همین است و انحراف معیار شاخصی بهتر از واریانس برای نشان دادن میزان پراکندگی است.

دقت کنید که واریانس به جمع و تفریق داده ها حساس نیست، یعنی اگر داده‌ها با عددی جمع شوند و یا عددی از داده‌ها کم شود هیچ تأثیری در واریانس نخواهد داشت، اما به ضرب و تقسیم نسبت به داده‌ها حساس است، یعنی اگر داده‌های آماری در عدد a ضرب شود آنگاه واریانس آن داده‌ها در a^2 ضرب می‌شود و اگر داده‌ها بر a تقسیم شوند، آنگاه واریانس بر a^2 تقسیم می شود.

نکته: اگر واریانس داده‌های $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ برابر σ^2 باشد. آنگاه واریانس داده‌های $ax_1+b, ax_2+b, \cdots, ax_n+b$ برابر $a^2\sigma^2$ می‌باشد.

◆ می‌خواهیم نکتهٔ فوق را اثبات کنیم:

می‌دانیم که اگر میانگین داده‌های $x_1, \ldots, x_n$ برابر $\bar{x}$ باشد آنگاه میانگین داده‌های $ax_1+b, \ldots, ax_n+b$ برابر $a\bar{x}+b$ است. بنابراین واریانس داده‌های $ax_1+b, \ldots, ax_n+b$ برابر است با:

$$\text{واریانس داده‌های جدید} = \frac{(ax_1+b-(a\bar{x}+b))^2+(ax_2+b-(a\bar{x}+b))^2+\cdots(ax_n+b-(a\bar{x}+b))^2}{n}$$

$$= \frac{(ax_1-a\bar{x})^2+(ax_2-a\bar{x})^2+\cdots+(ax_n-a\bar{x})^2}{n} = \frac{a^2(x_1-\bar{x})^2+a^2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+a^2(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

$$= a^2\left(\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}\right) = a^2\sigma^2$$

◆ انحراف معیار هم مانند واریانس به جمع و تفریق داده‌ها حساس نیست و فقط به ضرب و تقسیم داده‌ها حساس است، اما با این تفاوت که اگر داده‌های آماری a برابر شود، انحراف معیار در $|a|$ ضرب می‌شود و اگر داده‌ها بر a تقسیم شوند، انحراف معیار بر $|a|$ تقسیم می‌شود. دلیل وجود قدر مطلق هم مشخص است و آن هم این است که چون انحراف معیار جذر واریانس است، نمی‌تواند عددی منفی باشد.

نکته: اگر انحراف معیار داده‌های $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ برابر σ باشد. آنگاه انحراف معیار داده‌های $ax_1+b, ax_2+b, \ldots, ax_n+b$ برابر $|a|\sigma$ خواهد بود.

دیدیم که وقتی داده‌ها a برابر شدند، واریانس a^2 برابر شد و انحراف معیار نیز $|a|$ برابر می‌شود. همین مطلب تا حدودی نشان می‌دهد که انحراف معیار، شاخصی بهتر از واریانس برای پراکندگی است. زیرا وقتی داده‌ها در یک عدد ضرب می‌شوند، به نظر ما طبیعی‌تر است که شاخص پراکندگی آن‌ها هم در همان عدد ضرب شود.

کتاب‌های پرسمان

ویژه ارتقای معدل؛ برای ۲۰، پرسمان کافیست

کتاب های پرسمان شامل آموزش کامل، تمرین ها و نمونه سؤالات امتحانی با پاسخ های تشریحی برای مطالعه در طول سال تحصیلی و آمادگی برای شب امتحان است. در درسنامه‌های پرسمان از زیاده روی پرهیز شده و سعی شده است حجم کتاب‌ها به قدری باشد که دانش آموزان عزیز بتوانند تمام درسنامه‌ها و سؤالات را مطالعه کنند. این کتاب‌ها بر مبنای استاندارد امتحانات نهایی طراحی شده و در آنها مطلبی خارج از کتاب درسی آورده نشده است.

کتاب‌های کار و کارپوچینو

کتاب های کار انتشارات گاج

کتاب‌های کار انتشارات گاج از مقطع پیش دبستانی تا پایه‌ی نهم با عنوان «کارپوچینو» و در مقطع متوسطه دوم با عنوان کتاب‌های کار تولید و توزیع می‌گردند.

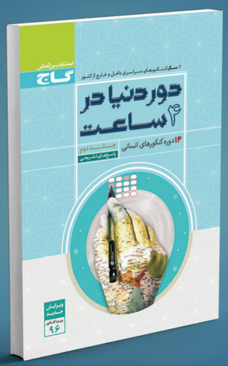
این کتاب ها شامل درسنامه های مختصر، کاربردی و مطابق با سرفصل های کتب درسی است.

در این کتاب‌ها نمونه سؤالات متنوع با هدف آموزش، تکرار و تثبیت مطالب درسی به منظور کار در کلاس و کار در منزل تألیف شده‌اند.

چیدمان سؤالات در این کتاب‌ها کاملاً استاندارد و بر اساس زیر بخش‌های کتاب درسی می‌باشد.

در ویرایش، بازنگری و تألیف این کتاب‌ها، از نظرات کارشناسان خبره در هر پایه استفاده شده است.

کتاب های دور دنیا در ۴ ساعت



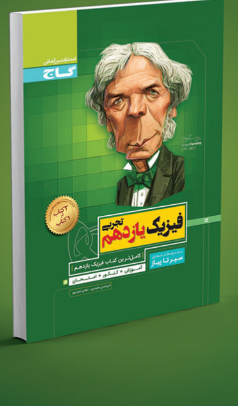
مجموعه کتاب‌های دور دنیا در ۴ ساعت شامل کنکورهای سراسری سال‌های گذشته است. هدف اصلی این کتاب‌ها شبیه سازی جلسه کنکور برای دانش‌آموزان است تا بتوانند دانش و آموخته‌های خود را با این کنکورها محک بزنند تا برای جلسه اصلی کنکور خود را آماده کنند.

پاسخ های تشریحی این کنکورها را نیز حتما در جلد دوم این کتاب‌ها بررسی کنید تا بتوانید تحلیلی مناسب از این آزمون‌ها داشته باشید.

کتاب های زنبور

ما در کتاب‌های زنبور (واحد کودک و نوجوان انتشارات گاج): خوراک روح خردسالان، کودکان و نوجوانان شما را تأمین می‌کنیم. زنبور، برای کودکان سرزمینمان، داستان، شعر و رمان‌هایی را ترجمه می‌کند که یا شاهکارهای ادبی جهان هستند یا جایزه‌های بین‌المللی گرفته‌اند. در بخش بین‌المللی، شاهکارهای ادبی کهن ایران، از جمله شاهنامه، کلیله و دمنه، بوستان، گلستان، مثنوی و ... را از فارسی به زبان‌های دیگر ترجمه می‌کند، در حوزه تألیف، از بزرگان ادبیات کودک، آثاری با تصویرگری‌هایی جذاب و دلنشین منتشر می‌شود.

کتاب های سیر تا پیاز



کنکورتُ ۱۰۰ بزن- امتحانتُ ۲۰ بگیر

کتاب‌های سیر تا پیاز شامل ۳ کتاب می‌باشد:

جلد ۱ (کتاب آموزش): شامل آموزش کامل به همراه نکات کنکوری و امتحانی است.

جلد ۲ (کتاب کنکور (تست)): شامل تمام تست‌های کنکور و تست‌های تألیفی است. تعداد تست‌ها به حدی است که دانش آموزان را از هر کتاب تستی بی نیاز می کند.

جلد ۳ (کتاب امتحان): شامل سؤالات امتحانی و مشابه سازی تمارین کتاب درسی است.