۲

بخش‌پذیری

بخش ۱. تعریف

بخش‌پذیری همان مفهومی را دارد که از دوران راهنمایی به‌یاد دارید. اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $b \neq 0$، می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است، هرگاه اگر a را بر b تقسیم کنیم به باقیماندهٔ صفر برسیم. برای مثال، ۱۸ بر ۹ بخش‌پذیر است. براساس همین مفهوم می‌خواهیم تعریفی معادل از بخش‌پذیری بیان کنیم.

تعریف. فرض کنید a و b اعدادی صحیح باشند و $b \neq 0$. می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است هرگاه عددی صحیح مانند q موجود باشد به‌طوری که $a = bq$. در این صورت q را خارج‌قسمت تقسیم a بر b می‌نامیم.

بنابراین از این به‌بعد برای اینکه بخش‌پذیری a بر b را ثابت کنیم، عددی صحیح مانند q می‌یابیم یا ثابت می‌کنیم وجود دارد به‌طوری که تساوی $a = bq$ برقرار باشد.

مثال ۱.۲ $1000^2 - 1$ بر ۹۹۹ بخش‌پذیر است زیرا $1000^2 - 1 = 999 \times 1001$، در این مثال $1000^2 - 1$، ۹۹۹ و ۱۰۰۱ به‌ترتیب نقش a، b و q در تعریف بخش‌پذیری را دارند. ▲

مثال ۲.۲ 75^{10} بر 3^{10} بخش‌پذیر است زیرا $75^{10} = 3^{10} \times 25^{10}$. ▲

نکته. به تساوی $11 = 2 \times 5/5$ توجه کنید. از این تساوی نمی‌توان نتیجه گرفت که ۱۱ بر ۲ بخش‌پذیر است، زیرا ۵/۵ عددی صحیح نیست.

بخش ۲. اعداد زوج و اعداد فرد

مجموعهٔ $\{۲, ۴, ۶, ۸, \ldots\}$ را مجموعهٔ اعداد زوج می‌نامند. اعداد زوج اعدادی‌اند که بر ۲ بخش‌پذیرند: $۱ \times ۲ = ۲$، $۲ \times ۲ = ۴$، $۳ \times ۲ = ۶$ و $\ldots$. درحقیقت، هر عدد زوج عددی به‌شکل $۲ \times k$ است که k عضوی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ است. هر عددی را که زوج نباشد، فرد می‌نامیم. مجموعهٔ اعداد فرد برابر است با $\{۱, ۳, ۵, ۷ \ldots\}$. اعداد فرد در تقسیم بر ۲ باقیماندهٔ صفر ندارند، پس باقیماندهٔ یک دارند. این اعداد به‌شکل $۲k + ۱$اند که k عضوی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ است.

حاصل‌جمع هر دو عدد زوج، عددی زوج است زیرا اگر این دو عدد $۲r$ و $۲s$ باشند، $۲r + ۲s = ۲(r+s)$ که عددی زوج است. حاصل‌جمع هر دو عدد فرد نیز عددی زوج است زیرا اگر این دو عدد $۲r + ۱$ و $۲s + ۱$ باشند، $(۲r+۱) + (۲s+۱) = ۲(r+s+۱)$ که عددی زوج است. حاصل‌جمع عددی فرد و عددی زوج، عددی فرد است (به تساوی $(۲r) + (۲s+۱) = ۲(r+s) + ۱$ توجه کنید). حاصل‌ضرب هر تعداد عدد فرد، عددی فرد است، زیرا

$$(۲r + ۱)(۲s + ۱) = ۴rs + ۲r + ۲s + ۱ = ۲(۲rs + r + s) + ۱$$

حاصل‌ضرب هر تعداد عدد، مثلاً دو عدد، اگر حداقل یکی از آن‌ها زوج باشد عددی زوج است، زیرا اگر آن عدد زوج را $۲r$ و عدد دیگر را t بنامیم آنگاه $(۲r)t = ۲(rt)$.

مثال ۳.۲ $۲^{۱۰} + ۱$ عددی فرد است زیرا $۲^{۱۰}$ عددی زوج و یک، عددی فرد است. ▲

مثال ۴.۲ $(۲^{۱۰} + ۱)^{۱۰}$ عددی فرد است زیرا حاصل‌ضرب ۱۰ عدد فرد است. ▲

مسئلهٔ ۵.۲ ثابت کنید که عددی صحیح مانند a وجود ندارد به‌طوری‌که $a^۴ + a^۳ + a^۲ + a = ۱۰۰۱$.

راه‌حل. a یا فرد و یا زوج است. در هر حال، حاصل‌جمع چهار عدد سمت چپ زوج است اما عدد سمت راست فرد است. ▲

نمادگذاری. وقتی a بر b بخش‌پذیر است، می‌نویسیم $b \mid a$. عبارت $b \mid a$ را به این شکل‌ها هم می‌توان خواند: «b، a را عاد می‌کند»، «b، a را می‌شمارد» و «b مقسوم‌علیه a است» و «b عاملی از a است». دو عبارت اول متداول‌ترند. اگر b، a را عاد نکند می‌نویسیم $b \nmid a$.

مثال ۶.۲ $۵۰ \mid ۳۰۰$، یا به‌عبارت دیگر ۵۰، ۳۰۰ را عاد می‌کند. $۹۹۹ \mid ۱۰۰۰^۲ - ۱$، یا به‌عبارت دیگر ۹۹۹، $۱۰۰۰^۲ - ۱$ را می‌شمارد. ▲

مثال ۷.۲ هر عدد ناصفر، خودش را عاد می‌کند، زیرا اگر a عددی صحیح و ناصفر باشد، $a = a \times ۱$ (چون بخش‌پذیری بر صفر نامفهوم است، a را ناصفر فرض می‌کنیم). توجه کنید که صفر بر هر عدد غیرصفر بخش‌پذیر است. ▲

مثال ۸.۲ $a^۲ + a$ بر a بخش‌پذیر است زیرا $a^۲ + a = a(a + ۱)$. ▲

بخش ۳. خواص بخش‌پذیری

خاصیت اول. اگر $a \mid b$ و $b \mid c$ آنگاه $a \mid c$.
یعنی اگر a بر b و b بر c بخش‌پذیر باشند، آنگاه a بر c بخش‌پذیر است. برای اثبات این مطلب می‌توان به این شکل عمل کرد: چون a بر b بخش‌پذیر است پس عددی صحیح مانند q موجود است که $a = bq$ و به‌دلیل بخش‌پذیری b بر c، $b = cq'$ که q' نیز عددی صحیح است. از دو تساوی اخیر می‌توانیم بنویسیم $a = c(qq')$ که اگر qq' را که عددی صحیح است q'' بنامیم، آنگاه $a = cq''$. پس بنابر تعریف بخش‌پذیری، $a \mid c$. این خاصیت به تَعَدّی موسوم است.

خاصیت دوم. اگر $a \mid b$ و $d \mid c$ آنگاه $bc \mid ad$.
یعنی اگر a بر b و d بر c بخش‌پذیر باشند آنگاه ad بر bc بخش‌پذیر است. برای اثبات می‌نویسیم $a = bq$ و $d = cq'$ که q و q' اعدادی صحیح‌اند. حالا طرفین دو تساوی را در هم ضرب می‌کنیم و می‌نویسیم $ad = bc(qq')$. پس از نام‌گذاری عدد صحیح qq' به q''، به‌دست می‌آوریم $ad = (bc)q''$ پس ad بر bc بخش‌پذیر است.

مثال ۹.۲ $۶ \mid ۳$ و $۱۸ \mid ۶$ پس بنابر خاصیت اول، $۱۸ \mid ۳$. ▲

مثال ۱۰.۲ $۸ \mid ۴$ و $۹ \mid ۳$ پس بنابر خاصیت دوم، $۷۲ \mid ۱۲$. ▲

خاصیت سوم. اگر $a \mid b$ و $c \mid b$ آنگاه $a + c \mid b$ و $a - c \mid b$.
یعنی اگر دو عدد مانند a و c بر b بخش‌پذیر باشند آنگاه حاصل‌جمع و حاصل تفریق آن‌ها نیز بر b بخش‌پذیر است. برای اثبات می‌نویسیم $a = bq$ و $c = bq'$، پس

$$a + c = bq + bq' = b(q + q') = bq''$$

که $q'' = q' + q'$. پس $a + c$ بر b بخش‌پذیر است. اثبات $a - c \mid b$ نیز مشابه اثبات بالاست، ولی با عمل تفریق.

خاصیت چهارم. اگر $a \mid b$ و k عددی صحیح باشد آنگاه $ak \mid b$.
یعنی اگر a بر b بخش‌پذیر باشد هر مضربی از a هم بر b بخش‌پذیر است. برای اثبات می‌نویسیم $a = bq$، پس $ak = bdk$، با نام‌گذاری qk بر q' به‌دست می‌آوریم $ak = bq'$ پس ak بر b بخش‌پذیر است. البته این خاصیت حالتی خاص از خاصیت دوم نیز هست، زیرا $a \mid b$ و $k \mid ۱$، اما به‌دلیل اهمیت این خاصیت، آن را جداگانه آوردیم.

مثال ۱۱.۲ اگر $a \mid b$ و $c \mid b$ و x و y دو عدد صحیح باشند آنگاه $b \mid az+cy$. درستی حکم بالا از خاصیت‌های سوم و چهارم معلوم می‌شود. ▲

مسئلهٔ ۱۲.۲ اگر $a \mid b$ آنگاه $a^۲ \mid b^۲$.

راه‌حل. برای اثبات حکم از خاصیت دوم با در نظر گرفتن دو رابطهٔ $a \mid b$ و $a \mid b$ استفاده می‌کنیم. ▲

با استفاده از دو رابطهٔ $a \mid b$ و $a^۲ \mid b^۲$ و خاصیت دوم رابطهٔ $a^۳ \mid b^۳$ به‌دست می‌آید. به‌همین اگر n عددی طبیعی باشد با استفادهٔ مکرر از خاصیت دوم، رابطهٔ $a^n \mid b^n$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۳.۲ بخش‌پذیری $a^۲+a$ بر a را می‌توان با استفاده از هر یک از خواص سوم و چهارم نیز بیان کرد. (چرا؟) ▲

مسئلهٔ ۱۴.۲ اگر a عددی طبیعی باشد ثابت کنید که $(۵^a+۱)^{۱۰}$ بر ۱۰۲۴ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. ۵^a فرد است پس $۵^a+۱$ زوج است، یعنی $۲k = ۵^a+۱$. پس $(۵^a+۱)^{۱۰} = ۲^{۱۰}k^{۱۰} = ۱۰۲۴k^{۱۰}$ و درنتیجه $۱۰۲۴ \mid (۵^a+۱)^{۱۰}$. ▲

مسئلهٔ ۱۵.۲ دو عدد صحیح مانند r و s مفروض‌اند، به‌طوری که $۲r+۳s$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $۹r+۵s$ نیز بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. بنابر فرض مسئله، $۱۷ \mid ۲r+۳s$. بنابر خاصیت چهارم $۱۷ \mid ۱۳(۲r+۳s)$ پس $۱۷ \mid ۲۶r+۳۹s$. چون $۱۷ \mid ۱۷(r+۲s)$، پس از تفریق دو رابطهٔ اخیر (خاصیت سوم) به‌دست می‌آوریم $۱۷ \mid (۲۶r+۳۹s)-(۱۷r+۳۴s)$ پس $۱۷ \mid ۹r+۵s$. ▲

مسئلهٔ ۱۶.۲ ثابت کنید که اگر $۲n+۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه $۹ \mid ۸n^۲+۲n-۱$.

راه‌حل. بنابر فرض، $۳ \mid ۲n+۱$ و چون $۳ \mid ۳n$، با تفریق دو رابطه به‌دست می‌آوریم $۳ | ۳n-(۲n+۱)$ یعنی $۳ \mid n-۱$، پس $n-۱ = ۳k$. یعنی $n = ۳k+۱$. بنابراین

$$\begin{aligned} ۸n^۲+۲n-۱ &= ۸(۳k+۱)^۲+۲(۳k+۱)-۱ \\ &= ۸\times۹k^۲+۴۸k+۸+۶k+۲-۱ \\ &= ۸\times۹k^۲+۵۴k+۹ = ۹(۸k^۲+۶k+۱) \end{aligned}$$

پس $۹ \mid ۸n^۲+۲n-۱$. ▲

مسئلهٔ ۱۷.۲ تمام اعداد صحیح مانند a را پیدا کنید به‌طوری که $a^۲+۱$ بر $a+۱$ بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. فرض کنید $a+۱ \mid a^۲+۱$. با استفاده از خاصیت چهارم نتیجه می‌شود $a+۱ \mid a(a+۱)$.

اکنون با استفاده از خاصیت تفاضل و این دو رابطه نتیجه می‌گیریم $a+1 \mid a-1$ از طرفی $a+1 \mid a+1$، پس مجدداً با استفاده از خاصیت سوم به‌دست می‌آوریم $a+1 \mid 2$ یعنی $a+1$ مقسوم‌علیهی از ۲ است پس $a+1=\pm 1$ یا $a+1=\pm 2$. درنتیجه مقادیر ممکن a عبارت‌اند از ۱، ۰، ۲− و ۳−. با جاگذاری این مقادیر، رابطهٔ $a+1 \mid a^2+1$ برقرار می‌شود. پس این رابطه دقیقاً به‌ازای مقادیر ۳−، ۲−، ۰ و ۱ برقرار است. ▲

نکته. اگر b و a دو عدد طبیعی باشند و $a \mid b$ آنگاه $a \leqslant b$. این مطلب اگر a و b منفی باشند درست نیست، مثلاً $2 \mid -4$ ولی ۲ از ۴− بزرگ‌تر است. درحقیقت اگر از علامت صرف‌نظر کنیم a کمتر از یا مساوی با b است.

مسئلهٔ ۱۸.۲ a و b دو عدد طبیعی‌اند و $a+b \mid a^2+b^2$، ثابت کنید که $a+b \leqslant 2a^2$.

راه‌حل. بنابر خاصیت چهارم، $a+b \mid (a+b)(a-b)$، پس $a+b \mid a^2-b^2$. با جمع این رابطه با رابطهٔ فرض مسئله به‌دست می‌آوریم $a+b \mid 2a^2$ پس $a+b \leqslant 2a^2$. ▲

مسئلهٔ ۱۹.۲ اگر a، b، c و d اعدادی طبیعی باشند و هر یک بر $ab-cd$ بخش‌پذیر باشد، ثابت کنید که $ab+cd=\pm 1$.

راه‌حل. بنابر فرض، $a \mid ab-cd$ و $b \mid ab-cd$ پس $ab \mid (ab-cd)^2$ (بنابر خاصیت دوم)، درضمن به‌طور مشابه نتیجه می‌شود $cd \mid (ab-cd)^2$. اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم به‌دست می‌آوریم $ab-cd \mid (ab-cd)^2$. یعنی اگر فرض کنیم $n=ab-cd$ آنگاه $n \mid n^2$. یعنی n بر مربع خودش بخش‌پذیر است. تنها حالت ممکن با شرط $n \mid n^2$، $n=\pm 1$ است، در نتیجه $ab-cd=\pm 1$. ▲

توجه. در اینجا به بعضی اشتباه‌های رایج در مورد بخش‌پذیری اشاره می‌کنیم.

- از دو رابطهٔ $a \mid b$ و $c \mid d$ نمی‌توان نتیجه گرفت $a+c \mid b+d$ به‌عنوان مثال، $2 \mid 4$ و $3 \mid 9$ ولی ۱۳ بر ۵ بخش‌پذیر نیست.
- از رابطهٔ $a \mid b$ نمی‌توان نتیجه گرفت که اگر k عددی صحیح باشد آنگاه $a+k \mid b+k$، به‌عنوان مثال $2 \mid 4$ ولی اگر به طرفین عدد یک را اضافه کنیم نتیجه می‌شود ۵ بر ۳ بخش‌پذیر است که غلط است.
- از روابط $r \mid s$ و $t \mid s$ نمی‌توان نتیجه گرفت $t+r \mid s$. مثلاً $2 \mid 4$ و $4 \mid 4$، اما ۴ بر ۶ بخش‌پذیر نیست.

بخش ۴. چند اتحاد مهم

اتحادهای زیر را احتمالاً درکتاب ریاضی سال اول دبیرستان دیده‌اید.

- $(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$
- $(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$
- $(a-b)(a+b)$ (اتحاد مزدوج)
- $(a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳$
- $a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)$
- $a^۳ - b^۳ = (a-b)(a^۲ + ab + b^۲)$

دو اتحاد آخر به اتحادهای چاق‌ولاغر معروف‌اند! تعمیم این دو اتحاد به شکل زیر است:

تعمیم اتحاد چاق‌ولاغر. اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-۱} + x^{n-۲} + x^{n-۳}y^۲ + \cdots + y^{n-۱})$$

و اگر n فرد باشد آنگاه

$$x^n + y^n = (x+y)(x^{n-۱} - x^{n-۲} + x^{n-۳}y^۲ - \cdots + y^{n-۱})$$

برای اثبات دو اتحاد اخیر کافی است عبارات داخل دو پرانتز را در یکدیگر ضرب و سپس حاصل را ساده کنیم.

تعریف ۲۰.۲ اگر m عددی طبیعی باشد، حاصل‌ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا m را با $m!$ نشان می‌دهیم و آن را «m فاکتوریِل» می‌خوانیم و درضمن تعریف می‌کنیم $۰! = ۱$.

اگر i و n اعدادی صحیح و نامنفی باشند و $i \leq n$، تعریف می‌کنیم $\binom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ (بخوانید «i از n»). اتحاد زیر که به بسط دوجمله‌ای موسوم است، برقرار است.*

اتحاد (بسط دوجمله‌ای). اگر n عددی طبیعی باشد آنگاه

$$(x+y)^n = \binom{n}{۰}x^n + \binom{n}{۱}x^{n-۱}y + \binom{n}{۲}x^{x-۲}y^۲ + \cdots + \binom{n}{n-۱}xy^{n-۱} + \binom{n}{n}y^n$$

برای خواندن اثبات این اتحاد می‌توانید به کتاب‌های جبر و یا ترکیبیات مراجعه کنید.

*. این ضرایب را ریاضی‌دانان چین و نیز خیام ریاضی‌دان ایرانی دورهٔ اسلامی و پاسکال و نیوتن می‌دانسته‌اند؛ با این حال این بسط به **بسط دوجمله‌ای نیوتن** معروف شده است.

مثال ۲۱.۲ اگر در اتحاد بالا فرض کنیم $n=۴$، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}(x+y)^۴ &= \binom{۴}{۰}x^۴+\binom{۴}{۱}x^۳y+\binom{۴}{۲}x^۲y^۲+\binom{۴}{۳}xy^۳+\binom{۴}{۴}y^۴\\ &= x^۴+۴x^۳y+۶x^۲y^۲+۴xy^۳+y^۴\end{aligned}$$

▲

اگر فرض کنیم $n=۲,۳$ آنگاه اتحادهای صفحهٔ قبل به‌دست می‌آیند.

مسئلهٔ ۲۲.۲ ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $۹^n-۱$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

راه‌حل.

$$۹^n-۱=(۹-۱)(۹^{n-۱}+۹^{n-۲}+\cdots+۹+۱)=۸q$$

که q عبارت داخل پرانتز دوم است. پس $۸\mid ۹^n-۱$. ▲

مسئلهٔ ۲۳.۲ رابطهٔ $۸\mid ۹^n-۱$ را با استفاده از بسط دوجمله‌ای اثبات کنید.

راه‌حل.

$$۹^n=(۸+۱)^n=۸^n+\binom{n}{۱}۸^{n-۱}+\cdots+\binom{n}{n-۱}۸+۱$$

و در نتیجه

$$۹^n-۱=۸^n+\binom{n}{۱}۸^{n-۱}+\cdots+\binom{n}{n-۱}۸=۸q$$

▲

مسئلهٔ ۲۴.۲ p و q دو عدد فرد متوالی‌اند. ثابت کنید $p+q\mid p^q+q^p$.

راه‌حل. اگر فرض کنیم $p<q$ آنگاه $q=p+۲$. از طرفی

$$p^q+q^p=p^{p+۲}-p^p+p^p+q^p$$

چون p فرد است پس p^p+q^p بنابر تعمیم اتحاد چاق‌ولاغر بر $p+q$ بخش‌پذیر است. ضمناً

$$p^{p+۲}-p^p=p^p(p^۲-۱)=p^p(p-۱)(p+۱)$$

چون $p-۱$ زوج است پس $p^{p+۲}-p^p$ بر $۲(p+۱)$ بخش‌پذیر است اما $p+q=۲(p+۱)$، پس $p+q\mid p^{p+۲}-p^p$ و قبلاً نتیجه گرفتیم که $p+q\mid p^p+q^p$. پس بنابر خاصیت سوم بخش‌پذیری نتیجه می‌شود $p+q\mid p^q+q^p$. ▲

نمونه۲، مهری ۸۷/۱/۱۹

مسئلهٔ ۲۵.۲ ثابت کنید اعدادی فرد مانند a، b و c وجود ندارد به‌طوری که

$$(a+b)^۲+(a+b)^۲=(b+c)^۲$$

راه‌حل. با ساده کردن تساوی بالا می‌توانیم بنویسیم $a^۲+ab+ac=bc$. اگر به طرفین bc را اضافه کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} a^۲+ab+ac+bc &= ۲bc \\ a(a+b)+c(a+b) &= ۲bc \\ (a+b)(a+c) &= ۲bc \end{aligned}$$

چون a، b و c فردند پس $a+b$ و $a+c$ زوج‌اند. آن‌ها را به‌ترتیب $۲r$ و $۲s$ بنامید. در این‌صورت $(۲r)(۲s)=۲bc$ پس $bc=۲rs$ که تناقض است زیرا bc فرد است. پس اعدادی فرد که در شرط ذکرشده در صورت مسئله صدق کنند، وجود ندارند. ▲

مسئلهٔ ۲۶.۲ تمام اعداد طبیعی مانند n را بیابید به‌طوری که $n!+۳=۳^{n-۱}$.

راه‌حل. فرض کنید $n!+۳=۲^{n-۱}$ اگر $n\geqslant ۶$ آنگاه $۹\mid n!$ و $۹\mid ۳^{n-۱}$ پس $۹\mid ۳^{n-۱}-n!$ درنتیجه $۹\mid ۳$ که ممکن نیست. بنابراین $n<۶$. یعنی n عضو مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است. با آزمایش این اعداد دیده می‌شود که فقط $n=۳$ و $n=۴$ جواب‌اند. ▲

مسئلهٔ ۲۷.۲ اگر a و b دو عدد فرد باشند آنگاه $a^۸-b^۸$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. بنابر اتحاد مزدج

$$a^۸-b^۸=(a^۴+b^۴)(a^۲+b^۲)(a+b)(a-b)$$

و چون a و b فردند عبارت داخل هر یک از پرانتزها زوج است. بنابراین $a-b=۲r$، $a+b=۲s$، $a^۲+b^۲=۲t$ و $a^۴+b^۴=۲u$. درنتیجه $a^۸-b^۸=۱۶rstu$ پس $a^۸-b^۸$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است. ▲

مسئلهٔ ۲۸.۲ ثابت کنید که اگر $۳^n+۲^n$ بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد آنگاه n بر ۵ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. فرض کنید $۲۵\mid ۲^n+۳^n$. واضح است که $n\geq ۲$. ابتدا ثابت می‌کنیم که n فرد است.

می‌توانیم بنویسیم

$$۲^n + ۳^n = ۲^n + (۵ - ۲)^n = ۲^n + ۵^n - \binom{n}{۱} ۵^{n-۱} \times ۲ + \cdots + (-۱)^{n-۱} \binom{n}{n-۱} ۵ \times ۲^{n-۱} + (-۲)^n$$

چون بنابر فرض، $۲۵ \mid ۲^n + ۳^n$ پس $۵ \mid ۲^n + ۳^n$ و درنتیجه با توجه به تساوی بالا، $۲^n + (-۲)^n$ بر ۵ بخش‌پذیر است که زمانی درست است که n فرد باشد.

اکنون با توجه به تساوی بالا، $(-۱)^{n-۱} \binom{n}{n-۱} ۵ \times ۲^{n-۱}$ باید بر ۲۵ بخش‌پذیر باشد که چون $\binom{n}{n-۱} = n$ پس n باید مضرب ۵ باشد. ▲

مسئلهٔ ۲۹.۲ تمام اعدادی را بیابید که می‌توان آن‌ها را به‌شکل حاصل تفاضل دو مربع کامل نوشت.

راه‌حل. $۲n + ۱ = (n + ۱)^۲ - n^۲$، پس هر عدد فرد به‌شکل تفاضل دو مربع کامل هست. از طرفی $۴n = (n + ۱)^۲ - (n - ۱)^۲$ پس مضارب ۴ نیز تفاضل دو مربع کامل‌اند. تنها اعدادی باقی می‌مانند که به‌شکل $۴k + ۲$اند که در اینجا k عددی صحیح است. ثابت می‌کنیم که این اعداد به‌شکل تفاضل دو مربع کامل نیستند. فرض کنید این‌طور نباشد و $n = ۴k + ۲$. یعنی فرض کنید اعدادی صحیح مانند a و b وجود داشته باشند به‌طوری که $۴k + ۲ = a^۲ - b^۲$. پس $۴k + ۲ = (a - b)(a + b)$. توجه کنید که $a - b$ و $a + b$ یا هر دو زوج‌اند یا هر دو فردند و چون حاصل‌ضرب آن‌ها زوج است پس هر دو زوج‌اند، مثلاً $a - b = ۲r$ و $a + b = ۲s$، پس $۴k + ۲ = ۴rs$ که تناقض است، زیرا از این تساوی نتیجه می‌شود $۲k + ۱ = ۲rs$. پس به‌جز اعدادی که به‌شکل $۴k + ۲$اند، بقیهٔ اعداد طبیعی تفاضل دو مربع کامل‌اند. ▲