فصل ۱

شمارش

گاهی در بررسی برخی از مسائل به شمردن اشیایی با ویژگی‌های مشخص نیازمندیم: ــ چند عدد سه‌رقمی وجود دارد؟ ــ چند خودرو را می‌توان با پلاک‌هایی که با ۵ رقم و یک حرف الفبای فارسی مشخص شده‌اند شماره‌گذاری کرد؟ ــ به چند طریق می‌توان ۷ سرباز را به صف کرد؟

برخی از مسائل شمارشی نیز هستند که در وهله‌ی اول چنین به‌نظر نمی‌رسند: بعد از بسط دادن $(a+b)^{۱۰۰}$ ضریب جمله‌ی $a^{۴۶}b^{۵۴}$ چند است؟ در این فصل به این سؤالات پاسخ خواهیم داد. و ابزارهایی برای شمارش معرفی خواهیم کرد که کار شمردن را آسان‌تر می‌کند.

۱.۱ اصل جمع و اصل ضرب

در تمام انواع مسائل مربوط به شمارشی دو اصل اساسی موسوم به اصل جمع و اصل ضرب کاربرد دارند. در این بخش این دو اصل معرفی و با حل مثال‌هایی توضیح داده خواهند شد.

تعریف ۱.۱ اصل جمع. فرض کنید $E_۱$، $E_۲$، ...، E_k، kتا پیشامد باشند به‌طوری که

$n_۱$ حالت برای روی دادن $E_۱$

$n_۲$ حالت برای روی دادن $E_۲$

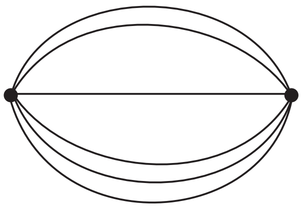
n_k حالت برای روی دادن E_k

وجود داشته باشد و از این پیشامدهای مختلف $E_۱$، ...، E_k هیچ دوتایشان با هم اتفاق نیفتد. تعداد حالات برای اینکه حداقل یکی از پیشامدهای E_k اتفاق بیافتد برابر $n_۱ + n_۲ + \cdots + n_k$ است.

مثال ۲.۱ فردی می‌خواهد از شهر A به شهر B برود. او می‌تواند از مسیرهای زمینی، هوایی و دریایی استفاده کند. فرض کنید ۳ مسیر زمینی، ۲ مسیر هوایی و ۱ مسیر دریایی برای این کار وجود داشته

باشد (مطابق شکل) واضح است که تعداد حالات انجام این سفر برابر است با:

$$\text{تعداد مسیرهای هوایی} + \text{تعداد مسیرهای زمینی} + \text{تعداد مسیرهای دریایی} = ۶$$



درواقع به بیان اصل جمع، پیشامدهای ما $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ هستند:

$\boldsymbol{E_۱}$: پیشماد سفر از A به B از مسیر زمینی $\leftarrow$ $n_۱ = ۳$ (چون سه مسیر زمینی وجود دارد)

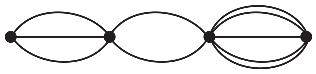
$\boldsymbol{E_۲}$: پیشامد سفر از A به B از مسیر دریایی $\leftarrow$ $n_۲ = ۱$ و

$\boldsymbol{E_۳}$: پیشامد سفر از A به B از مسیر هوایی $\leftarrow$ $n_۳ = ۲$

و انجام سفر به این معناست که دقیقاً یکی از این پیشامدها اتفاق بیفتد. (توجه کنید که هیچ دوتایی از این پیشامدها با هم اتفاق نمی‌افتند). پس طبق اصل جمع تعداد حالت‌هایی که این سفر انجام می‌شود برابر است با $۶ = ۲ + ۱ + ۳$.

تعریف ۳.۱ اصل ضرب. فرض کنید E یک پیشامد باشد و بتوان آن را به k پیشامد متوالی و مستقل $E_۱$، ...، E_k تجزیه کرد به‌طوری که برای رخ‌دادن E باید تمام پیشامدهای $E_۱$، ...، E_k اتفاق بیفتند. اگر برای $E_۱$، $n_۱$ حالت، برای $E_۲$، $n_۲$ حالت، ...و برای E_k، n_k حالت ممکن باشد، در این صورت E به $n_۱ \times n_۲ \times \cdots \times n_k$ حات رخ می‌دهد.

مثال ۴.۱ فرض کنید A، B، C و D چهار شهر باشند که مطابق شکل توسط جاده‌هایی به هم وصل شده‌اند می‌خواهیم تعداد حالاتی که می‌توان از A به D سفر کند را حساب کنیم. برای رفتن از A به B سه مسیر، از B به C دو مسیر، و C به D چهار مسیر موجود است. طبق اصل ضرب تعداد راه‌های رسیدن از A به B برابر است با $۲۴ = ۴ \times ۲ \times ۳$.



درواقع پیشامد E سفر از A به D است و

$\boldsymbol{E_۳}$: سفر از A به B و $n_۱ = ۳$

$\boldsymbol{E_۲}$: سفر از B به C و $n_۲ = ۲$

$\boldsymbol{E_۳}$: سفر از C به D و $n_۳ = ۴۳$

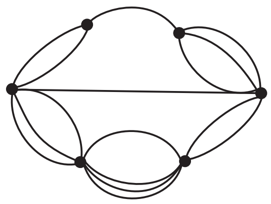
توجه کنید که به‌وضوح پیشامدهای $E_۱$، $E_۲$ و $E_۳$ مستقل‌اند، چون هرکدام مستقل از اینکه بقیه چگونه اتفاق افتاده‌اند، اتفاق خواهند افتاد.

مثال ۵.۱ فرض کنید پلاک استاندارد پلاکی است که با ۵ رقم از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ و یک حرف فارسی مشخص شده باشد. مثلاً پلاک $\boxed{۴}\boxed{۲}\boxed{ج}\boxed{۱}\boxed{۷}\boxed{۷}$ یک پلاک استاندارد است. تعداد پلاک‌های استاندارد چندتاست؟

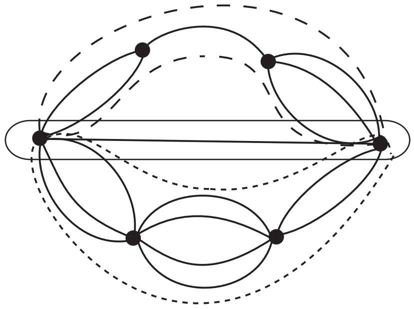
راه‌حل. ابتدا می‌توانیم به ۳۲ طریق حرف پلاک را مشخص کنیم سپس برای تعیین هرکدام از ۵ رقم آن ۹ انتخاب از مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ خواهیم داشت. بنابراین طبق اصل ضرب تعداد پلاک‌های استاندارد برابر $۹^۵ \times ۳۲ = ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۹ \times ۳۲$ است.

ما معمولاً در برخورد با مسائل شمارشی به‌طور آمیخته هم از اصل جمع و هم از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. به‌عنوان نمونه به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۶.۱ در شکل زیر نشان‌دهنده‌ی شهرها و خطوط نشان‌دهنده‌ی جاده‌ی میان آنهاست به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟



راه‌حل. ابتدا جاده‌ها را به این صورت (شکل روبرو) تقسیم‌بندی می‌کنیم: واضح است که سفر از A به B در یکی از بخش‌های ۱، ۲ و یا ۳ انجام خواهد گرفت.



حال اگر

$n_۱=$تعداد حالت‌های سفر از A به B در بخش ۱ و

$n_۲=$تعداد حالت‌های سفر از A به B در بخش (۲) و

$n_۳=$تعداد حالت‌های سفر از A به B در بخش (۳)،

باشند، به‌سادگی می‌توان دید که طبق اصل جمع تعداد حالت‌های سفر از A به B برابر $n_۱+n_۲+n_۳$ است. از طرف دیگر طبق اصل ضرب خواهیم داشت: $n_۱=۳\times۱\times۲=۶$ و $n_۲=۱$ و $n_۳=۳\times۴\times۲=۲۴$. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $۶+۱+۲۴=۳۱$.

مثال ۷.۱ چهار حرف A، B، C و D را به چند ترتیب مختلف می‌توان روی یک خط نوشت؟ (در هر ترتیبی هر چهار حرف نوشته می‌شوند و هرکدام یک‌بار)

راه‌حل. یک راه برای حل این مسئله نوشتن تمام حالت‌های ممکن مانند $ABCD$، $CABD$، $DBAC$، ...است، اما بهتر است که روشی ارائه کنیم که شمارش را ساده‌تر کند. این کار به‌ویژه در مسائل پیچیده‌تر لازم است.

در هر ترتیب، حروف در چهار مکان روی خط قرار می‌گیرند (مانند شکل)

D	A	B	C
مکان ۴	مکان ۳	مکان ۲	مکان ۱

حال برای ترتیبی از حروف، مکان اول را در نظر بگیرید. برای این مکان ۴ انتخاب برای حرفی که روی آن قرار می‌گیرد وجود دارد (چون مجموعاً چهار حرف داریم) به‌ازای هر انتخاب برای مکان اول ۳ انتخاب برای مکان دوم وجود دارد، زیرا قبلاً یک حرف به‌عنوان حرف اول انتخاب شده است. برای مثال‌اگر B در مکان اول باشد، آنگاه در مکان دوم یکی از حروف A، C یا D قرار خواهند گرفت. همین‌طور بعد از آنکه از میان ۴ حرف ۲ حرف انتخاب شد، حرفی که قرار است در سومین مکان قرارگیرد را می‌توان به دو طریق انتخاب کرد و وقتی می‌خواهیم حرف چهارم را انتخاب کنیم تنها یک راه وجود دارد، یعنی تنها یک حرف باقی مانده است که می‌تواند در مکان چهارم قرارگیرد. توجه کنید که تعداد روش‌های انتخاب هر حرف، مستقل از نحوه‌ی انتخاب حروف قبلی است، مثلاً پس از انتخاب حرف اول برای مکان دوم همیشه سه انتخاب باقی می‌ماند. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسئله $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$ است ($E_۱$، $E_۲$، $E_۳$ و $E_۴$ پیشامدهای انتخاب به‌ترتیب حروف اول، دوم، سوم و چهارم‌اند.)

توجه کنید که چگونه در مسئله‌ی قبلی بدون واردشدن در جزئیات و شمردن‌های بسیار زیاد و نوشتن تمام حالت‌ها توانستیم تعداد حالت‌ها را شمارش کنیم و یا به‌عبارت دیگر «بدون شمارش بشماریم»!

۲.۱ تبدیل

بعضی از اوقات به دنبال آن هستیم که تعداد حالت‌های قراردادن یا صف‌کردن، . . .شیء را به‌دست آوریم. به این نمونه‌ها توجه کنید: ـ به چند طریق ۱۰ سرباز می‌توانند در یک صف بایستند؟ ـ به چند طریق می‌توان از میان ۵ سرباز ۳ نفر از آنها را به صف کرد؟ اینها دو نمونه از مسائل صف‌بندی هستند. نام دیگر مسائل صف‌بندی، مسائل **تبدیل** است.

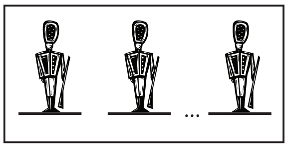
در حالت کلی فرض کنید مجموعه‌ای از n شیء داریم. منظور از تبدیل r شیء از این n شیء تعداد حالت‌های به صف کردن r شیء از این اشیاء است. (توجه کنید که به $n-r$ شیء دیگر کاری نداریم) برای مثال تمام حالت‌های به صف کردن ۳ شیء از ۵ شیء $(n=۵, r=۳)$ به شرح زیر است. فرض کنید اشیاء $\{a,b,c,d,e\}$ هستند:

$$abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde$$

نکته ۸.۱ توجه کنید که $۰ \leqslant r \leqslant n$. زیرا اولاً انتخاب تعدادی منفی شیء از n شیء معنی ندارد، ثانیاً از n شیء نمی‌توان تعداد بیشتری (مثلاً $n+۱$) شی برداشت. بنابراین r از n بزرگ‌تر نیست و $r_۱ < n$. در حالتی که $n = r$ باشد تمام n عضو در صف‌بندی ظاهر می‌شوند. در این حالت تبدیل n شیء از n شیء را **تعداد جایگشت‌های** n شیء می‌نامیم. منظور از یک **جایگشت** یک صف‌بندی و ترتیب از تعدادی شیء است.

حال به مثال اول مسئله‌ی سربازها که در ابتدای این بخش بیان شد برمی‌گردیم. می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های ۱۰ سرباز (تبدیل ۱۰ سرباز از ۱۰ سرباز) را محاسبه کنیم که طبق تعریف همان تعداد به صف شدن‌های ممکن آنهاست. برای این کار از اصل ضرب کمک می‌گیریم. برای تشکیل هر صفی (جایگشتی) یک سرباز باید در مکان اول بایستد. چون ۱۰ سرباز داریم، برای پرشدن مکان اول به ۱۰ طریق می‌توان یک سرباز را انتخاب کرد و در مکان اول جای داد. حال به سراغ مکان دوم در صف می‌رویم. برای پرکردن مکان دوم ۹ انتخاب داریم زیرا قبلاً از ۱۰ سرباز یک را در مکان اول قرار داده‌ایم پس از انتخاب‌های ممکن برای مکان دوم یکی کم شده است. به همین ترتیب برای مکان سوم به ۸ طریق می‌توان یک سرباز را انتخاب کرد و در مکان سوم جای داد . . .و در آخرین گام وقتی می‌خواهیم مکان دهم را پر کنیم، از ۱۰ سرباز ۹ نفر در مکان‌های اول تا نهم قرارگرفته‌اند و تنها یک سرباز باقی مانده است.

بنابراین تعداد کل جایگشت‌های این سربازها برابر است با ضرب تعداد حالت‌های انتخاب برای پرکردن مکان‌ها، یعنی: $۱ \times ۲ \times \cdots \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$.



برای راحتی عبارت $۱ \times ۲ \times \cdots \times ۸ \times ۹ \times ۱۰$ را با نماد $!۱۰$ نمایش می‌دهیم. در حالت کلی تعریف می‌کنیم:

تعریف ۹.۱ فاکتوریل. اگر n عددی طبیعی باشد، عبارت $n \times (n-۱) \times \cdots ۲ \times ۱$ با نماد $n!$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت «n فاکتوریل» خوانده می‌شود. علامت «!»، علامت فاکتوریل نامیده می‌شود.

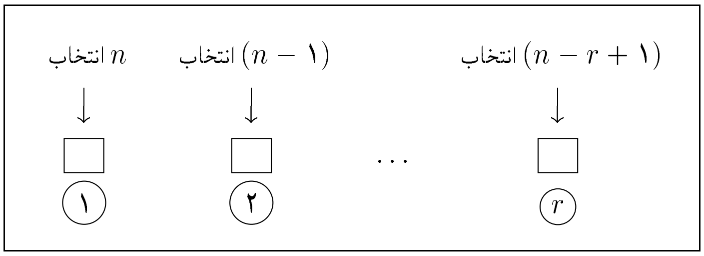
در مثال دوم مسئله‌ی سربازها قصد داریم که تعداد حالت‌های به صف ایستادن ۳ سرباز از ۵ سرباز را بشماریم. (عملاً ۲ نفر در صف قرار نمی‌گیرند). برای این کار مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم. برای مکان اول ۵ انتخاب، برای مکان دوم ۴ انتخاب و برای مکان سوم ۳ انتخاب وجود دارد. پس تعداد صف‌بندی‌ها و یا به عبارت دیگر تعداد تبدیل‌های ۳ سرباز از ۵ سرباز برابر خواهد بود با $۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$.

در حالت کلی تبدیل r شیء از n شیء را با نماد P_r^n یا $P(n,r)$ نمایش می‌دهند.

بنابراین تعداد حالات به صف کردن ۳ سرباز از ۵ سرباز برابر با $P_۳^۵$ است و همان‌طور که نشان داده شد، داریم: $P_۳^۵ = ۶۰$.

حال قصد داریم برای محاسبه‌ی P_r^n در حالت کلی فرمولی به‌دست آوریم.

فرض کنید n شیء در اختیار داریم. P_r^n برابر با تبدیل r شیء از این n شیء است یعنی تعداد حالت‌های ایستادن r شیء از این n شیء در یک صف.



فرض کنید r مکان روی یک خط مشخص شده‌اند که r شیء انتخاب شده از n شیء در این مکان r مکان قرار خواهند گرفت. این r مکان توسط r شیء پر خواهند شد. گذشته از این، برای

پرکردن خانه‌ی اول n انتخاب وجود دارد (هر کدام از n شیء می‌تواند در این خانه قرار گیرد). برای پرکردن خانه‌ی دوم $(n-۱)$ انتخاب باقی مانده است، ...و به همین ترتیب برای پرکردن خانه‌ی rام $n\cdots r+۱=(n-(r-۱))$ انتخاب از آن n شیء وجود دارد (چون برای اشغال خانه‌های اول تا $(r-۱)$ـام، $(r-۱)$ شیء انتخاب شده‌اند.) بنابراین از اصل ضرب نتیجه می‌شود که تبدیل r شی برابر است با $n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)$. به‌عبارت دیگر

$$P_r^n = n(n-۱)\cdots(n-r+۱)$$

حال اگر طرف راست تساوی بالا را درکسر $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$ ضرب کنیم در صورت عبارت تمام اعداد ۱ تا n ظاهر شده و درهم ضرب شده‌اند که همان $n!$ است و صورت کسر فرم ساده‌تری به خود می‌گیرد:

$$\begin{aligned}
P_r^n &= n(n-۱)\cdots(n-r+۱)\frac{(n-r)!}{(n-r)!}\\
&= \frac{n(n-۱)\cdots(n-r+۱)\times\overbrace{(n-r)(n-r-۱)\cdots\times ۲\times ۱}^{(n-r)!}}{(n-r)!}\\
&= \frac{n!}{(n-r)۱}
\end{aligned}$$

نکته ۱.۱۰ اگر فرمول $P_r^n=\frac{n!}{(n-r)!}$ که در بالا آن را به‌دست آوردیم برای حالت $r=n$ به‌کار بریم، داریم

$$P_n^n = \frac{n!}{۰!}$$

از سوی دیگر می‌دانیم P_n^n درواقع تعداد جایگشت‌های n شیء و برابر با $n!$ است. بنابراین ضروری است $۰!=۱$.

مثال ۱.۱۱ تعداد کلمات ۵ حرفی تشکیل شده از ۲۶ حرف کوچک الفبای انگلیسی را بیابید که حروف اول و آخر آنها صدادار و بقیه‌ی حروف بی‌صدا باشند و علاوه بر آن تمام ۵ حرف این کلمات باید متمایز باشند.

توجه ۱. حروف صدادار انگلیسی حروف a,e,i,o,u هستند.

توجه ۲. کلمات ساخته شده لزوماً نباید معنی‌دار باشند، درواقع مسئله شمردن تعداد جایگشت‌های خاصی از حروف انگلیسی است.

راه‌حل. در حروف الفبا ۵ حرف صدادار و ۲۱ حرف دیگر بی‌صدا هستند. ساخت هر کلمه‌ی ۵ حرفی را می‌توان به دو مرحله تقسیم کرد:

مرحله‌ی اول: تبدیل ۲تایی از مجموعه‌ی $\{a, e, i, o, u\}$ را در نظر می‌گیریم و حرف اول را در خانه‌ی اول (مکان حرف اول کلمه‌ی ۵ حرفی مطلوب) و حرف دوم را در خانه‌ی پنجم قرار می‌دهیم.

مرحله‌ی دوم: از مجموعه‌ی حروف بی‌صدا که تعدادشان برابر ۲۱ است، تبدیل ۳تایی را در نظر می‌گیریم و حروف اول، دوم و سوم را به‌ترتیب در خانه‌های دوم، سوم و چهارم قرار می‌دهیم.

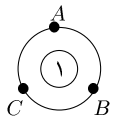
بنابراین طبق اصل ضرب تعداد کلمات ۵ حرفی با شرایط ذکر شده برابر است با:

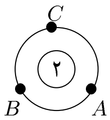
$$P^{۵}_{۲} \times P^{۲۱}_{۳} = (۵ \times ۴) \times (۲۱ \times ۲۰ \times ۱۹) = ۱۵۹۶۰۰$$

تبدیل دوری

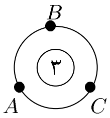
گاهی اوقات با مسائلی روبرو می‌شویم که بناست تعداد جایگشت‌های تعدادی شیء را در تعدادی مکان به‌دست آوریم ولی بعضی حالت‌ها با یکدیگر معادل‌اند و یک حالت به‌حساب می‌آیند.

مثال ۱۲.۱ تبدیل دوری. فرض کنید n نفر می‌خواهند دور میز دایره شکلی بنشینند. می‌خواهیم تعداد کل حالت‌های نشستن این افراد دور میز را به‌دست آوریم که با **دوران افراد** حول میز این حالت‌ها به یکدیگر تبدیل نشوند. یعنی حالاتی که با دوران به یکدیگر تبدیل می‌شوند معادل بوده و آنها را یک‌بار به حساب می‌آوریم.

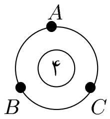
راه‌حل. برای روشن‌شدن موضوع فرض کنید $n = ۳$ و افراد A، B و C می‌خواهند دور میز بنشینند این سه نفر می‌توانند به این صورت دور میز قرار گیرند: 

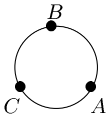
در مورد حالت 

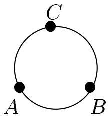
چه می‌توان گفت؟ به‌وضوح این سه نفر می‌توانند به این شیوه نیز دور میز بنشینند، اما اگر دقت کنید با دوران ۱۲۰ درجه (ساعتگرد) از حالت (۱) به این حالت (۲) می‌رسیم. بنابراین طبق مطلبی که در ابتدا بیان شد این دو حالت معادل به‌شمار می‌آیند.

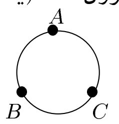
آیا باز حالتی وجود دارد که با حالات قبل معادل باشد؟ حالت 

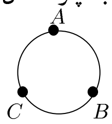
نیز با دوران حالت‌های قبلی به‌دست می‌آید. از طرفی به راحتی می‌توان دید تعداد حالت‌هایی که با (۱) معادل‌اند همین سه مورد (۱) و (۲) و (۳) هستند (توجه کنید که (۱) با خودش معادل است) زیرا (۱) را دقیقاً سه بار

می‌توان دوران داد (منظور دوران‌های 120° است) و در دوران چهارم باز به همان وضعیت ابتدایی (۱) می‌رسیم. حال وضعیت 

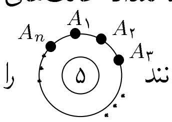
را در نظر بگیرید. به سادگی می‌توان دید که حالت (۴) از دوران (۱) و (۲) و (۳) به‌دست نمی‌آید. مشابه استدلال قبل (۴) نیز با 

و 

معادل است. با یک بررسی ساده می‌توان مشخص کرد که تعداد حالات نشستن این سه نفر دور میز دایره‌ای شکل به‌طوری که بتوان آنها را دور میز دوران داد (یعنی با چرخاندن آنها دور میز حالت جدید حاصل نشود) برابر ۲ است و همان دو وضعیت 

و 

حال می‌خواهیم جواب مسئله را در حالت کلی برای n نفر به‌دست آوریم. یعنی تعداد نشستن‌های n نفر را به‌دست آوریم به‌طوری که حالت‌هایی که با چرخش به یکدیگر تبدیل می‌شوند یک‌بار شمرده شوند.

دقت کنید که اگر دوران حالت‌های مختلف (غیرمعادل) پدید می‌آوردند آنگاه تعداد حالت‌های نشستن آنها برابر $n!$ بود، زیرا n نفر و n مکان داشتیم. حال یک وضعیت دلخواه مانند 

را در نظر بگیرید. این وضعیت را دقیقاً n بار با دوران‌های $\left(\frac{360}{n}\right)$ درجه دوران دهیم (منظور آن است که افراد را دوران دهیم). پس به‌ازای هر وضعیت نشستن با انجام دوران، n وضعیت دیگر به‌وجود می‌آید و چون این وضعیت‌ها اساساً متفاوت نیستند. پس باید تعداد کل وضعیت‌ها، $n!$، را بر n تقسیم کنیم، زیرا هر حالت را n برابر شمرده‌ایم پس پاسخ برابر خواهد بود با $(n-1)! = \frac{n!}{n}$.

به این نوع جایگشت، یعنی جایگشت تعداد k شی دور یک میز دایره‌ای شکل به‌طوری که دوران آنها حول میز حالت جدیدی محسوب نشود را **جایگشت دوری k شیء** می‌گویند توجه کنید که در بالا، تعداد جایگشت دوری ۳تایی را به‌دست آوریم. البته می‌توان گفت که اگر $n = 3$ آنگاه $(n-1)! = 2! = 2$.

حال فرض کنید که n شیء در دست داریم و می‌خواهیم rتا از آنها را $(0 \leqslant r \leqslant n)$ دور یک دایره قرار دهیم. در صورتی که دوران حالت جدیدی ایجاد نکند به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ تعداد چنین چیدمان‌هایی را **تبدیل دوری rشی از n شی** می‌نامند و آن را با نماد Q_r^n نمایش می‌دهند. توجه کنید که مطابق مطلبی که بیان شد داریم $Q_n^n = (n-1)!$ اگر بخواهیم برای Q_r^n فرمول صریحی برحسب r, n به‌دست آوردیم مطابق استدلال قبل اگر دوران‌ها حالت‌های جدید ایجاد می‌کردند، تعداد کل چیدمان‌ها برابر با P_r^n می‌شد (چون n شی و r مکان بودند). اما در هر

وضعیتی که r شی دور دایره قرار گیرند، چون می‌توان آنها را r بار دوران داد، پس هر حالت در P_r^n، r بار شمرده شده است. بنابراین داریم:

$$\boxed{Q_r^n = \frac{P_r^n}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r}}$$

مثال ۱۳.۱ می‌خواهیم جدول ۳ × ۳ شکل مقابل را با رنگ‌های ۱، ۲، . . .، ۳

رنگ کنیم مانند این حالت

۵	۴	۶
۲	۷	۳
۱	۸	۹

. اگر دوران جدول مجاز باشد (دوران‌ها 90° هستند بنابراین هر رنگ‌آمیزی را می‌توان چهاربار دوران داد) و حالت جدیدی محسوب نشوند به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

راه‌حل. توجه کنید که بنابر شرط مسئله

۱	۲	۵
۸	۷	۴
۹	۳	۶

با جدول قبلی معادل است و یکی به حساب می‌آیند. باز هم مشابه حالت قبل عمل می‌کنیم. اگر با دوران حالت جدیدی به‌دست می‌آمد به !۹ طریق می‌توانستیم رنگ‌آمیزی را انجام دهیم (۹ مکان و ۹ رنگ) اما ما هر حالت را ۴ بار شمرده‌ایم. پس جواب مساله‌ی ما در اینجا برابر $\frac{9!}{4}$ خواهد بود.

نکته ۱۴.۱ این ایده که در مسائل شمارشی ابتدا بدون هیچ قیدی، کاملاً آزادانه شمارش را انجام دهیم و حاصل را بر عددی تقسیم کنیم (عددی که هر حالت را به آن تعداد شمرده‌ایم)، علی‌رغم سادگی آن، ایده‌ای پرکاربرد در حل مسائل شمارشی است. برای نمونه به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۵.۱ با سه حرف a، دو حرف b و چهار حرف c چند کلمه می‌توان ساخت؟ باید دقت کرد که جابجایی خود حروف a، کلمه جدیدی ایجاد نمی‌کند همچنین این حرف در مورد حرف c, b صادق است، زیرا حرف a با یکدیگر تفاوت ندارند bها نیز با هم یکسان‌اند و همچنین cها.

راه‌حل. اگر تمام aها و bها و cها متمایز بودند، از آنجا که مقدار آنها ۹ = ۴ + ۲ + ۳ است جواب مسئله برابر با !۹ می‌شد. حال یک کلمه دلخواه مانند $abcacaccb$ را در نظر بگیرید. خود aها با هم به !۳ طریق جابجا می‌شوند. پس جابجایی aها که کاری غیرمجاز بود تعداد شمارش شده را !۳ برابر کرده است. همچنین جایگشت bها تعداد شمارش شده را !۲ و جایگشت‌های cها تعداد شمارش شده را !۴

برابر کرده است. بنابراین پاسخ مسئله برابر است با $\frac{9!}{2!3!4!}$.

برای آشنایی بیشتر با این تکنیک به تمرین‌های آخر همین فصل مراجعه کنید.

۳.۱ ترکیب

در بخش‌های قبل با مفاهیم تبدیل‌ها و تبدیل‌های دوری آشنا شدیم. هرکدام از آنها به نوعی به نحوه‌ی قرارگرفتن اشیا (در صف و یا دور دایره) وابسته بود.

درکنار مفهوم تبدیل (معمولی و یا دوری)، مفهومی به‌نام **ترکیب** وجود دارد که در آن نحوه‌ی قرارگیری اشیا اهمیت ندارد، بلکه مجموعه‌ی خود آن اشیا برای ما مهم هستند. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۶.۱ فرض کنید A، B، C و D چهار نفر باشند که می‌خواهیم دو نفر از آنها را به‌عنوان نماینده انتخاب کنیم (توجه کنید که ترتیب آنها مهم نیست). به چند طریق می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟

راه‌حل. با یک بررسی ساده می‌توان مشاهده کرد که تعداد حالاتی که در آن ۲ نفر به‌عنوان نماینده انتخاب شده‌اند عبارت است از: $\{A,B\},\{A,C\},\{A,D\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\}$ که مجموعاً ۶ حالت می‌شود (توجه کنید که منظور از مثلاً $\{B,D\}$ حالتی است که افراد B و D انتخاب شده‌اند. اما آیا روشی وجود دارد که بتوان مسئله را در حالت کلی‌تر و آسان‌تر حل کرد؟ در ادامه به این سؤال پاسخ می‌دهیم و نشان می‌دهیم که جواب این سؤال مثبت است.

مثال ۱۷.۱ فرض کنید n شیء داریم و می‌خواهیم rتا از آنها را انتخاب کنیم (مثلاً n سنگ‌ریزه داریم و می‌خواهیم rتا از آنها را انتخاب کنیم و درکیسه بریزیم و البته در داخل کیسه ترتیب مهم نیست!) به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ دقت کنید که این مثال تعمیم مثال قبل است: n فرد هستند و می‌خواهیم r نماینده از میان آنها انتخاب کنیم.

راه‌حل. برای این کار مشابه کاری را که برای محاسبه‌ی تبدیل‌های دوری r شیء از n شیء کردیم انجام خواهیم داد. اگر r شی‌ای که انتخاب می‌کنیم نسبت به یکدیگر ترتیب داشتند و جایگشت‌های مختلف آنها به حساب می‌آمد دقیقاً پاسخ مسئله تبدیل r شی از n شی یعنی برابر با P_r^n بود. حال یک حالت دلخواه از r شی انتخاب شده از r شیء مانند $(x_2x_4,\dots,x_r)$ را در نظر بگیرید؟ در جوابی که ما به دنبال آن هستیم با جابجایی این اشیا نباید حالت جدیدی به‌دست آید، چون نسبت به یکدیگر ترتیب **نداشتند**. از آنجا که تعداد این اشیا x_1، x_2، ... ، x_r، rتاست، به $r!$ طریق با خودشان جابجا می‌شوند (جایگشت‌های r شیء). بنابراین هر حالت $\{x_r، \dots، 1 - x\}$ را در P_r^n، $r!$بار

شمرده‌ایم. پس تعداد راه‌های انتخاب r شیء برابر است با

$$\frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

بنابراین اگر $n = ۴$ و $r = ۲$ پاسخ مثال ۹ به‌دست می‌آید: $۶ = \frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۱\times۲\times۱} = \frac{۴!}{۲!۲!}$.

تعداد راه‌های انتخاب r شیء از n شیء را ترکیب r شیء از n شیء می‌نامیم و با نماد C_r^n و یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم. از آنجا که نمایش $\binom{n}{r}$ متداول‌تر است از این نماد استفاده می‌کنیم

$$\boxed{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

توجه کنید که $\binom{n}{r}$ درواقع برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های rعضوی یک مجموعه‌ی nعضوی دلخواه، چون هر زیرمجموعه‌ی rعضوی نشان‌دهنده‌ی یک ترکیب rتایی است.

نکته ۱۸.۱ الف) $\binom{n}{n}$ برابر تعداد زیرمجموعه‌های nعضوی از یک مجموعه‌ی nعضوی است، که به‌وضوح برابر ۱ می‌باشد. طبق فرمول هم داریم:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\circ!} = ۱$$

ب) $\binom{n}{\circ}$ برابر با تعداد زیرمجموعه‌های صفرعضوی یک مجموعه‌ی nعضوی است و تنها زیرمجموعه‌ی صفرعضوی، مجموعه‌ی تهی است، پس $\binom{n}{\circ} = ۱$ و درضمن طبق فرمول هم داریم:

$$\binom{n}{\circ} = \frac{n!}{\circ!n!} = ۱$$

ج) اگر $r > n$: واضح است که نمی‌توان از یک مجموعه‌ی nعضوی بیشتر از n عضو انتخاب کرد. بنابراین در این حالت $\binom{n}{r} = \circ$.

مثال ۱۹.۱ (**اتحاد پاسکال**). نشان دهید $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

راه‌حل. برای این مسئله ۲ راه‌حل ارائه می‌دهیم:
الف) راه‌حل جبری.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \binom{n}{n-r}$$

ب) راه‌حل ترکیبیاتی. نشان می‌دهیم که تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی با تعداد زیرمجموعه‌های $(n-r)$ عضوی آن برابر است. برای این کار هر زیرمجموعه‌ی r عضوی را با مکمل‌اش که $(n-r۰)$ عضوی است نظیر می‌کنیم. به این ترتیب تمام زیرمجموعه‌های r عضوی و $(n-r)$ عضوی دوبه‌دو جفت می‌شوند. دقت کنید که هر مجموعه‌ی r عضوی و $(n-r)$ عضوی دقیقاً یک نظیر یکتا دارند و اگر زیرمجموعه‌ی r عضوی A مکمل زیرمجموعه‌ی $(n-r)$ عضوی B باشد آنگاه A و B با یکدیگر نظیرند و هیچ زیرمجموعه‌ی دیگری با A و یا B نظیر نخواهند شد که به خاطر یکتایی مکمل است. بنابراین نتیجه می‌گیریم $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

نکته ۲۰.۱ این شیوه‌ی نظیرکردن و یا جفت‌کردن مانند این مثال است که تعدادی دانش‌آموز و صندلی داریم و می‌دانیم که هر دانش‌آموز روی یک صندلی نشسته است و روی هر صندلی دقیقاً یک دانش‌آموز نشسته است. در این صورت واضح است که تعداد دانش‌آموزان و تعداد صندلی‌ها برابر است.

مثال ۲۱.۱ نشان دهید $\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$.

راه‌حل. برای این مسئله نیز دو راه‌حل ارائه می‌دهیم:

الف) راه‌حل جبری.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} \\
&= \frac{(r+1)n!}{\underbrace{(r+1)r!}_{(r+1)!}\cdot(n-r)!} + \frac{n!(n-r)}{(r+1)!\underbrace{(n-r-1)!(n-r)}_{(n-r)!}} \\
&= \frac{n!}{(r+1)!(n-r)!}(r+1+n-r) \\
&= \frac{(n+1)!}{(r+1)!(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!((n+1)-(r+1))!} = \binom{n+1}{r+1}
\end{aligned}$$

ب) راه‌حل ترکیبیاتی. $\binom{n+1}{r+1}$ برابر با تعداد زیرمجموعه‌های $r+1$ عضوی از مجموعه‌ی $X = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ است. حال تعداد زیرمجموعه‌های $r+1$ عضوی X را به طریق دیگری می‌شماریم. هر زیرمجموعه‌ی $(r+1)$ عضوی X یا عنصر ۱ را دارد و یا اینکه ندارد. پس طبق اصل

جمع داریم:

$$\binom{n+۱}{r+۱} = \left(\begin{array}{l}\text{تعداد زیرمجموعه‌های } r+۱ \text{ عضوی}\\ X \text{ که عنصر ۱ را دارند}\end{array}\right)\left(\begin{array}{l}\text{تعداد زیرمجموعه‌های } r+۱ \text{ عضوی}\\ X \text{ که عنصر ۱ را ندارند}\end{array}\right)$$

- تعداد زیرمجموعه‌های $r+۱$ عضوی که ۱ را دارند: هر زیرمجموعه‌ی $r+۱$ عضوی که عنصر ۱ را دارد، غیر از عضو ۱، r عنصر دیگرش باید از مجموعه‌ی $\{۲,۳,\ldots,n+۱\}$ که n عضو دارد انتخاب شوند. پس تعداد زیرمجموعه‌های $r+۱$ عضوی X که ۱ را دارند برابر است با $\binom{n}{r}$.
- تعداد زیرمجموعه‌های $r+۱$ عضوی که ۱ را ندارند: هر زیرمجموعه‌ی $r+۱$ عضوی که عضو ۱ را ندارد، تمام $(r+۱)$ عضواش باید از مجموعه‌ی $\{۲,۳,\ldots,n+۱\}$ انتخاب شود. بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های $r+۱$ عضوی X که ۱ را ندارند برابر $\binom{n}{r+۱}$ است.

حال نتیجه می‌گیریم که

$$\binom{n+۱}{r+۱} = \binom{n}{r} + \binom{n+۱}{r+۱}$$

در این راه‌حل از تکنیکی به‌نام «دو گونه شماری» استفاده کردیم. یعنی یک دسته از اشیا را دوبار می‌شماریم و هر بار با یک نگاه متفاوت و چون عملاً یک چیز را می‌شماریم تعدادی که در یک روش به‌دست می‌آید با تعداد به‌دست آمده در روش دیگر برابر است.

در مثال‌های بعدی باز هم از دوگونه‌شماری استفاده می‌کنیم و بیشتر با آن آشنا می‌شویم.

مثال ۲۲.۱ عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$S = \binom{۲}{۲} + \binom{۳}{۲} + \binom{۴}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲}$$

راه‌حل. با استفاده از برابری $\binom{۲}{۲} = \binom{۳}{۳} = ۱$، S را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} S &= \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲} = \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۲} + \cdots + \binom{n}{۲} \\ &= \cdots = \binom{n}{۳} + \binom{n}{۲} = \binom{n+۱}{۳} \end{aligned}$$

با استفاده مکرر از اتحاد پاسکال خواهیم داشت $\binom{۴}{۳} = \binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۳}$ و $\binom{۵}{۳} = \binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳}$ و به همین ترتیب، بنابراین $S = \binom{n+۱}{۳}$.

مثال ۲۳.۱ نشان دهید $k\binom{n}{k} = n\binom{n-۱}{k-۱}$.

راه‌حل. برای این سؤال ۲ راه‌حل ارائه می‌دهیم.
الف) راه‌حل جبری.

$$n\binom{n-۱}{k-۱} = n \cdot \frac{(n-۱)!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-۱)!(n-k)!} = \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-۱)!(n-k)!}$$
$$= k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\binom{n}{k}$$

ب) راه‌حل ترکیبیاتی (دوگونه‌شماری). فرض کنید از یک جمع n نفری می‌خواهیم، k نفر از آنها را انتخاب کنیم تا یک تیم فوتبال تشکیل دهند و از میان خودشان یک نفر را به‌عنوان کاپیتان معرفی کنید. قصد داریم که ببینیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد. برای این منظور تعداد حالت‌ها را به دو طریق محاسبه می‌کنیم:

- ابتدا به $\binom{n}{k}$ طریق یک تیم k نفری تشکیل می‌دهیم و سپس به k طریق یک کاپیتان برای آن تیم تعیین می‌کنیم. پس تعداد حالات برابر است؛ $k \times \binom{n}{k}$.
- ابتدا یک نفر را به‌عنوان کاپیتان، به n طریق، انتخاب می‌کنیم. سپس $(k-۱)$ نفر را از میان $n-۱$ نفر باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم تا با او تشکیل یک تیم k نفری را دهند. بنابراین تعداد حالات برابر است با $n\binom{n-۱}{k-۱}$.

از آنجا که در هر دوبار یک چیز را شمردیم نتیجه می‌گیریم: $n\binom{n-۱}{k-۱} = k\binom{n}{k}$.

مثال ۲۴.۱ فرض کنید در شهری می‌خواهیم از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم. نقشه‌ی خیابان‌های شهر مطابق شکل زیر است. درضمن می‌خواهیم کوتاه‌ترین مسیر را بپیماییم. بنابراین در خیابان‌ها فقط به سمت بالا و یا راست حرکت می‌کنیم (توجه کنید که کوتاه‌ترین مسیر یکتا نیست). چون ابعاد این نقشه‌ی شبکه‌ای $(m+۱) \times (n+۱)$ است. برای رفتن از A به B، نهایتاً تعداد حرکت‌های به سمت بالای ما n بار و تعداد حرکات به سمت راست m بار است. حال می‌خواهیم تعداد چنین مسیرهایی را پیدا کنیم.