

مقدمه ناشر

می خواستم یه مقدمه بلندبالا بنویسم راجع به «آمار و احتمال و گسسته و اهمیت آن در زندگی امروز...!!» می خواستم بگم: توو این دوره زمونه تا دکمه کنترل تلویزیون رو می زنی، چندتا آدم می بینی نشستن دور هم دارن آمار می دن و براساس آماراشون، پیش بینی می کنن و احتمال می دن که فلان می شه و بهمان می شه. روزنامه، اینستاگرام، تلگرام، صفحات مجازی و ... پر از آمار و احتمال های رنگارنگه. دیگه همه یادگرفتن چندتا عدد بدن و نمودار بکشن و بعد بگن فقط منم که راست می گم، اصلاً من خوبم!

توو همین فکر بودم که مقدمه مؤلفا رسید به دستم. دیدم اوووه چه دل پری دارن مؤلفامون! جا نداشتن چار کلوم هم ما با شما اختلاط کنیم. برای همین با شعر قیصر امین پور مقدمه رو ناموم می ذارم و حرفام رو می ذارم برا یه وقت خوب که بشینیم دور هم چای و بیسکویت بخوریم و گپ بزنیم:

ما در عصر احتمال به سر می بریم

در عصر شک و شاید

در عصر پیش بینی وضع هوا

از هر طرف که باد بپاید

در عصر قاطعیت تردید

عصر دید

عصری که هیچ اصلی

بجز اصل احتمال، یقینی نیست

اما من

بی نام تو

هتی

یک لفظه احتمال ندارم.

خیلی خیلی ممنونم از مؤلفای دوست داشتنی این کتاب عطا صادقی و مصطفی دیداری، مسئول پروژه های واحد تألیف، خانم هدی ملک پور، خانم ملیکا مهری و خانم ریحانه محمدی نژاد و ویراستارای خوبمون و همکارای پرتوان در تولید؛ دم همتون گرم.

... فطوط را راها فواهم کرد // و هم پنین شمارش اعداد را راها فواهم کرد
 و از میان شکل های هندسی محدود // به پونه های وسیع پناه فواهم برد...

1 شاید برای شما عجیب باشد چرا یک مؤلف کتاب های ریاضی و معلم ریاضیات گسسته - که یکی از مباحث آن نظریه اعداد است - مقدمه کتابش را با شعری از فروغ فرخزاد شروع کند که در آن آمده «شمارش اعداد را راها فواهم کرد» دلیل آن ساده است، به خاطر آن که ریاضیات، که از قضا خیلی هم دوستش دارم، همه زندگی من نیست، بلکه بخشی از آن است. کل این کتاب هم در مورد ریاضی است، بنابراین این یک مقدمه را دیگر نمی خواهم درباره ریاضی حرف بزنم.

2 کنکور در جای خودش مهم است. در سرنوشت شما تا حدی تأثیر دارد و اگر دانشگاه خوبی بروید و رشته ای که دوست دارید بخوانید - البته آگه واقع بدانید چه چیزی را دوست دارید - احتمالاً در زندگی تان آدم موفق تری خواهید شد. اما کنکور و دانشگاه همه چیز نیست و چیزهای خیلی خیلی مهم تری هم وجود دارد. همیشه سعی کرده ام توی کلاس هایم، اگر فرصتی پیش بیاید، به جز درس از چیزهای دیگری هم حرف بزنم، فیلم ها و کتاب های خوبی که تازگی دیده ام و خوانده ام را به بچه ها معرفی کنم. تماشای تئاترهای خوبی که رفته ام و هنوز روی صحنه است را به آن ها پیشنهاد کنم و ...

کنکور تمام می شود و می رود و من حتی اگر معلم خوبی باشم، در زمینه کنکور فقط برای یک سال می توانم به دانش آموزهایم کمک کنم، اما بعضی نوشته ها، نقاشی ها و طرح ها، موسیقی ها، نمایش ها، شعرها، فیلم ها و کتاب ها ممکن است در کل زندگی یک نفر اثرگذار باشد. من خودم بخشی بزرگ از زندگی ام را مدیون خوانده ها، دیده ها و شنیده هایم هستم. به نظر من بسیار مهم است که آدم چند بعدی باشد در زندگی اش و فقط در یک شاخه پیش نرود، که بداند دنبال چه چیزی می گردد و رؤیاهایش را فراموش نکند.

3 محمد یعقوبی که به نظر من یکی از بهترین نمایش نامه نویسی های معاصر است و بیشتر کارهایش را دوست دارم، نمایش نامه ای دارد به نام «ماه در آب» که در بخشی از آن یکی از شخصیت های نمایش می گوید: «مادرم یادداشت اون روزش رو با یه سؤال شروع کرده. کیه که حتی به بار آرزو نکرده باشه، کاش می توانست همه چیز رو بذاره بره و یه زندگی دیگه رو شروع کنه؟»

یادداشت های مادرم رو می خونم و می بینم من هم مثل پدرم اهل خداحافظی ام. اولین خداحافظی با مادرم بود. بعد با پسر می که می گفت عاشقمه خداحافظی کردم، بعد با کشوری که توش به دنیا اومدم، بعد خداحافظی با پدرم. خاله آما می که: آدم ها دو دسته، آدم هایی که می موند، آدم هایی که می رن. دایی آروین هم می که: آدم ها دو دسته، آدم هایی که به رؤیاشون خیانت می کنن، آدم هایی که دنبال رؤیاشون می رن. مادرم می که: آدم ها دو دسته، آدم هایی که به ماه بالای سرشون خیره شدن و آدم هایی که به ماه توی آب. یادم است وقتی داشتم برای اولین بار این نمایش را توی سالن سایه تئاتر شهر می دیدم، شنیدن این جمله که: «آدم ها دو دسته، آدم هایی که به رؤیاشون خیانت می کنن، آدم هایی که دنبال رؤیاشون می رن.» تکلم داد. همه ما به خصوص وقتی جوان تر هستیم حتمن آرزوهای داریم و رؤیاهایی در سرمان می پرورانی، اما واقعاً چند درصد از ما دنبال آرزوهای مان می رویم و چند درصد، آن قدر غرق در جریان روزمره زندگی می شویم که آرام آرام رویاهای مان را فراموش می کنیم و به قول میلان کوندرا حل می شویم در این سبکی تحمل ناپذیر هستی؟

من فکر می کنم خیلی مهم است که ما هر چند وقت یکبار چک کنیم مسیری که برای زندگی انتخاب کرده ایم، در راستای رسیدن به رؤیاهایمان هستند یا نه. ما آدم ها نباید به کم قانع شویم. باید تلاش کنیم به چیزی که می خواهیم برسیم، چرا که به قول برناردشو: «اگر چیزهایی که دوست داریم به دست نیآوریم، مجبوریم چیزهایی که به دست آورده ایم، دوست داشته باشیم.» ما حق نداریم به رؤیاهایمان خیانت کنیم، اگر این کار را بکنیم، در واقع به هویتمان خیانت کرده ایم. شاید شما دوست داشته باشید نویسنده موفق شوید، باید سخت کار کنید و هدفتان را گم نکنید و گرنه می بینید چندین سال گذشته و تبدیل به مهندس یا کارمندی شده اید که از زندگی اش راضی نیست، یا بچه به بغل دارید توی آشپزخانه قرمه سبزی درست می کنید!

4 چند شب پیش رفته بودم توی بالکن تا به گلدان ها آب بدهم، دیدم که اوه این وقت تابستان چه بادی دارد می آید و نگران شدم نکند درخت ها بشکنند. بعد توی ذهنم آمد: «در کوچه باد می آید.» و ناخودآگاه ادامه اش: «این ابتدای ویرانی است» و فکر کردم این شاید واقعاً هم ابتدای ویرانی باشد. این شرایط را می گویم. وضع نابه سامان مملکت و گران شدن روزبه روز همه چیز، کم آبی، کاهش مدام ارزش پول ملی، فقیر شدن عده بیشتری از مردم و مشکلات ناشی از کرونا، بعد، نشستیم با خودم فکر کردم: «خب می خوام چی کار کنی الان؟» چیزی که می دانم این است که هنوز نمی خواهم مملکت و خانواده ام را رها کنم و بروم خارج از کشور. البته این یک انتخاب شخصی است، فضیلتی برای آن قائل نیستم و به کسی هم چنین توصیه ای نمی کنم. چون ممکن است اوضاع خیلی بدتر شود، وضع اقتصادی مردم و خودم بدتر و بدتر شود، برق بیشتر برود، آب جیره بندی شود و بدتر از همه، جنگ شود. به بقیه کاری ندارم، اما خودم هنوز هم تصمیم دارم سختی ها را تاب بیاورم و سعی کنم درست ترین رفتار را داشته باشم. تنها کاری که در این شرایط از دست من برمی آید این است که مسئولانه تر از قبل زندگی کنم. چه در زندگی شخصی و چه در رفتارم به عنوان یک شهروند جامعه. مثلن در این کمبودها حواسم بیشتر به مصرف درست آب و برق باشد، حرص نزنم، سعی کنم بهتر از قبل درس بدهم و رفتار درست تری با شاگردهایم و آدم هایی که با آن ها در ارتباط داشته باشم، انرژی بیش تری بگذارم تا کیفیت کتاب هایی که می نویسم بالاتر برود و به درد آدم های بیش تری بخورد، به منفعت خود تنهایی فکر نکنم و خودم را بخشی از جامعه ببینم. این مملکت روزهای سخت کم نداشته است، تا آن جایی که من یادم می آید و به چشم دیده ام ما روزهای سخت جنگ و همه مشکلات دهه شصت را پشت سر گذاشتیم و زنده ماندیم. ماها ممکن است ناراحت باشیم، دل گیر باشیم، فحش بدیم، حتی وطنمان را ترک کنیم، اما شک ندارم در وجود تک تکمان یک بخشی عاشق این آب و خاک است. این جا وطنمان است، دوستش داریم و دلمان برایش می تپد. چه طور بی خیالش شویم؟

5 در چاپ جدید این کتاب تلاش کرده ام همه چیز در بهترین حالت خودش باشد. درس نامه ها حسابی مفصل و کامل شده است و با خواندنش هیچ نکته ای برایتان ناگفته باقی نمی ماند. تست ها با دقت طبقه بندی شده اند و تلاش کرده ام در آن ها همه ایده های ممکن پوشش داده شوند. به آخر هر درس یک آزمون اضافه شده تا بعد از زدن تست های درس بفهمید وضعیتتان چه طور است و درس را یاد گرفته اید یا نه و پاسخ ها هم واقعاً تشریحی است و خیلی از تست ها به دو روش پاسخ داده شده است. در پایان این مقدمه دوست دارم از همه کسانی که در نوشتن این کتاب به من کمک کرده اند، تشکر کنم. ممنونم از آقای دیداری که در تألیف این کتاب به من کمک کرد، متشکرم از رسول محسنی منش که نظراتش در مورد کتاب بسیار به درد من خورد. تشکر می کنم از دکتر کمیل نصری، مهندس نوید شاهی، مهندس رضا سبزمیدانی، خانم ها ملک پور و مهری و همه همکاران انتشارات خیلی سبز و تشکر می کنم از ویراستارهای کتاب که نظرات خوبشان به ما کمک کرد. از شما دانش آموزان و همکاران عزیز می که این کتاب را می خوانید نیز می خواهم حتمن نظرها، پیشنهادات و انتقادات خود را درباره این کتاب از طریق ایمیل یا هر روش دیگری که خودتان صلاح می دانید به ما برسانید. عمیقن بر این باورم هر کتابی، هر چه قدر هم خوب باشد، باز می تواند بهتر شود. خیلی خوش حال می شوم بتوانم از نظرات شما در چاپ های بعدی این کتاب استفاده کنم. خب! حرف هایی که می خواستم بزنم را زدم. حالا دوست دارم همان طور که این نوشته را با بخشی از یکی از شعرهای فروغ فرخزاد آغاز کردم، آن را با بخشی از شعر دیگری از همین شاعر بلندمرتبه به پایان برسانم:

من از زمانی / که قلب فود را گم کرده است، می ترسم / من از تصور بیگانگی این همه صورت می ترسم ...

من مثل دانش آموزی که / درس هندسه اش را دیوانه وار دوست دارد، تنها هستم / و فکر می کنم که باغچه را می شود به بیمارستان برد / من فکر می کنم ...

من فکر می کنم ... / و قلب باغچه در زیر آفتاب ورم کرده است / و ذهن باغچه دارد آرام آرام / از فاطرات سبز تهی می شود.

عطا صادقی

ata.sadeghi@gmail.com

«پل اردوش» ریاضی‌دان نابغه مجارستانی (۲۰ سال پیش مرگم شده) است که در ترکیبیات (همین گسسته فومون) کارهای زیادی انجام داده است. کل زندگی‌اش یک چمدان بوده و از طریق سخنرانی‌هایی که در دانشگاه‌های مختلف انجام می‌داده، گذران زندگی می‌کرده است. بیش از ۱۵۰۰ مقاله (ان شا... رفیق دانشگاه می‌فهمی به مقاله دارن یعنی چی!) نوشته است، آن هم چه مقاله‌هایی! برخی از آن‌ها، اصلن شاخه‌ای در ریاضی باز کرده است (مثلاً مدلی برای اثبات برخی از قضیه‌ها، معروف به روش‌های احتمالاتی ارائه کرده است که سکه می‌اندازید و قضیه اثبات می‌شود!) بعد از فوت او کتابی چاپ شد به نام «اثبات» که داستان جالبی دارد. اردوش معتقد بود کتابی مقدس، در عالم بالا وجود دارد که در آن اثبات‌های خارق‌العاده قضیه‌های ریاضی، نوشته شده است. هر زمان خودش از این جور اثبات‌های خفن، ارائه می‌داد می‌گفت: این اثبات از «کتاب» است. بعد از فوتش، بسیاری از این جور اثبات‌های او، در این کتاب گردآوری شده است. حتی این قدر برایش احترام قائل هستند که در ریاضی عددی داریم به نام عدد اردوش. مثلاً اگر کسی با اردوش مقاله داده باشد عدد اردوش او برابر یک است (مثلاً دکتر موهی پوزار فومون که پدر علم گراف ایران عدد اردوشش یکه). کسی که با فردی که با اردوش مقاله دارد، مقاله داشته باشد، عدد اردوشش می‌شود دو و همین جوری! این خودش یک رزومه برای ریاضی‌دانان محسوب می‌شود. اردوش حدس‌های حل‌نشده زیادی دارد که اتفاقاً در کتابی به نام «حدس‌های اردوش» جمع‌آوری شده است. یکی از حدس‌های او در مورد عدد تقاطع گراف (کم‌ترین تعداد برافورد یال‌ها در رسم گراف) بود. همین چند سال پیش، یک ریاضی‌دان دانمارکی به اسم «توماسون» درستی آن حدس را ثابت کرد آن هم در دو خط! بعد از آن، خودش گفته بود: «فقط دوس داشتم اردوش زنده بود، این اثبات رو می‌دید». خلاصه حرف در مورد اردوش و کارهایش زیاد است.

غرض از این همه تعریف و تمجید از اردوش، این بود که به این‌جا برسیم. اول این‌که: دیدید دست روی دست زیاد است! اردوش با آن همه عظمت، هم ممکن است چیزی به ذهنش نرسد، ولی به فکر فرد دیگری مثل شما برسد. بچه‌ها هر کدام از شماها مثل یک عدد اول هستید. دیدید اعداد اول، شخصیت منحصر به فردی دارند یعنی با ضرب اعداد دیگر ساخته نمی‌شوند. واقعاً ایده‌هایی درون فکر هر کدام از شما، وجود دارد که درون ذهن من که سهل است به عقل جن هم نمی‌رسد! این را اول باور کنید بعد آن را بارور کنید، خواهید دید که چه درهایی باز می‌شود!

اما نکته دوم: استاد راهنمای ارشد بنده (دکتر حاج ابوالحسن که واقعاً علاقه و سوادم در گسسته رو میرون ایشون هستم) می‌گفت: برای شمایی که می‌خواهید در گرایش ترکیبیات کار کنید یک ترسی همیشه وجود دارد، این‌که یک بچه ممکن است سوآلی از شما بپرسد و نتوانید پاسخ دهید! بچه‌ها ذات این درس، معماگونه است. اصلاً سرآغاز برخی از مباحث گسسته، مثل گراف، همین معماها بوده‌اند. ذات این درس دیرپاب است، یعنی طول می‌کشد تا توی مغزتان بنشینند، ولی امان از وقتی که بنشینند خوب هم بنشینند، می‌بینید که خیلی از تست‌ها به سادگی و در زمان کوتاهی حل می‌شوند، مخصوصاً این‌که محاسبات آن‌چنانی در این درس (مثل حسابان) نداریم. مطالب درس گسسته، کاملاً برای شما جدید است، پس صبور باشید تا مفاهیم به صورت آهسته و پیوسته در ذهن شما بنشینند نه این‌که با حل‌نشدن چند تست دچار یأس فلسفی بشوید.

خوب است یک چند کلمه‌ای هم، در مورد این کتابی که دستتان است بگویم:

۱ کلاً سوآل‌های کنکور را می‌توانیم در سه شاخه حسابان (حدود ۱۹ سوآل)، هندسه (حدود ۱۸ سوآل) و گسسته (حدود ۱۸ سوآل) دسته‌بندی کنیم. خیالتان راحت باشد، هر چیزی که در شاخه گسسته، نیاز دارید این‌جا جمع کرده‌ایم، یعنی دو فصل پایانی ریاضی دهم به علاوه کل آمار و احتمال (می‌شوند پایه) و خب گسسته (می‌شود دوازدهم)! در تغییر نسل کتاب‌های درسی، بیشتر سوآل‌های کنکور از تمرین‌های کتاب درسی مطرح می‌شوند، پس او به او کتاب‌های درسی را بررسی کردیم، مثال‌ها، تمرین‌ها را تبدیل به تست کرده‌ایم، تازه کنکورهای سال‌های قبل (که در چهارپوچ کتاب‌های مدیر بوده) را هم آورده‌ایم، پس دیگر چاره‌ای جز صد زدن آن ۱۵ سوآل کذایی ندارید! قطعاً طراحان کنکور، خارج از کتاب درسی سوآلی را نخواهند داد، پس ما هم این اصل را رعایت کرده‌ایم یعنی همه تست‌ها در چهارچوب کتاب درسی و خط کنکور طراحی شده‌اند.

۲ در هر قسمت، اول درس‌نامه را بخوانید. تمام تست‌های آموزشی را (بدون زمان) حل کنید و نکته‌های مهم را خلاصه‌نویسی کنید. این کارها چند فایده بزرگ دارند. باعث می‌شود ذهن شما از آشفتگی درآمده، دارای چهارچوب و ساختار منظمی در آن مبحث بشود، هم‌چنین به تست‌ها راحت‌تر می‌توانید پاسخ دهید. با پاسخ‌نامه هم ارتباط بهتری می‌توانید برقرار کنید. درس‌نامه‌ها اصلاً حالت خلاصه و نکته‌ای ندارند، بلکه مثل یک کلاس کنکور، همه مباحثی که لازم (دقت کردی لازم برای کنکور، نه هر چیزی) است را باز کرده‌ایم.

۳ حالا نوبت به حل تست‌ها می‌رسد. تست‌ها با وسواس زیاد و از ساده به مشکل در هر موضوع اصلی و فرعی قرار داده شده‌اند. اگر چند تست اول برایتان ساده بود جوگیر نشوید، اگر در آخری‌ها هم به مشکل برخوردید، عزا نگیرید! حواستان باشد برای تسلط روی همه مفاهیم کتاب، حل یک باره تست‌ها کافی نیست، بلکه تست‌ها باید حداقل دو بار، حل شوند. پس بار اول تست‌ها را بدون زمان حل کنید. اگر تستی، حل نشد هیچ اشکالی ندارد. چرا؟ چون یک پاسخ‌نامه نسبتاً مفصل را برای همین نوشته‌ایم. فقط یک چیزی! پاسخ هر سوآلی را حتماً ببینید، ولی خواهشاً سریع به پاسخ‌نامه مراجعه نکنید! اول کمی با تست کلنجار بروید! سعی کنید بین آموزش‌های درس‌نامه یا جزوه معلم محترم و هر تست ارتباط برقرار کنید. هر مقدار از راه‌حل را که می‌توانید بروید جلو، بعد اگر حل نشد جواب را ببیند. اگر این کار را بکنید، ارتباط ذهن با آن مطلب برقرار شده، بعد می‌بینید که پاسخ چه‌قدر خوب و راحت می‌رود درون حافظه بلندمدتان! تازه لذت «آهان فومیدم» را هم خواهید چشید.

۴ حدود یک‌چهارم تست‌ها رنگی هستند. اشتباه نکنید! این‌ها تست‌های خفنی که از روی آن‌ها بپرید! نیستند. اگر فرصت کافی دارید که بحثی نیست باید همه تست‌ها را بزیند، اما اگر واقعاً چند روزی بیشتر تا کنکور نمانده (ریگه اوضاع اورژانسیه) و دنبال جمع‌بندی هستید، می‌توانید به این تست‌های مهم‌تر رنگی، اکتفا کنید. فکر نمی‌کنم دیگر حرفی جز تشکر مانده باشد! تشکر از آقای دکتر نصری و مهندس سبزمیدانی به خاطر اعتماد دوباره، تشکر از دوست خوبم مهندس صادقی برای یک همکاری خوب، تشکر از سرکار خانم مهری که زحمت کارهای واقعاً زیاد اجرایی بر دوش ایشان بود، تشکر از ویراستاران محترم، دوستان تولید و از بچه‌های خوب دبیرستان نیک‌اندیشان (مخصوصاً آریین مجیدی‌نیا) که کتاب را با حوصله خواندند و خلاصه تشکر از همه کسانی که بدون کمک آن‌ها، این کتاب به دست شما نمی‌رسید. امیدوارم بخوانید و حالش را ببرید. حق نگاه‌داران.

دوستدار شما دیداری

(فصل ۴)

آشنایی با مبانی ریاضیات

۱۹۴	درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی
۲۱۳	درس ۲: مجموعه‌ها

(فصل ۵)

احتمال

۲۴۲	درس ۱: مبانی احتمال
۲۶۲	درس ۲: احتمال غیرهم‌شانس
۲۶۸	درس ۳: احتمال شرطی
۲۸۵	درس ۴: پیشامدهای مستقل و وابسته

(فصل ۶)

آمار توصیفی و استنباطی

۲۹۴	درس ۱: توصیف و نمایش داده‌ها
۳۰۵	درس ۲: شاخص‌های گرایش به مرکز
۳۱۹	درس ۳: شاخص‌های پراکندگی
۳۳۲	درس ۴: روش‌های جمع‌آوری اطلاعات
۳۴۲	درس ۵: برآورد

۳۵۵	پاسخ‌نامه تشریحی
۵۷۲	پاسخ‌نامه کلیدی

(فصل ۱)

آشنایی با نظریه اعداد

۷	درس ۱: استدلال ریاضی
۱۶	درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح
۴۶	درس ۳: هم‌نهمی در اعداد صحیح و کاربردها

(فصل ۲)

گراف و مدل‌سازی

۷۸	درس ۱: معرفی گراف
۱۱۲	درس ۲: مدل‌سازی با گراف

(فصل ۳)

ترکیبیات

۱۳۴	درس ۱: شمارش بدون شمردن
۱۵۲	درس ۲: مباحثی در ترکیبیات
۱۷۷	درس ۳: روش‌هایی برای شمارش

درس ۲

بخش پذیری در اعداد صحیح

این درس از سه قسمت تشکیل شده است. در بخش اول با مفهوم بخش پذیری و عادکردن و ویژگی‌های آن آشنا می‌شویم؛ در قسمت دوم دربارهٔ ب.م.م و ک.م.م صحبت می‌کنیم و بالأخره به قضیهٔ تقسیم و افراز مجموعهٔ \mathbb{Z} به کمک آن می‌پردازیم.



خب! حالا وقتش است برویم سراغ این درس و ببینیم چه خبر است؟

مفهوم بخش‌پذیری و عادکردن

تساوی $۱۵ = ۵ \times ۳$ را در نظر بگیرید. عدد ۱۵، از سه دستهٔ ۵ تایی تشکیل شده است. جور دیگری نیز می‌توانیم بگوییم که در تقسیم عدد ۱۵ بر ۵، خارج قسمت برابر ۳ می‌شود و باقی‌مانده صفر است. به همین خاطر، می‌توانیم از یک طرف بگوییم که ۱۵ بر ۵ بخش پذیر است و از طرف دیگر بگوییم که عدد ۵، عدد ۱۵ را می‌شمارد؛ چون می‌توان ۱۵ را با دسته‌های ۵ تایی شمرد. (۳ دستهٔ پنج تایی سیب می‌شود، ۱۵ سیب و سیب باقی نمی‌ماند.) این شمارش یا عادکردن را در ریاضی با علامت «|» نشان می‌دهند و می‌نویسند: $۱۵ | ۵$

عدد صحیح a را بر عدد صحیح b بخش پذیر می‌گویند هرگاه عدد صحیحی مثل q وجود داشته باشد، به طوری که: $a = bq$

در این صورت می‌گویند b عاد می‌کند a را یا b می‌شمارد a را و می‌نویسند: $b | a$

از رابطهٔ $a = bq$ دو نتیجه می‌توان گرفت:

a بر b بخش پذیر است. $\Leftrightarrow a = bq$

b می‌شمارد a را (ب عاد می‌کند a را)

دو نکته مهم:

$$a = bq \Leftrightarrow b | a$$

۱ تبدیل عا‌دکردن به تساوی خیلی خیلی مهم است و زیاد استفاده می‌شود:

۲ منظور از عدد در بخش نظریهٔ اعداد، عدد صحیح است، بخش پذیری توی عددهای گنگ، کسری و ... تعریف نمی‌شود.

قانون ۹۰ درجه

اگر در تشخیص درستی یا نادرستی یک رابطهٔ عا‌دکردن مثل $۲۱ | ۶۳$ ، دچار اشکال شدید، می‌توانید آن را نود درجه به خلاف عقربه‌های

$$۲۱ | ۶۳ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۶۳}{۲۱} = ۳$$

ساعت بچرخانید تا به یک کسر تبدیل شود:

حالا اگر مثل این‌جا، حاصل عددی صحیح شد، رابطهٔ عا‌دکردن، یک رابطهٔ درست بوده و در غیر این صورت، درست نیست.

مثال رابطه‌های $۲۵ | ۲۸$ و $۷ | -۱$ را در نظر بگیرید.

همان‌طور که گفتیم، برای این‌که بفهمیم این رابطه‌ها درست‌اند یا نه آن‌ها را تبدیل به کسر می‌کنیم:

$$۲۸ | ۲۵ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۲۵}{۲۸} = \frac{۱}{۲۲} \times$$

رابطه درست نیست، زیرا $\frac{۱}{۲۳}$ یا $\frac{۱}{۸}$ عددی صحیح نیست. جور دیگر هم می‌توانستیم بگوییم. ۲۸ ضربدر هیچ عدد صحیحی، برابر ۲۵ نمی‌شود.

$$-۱ | ۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم.}]{\text{نود درجه خلاف جهت}} \frac{۷}{-۱} = -۷ \checkmark$$

رابطه درست است، زیرا -۷ عددی صحیح است:

تست کدام‌یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

$$۴ | ۲۷$$

$$۳ | ۳۷$$

$$۱۳ | ۹۱$$

$$۷ | -۶۳$$

پاسخ گزینهٔ ۴ اگر $a = bq$ باشد، آن‌گاه $b | a$. در این سؤال داریم:

$$-۶۳ = ۷ \times (-۹) \Rightarrow ۷ | -۶۳$$

$$۹۱ = ۷ \times ۱۳ \Rightarrow ۷ | ۹۱$$

$$۳۷ = ۳ \times ۱۲ \Rightarrow ۳ | ۳۷$$

اما ۴ | ۲۷ درست نیست. توجه کنید که $۲۸ = (۲)^۴ = ۲^۸$ نادرست است و برعکس آن یعنی $۲^۷ | ۲^۸$ درست است، زیرا:

$$۲^۸ = ۲ \times ۲^۷ \Rightarrow ۲ | ۲^۸$$

البته با نکته‌ای که گفتیم هم می‌توانید نادرستی ۴ | ۲۷ را بررسی کنید. عبارت $۲^۷ | ۲^۴$ را به یک کسر تبدیل می‌کنیم:

$$۲^۴ | ۲^۷ \xrightarrow[\text{عقربه‌های ساعت می‌چرخانیم}]{\text{نود درجه خلاف}} \frac{۲^۷}{۲^۴} = \frac{۲^۳}{۱} = ۸$$

پس رابطه برقرار نیست.

تست کوچک‌ترین مقدار n برای آن‌که رابطهٔ $n! | ۴۵۵$ برقرار باشد، چه مجموع ارقامی دارد؟

$$۱۴$$

$$۱۰$$

$$۷$$

$$۴$$

$$۴۵۵ = ۵ \times ۷ \times ۱۳$$

پاسخ گزینهٔ ۱ عدد ۴۵۵ را تجزیه می‌کنیم:

قرار است رابطهٔ $n! | ۴۵۵$ برقرار باشد، یعنی باید کوچک‌ترین مقدار n را پیدا کنیم به شرط آن‌که کسر $\frac{n!}{۴۵۵} = \frac{n!}{۵ \times ۷ \times ۱۳}$ برابر عددی صحیح شود.

مشخص است که اگر بخواهیم $n!$ هر سه عامل ۵، ۷ و ۱۳ را داشته باشد کوچک‌ترین مقدار n برابر ۱۳ است. $۱ + ۳ = ۴$ مجموع ارقام ۱۳

سه ویژگی ساده و ابتدایی از بخش‌پذیری

$$a | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{a} = ۱ \checkmark$$

همهٔ عددها یا عبارات‌های جبری بر خودشان بخش پذیرند بر قرینه‌شان هم بخش پذیرند:

$$a | -a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{-a}{a} = -۱ \checkmark$$

۲ همهٔ عددها بر ۱ و -۱ بخش پذیرند. به بیان دیگر ۱ و -۱ همهٔ عددها را عاد می کنند: $\pm 1 | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{\pm 1} = \pm a \checkmark$

۳ صفر بر همهٔ عددها بخش پذیر است اما هیچ عدد مخالف صفری بر صفر بخش پذیر نیست: $a | 0 \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{0}{a} = 0 \checkmark$

۰ $0 | a \xrightarrow{\text{تبدیل به کسر}} \frac{a}{0} \times$

طبق قرارداد صفر بر خودش بخش پذیر است. به بیان دیگر تنها عددی که بر صفر بخش پذیر است، خود صفر است.

صفر خودش را می شمارد. $0 | 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \times q$

(۰ | ☁ ⇒ ☁ = ۰) (یعنی آگه یه با دیدن صفر یه پیژی رو می شماره، اون پیژ صفره؛)

تست به ازای چند عدد صحیح مانند x ، رابطه $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

پاسخ گزینه ۳

گفتیم که عدد صفر، هیچ عددی را نمی شمارد به جز خودش؛ بنابراین اگر بخواهیم رابطه بالا برقرار باشد، باید:

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0$$

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x^2 = 1 &\Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 = 3 &\Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

(p عددی اول است.)

چون x باید عددی صحیح باشد پس $\sqrt{3}$ و $-\sqrt{3}$ غیر قابل قبول هستند و در نتیجه **۳** پاسخ سؤال است.

$a | \text{☁} \Rightarrow ?$

وقتی که a عددی را می شمارد چه نتایجی می توان گرفت؟

- ۱ $a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$ (اگر عددی ۱ یا -۱ رو می شماره واضحه فقط می تونه ۱ یا -۱ باشه.)
- ۲ $a | p \Rightarrow a = \pm 1, \pm p$ (برای مثال اگر $7 | a$ ، فقط می تونه ۱، -۱، ۷ و -۷ باشه.) p عددی اول است.
- ۳ $a | k \Rightarrow a$ می تواند هر کدام از مقسوم علیه های k باشد.

توان عدد اول p در تجزیه $n!$

این بخش در کتاب درسی نیست، اما از آن جایی که از آن در کنکور سراسری ۱۴۰۰ سؤال آمده، بهتر است آن را بلد باشید.

توان عدد اول p در تجزیه $n!$ برابر است با: $[\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \dots$

برای مثال اگر بخواهیم بدانیم در تجزیه $41!$ توان عدد ۲ چند است داریم.

$$[\frac{41}{2}] + [\frac{41}{4}] + [\frac{41}{8}] + [\frac{41}{16}] + [\frac{41}{32}] + [\frac{41}{64}] + \dots$$

↓
از اینجا به بعد صفر می شود

$$20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 38$$

تست اگر $\frac{50!}{3^x \times 3^y}$ عددی صحیح باشد، بیش ترین مقدار $x + y$ کدام است؟

- (۱) ۶۹ (۲) ۷۰ (۳) ۷۱ (۴) ۷۳

پاسخ گزینه ۱ با توجه به رابطه داده شده توان عددهای ۲ و ۳ را در تجزیه $50!$ پیدا می کنیم.

$$[\frac{50}{2}] + [\frac{50}{4}] + [\frac{50}{8}] + [\frac{50}{16}] + [\frac{50}{32}] = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47$$

$$[\frac{50}{3}] + [\frac{50}{9}] + [\frac{50}{27}] = 16 + 5 + 1 = 22$$

بنابراین اگر بخواهیم $\frac{50!}{3^x \times 3^y}$ عددی صحیح باشد، x حداکثر برابر ۴۷ و y حداکثر برابر ۲۲ است. بنابراین بیشترین مقدار xy برابر است با:

$$47 \times 22 = 69$$

این دو رابطه را نگاه کنید:

(الف) $6 \mid x$

(ب) $x \mid 12$

(الف) اگر همان‌طور که گفتیم رابطه (الف) را به یک کسر تبدیل کنیم، به صورت $\frac{x}{6}$ درمی‌آید. حالا به نظر شما این کسر به ازای چه مقادیری

از x تبدیل به یک عدد صحیح می‌شود؟ مشخص است که به ازای $\pm 6, \pm 12, \pm 18$ و خوب! حالا این‌ها چه عددهایی هستند؟ بله! مضرب ۶.

(ب) اما اگر رابطه $x \mid 12$ را به یک کسر تبدیل کنیم، می‌شود $\frac{12}{x}$. خوب حالا به ازای چه مقادیری از x این کسر تبدیل به یک عدد صحیح

می‌شود؟ عددهای $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. همان‌طور که می‌بینید این عددها همان مقسوم‌علیه‌های ۱۲ هستند.

$a \mid x \Rightarrow x$ مضرب a است.

یادتان باشد:

$x \mid a \Rightarrow x$ مقسوم‌علیه a است.

تست به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطه $x \mid 90$ و $5 \mid x$ برقرار است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ گزینه ۴: بهترین روش برای پاسخ‌دادن به این مدل سؤال‌ها این است که رابطه اول را به تساوی تبدیل کنیم و در رابطه دوم قرار دهیم:

$5 \mid x \Rightarrow x = 5q$

$x \mid 90 \Rightarrow 5q \mid 90 \Rightarrow q \mid 18$

حالا باید مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۸ را پیدا کنیم:

۱، ۲، ۳، ۶، ۹، ۱۸

تست چند عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد؟

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

$a \mid -4 \Leftrightarrow -4 = aq$

پاسخ گزینه ۴: اگر قرار باشد که عدد a ، عدد -4 را بشمارد؛ یعنی داریم:

اگر این رابطه را به کسر تبدیل کنیم، یعنی این‌که کسر $\frac{-4}{a}$ باید عددی صحیح باشد. به بیان دیگر، باید پیدا کنیم که عدد -4 بر چه عددهای صحیحی بخش‌پذیر است. روشن است که در مخرج کسر، می‌توان هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد -4 را قرار داد؛ یعنی هر کدام از عددهای زیر را:

۱، -۱، ۲، -۲، ۴، -۴

بنابراین ۶ عدد صحیح مانند a وجود دارد که عدد -4 را می‌شمارد و پاسخ (۴) است.

از رابطه $a \mid b$ چه نتایجی می‌توان گرفت؟

فرض کنید که یک رابطه عادی $a \mid b$ داریم. می‌خواهیم ببینیم چه کارهایی را مجازیم روی آن انجام دهیم. سمت راست رابطه عادی کردن را می‌توانیم در هر عدد صحیحی، ضرب کنیم. اما سمت چپ آن را نمی‌توانیم؛ به عنوان مثال، رابطه $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید. این رابطه، یک رابطه

درست است؛ زیرا کسر $\frac{36}{12}$ برابر عددی صحیح است. حالا وقتی می‌دانیم این کسر عددی صحیح است؛ اگر آن را در هر عدد صحیح دیگری ضرب

کنیم حاصل، باز هم عددی صحیح می‌شود. (یعنی سمت راست هر رابطه عادی کردن، رو می‌شه تو هر عدد صحیحی ضرب کرد.) مثلاً $5 \times \frac{36}{12}$ نیز عددی صحیح

$12 \mid 36 \Rightarrow 12 \mid 36 \times 5$

است؛ یعنی می‌توان نتیجه گرفت:

$a \mid b \Rightarrow a \mid mb$

در حالت کلی:

اما مشخص است که سمت چپ رابطه عادی کردن را نمی‌توان در هر عددی ضرب کرد؛ مثلاً همین رابطه $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، اگر سمت چپ رابطه را در ۵ ضرب کنیم، می‌شود $60 \mid 36$ که رابطه‌ای نادرست است.

حالا دوباره همین رابطه $12 \mid 36$ را در نظر بگیرید، کسر معادل با آن برابر $\frac{36}{12}$ است. می‌دانیم وقتی عدد

36 بر 12 بخش‌پذیر است، بدیهی است که بر هر کدام از عددهای $1, 2, 3, 4, 6$ یعنی بر هر کدام از مقسوم‌علیه‌های 12 نیز بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر، از رابطه $12 \mid 36$ هر یک از رابطه‌های مقابل

قابل نتیجه‌گیری است:

$$12 \mid 36 \Rightarrow \begin{cases} \pm 6 \mid 36 \\ \pm 4 \mid 36 \\ \pm 3 \mid 36 \\ \pm 2 \mid 36 \\ \pm 1 \mid 36 \end{cases}$$

به عبارت دیگر، سمت چپ رابطه $a | b$ را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. در نتیجه می‌توان گفت:

$$ac | b \Rightarrow a | b \wedge c | b$$

به طور خلاصه این نکات یادتان باشد:

مثال	توضیح	نکته	
$5 15 \xrightarrow{\text{طرفین } \times 4} 20 60$	طرفین یک رابطه عادی کردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$a b \Rightarrow ma mb$	۱
$6 12 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} 6 36$	سمت راست یک رابطه عادی کردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد.	$a b \Rightarrow a mb$	۲
$6 18 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ } \div 2 \rightarrow 3 9 \\ \text{سمت چپ } \div 3 \rightarrow 2 6 \end{cases}$	سمت چپ یک رابطه عادی کردن را می‌توان به هر یک از مقسوم‌علیه‌های عدد سمت چپ تقسیم کرد.	$a b \Rightarrow a$ از مقسوم‌علیه‌های a	۳
$3 \times 5 45 \Rightarrow \begin{cases} \text{سمت چپ } \div 3 \rightarrow 5 15 \\ \text{سمت چپ } \div 5 \rightarrow 3 9 \end{cases}$	در واقع همان نکته قبلی است. وقتی حاصل ضرب دو یا چند عدد، عددی را می‌شمارد، هر کدام از آن اعداد را نیز عاد می‌کند.	$ab c \Rightarrow \begin{cases} a c \\ b c \end{cases}$	۴
$2 4 \xrightarrow{\text{به توان } 4} 2^4 4^4 (16 256)$	طرفین یک رابطه عادی کردن را می‌توان به توان رساند.	$a b \Rightarrow a^n b^n$	۵
$27 216 \Rightarrow 3^3 6^3 \xrightarrow{\text{ریشه سوم می‌گیریم}} 3 6$ $8 16 \Rightarrow 2^3 2^4$ $\xrightarrow{\text{نمی‌توان ریشه چهارم گرفت چون عدد سمت چپ صحیح نمی‌شود.}} \sqrt[4]{8} 2$	از طرفین یک رابطه عادی کردن می‌شود ریشه گرفت به شرط آن که بعد از ریشه گرفتن هر دو عبارت عددی صحیح باشد.	$a^n b^n \Rightarrow a b$	۶
$4 12 \Rightarrow 4 \leq 12$ $6 -18 \Rightarrow 6 \leq -18 $	در یک رابطه عادی کردن اگر عدد سمت راست صفر نباشد حتماً قدرمطلق سمت چپ کوچک‌تر و یا مساوی از قدرمطلق عدد سمت راست است.	$a b \Rightarrow a \leq b , b \neq 0$	۷

مثال بررسی کنید کدام یک از نتیجه‌گیری‌های زیر درست و کدام غلط است؟

الف) $a | b \Rightarrow a | 3b$

ب) $a | b \Rightarrow 3a | b$

پ) $a | b^2 \Rightarrow a | 3b^3$

ت) $a^2 | b \Rightarrow a | b$

ث) $2a | b \Rightarrow a | 2b$

ج) $a^2 | b^5 \Rightarrow a^3 | b^6$

پاسخ نکته مهم در پاسخ‌گویی به این سؤالات در این است که بدانیم اگر $a | b$ سمت راست رابطه را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد و سمت چپ رابطه را می‌توان بر هر یک از مقسوم‌علیه‌های a تقسیم کرد. (یعنی فرمولیش کنید که راست رو می‌شه گنده کرد و چپ رو می‌شه کوچک کرد و رابطه درست باقی بمونه.)

$a | b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} a | 3b \checkmark$

الف) درست است، چون راست را بزرگ کردیم:

$3 | 9 \Rightarrow 3 \times 2 | 9$

ب) چپ رو الکی نمی‌شود بزرگ کرد. بنابراین این رابطه درست نیست. برای مثال اگر $a = 3$ و $b = 9$ باشد:

$a | b^2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3b} a | 3b^3$

پ) درست است چون سمت راست را بزرگ کردیم:

$a^2 | b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } a} a | b$

ت) درست است چون سمت چپ را کوچک کردیم:

ث) درست است. هم‌زمان دو کار را انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم هم سمت چپ را کوچک:

$2a | b \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر } 2} a | b \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 3} a | 3b$

ج) این خیلی غلط است، چون دوتا کار اشتباه انجام دادیم. هم سمت راست را بزرگ کردیم و هم سمت چپ را کوچک. برای مثال اگر $a = 4$ و

$4^2 | 2^5 \Rightarrow 16 | 32$ درست

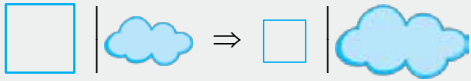
$b = 2$ باشد رابطه $a^2 | b^5$ درست است، زیرا:

$4^3 = 64, 2^4 = 16 \Rightarrow 16 | 64$

اما رابطه $a^3 | b^4$ نادرست است، زیرا:

حالا که این رابطه‌ها را تعریف کردیم به تست صفحه بعد پاسخ دهید.

در یک رابطه عادی کردن، سمت چپ را می توان کوچک و سمت راست را بزرگ کرد.



تست از رابطه $2a^2 \mid b^3$ کدام نتیجه گیری ممکن است درست نباشد؟

- (۱) $a^2 \mid b^3$ (۲) $2a^2 \mid 5b^2$ (۳) $a^2 \mid b^4$ (۴) $a \mid b$

پاسخ گزینه ۲: درست است؛ زیرا گفتیم که می توان سمت چپ رابطه را بر مقسوم علیه اش تقسیم کرد و این جا نیز همین اتفاق افتاده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 2}} a^2 \mid b^3$$

۲ درست است؛ زیرا سمت راست رابطه را می توان در هر عددی ضرب کرد.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در 5}} 2a^2 \mid 5b^3$$

۳ نیز درست است؛ زیرا هر دو اتفاق با هم رخ داده، یعنی هم زمان، سمت چپ رابطه، بر عددی تقسیم شده و سمت راست در عددی ضرب شده است.

$$2a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت چپ تقسیم بر 2}} a^2 \mid b^3 \xrightarrow{\text{سمت راست } b \times} a^2 \mid b^4$$

اما دلیلی ندارد که **۴** حتماً درست باشد؛ به عنوان مثال اگر $b = 2^4$ و $a = 2^5$ باشد، داریم:

$$2a^2 \mid b^3 \Rightarrow 2 \times (2^5)^2 \mid (2^4)^3 \Rightarrow 2^{11} \mid 2^{12} \checkmark$$

اما $2^4 \nmid 2^4$.

به تست بعد نگاه کنید. برای حل کردن این مدل تست ها به جز روش تشریحی یک تکنیک هم وجود دارد که خوب است آن را بلد باشید:

تست از رابطه $a^5 \mid b^9$ کدام نتیجه گیری درست است؟

- (۱) $a^{10} \mid b^{18}$ (۲) $a^7 \mid b^{12}$ (۳) $a^8 \mid b^{15}$ (۴) $a^9 \mid b^6$

پاسخ گزینه ۳: یک راه ساده برای جواب دادن به این مدل تست ها این است که یک کاری کنیم که دو طرف رابطه داده شده در صورت سؤال با هم برابر شوند.

یعنی a و b را عددهای توان داری فرض کنیم که وقتی به توان ۵ و ۹ می رسند طرفین رابطه عادی کردن صورت سؤال مساوی هم شود. برای این کار یک پایه فرضی مثل x را در نظر بگیرید و توان b را به پایه a بدهید و توان a را به پایه b . یعنی چی؟ یعنی این که مثلاً در این سؤال a و b را به صورت $a = x^9$ ، $b = x^5$ زیر در نظر می گیریم:

$$a^5 \mid b^9 \Rightarrow x^{45} \mid x^{45}$$

چون اگر به ازای این a و b صورت سؤال را بازنویسی کنیم خواهیم داشت:

و می بینید که طرفین رابطه برابر می شود.

خوبی این کار این است که حالا اگر گزینه ها را به ازای این مقادیر a و b بررسی کنیم، معلوم می شود کدام رابطه درست است و کدام نه. گزینه ها را بررسی می کنیم:

$$\text{۱} \quad a^{10} \mid b^{18} \Rightarrow (x^9)^{10} \mid (x^5)^{18} \Rightarrow x^{90} \mid x^{85} \quad \times \quad \text{۲} \quad a^7 \mid b^{12} \Rightarrow (x^9)^7 \mid (x^5)^{12} \Rightarrow x^{63} \mid x^{60} \quad \times$$

$$\text{۳} \quad a^8 \mid b^{15} \Rightarrow (x^9)^8 \mid (x^5)^{15} \Rightarrow x^{72} \mid x^{75} \quad \checkmark \quad \text{۴} \quad a^9 \mid b^6 \Rightarrow (x^9)^9 \mid (x^5)^6 \Rightarrow x^{81} \mid x^{30} \quad \times$$

درستی **۳** را به روش تشریحی به صورت مقابل می توان ثابت کرد:

$$a^5 \mid b^9 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان 5 می رسانیم}} a^{25} \mid b^{45}$$

$$\xrightarrow{\text{از طرفین ریشه سوم می گیریم}} a^8 \mid b^{15} \xrightarrow{\text{سمت چپ را بر 8 تقسیم می کنیم}} a^{24} \mid b^{45}$$

که خب کار ساده ای نیست و تازه رد کردن بقیه گزینه ها کار سخت تری است!

این نکته را این جور هم می توان توضیح داد:

از رابطه $a^m \mid b^n$ زمانی می توان رابطه $a^{m'} \mid b^{n'}$ را نتیجه گرفت که: $nm' \leq mn'$

$$(a^m \mid b^n \Rightarrow a^{m'} \mid b^{n'}) \quad \text{دور} \times \text{دور} \leq \text{نزدیک} \times \text{نزدیک}$$

(اینو این پوری هم می شه گفت. درکش آسون تره؛)

چند ویژگی مهم دیگر از رابطه عادی کردن

این رابطه ها را خوب نگاه کنید و یاد بگیرید. چون کمی جلوتر از همه آنها در حل معادله های عادی کردن و سایر سؤال ها استفاده می کنیم.

۱ اگر عدد a عدد b را بشمارد و عدد b نیز عدد c را بشمارد، آن گاه عدد a عدد c را می شمارد:

$$a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$$

(برای مثال: $4 \mid 24, 8 \mid 24 \Rightarrow 4 \mid 8$)

۲ هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن گاه مجموع، تفاضل و حاصل ضرب آن دو عدد را نیز می‌شمارد:

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid b+c \\ a \mid b-c \\ a \mid bc \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \mid 6 \\ 3 \mid 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 \mid 15+6 \Rightarrow 3 \mid 21 \\ 3 \mid 15-6 \Rightarrow 3 \mid 9 \\ 3 \mid 15 \times 6 \Rightarrow 3 \mid 90 \end{cases}$$

(برای مثال: $3 \mid 9$)

۳ تعمیم نکته قبل: اگر عددی دو عدد را بشمارد مجموع یا تفاضل هر مضرب یکی و هر مضربی از دیگری را می‌شمارد:

$$a \mid b \wedge a \mid c \Rightarrow \begin{cases} a \mid mb+nc \\ a \mid mb-nc \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \mid 10 \\ 5 \mid 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{m=4, n=2} \begin{cases} 5 \mid 4 \times 10 + 2 \times 15 \Rightarrow 5 \mid 115 \\ 5 \mid 4 \times 10 - 2 \times 15 \Rightarrow 5 \mid -35 \end{cases}$$

(برای مثال: $5 \mid 115$)

۴ اگر دو رابطه عادکردن مختلف داشته باشیم، می‌توانیم سمت چپ و راست دو رابطه را در هم ضرب کرد و به رابطه‌ای جدید رسید:

$$a \mid b \wedge c \mid d \Rightarrow ac \mid bd \quad (\text{برای مثال: } 14 \mid 140 \Rightarrow 7 \times 2 \mid 35 \times 4 \Rightarrow 7 \times 2 \mid 140)$$

۵ حواستان باشد طرفین رابطه عادکردن را نمی‌توان با عددی جمع کرد یا از عددی کم کرد.

$$a \mid b \Rightarrow a+c \mid b+c \quad \times$$

$$a \mid b \Rightarrow a-c \mid b-c \quad \times$$

(برای مثال رابطه ۱۰، ۵ رو در نظر بگیرید؛ اگر طرفین را با یک جمع کنیم به رابطه ۱۱، ۶ می‌رسیم که نادرست است و اگر از طرفین یکی کم کنیم به رابطه ۹، ۴ می‌رسیم که باز هم غلط است.)

تست به ازای چند عدد صحیح مانند a ، دو عدد $8m+3$ و $11m+4$ همواره بر a بخش پذیرند؟

(۴) بیشتر از ۴

(۳) ۴

(۲) ۲

(۱) ۱

$$a \mid 8m+3, a \mid 11m+4$$

پاسخ گزینه ۲ اگر دو عدد $8m+3$ و $11m+4$ بر a بخش پذیر باشند، یعنی:

دیدیم که سمت راست رابطه عادکردن را می‌توان در هر عدد صحیحی ضرب کرد. به خاطر این که ضرب m یکسان شود، سمت راست رابطه اول را در ۱۱ و سمت راست رابطه دوم را در ۸ ضرب می‌کنیم، بعد سمت راست‌ها را از هم کم می‌کنیم.

$$a \mid 8m+3 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۱۱}} a \mid 88m+33$$

$$a \mid 11m+4 \xrightarrow{\text{سمت راست ضرب در ۸}} a \mid 88m+32$$

$$a \mid 88m+33 \xrightarrow{-} a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

استفاده می‌کنیم و سمت راست دو رابطه را از هم کم می‌کنیم:

$$a \mid 88m+32$$

پس به ازای ۲ عدد صحیح a ، رابطه برقرار است.

در این نوع سؤال‌ها برای سرعت در کار می‌توانیم از دترمینان ماتریس ضرایب نیز استفاده کنیم. به این صورت که ضرایب را به صورت

یک ماتریس 2×2 می‌نویسیم و عبارت سمت چپ دترمینان این ماتریس را می‌شمارد. برای مثال در این سؤال:

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow 8 \times 4 - 11 \times 3 = -1 \Rightarrow a \mid -1 \Rightarrow a = \pm 1$$

این مدل سؤال‌ها که برای حل‌کردنشان باید سمت راست رابطه عادکردن را در عددی ضرب کنیم، سؤال‌های شایعی است و اصولاً یادتان باشد این یک روشی است که می‌توانیم متغیر را از سمت راست رابطه عادکردن حذف کنیم. حالا به یک مدل دیگر از این سؤال‌ها نگاه کنید:

تست اگر $4k+1 \mid 5k-1$ و $5k-1 \mid 3k$ ، کدام گزینه درست است؟

$$15 \mid 5k^2 - k - 1 \quad (۴)$$

$$15 \mid 5k^2 + k - 1 \quad (۳)$$

$$15 \mid 5k^2 - k + 1 \quad (۲)$$

$$15 \mid 5k^2 + k + 1 \quad (۱)$$

پاسخ گزینه ۲ می‌دانیم که اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ ، آن گاه $ac \mid bd$ ؛ بنابراین:

$$5 \mid 4k+1 \Rightarrow 15 \mid (4k+1)(5k-1) \Rightarrow 15 \mid 20k^2 + k - 1$$

$$3 \mid 5k-1$$

از طرفی می‌دانیم، اگر $a \mid b$ ، $a \mid c \Rightarrow a \mid b-c$ ، پس داریم:

$$15 \mid 20k^2 + k - 1 \xrightarrow{-} 15 \mid 5k^2 + k - 1$$

$$15 \mid 15k^2 \quad (\text{بدیهی است.})$$

بنابراین **۲** درست است.



(دافل ۱۴۰۰)

۷۸- عدد $20! + 12$ بر چند عدد طبیعی یک‌رقمی بخش پذیر نیست؟

- ۵ (۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۷۹- برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 20$ ، کدام است؟

- ۲۸ (۱) ۳۲ (۲) ۳۶ (۳) ۴۰ (۴)

برای پاسخ‌گویی به این نوع سؤال‌ها بد نیست به بخش «مفرب و مقسوم‌علیه» در درس نامه نگاه کنید.

۸۰- اگر $12 \mid x$ و $12 \mid y$ ، کدام گزینه درست نیست؟

- ۴ (۱) $xy \mid x$ ۴ (۲) $y \mid 4$ ۳ (۳) $x \mid 24$ ۴ (۴) $2x \mid y$

۸۱- به ازای چند عدد صحیح مانند x ، هر دو رابطه $84 \mid x$ و $4 \mid x$ برقرار است؟

- ۴ (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

۸۲- از رابطه‌های $a \mid 2$ و $ab = 60$ ، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

- ۲ (۱) $a = 2$ ۲ (۲) $a \mid 30$ ۳ (۳) $b = 30$ ۴ (۴) $b \mid 30$

۸۳- اگر a و b دو عدد طبیعی و دو رابطه $a \mid b$ و $2a \mid b$ هر دو درست باشند، در این صورت:

- ۱ (۱) همواره $a = b$ ۲ (۲) $a = b$ یا $a = 2b$ ۳ (۳) $a = b$ یا $2a = b$ ۴ (۴) $a = 2b$ یا $2a = b$

۸۴- اگر $x \in \{1, 2, \dots, 20\}$ باشد به ازای چند مقدار x رابطه $x^2 - 1$ بر ۱۳ بخش پذیر است؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۱ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) ۳

۸۵- تعداد اعداد پنج‌رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

- ۳۵ (۱) ۳۶ (۲) ۳۷ (۳) ۳۸ (۴)

۸۶- تعداد اعداد سه و چهار رقمی مضرب ۹ که مکعب کامل باشند، کدام است؟ ($\sqrt{10} \approx 3.16$)

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

برای پاسخ‌گویی به این سؤال‌ها به نکته  \Rightarrow  دقت کنید.

۸۷- اگر $2xy \mid 3x^2$ ، کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- ۱ (۱) $2x^2 \mid y$ ۲ (۲) $x^2 \mid 3y$ ۳ (۳) $x \mid 3y$ ۴ (۴) $x^2 \mid 6y^2$

۸۸- به ازای چند مقدار صحیح a ، رابطه $a^2 + b^2 \mid a^2 b^2$ درست است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) بی‌شمار

۸۹- اگر $a^3 \mid b^2$ ، کدام یک از رابطه‌های زیر درست نیست؟

- ۱ (۱) $a \mid b$ ۲ (۲) $a^5 \mid b^4$ ۳ (۳) $a^6 \mid b^5$ ۴ (۴) $a^2 \mid b$

۹۰- اگر از رابطه $x^2 \mid y^m$ بتوانیم نتیجه بگیریم $x^5 \mid y^{3m-5}$ ، کم‌ترین مقدار m کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

توجه کنید در قبلی از سؤال‌های عادر کردن تلاش ما بر آن است که سمت راست را از متغیر تبدیل به یک عدد کنیم! این مدل سؤال‌ها که باید یک متغیر را حذف کنید از سؤال‌های پرتکرار در آزمون‌ها به حساب می‌آیند.

۹۱- اگر $a > 1$ ، $a \mid 7k + 4$ و $a \mid 8k + 3$ در این صورت:

- ۱ (۱) a عددی اول است. ۲ (۲) a مربع کامل است. ۳ (۳) a مضرب ۵ است. ۴ (۴) a مضرب ۷ است.

۹۲- اگر هر دو کسر $\frac{5b+2}{a+1}$ و $\frac{6b+5}{a+1}$ عددهایی صحیح باشند، a چند مقدار صحیح می‌تواند باشد؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

۹۳- اگر از دو رابطه $a \mid 7m + x$ و $a \mid 6m + 5$ بتوان نتیجه گرفت که $a = \pm 1$ است، x کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

۹۴- اگر دو عدد $m + 1$ و $m^2 - 2$ همواره بر a بخش پذیر باشد، a چند مقدار صحیح مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۱ ۳ (۳) ۲ ۴ (۴) بیشتر از ۲

۹۵- اگر $10a + 3b \mid 3a + 4b$ آن‌گاه کدام یک از عبارات‌های زیر بر $3a + 4b$ بخش پذیر است؟

- ۳۱a (۱) ۴۹a (۲) a + 2b (۳) b - 2a (۴)



۹۶- اگر $a|b+1$ و $a|c+2$ ، کدام یک از عبارتهای زیر همواره بر a بخش پذیر است؟

- (۱) $bc-1$
- (۲) $bc-2$
- (۳) $bc+1$
- (۴) $bc+2$

۹۷- اگر $5|4k-1$ و $7|4k+3$ ، $5|4k$ ، آن گاه کدام یک از گزینههای زیر درست است؟

- (۱) $35|20k^2-11k+3$
- (۲) $35|20k^2-11k-3$
- (۳) $35|15k^2-11k+3$
- (۴) $35|15k^2-11k-3$

۹۸- اگر $5|2n+1$ ، عبارت $14n^2+19n+6$ همواره بر کدام عدد زیر، بخش پذیر است؟ ($n \in \mathbb{Z}$)

- (۱) ۱۵
- (۲) ۲۵
- (۳) ۳۰
- (۴) ۳۵

۹۹- اگر $3|a+2b$ و $9|a^2-5ab+kb^2$ ، آن گاه k کدام عدد می تواند باشد؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۳
- (۳) ۱۴
- (۴) ۱۵

۱۰۰- اگر $4x^3-3x^2-x$ مضرب ۱۱ باشد، آن گاه مجموع ارقام بزرگ ترین عدد طبیعی دورقمی x کدام است؟

- (۱) ۱۲
- (۲) ۱۴
- (۳) ۱۶
- (۴) ۱۸

۱۰۱- به ازای چند مقدار a از مجموعه $\{3n : n \in \mathbb{N}\}$ رابطه $a|k^2+1$ برقرار است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بیشتر از ۲

۱۰۲- اگر $7|2a+3b+k$ و $7|a+5b-2$ ، کمترین مقدار طبیعی k کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

۱۰۳- اگر $11|2a+5b$ و b مضرب ۱۱ نباشد، آن گاه به ازای چند عدد طبیعی $k \leq 50$ رابطه $11|3a+kb$ برقرار است؟

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

معادله‌های عادکردنی

۱۰۴- به ازای چند مقدار طبیعی n رابطه $5n+3|n+2$ برقرار است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بیشتر از ۲

۱۰۵- بزرگترین مقدار x که به ازای آن رابطه $5x+7|3x+2$ برقرار است، کدام یک از عددهای زیر را می شمارد؟

- (۱) ۲۲
- (۲) ۲۳
- (۳) ۲۴
- (۴) ۲۵

۱۰۶- چند نقطه روی منحنی $yx+3=2(x+y)$ وجود دارد که هر دو مؤلفه آن، عددهایی طبیعی باشند؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۴

۱۰۷- به ازای چند مقدار m ، عبارت $9m+2$ بر $5m+3$ بخش پذیر است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) بیشتر از ۴

۱۰۸- به ازای چند مقدار طبیعی مانند n ، رابطه $4+5n|2n+1$ برقرار است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) بی شمار

۱۰۹- به ازای چند عدد صحیح مانند x ، حاصل کسر $\frac{x+1}{x^2+1}$ عددی صحیح است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۳
- (۴) بیشتر از ۳

۱۱۰- به ازای چند عدد صحیح n رابطه $5|n+3$ برقرار است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۶

۱۱۱- به ازای چند عدد سه رقمی طبیعی، مانند n ، رابطه $2^n|2^n$ برقرار است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۱۱۲- به ازای چند عدد طبیعی، رابطه $\binom{n}{2}|n^2$ برقرار است؟

- (۱) ۱
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) بی شمار

باقی مانده مربع کامل بر ۸

۱۱۳- باقی مانده a بر ۴، برابر ۳ است باقی مانده a^2 بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۳
- (۴) ۵

۱۱۴- اگر a و b دو عدد صحیح باشند، به طوری که $a=4k+3$ و $b=6k'+1$ ، باقی مانده a^2+b^2+5 بر ۸ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۳
- (۴) ۷

۱۱۵- کدام یک از عددهای زیر، مربع کامل است؟

- (۱) ۵۳۳۵۹
- (۲) ۵۳۳۶۱
- (۳) ۵۳۳۶۳
- (۴) ۵۳۳۶۵

(برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

(برگرفته از کتاب درسی)

۱۱۶- دو عدد متوالی را به توان ۳ رسانده و از هم کم می‌کنیم، سپس حاصل را به توان ۲ می‌رسانیم. باقی‌مانده آن در تقسیم به ۸ کدام است؟

- (برگرفته از کتاب درسی) ۱ (۱) ۳ (۳) ۵ (۳) ۳ (۲) ۶ (۴)
- ۴) بستگی به اعداد ممکن است هر سه گزینه درست باشد.

۱۱۷- اگر a, b و c سه عدد طبیعی باشند، به طوری که $abc = 3^{97}$ باشد، باقی‌مانده $a^2 + 2b^2 + 3c^2$ بر ۸ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۱۸- اگر a عددی زوج و $3a+1, b$ باقی‌مانده تقسیم $a^2 + b^2 + 2$ در تقسیم به ۸ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۱۹- اگر x زوج باشد، باقی‌مانده x^2 بر ۸ چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۰- اگر a و b دو عدد صحیح فرد باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین عددی که $a^2 - b^2 - 2a^2 + 2b^2$ همواره بر آن بخش پذیر است، کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۱- اگر $4 + 3|b + a$ و b عددی صحیح و فرد باشد، باقی‌مانده $a^2 + 2a + b^2 + 3$ بر ۸ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

بخش‌پذیری به کمک اتحادها

۱۲۲- عدد $9 \times 3^4 - 4 \times 2^{10}$ بر کدام یک از اعداد زیر بخش پذیر نیست؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۳- کدام یک از گزینه‌های زیر به ازای هر عدد صحیح مانند n برقرار است؟

- ۱ (۱) $n^2 + 2 | n^4 + 8$ (۲) $n^2 + 2 | n^2 + 1$ (۳) $n^2 + 2 | n^6 + 8$ (۴) $n^2 + 2 | n^2 + 1$ (۳)

۱۲۴- عدد $7^{26} + 3^{29}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش پذیر است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۵- عدد $3^{18} - 2^{42}$ بر کدام یک از عددهای زیر بخش پذیر نیست؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۶- به ازای کدام مقدار n رابطه $7^n + 1 | 25$ برقرار است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۷- به ازای کدام مقدار n عبارت $2^n - 5^n$ بر ۱۳ بخش پذیر است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۲۸- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۶۰ مانند n رابطه $3^n + 1 | 28$ برقرار است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

ب.م.م

۱۲۹- مجموع ارقام بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۱۴۴ و ۱۸۰ کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

(برگرفته از کتاب درسی) ۱۳۰- اگر $a | b$ و عددهای a و b هر دو عددهای منفی باشند، حاصل (a, b) و $(a, -b)$ به ترتیب کدام است؟

- ۱ (۱) $-a, -a$ (۲) $a, -a$ (۳) $-a, -b$ (۴) $a, -b$ (۴)

۱۳۱- اگر $d = (663, 187)$ باشد، $2d + 1$ بر کدام بخش پذیر است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۳۲- اگر $(3m, 6m^2) = 12$ باشد:

- ۱ (۱) $m = 4$ (۲) هر کدام از مضارب ۴ می‌تواند باشد. (۳) $m = 6$ (۴) هر عددی به فرم $4k + 2$ می‌تواند باشد.

۱۳۳- اگر $(a^2, b^2) - (5a, 5b) = 14$ باشد، بزرگ‌ترین شمارنده دو عدد a و b کدام است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

(برگرفته از کتاب درسی) ۱۳۴- کدام گزینه درست نیست؟

- ۱ (۱) $(m, m+1) = 1$ (۲) $(4m+1, 4m+3) = 1$ (۳) $(5m+1, 5m+3) = 1$ (۴) $(6m+3, 6m+5) = 1$

۱۳۵- اگر $(a, b) = 36$ باشد، به ازای چند عدد طبیعی مانند x هر دو رابطه $a | x$ و $x | b$ برقرار است؟

- ۱ (۱) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴)

۱۳۶- اگر a زوج و b فرد باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

- (۱) $(a, b) = 1$ (۲) $(a, b+1) = 2$ (۳) $(a, \gamma) = 1$ (۴) $(a-b, \gamma) = 1$

۱۳۷- اگر $(a, 12) = 1$ و a عددی طبیعی یک‌رقمی باشد، a چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۸- اگر $d = (4n+1, 18)$ باشد؛ d چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳۹- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n ، اعداد $3-n$ و 13 نسبت به هم اول نیستند؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۹۲ (۴) ۹۳

۱۴۰- در مجموعه اعداد طبیعی اگر $d = (3n^2 - 2n + 6, 3n + 5)$ و $d \neq 1$ باشد، عدد d کدام است؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۴۳ (۳) ۴۷ (۴) ۵۳

۱۴۱- حاصل $(20!, 19! - 18!)$ کدام است؟

- (۱) $18!$ (۲) $2 \times 18!$ (۳) $19!$ (۴) $2 \times 19!$

۱۴۲- به ازای چند عدد طبیعی دورقمی مانند n رابطه $(n, 24) = 12$ برقرار است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۱۴۳- اگر $(6a, 10b) = 44$ باشد، کدام گزینه درست است؟

- (۱) $(a, b) = 11$ (۲) a مضرب ۵ نیست. (۳) b بر ۶۶ بخش‌پذیر است. (۴) $a+b$ مضرب ۴۴ است.

۱۴۴- a و b نسبت به هم اول‌اند. اگر $a-b \mid c$ آن‌گاه (c, a) کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $|a|$ (۳) $|b|$ (۴) $|c|$

۱۴۵- به ازای چند عدد طبیعی و دورقمی n ، دو عدد به صورت $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اول‌اند؟

- (۱) ۸۶ (۲) ۸۷ (۳) ۸۹ (۴) ۹۰

۱۴۶- اگر به ازای برخی از اعداد طبیعی n ، دو عدد $7+12n$ و $2-5n$ نسبت به هم اول نباشند، آن‌گاه بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک این دو عدد کدام است؟

- (۱) ۵۹ (۲) ۶۷ (۳) ۸۳ (۴) ۸۹

۱۴۷- به ازای چند عدد طبیعی n ، هر دو عدد $5+7n$ و $2+11n$ مقسوم‌علیه مشترک برابر ۳ دارند؟

- (۱) هیچ عدد (۲) یک عدد (۳) دو عدد (۴) بی‌شمار عدد

۱۴۸- برای چند عدد n از مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ حاصل $(n+2, 7n+1)$ برابر ۱ نمی‌شود؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۱۴۹- به ازای مقادیر مختلف $a > 3$ بزرگ‌ترین مقدار بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $3+15a$ و $12-15a$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۱۵۰- اگر دو عدد $1-3k$ و $4+2k+k^2$ نسبت به هم اول نباشند، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترکشان برابر کدام است؟

- (۱) ۳۱ (۲) ۴۱ (۳) ۴۳ (۴) ۵۳

۱۵۱- به ازای چند عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۳۰ مانند n رابطه $(n, 10) = 2$ برقرار است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۵

۱۵۲- تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح $x = 2^m \times 5^n$ از تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{4}$ ، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار x ، کدام است؟

- (۱) ۶۴۰ (۲) ۸۰۰ (۳) ۱۰۰۰ (۴) ۱۲۸۰ (دافل ۱۴۰۰)

۱۵۳- اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد صحیح $x = 10^n \times 6^m$ ، ۳۵ واحد از تعداد مقسوم‌علیه‌های $15x$ کم‌تر باشد، اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ممکن برای x ، کدام است؟

- (۱) ۱۲۹۶ (۲) ۲۳۰۴ (۳) ۴۴۰۰ (۴) ۸۷۰۴ (فارج ۱۴۰۰)

۱۵۴- دو عدد $A = 2^3 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$ و $B = 2^5 \times 3^2 \times 5^p \times 11$ دارای ۲۳ مقسوم‌علیه مشترک و مثبت و غیریک هستند. تعداد تمام مقسوم‌علیه‌های مثبت کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد کدام است؟

- (۱) ۳۶۰ (۲) ۴۸۰ (۳) ۵۴۰ (۴) ۷۲۰

۱۵۵- a و b نسبت به هم اول‌اند. ب.م.م دو عدد $8a+5b$ و $5a+3b$ کدام است؟

- (۱) فقط ۱ (۲) ۱ یا ۳ (۳) ۱ یا ۵ (۴) ۱ یا ۷

ک.م.م

۱۵۶- کوچک‌ترین عضو مجموعه $\{x \in \mathbb{N} : 6 \mid x, 8 \mid x\}$ چه مجموع ارقامی دارد؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

(برگرفته از کتاب درسی)



۱۵۷- اگر $[a, b] = a$ باشد، حاصل (a, b) کدام است؟ (a و b دو عدد طبیعی اند.)

- (۱) a (۲) b (۳) 1 (۴) ab

۱۵۸- حاصل $[(341, 403) + 1, 112]$ چه مجموع ارقامی دارد؟

- (۱) 4 (۲) 6 (۳) 8 (۴) 10

۱۵۹- با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[154, (429, 627)]$ کدام است؟

- (۱) 462 (۲) 478 (۳) 506 (۴) 924 (۹۸)

۱۶۰- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که به هر سه عدد 15 ، 21 و 35 بخش‌پذیر باشد؟

- (۱) 7 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 10

۱۶۱- به ازای چند عدد صحیح n ، ب.م.م و ک.م.م دو عدد 8 و $n^2 - 1$ برابر است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 4 (۴) بی‌شمار

۱۶۲- حاصل $([a^3, a^4], a^5)$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{N}$)

- (۱) a^3 (۲) a^4 (۳) a^5 (۴) a^6

۱۶۳- حاصل $([3a, 12a^2], [4a, 8a])$ کدام است؟

- (۱) a (۲) $|a|$ (۳) $3|a|$ (۴) $4|a|$

۱۶۴- اگر داشته باشیم $3x | y$ حاصل $([x, y], (3, y))$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) $|x|$ (۳) $|y|$ (۴) $3|y|$

۱۶۵- a و b دو عدد طبیعی هستند. کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $((a, b), [a, b]) = (a, b)$ (۲) $[a, (a, b)] = (a, b)$ (۳) $(b, (a, b)) = (a, b)$ (۴) $(a, [a, b]) = a$

۱۶۶- اگر $ab | c$ و $c^2 | d$ ، آن‌گاه حاصل $[d, [b^2, a]]$ کدام است؟ (a, b, c و d عددهایی طبیعی اند.)

- (۱) a (۲) b^2 (۳) d (۴) ad

۱۶۷- اگر $(m, 6) = 3$ حاصل $[5m^2, 90]$ کدام است؟

- (۱) $5m^2$ (۲) $10m^2$ (۳) $30m^2$ (۴) $90m^2$

۱۶۸- به ازای چند عدد طبیعی m رابطه $[m, 120] = 60$ برقرار است؟

- (۱) 2 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 8

۱۶۹- اگر a عددی فرد و طبیعی باشد، حاصل $[(a+1)(a-1), (a+1)^4, 8]$ کدام است؟

- (۱) 8 (۲) $a^2 - 1$ (۳) $(a+1)^4$ (۴) $4a + 4$

متباین‌سازی

۱۷۰- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 5$ و $ab = 500$ باشد، کم‌ترین مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) 45 (۲) 60 (۳) 75 (۴) 105

۱۷۱- اگر $(a, b) = 7$ باشد، حاصل $(\frac{a}{7}, [a, b])$ کدام است؟

- (۱) 7 (۲) $|a|$ (۳) $|b|$ (۴) $7|a|$

۱۷۲- بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد 7 و کوچک‌ترین مضرب مشترک آن‌ها برابر 420 است. مجموع دو عدد کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟ (۹۰)

- (۱) 133 (۲) 224 (۳) 161 (۴) 119

۱۷۳- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) = 8$ و $a + b = 104$ باشد، بزرگ‌ترین مقدار برای $[a, b]$ کدام است؟ (۴۰)

- (۱) 352 (۲) 344 (۳) 336 (۴) 320

۱۷۴- اگر $[a, b] = (a, b) + 1$ حاصل $a^2 + b^2$ کدام است؟ (۱۹)

- (۱) 4 (۲) 5 (۳) 3 (۴) 6

۱۷۵- اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a, b) \neq 1$ و $[a, b] = 9(a, b) + 11$ آن‌گاه $a + b$ کدام است؟ (۱۴)

- (۱) 50 (۲) 165 (۳) 33 (۴) 66

۱۷۶- کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد 60 برابر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد 136 باشد، تفاضل آن دو عدد،

کدام است؟

- (۱) 42 (۲) 48 (۳) 52 (۴) 56



۲۳۹- از رابطه $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

- (۱) $a \mid bc$ (۲) $b \mid ad$ (۳) $c \mid ab$ (۴) $d \mid abc$

۲۴۰- از دو رابطه $a \mid 6$ و $12 \mid b$ کدام نتیجه‌گیری درست نیست؟

- (۱) $a \mid 2b$ (۲) $2a \mid b$ (۳) $3 \mid a+b$ (۴) $12 \mid ab$

۲۴۱- اگر $a \neq 1$ عددی طبیعی باشد که هر دو عدد $9k+7$ و $7k+6$ را عا د کند، کم‌ترین مقدار طبیعی k ، برای برقراری این رابطه کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۴۲- به ازای چند عدد طبیعی n ، رابطه $n^5 + 3n^2 - n + 6$ بر $n+1$ درست است؟

- (۱) هیچ مقدار (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) بی‌شمار

۲۴۳- اگر $a^2 \mid 2a+b$ کدام گزینه درست نیست؟

- (۱) $a \mid b$ (۲) $a \mid b^2$ (۳) $a^2 \mid b$ (۴) $a \mid a+b$

۲۴۴- دو عدد $a+5$ و $b-3$ هر دو بر ۷ بخش پذیرند. باقی‌مانده $ab+1$ بر ۷ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۵

۲۴۵- اگر $a^2 \mid 128$ و $120 \mid b^2$ ، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۳۸ (۳) ۶۴ (۴) ۶۸

۲۴۶- به ازای کدام مقادیر m و n ، هر دو رابطه $3^m \mid 5^{2m}$ و $5^{n+3} \mid 5^{2m}$ درست است؟

- (۱) $m=4, n=6$ (۲) $m=5, n=7$ (۳) $m=4, n=8$ (۴) $m=5, n=8$

۲۴۷- اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k+4$ و $a \mid 5k+m$ ، به ازای کدام مقدار m ، ثابت می‌شود که a عددی اول است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸ (برگرفته از کتاب درسی)

۲۴۸- به ازای چند مقدار طبیعی n ، رابطه $n^3 \mid (n+1)!$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بیشتر از ۲

۲۴۹- اگر عدد a فقط دو مقسوم‌علیه طبیعی داشته باشد و $a \mid 225$ ، در این صورت $(a, 15)$ کدام است؟

- (۱) همواره ۱ (۲) ۱ یا ۳ (۳) ۱ یا ۵ (۴) ۳ یا ۵

۲۵۰- اگر $d > 1$ ، $(a, b) = d$ ، $d \mid a^2 - b + 7$ ، آن‌گاه $a+b$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- (۱) ۸۴ (۲) ۸۵ (۳) ۸۶ (۴) ۸۷

۲۵۱- اگر باقی‌مانده و خارج قسمت تقسیم a بر ۱۹ به ترتیب برابر ۷ و q باشد، باقی‌مانده و خارج قسمت $a+49$ بر ۱۹ به ترتیب برابر و است.

- (۱) صفر - $q+1$ (۲) $18 - q+1$ (۳) صفر - $q+2$ (۴) $18 - q+2$

۲۵۲- اگر ب.م.م دو عدد $n-3$ و $5n+2$ عددی مخالف ۱ باشد، مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد دورقمی n کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

۲۵۳- در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقی‌مانده برابر ۳۶ و خارج قسمت، عددی طبیعی و مضرب ۵ است. مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد طبیعی a کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۲۵۴- در تقسیم عدد a بر ۸، باقی‌مانده برابر جذر خارج قسمت است. رقم یکان بزرگ‌ترین مقدار مقسوم کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۲۵۵- اگر در تقسیم عددهای طبیعی a و $2a+100$ بر عددهای طبیعی b و $2b$ باقی‌مانده‌ها به ترتیب برابر ۱۰ و ۴ باشد، کم‌ترین مقدار b کدام است؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۳ (۴) ۳۵

۲۵۶- در یک تقسیم، مقسوم از ۵ برابر مقسوم‌علیه ۲ واحد بیشتر و باقی‌مانده حداکثر مقدار خود را دارد. اگر مقسوم‌علیه بزرگ‌تر از ۱ باشد، خارج قسمت تقسیم کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۲۵۷- عدد a زوج است ولی بر ۳ بخش پذیر نیست، باقی‌مانده آن بر ۶ کدام است؟

- (۱) همواره ۲ (۲) صفر یا ۲ (۳) ۲ یا ۴ (۴) صفر یا ۳

۲۵۸- اگر یکی از عددهای a ، $a+5$ ، $a+10$ و b همواره بر ۴ بخش پذیر باشد، باقی‌مانده $b-a$ بر ۴ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



روشنوم

فرض کنید $c = 5$ و $b = 12$ و $a = 13$. گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱ درست است. $12 | 5 + 3$
- ۲ نادرست است. $5 | 13 - 12$
- ۳ درست است. $1 | 25$
- ۴ نادرست است. $17 | 169$

گزینه ۷۵

می‌دانیم اگر $a | b$ و $b | a$ آن‌گاه $a = \pm b$ است، بنابراین دو حالت رخ می‌دهد:

$$n^2 = 6n - 5 \Rightarrow (n-1)(n-5) = 0 \Rightarrow n = 1, n = 5$$

$$n^2 = 5 - 6n \Rightarrow \text{معادله ریشه صحیح ندارد.}$$

پس فقط به ازای دو مقدار $n = 1$ و $n = 5$ رابطه برقرار است.

گزینه ۷۶

می‌دانیم اگر $0 | \text{آن‌گاه} = 0$ (پون تنها عددی که بر صفر بخش پذیره فود صفره) بنابراین:

$$x^2 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 1 \text{ یا } x = 2$$

حالا بررسی می‌کنیم رابطه $2x + 1 | 2x + 1$ به ازای چندتا از این عددها $x = 0 \Rightarrow 1 | 1$ برقرار است.

$$x = 1 \Rightarrow 2 + 1 | 2 + 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^2 + 1 | 2 \times 2 + 1$$

گزینه ۷۷

۴۷ عددی اول است، پس هر چه قدر اعداد کوچک‌تر از آن را ضرب کنیم، ۴۷ به وجود نمی‌آید، یعنی $43 | 47$ ولی $43 | 46$ چون $46 = 2 \times 23$ است و ...

گزینه ۷۸

۲۰! بر ۱, ۲, ۳, ۴, ..., ۹ بخش پذیر است. ۱۲ هم بر ۱, ۲, ۳, ۴, ۶ از بین اعداد طبیعی یک‌رقمی بخش پذیر است، پس $20! + 12$ بر اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۶ بخش پذیر می‌شود. اما این عدد بر ۵, ۷, ۸, ۹ نمی‌خورد. چرا؟ مثلاً $20! + 12 = 5k + 2$ یعنی در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده دو می‌آورد. شبیه همین برای ۸, ۷, ۹ هم اتفاق می‌افتد. خلاصه این‌که بر ۴ عدد طبیعی بخش پذیر نیست.

گزینه ۷۹

روش اول عبارت $20!$ را تجزیه می‌کنیم:

$$20! = (2^2 \times 5) \times 19 \times (2 \times 3^2) \times 17 \times (2^4) \times (3 \times 5)$$

$$\times (2 \times 7) \times 13 \times (2^2 \times 3) \times 11 \times (2 \times 5) \times (3^2) \times (2^3) \times 7$$

$$\times (2 \times 3) \times 5 \times (2^2) \times 3 \times 2 = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19$$

بنابراین مجموع توان‌ها یا $\sum_{i=1}^n a_i$ برابر است با:

$$18 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 36$$

روش دوم

برای پیدا کردن توان عدد اول p در تجزیه $n!$ از رابطه زیر می‌توان استفاده کرد:

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

با این روش می‌توان عدد ۲ و ۳ را در تجزیه $20!$ سریع‌تر به دست آورد.

$$\left[\frac{20}{2}\right] + \left[\frac{20}{4}\right] + \left[\frac{20}{8}\right] + \left[\frac{20}{16}\right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18$$

$$\left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{9}\right] = 6 + 2 = 8$$

پیدا کردن توان بقیه عددهای اول هم که ساده است.

- ۸۰- **گزینه ۱** سمت راست $x | 2y \rightarrow$ سمت راست $2x \rightarrow x | y$
- پس **۱** درست است.
- ۲** درست است. $12 | y \rightarrow$ سمت چپ $3 \rightarrow 4 | y$
- ۳** درست است. $x | 24 \rightarrow$ سمت راست $2x \rightarrow x | 12$
- ۴** درست نیست برای مثال اگر $x = y = 12$ باشد **۴** رد می‌شود. کافی است x و y را برابر ۱۲ فرض کنیم در این صورت **۴** رد می‌شود.

گزینه ۸۱ دو رابطه را به یک رابطه تبدیل می‌کنیم. $4 | x$ ، پس $4q = x$ می‌شود. با جای گذاری، $4q | 84$ به دست می‌آید. حالا دو طرف به ۴ ساده شده، پس $q | 21$. حالا q چه اعدادی می‌تواند باشد؟ $q = \pm 1, q = \pm 3, q = \pm 7, q = \pm 21$ می‌تواند باشد. به ازای هر q ، یک جواب برای x به دست می‌آید، پس x ، هشت عدد صحیح مختلف می‌تواند باشد.

گزینه ۸۲ $2 | a$ پس $a = 2q$ می‌شود. با جای گذاری $2qb = 60$ پس $bq = 30$ و این یعنی $b | 30$ (نه این‌که $b = 30$ بشود). **روش دوم** فرض کنید $a = 4$ و $b = 15$ باشد در این صورت هر دو رابطه $2 | 4$ و $2 | 15$ درست است اما سه گزینه اول رد می‌شوند.

گزینه ۸۳ از $a | b$ نتیجه می‌شود $aq = b$. از $b | 2a$ هم داریم $aq' = 2a$. با جای گذاری b می‌شود: $qq' = 2$ $\xrightarrow{\div a}$ $aq' = 2a$

حالا داریم:

$$\begin{cases} q = 1, q' = 2 \Rightarrow a = b \\ \text{یا} \\ q = 2, q' = 1 \Rightarrow 2a = b \end{cases}$$

روش دوم فرض کنید $a = 1$ و $b = 2$ در این صورت هر دو رابطه $a | b$ و $b | 2a$ درست می‌شود اما گزینه‌های **۱** و **۲** رد می‌شوند. حالا فرض کنید $a = 1$ و $b = 1$ در این صورت **۴** نیز رد می‌شود.

گزینه ۸۴ می‌دانیم $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ بنابراین اگر خواهیم $X^2 - 1$ بر ۱۳ بخش پذیر باشد یعنی یا $X - 1$ بر ۱۳ بخش پذیر است و یا $X + 1$. هر دو حالت را بررسی می‌کنیم.

$$X - 1 = 13k \Rightarrow X = 13k + 1 \Rightarrow X = 1, 14$$

$$X + 1 = 13k \Rightarrow X = 13k - 1 \Rightarrow X = 12$$

پس رابطه به ازای سه عدد برقرار است.

گزینه ۸۵ عدد را X^2 می‌نامیم. داریم:

$$18 | X^2 \Rightarrow \frac{X^2}{2 \times 3^2} \in \mathbb{Z}$$

اگر خواهیم این کسر عددی صحیح باشد، X حتماً باید زوج باشد و یک عامل ۳ داشته باشد؛ بنابراین:

$$X = 6q \Rightarrow X^2 = 36q^2$$

از طرفی عدد پنج‌رقمی است، بنابراین:

$$100000 \leq 36q^2 < 1000000$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} 1000 \leq 6q < 10000 \sqrt{10}$$

$$100 \leq 6q < 316 \Rightarrow 16/6 < q < 52/6$$

بنابراین $q \in \{17, 18, \dots, 52\}$ و در نتیجه به ازای 36 $52 - 17 + 1 = 36$ عدد رابطه برقرار است.

گزینه ۸۶ فرم کلی عددی که مکعب کامل باشد، به صورت X^3 است. اگر X^3 بر ۹ بخش پذیر باشد، X باید حتماً مضرب ۳ باشد، پس:

$$x = 3q \Rightarrow x^3 = 27q^3$$

بنابراین چون $x^3 | y^m \Rightarrow x^5 | y^{2m-5}$ درست است، پس:

$$\Delta m \leq 3(2m-5) \Rightarrow \Delta m \leq 9m-15$$

$$\Rightarrow 4m \geq 15 \Rightarrow m \geq 3/75$$

پس m دست کم باید برابر ۴ باشد.

$$a | 7k+4 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 8} a | 56k+32 \quad \text{گزینه ۹۱}$$

$$a | 8k+3 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 7} a | 56k+21$$

$$\xrightarrow{(-)} a | 11 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 11$$

اما با توجه به این که گفته شده $a > 1$ است، پس فقط مقدار $a = 11$ قابل قبول است، در نتیجه a عددی اول است.

گزینه ۹۲ می‌خواهیم هر دو کسر صحیح باشند، پس صورت‌ها بر مخرج بخش پذیرند، یعنی:

$$a+1 | 5b+2 \xrightarrow{\times 6} a+1 | 30b+12 \Rightarrow a+1 | 13$$

$$a+1 | 6b+5 \xrightarrow{\times 5} a+1 | 30b+25$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+1 = \pm 1 \\ a+1 = \pm 13 \end{array} \right\} \begin{cases} a = 0 \\ a = -2 \\ a = 12 \\ a = -14 \end{cases} \quad \text{حالا داریم:}$$

پس a چهار مقدار صحیح می‌تواند باشد.

گزینه ۹۳

$$a | 7m+x \xrightarrow{\times 6} a | 42m+6x \xrightarrow{(-)} a | 6x-35$$

$$a | 6m+5 \xrightarrow{\times 7} a | 42m+35$$

تنها مقسوم‌علیه‌های $6x-35$ باید ± 1 باشند، این یعنی باید $6x-35=1$ (یعنی $x=6$) یا $6x-35=-1$ باشد (یعنی $x=6/24$ که نمی‌شه).

گزینه ۹۴ باید کاری کنیم که m از سمت راست رابطه‌ها حذف

شود، چون داریم $m^2-2 | a$ پس سمت راست رابطه $a | m+1$ را در $m-1$ ضرب می‌کنیم تا عبارت به دست آمده فقط جمله m^2 داشته باشد.

$$a | m+1 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times (m-1)} a | m^2-1$$

$$a | m^2-2 \quad \text{از طرفی}$$

$$\xrightarrow{(-)} a | 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

گزینه ۹۵ با توجه به گزینه‌های (۱) و (۲) سعی کنیم b را از

بین ببریم. می‌دانیم اگر $a | b$ و $a | c$ آن‌گاه $a | bm \pm cn$ ، یعنی a هر ترکیب خطی b و c را عادی می‌کند. حالا:

$$3a+4b | 3a+4b \xrightarrow{\times 2} 3a+4b | 9a+12b$$

$$3a+4b | 10a+2b \xrightarrow{\times 4} 3a+4b | 40a+12b$$

$$\xrightarrow{(-)} 3a+4b | 31a$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a | b+1 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2} a | 2b+2 \\ a | c+2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times b} a | bc+2b \end{array} \right\} \xrightarrow{(-)} a | bc-2 \quad \text{گزینه ۹۶}$$

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. اگر $b=4$ ، $a=5$ و $c=3$ باشد هر دو رابطه $a | b+1$ و $a | c+2$ درست می‌شود. حالا به ازای این

مقادیر چهار گزینه را بررسی می‌کنیم:

$$bc-1=12-1=11$$

(۱) بر ۵ بخش پذیر نیست.

$$bc-2=12-2=10$$

(۲) بر ۵ بخش پذیر است.

حالا مقادیر سه و چهار رقمی x^3 را پیدا می‌کنیم:

$$1000 \leq x^3 < 100000 \Rightarrow 1000 \leq 27q^3 < 100000$$

$$\xrightarrow{\text{ریشه سوم می‌گیریم}} \sqrt[3]{1000} \leq 3q < \sqrt[3]{100000}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \leq 3q \leq 10 \cdot \sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2/1} \leq 3q \leq 10 \cdot 2/1$$

$$\Rightarrow 4/76 \leq 3q \leq 21 \Rightarrow 1/5 \leq q \leq 7$$

$$\Rightarrow q = 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

پس به ازای ۶ عدد رابطه برقرار است.

گزینه ۸۷ می‌دانیم در هر رابطه عاقد کردن، سمت چپ را می‌توان

کوچک و سمت راست را بزرگ کرد. داریم:

$$2x^2 | 3y \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div 2} x^2 | 3y \quad \text{(۲)}$$

$$2x^2 | 3y \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div 2x} x | 3y \quad \text{(۳)}$$

$$2x^2 | 3y \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div 2} x^2 | 3y \quad \text{(۴)}$$

$$\xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2y} x^2 | 6y^2$$

اما (۱) درست نیست.

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. فرض کنید $x=3$ و $y=6$

باشد، در این صورت رابطه $2x^2 | 3y$ درست است (۱۸ | ۱۸). اما (۱) نادرست است (۶ | ۱۸).

گزینه ۸۸

$$a^2 b^2 | a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div \text{تقسیم بر } a^2} a^2 | a^2 + b^2 \xrightarrow{(-)} a^2 | b^2 \quad \text{(I)}$$

$$a^2 b^2 | a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{سمت چپ } \div \text{تقسیم بر } b^2} b^2 | a^2 + b^2 \xrightarrow{(-)} b^2 | a^2 \quad \text{(II)}$$

با توجه به دو رابطه (I) و (II) می‌توان نتیجه گرفت $a^2 = b^2$.

با جای‌گذاری در رابطه صورت سؤال داریم: $a^4 = a^4$.

اگر a صفر باشد، رابطه $a^4 = a^4$ به دست می‌آید که درست است. اگر $a \neq 0$ باشد، دو طرف را بر a^2 ساده می‌کنیم: $a^2 = 1$ یا $a^2 = -1$ $\Rightarrow a^2 | 2$ بنابراین رابطه‌ای که داده، فقط به ازای سه مقدار $a = \pm 1, 0$ برقرار می‌شود.

گزینه ۸۹ در بخش آموزش تقسیم در صورتی ترکیب شرطی

$a^m | b^n \Rightarrow a^r | b^s$ درست است که $nr \leq ms$ باشد، مثلاً $a^3 | b^2 \Rightarrow a | b$ چون $3 \times 1 \leq 2 \times 3$.

$$a^3 | b^2 \Rightarrow a^5 | b^4 \quad \text{چون } 3 \times 5 \leq 2 \times 6$$

$$a^3 | b^2 \Rightarrow a^6 | b^5 \quad \text{چون } 3 \times 6 \leq 2 \times 5$$

$$a^3 | b^2 \Rightarrow a^2 | b \quad \text{چون } 3 \times 1 < 2 \times 2$$

برای این که درک بهتری داشته باشید، یکی از گزینه‌ها را ثابت می‌کنم؛ مثلاً از $a^3 | b^2$ نتیجه می‌گیریم $a^5 | b^4$. $a^5 | b^4 \Rightarrow a^2 | b^2$.

حالا دو طرف (۱) و (۲) را در هم ضرب می‌کنیم. یادتان هست که اگر $a | b$ و $c | d$ آن‌گاه $ac | bd$ ؛ پس $a^2 \times a^2 | b^2 \times b^2$ یعنی $a^4 | b^4$.

گزینه ۹۰ دیدیم که رابطه $x^a | y^b \Rightarrow x^{a'} | y^{b'}$ درست است

$$ba' \leq ab'$$

که: دور دور نزدیک نزدیک

$$x+1=11k \Rightarrow x=11k-1 \xrightarrow{k=9} x_{\max}=98$$

در میان این عددها، ۹۹ از همه بزرگ‌تر است:

$$9+9=18$$

۱۰۱- گزینه ۱ می‌دانیم هر عددی مثل k در تقسیم به ۳، سه حالت دارد:

۱ یا به ۳ بخش‌پذیر است. $k=3q \Leftarrow$

۲ یا به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد. $k=3q+1 \Leftarrow$

۳ و یا به ۳ باقی‌مانده‌ای برابر ۲ دارد. $k=3q+2 \Leftarrow$

در هر سه حالت k^2+1 را پیدا می‌کنیم:

$$k=3q \Rightarrow k^2+1=9q^2+1$$

$$k=3q+1 \Rightarrow k^2+1=9q^2+6q+2$$

$$k=3q+2 \Rightarrow k^2+1=9q^2+12q+5$$

همان‌طور که می‌بینید هیچ‌کدام از این عبارتها مضرب ۳ نیست.

رابطه به ازای هیچ‌کدام از اعضای مجموعه a برقرار نیست. چون اعضای این

مجموعه یعنی $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ همگی مضرب ۳ هستند.

۱۰۲- گزینه ۲ روش اول

$$7|a+5b-2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 2} 7|2a+10b-4$$

حالا رابطه‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$7|2a+10b-4 \xrightarrow{(-)} 7|7b-4-k$$

$$7|2a+3b+k$$

از طرفی می‌دانیم: $7|7b$ ، بنابراین:

$$7|7b \xrightarrow{(-)} 7|4+k$$

$$7|7b-4-k$$

بنابراین کوچک‌ترین مقدار طبیعی k عدد ۳ است.

روش دوم اگر $a=4$ و $b=1$ باشد، رابطه $7|a+5b-2$ برقرار است:

$$7|4+5-2$$

حالا به ازای $a=4$ و $b=1$ رابطه $7|2a+3b+k$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$7|8+3+k \Rightarrow 7|11+k$$

واضح است که کوچک‌ترین مقدار طبیعی k که به ازای آن رابطه برقرار

است، $k=3$ است.

۱۰۳- گزینه ۲ را از رابطه حذف می‌کنیم:

$$11|2a+5b \xrightarrow{\times 3} 11|6a+15b$$

$$11|3a+kb \xrightarrow{\times 2} 11|6a+2kb$$

$$\xrightarrow{(-)} 11|2kb-15b \Rightarrow 11|(2k-15)b$$

می‌دانیم b مضرب ۱۱ نیست، پس $2k-15$ حتماً باید مضرب ۱۱ باشد، از

طرفی می‌دانیم: $11|11$ ، بنابراین:

$$11|2k-15 \xrightarrow{(+)} 11|2k-4 \Rightarrow 11|2(k-2)$$

$$11|11$$

با توجه به این که $2(k-2)$ باید مضرب ۱۱ باشد و ۲ مضرب ۱۱ نیست،

پس $k-2$ باید مضرب ۱۱ باشد، بنابراین:

$$11|k-2 \Rightarrow k-2=11q \Rightarrow k=11q+2$$

می‌خواهیم k عدد طبیعی کوچک‌تر مساوی ۵۰ باشد، بنابراین:

$$1 \leq 11q+2 \leq 50 \Rightarrow -1 \leq 11q \leq 48 \Rightarrow -\frac{1}{11} \leq q \leq \frac{48}{11}$$

$$\Rightarrow q=0, 1, 2, 3, 4$$

پس به ازای ۵ مقدار k رابطه برقرار است.

۳ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc+1=12+1=13$

۴ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. $bc+2=12+2=14$

بنابراین ۲ پاسخ سؤال است.

۹۷- گزینه ۲ دو رابطه را در هم ضرب می‌کنیم:

$$5|4k+3 \xrightarrow{\times} 35|20k^2+15k-4k-3$$

$$7|5k-1$$

$$\Rightarrow 35|20k^2+11k-3$$

همان‌طور که می‌بینید چنین چیزی در گزینه‌ها وجود ندارد. اما با توجه به

این که $35|35k^2$ است اگر این دو رابطه را از هم کم کنیم، داریم:

$$35|20k^2+11k-3 \xrightarrow{\ominus} 35|15k^2-11k+3$$

$$35|35k^2$$

روش دوم اگر $k=3$ باشد هر دو رابطه برقرار است اما در میان گزینه‌ها

فقط ۲ به ازای $k=3$ درست می‌شود:

$$35|15 \times 9 - 11 \times 3 + 3 \Rightarrow 35|105$$

۹۸- گزینه ۲ می‌دانیم: $14n^2+19n+6=(7n+6)(2n+1)$

$$5|2n+1 \xrightarrow{(+)} 5|7n+6$$

$$5|5n+5$$

از طرفی:

هر دو عدد $2n+1$ و $7n+6$ بر ۵ بخش‌پذیرند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها همواره مضرب ۲۵ است.

روش دوم از عددگذاری استفاده می‌کنیم. n را طوری انتخاب می‌کنیم که:

$$5|2n+1$$

برای مثال فرض می‌کنیم $n=2$ باشد. حالا به ازای $n=2$

مقدار $14n^2+19n+6$ را پیدا می‌کنیم:

$$n=2 \Rightarrow 14 \times 4 + 19 \times 2 + 6 = 100$$

که در میان گزینه‌ها فقط بر ۲۵ بخش‌پذیر است.

۹۹- گزینه ۲ روش اول طرفین رابطه $3|a+2b$ را به توان ۲

$$9|a^2+4ab+4b^2$$

می‌رسانیم:

$$9|a^2+4ab+4b^2 \xrightarrow{(-)} 9|9ab+(4-k)b^2$$

$$9|a^2-5ab+kb^2$$

می‌دانیم $9ab$ بر ۹ بخش‌پذیر است، بنابراین:

$$9|9ab+(4-k)b^2 \xrightarrow{(-)} 9|(4-k)b^2$$

$$9|9ab$$

پس برای برقراری رابطه باید $4-k$ بر ۹ بخش‌پذیر باشد، که در گزینه‌ها فقط $k=13$ چنین ویژگی‌ای دارد.

روش دوم به ازای $a=b=1$ رابطه $3|a+2b$ برقرار است. اگر در رابطه

$$9|a^2-5ab+kb^2$$

$$9|1-5+k \Rightarrow 9|k-4$$

که در گزینه‌ها به ازای $k=13$ این رابطه برقرار است.

۱۰۰- گزینه ۲ رابطه را تجزیه می‌کنیم:

$$x^2-3x^2-4x=x(x^2-3x-4)=x(x-4)(x+1)$$

این عبارت باید مضرب ۱۱ باشد؛ یعنی هر یک از سه جمله x ، $(x-4)$ و

$(x+1)$ می‌تواند بر ۱۱ بخش‌پذیر باشند. هر سه حالت را بررسی می‌کنیم:

$$x=11k \xrightarrow{k=9} x_{\max}=99$$

$$x-4=11k' \Rightarrow x=11k'+4 \xrightarrow{k'=8} x_{\max}=92$$

روش دوم ریشه سمت چپ یعنی $-\frac{3}{5}$ را می‌اندازیم در طرف راست. کسر را ساده کرده و صورت را در نظر می‌گیریم.

$$\delta m + 3 \mid 9(-\frac{3}{5}) + 2 = \frac{-17}{5} \Rightarrow \delta m + 3 \mid -17$$

ادامه راه حل، شبیه قبلی می‌شود.

۱۰۸- گزینه ۲ روش اول داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2n+1 \mid 2n+1 &\xrightarrow{\text{سمت راست } \times (2n+1)} 2n+1 \mid 4n^2+4n+1 \\ 2n+1 \mid 2n+1 &\xrightarrow{\text{از طرفی}} 2n+1 \mid 4n^2+\delta n+4 \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{(-)} 2n+1 \mid n+3 \xrightarrow{\times 2} 2n+1 \mid 2n+6 \xrightarrow{(-)} 2n+1 \mid \delta$$

پس $2n+1 = \pm 5$ یا $2n+1 = \pm 1$ می‌تواند باشد. با حل معادله‌ها $n = -1, n = 2, n = -3$ به دست می‌آید. فقط یکی از این‌ها طبیعی است و آن هم $n = 2$ بوده که در رابطه مسئله صدق هم می‌کند، پس یک جواب برای n به دست می‌آید.

روش دوم به جای این همه ضرب، تفریق و ...، ریشه سمت چپ (یعنی $-\frac{1}{4}$) را در طرف راست قرار دهیم. کسر به دست آمده را ساده کرده و صورت آن را در نظر می‌گیریم.

$$2n+1 \mid 4(-\frac{1}{4})^2 + \delta(-\frac{1}{4}) + 4 = 1 - \frac{\delta}{4} + 4 = \frac{5}{4} \Rightarrow 2n+1 \mid 5$$

ادامه راه حل، شبیه روش اول است. فقط حواستان باشد، n هایی که با این روش به دست می‌آید حتماً باید در رابطه اولیه صدق کنند؛ یعنی بعد از این‌ها را به دست آورید، باید در رابطه اولیه جای گذاری کنید و درستی آن را به دست آورید.

۱۰۹- گزینه ۲ گفتیم که در سؤالاتی شبیه این سؤال که رشد عبارت سمت چپ رابطه عاد کردن سریع‌تر از عبارت سمت راست باشد، کافی است رابطه را فقط به ازای عددهای کوچک بررسی کنیم:

$$x^2+1 \mid x+1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow 1 \mid 1 \checkmark \\ x=1 \Rightarrow 2 \mid 2 \checkmark \\ x=2 \Rightarrow 5 \mid 3 \times \end{cases}$$

از این‌جا به بعد قطعاً رابطه برقرار نیست. اما باید عددهای منفی را هم بررسی کنیم:

$$\begin{cases} x=-1 \Rightarrow 0 \mid 0 \checkmark \\ x=-2 \Rightarrow -7 \mid -1 \times \end{cases}$$

به ازای عددهای منفی کوچک‌تر نیز رابطه برقرار نیست و بنابراین معادله فقط دو جواب دارد.

۱۱۰- گزینه ۲ روش اول رشد عبارت n^2+3 از $n+5$ بیشتر است، پس رابطه فقط به ازای مقادیر کوچک n ممکن است جواب داشته باشد. این مقادیر را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} n=0 &\Rightarrow 3 \mid 5 \quad \times \\ n=1 &\Rightarrow 4 \mid 6 \quad \times \\ n=2 &\Rightarrow 7 \mid 7 \quad \checkmark \\ n=-3 &\Rightarrow 12 \mid 8 \quad \times \end{aligned}$$

از این‌جا به بعد چون عدد سمت راست از عدد سمت چپ کوچک‌تر می‌شود رابطه دیگر برقرار نیست. اما باید عددهای منفی را نیز بررسی کنیم:

$$\begin{aligned} n=-1 &\Rightarrow 4 \mid 4 \quad \checkmark \\ n=-2 &\Rightarrow 7 \mid 3 \quad \times \\ n=3 &\Rightarrow 12 \mid 2 \quad \times \end{aligned}$$

از این‌جا به بعد هم قدرمطلق عدد سمت راست از قدرمطلق عدد سمت چپ

۱۰۴- گزینه ۲ روش اول می‌دانیم هر عددی مثل $n+2$ خودش را می‌شمارد. سمت راست آن را در ۵ ضرب می‌کنیم:

$$n+2 \mid n+2 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 5} n+2 \mid 5n+10 \quad (I)$$

$$n+2 \mid 5n+3 \quad (II)$$

بر طبق صورت سؤال می‌دانیم:

$$\begin{cases} a \mid b \\ a \mid c \end{cases} \Rightarrow a \mid b-c$$

با توجه به این نکته دو رابطه (I) و (II) را از هم کم می‌کنیم:

$$n+2 \mid 5n+10 \quad (-) \rightarrow n+2 \mid -7 \Rightarrow \begin{cases} n+2=7 \Rightarrow n=5 \\ n+2=1 \Rightarrow n=-1 \\ n+2=-1 \Rightarrow n=-3 \\ n+2=-7 \Rightarrow n=-9 \end{cases}$$

که در میان آن‌ها فقط $n=5$ طبیعی است.

روش دوم ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$n+2=0 \Rightarrow n=-2 \Rightarrow 5 \times (-2) + 3 = -7$$

$n+2$ عدد -7 را می‌شمارد. بنابراین:

$$n+2 \mid -7 \Rightarrow \begin{cases} n+2=1 \\ n+2=-1 \\ n+2=-7 \\ n+2=7 \end{cases}$$

و از این‌جا به بعد مثل روش اول عمل می‌کنیم.

۱۰۵- گزینه ۳ سمت راست رابطه را تبدیل به یک عدد می‌کنیم:

$$3x+2 \mid 5x+7 \xrightarrow{\times 3} 3x+2 \mid 15x+21 \xrightarrow{\text{کم}} 3x+2 \mid 11$$

$$3x+2 \mid 3x+2 \xrightarrow{\times 5} 3x+2 \mid 15x+10$$

پس $3x+2 = \pm 11$ یا $3x+2 = \pm 1$ و چون بزرگ‌ترین مقدار x را خواهیم $3x+2$ را برابر ۱۱ فرض می‌کنیم. بزرگ‌ترین مقدار x برابر ۳ می‌شود که عدد ۲۴ را می‌شمارد.

۱۰۶- گزینه ۳ y را تنها می‌کنیم.

$$yx+3 = 2x+2y \Rightarrow \frac{y(x-2)}{yx-2y} = 2x-3 \Rightarrow y = \frac{2x-3}{x-2}$$

حُب حالا چه موقع y عددی طبیعی می‌شود؟ بله درست است، وقتی صورت بر مخرج بخش پذیر باشد؛ یعنی $2x-3 \mid 2x-2$. حالا:

ریشه عبارت سمت چپ را در عبارت سمت راست قرار می‌دهیم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow x-2 \mid 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=-1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=1 \\ x-2=1 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=3 \end{cases}$$

پس دو نقطه وجود دارد.

۱۰۷- گزینه ۱ روش اول m را از سمت راست عبارت حذف می‌کنیم:

$$\delta m+3 \mid \delta m+3 \xrightarrow{\times 9} \delta m+3 \mid 4\delta m+27 \quad (-) \rightarrow \delta m+3 \mid 17$$

$$\delta m+3 \mid 9m+2 \xrightarrow{\times 5} \delta m+3 \mid 4\delta m+10$$

پس $\delta m+3 = \pm 17$ یا $\delta m+3 = \pm 1$ می‌تواند باشد.

$$\begin{cases} \delta m+3 = \pm 1 \Rightarrow m \text{ صحیح نداریم} \\ \delta m+3 = \pm 17 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \\ m = \frac{14}{5} \times \end{cases} \end{cases}$$

$m = -4$ صدق هم می‌کند $(-17 \mid -34)$ ، پس قابل قبول است.

کوچک تر است و رابطه برقرار نیست. اما حواستان باشد که به ازای $n = -5$ نیز رابطه برقرار است: $n = -5 \Rightarrow 28 \mid 0$ ✓
 پس به ازای $n = 2, n = -1, n = -5$ رابطه برقرار است.

$$n^2 + 3 \mid n + 5 \xrightarrow{\times(n-5)} n^2 + 3 \mid n^2 - 25$$

از طرفی: $n^2 + 3 \mid n^2 + 3$ ، بنابراین:

$$n^2 + 3 \mid n^2 + 3 \Rightarrow n^2 + 3 \mid 28$$

$$n^2 + 3 \mid n^2 - 25 \Rightarrow n^2 + 3 = 1 \quad \times$$

$$n^2 + 3 = 2 \quad \times$$

$$n^2 + 3 = 4 \Rightarrow n^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} n = 1 & \text{غقیق} \\ n = -1 & \text{✓} \end{cases}$$

$$n^2 + 3 = 7 \Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} n = 2 & \text{✓} \\ n = -2 & \text{غقیق} \end{cases}$$

$$n^2 + 3 = 14 \quad \times$$

$$n^2 + 3 = 28 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 & \text{غقیق} \\ n = -5 & \text{✓} \end{cases}$$

دقت کنید!

وقتی سمت راست را در یک عبارت ضرب می کنیم ممکن است جوابهای غیر قابل قبول ایجاد شود، بنابراین لازم است تک تک جوابها را در رابطه صورت سؤال چک کنیم.

۱۱۱- گزینه ۲ عدد 2^m را ببینید. فقط عامل دو دارد؛ یعنی فقط بر اعداد 2^m که $0 \leq m \leq n$ است، بخش پذیر می باشد؛ یعنی n باید توانی از ۲ باشد. توان های ۲ که سه رقمی هستند را امتحان کنیم.

$$n = 128 = 2^7 \Rightarrow 2^{128} \mid 2^{128} \Rightarrow 2^{14} \mid 2^{128}$$

$$n = 256 \Rightarrow (256)^2 \mid 2^{256} \Rightarrow 2^{16} \mid 2^{256}$$

شبه همین به ازای $n = 512$ هم رابطه درست می شود، توان ۲ بعدی ۱۰۲۴ می شود که دیگر سه رقمی نیست. پس شد ۳ تا.

۱۱۲- گزینه ۲ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ می شود، پس داریم:

$$\frac{n(n-1)}{2} \mid n^2 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} q = n^2$$

$$\xrightarrow{\div n \times 2} (n-1)q = 2n \Rightarrow n-1 \mid 2n$$

می توان ریشه سمت چپ، یعنی $n = 1$ را در راست جای گذاری کنیم، می شود:

$$n-1 \mid 2$$

$$\begin{cases} n-1=1 \Rightarrow n=2 \\ n-1=2 \Rightarrow n=3 \end{cases}$$

پس:

هر دو مقدار در رابطه مسئله هم صدق می کنند، پس شد دو مقدار طبیعی!

۱۱۳- گزینه ۲ **روش اول** باقی مانده a بر ۴ برابر ۳ است؛ یعنی داریم: $a = 4k + 3$

$$a^2 = 16k^2 + 24k + 9 = \underbrace{16k^2 + 24k + 8 + 1}_{\text{از ۸ فاکتور می گیریم}}$$

$$= 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8q + 1$$

بنابراین باقی مانده a^2 بر ۸ برابر ۱ است.

روش دوم

از این که $a = 4k + 3$ است می فهمیم که a فرد است و با توجه به این که مربع هر عدد فرد در تقسیم به ۸ باقی مانده ای برابر ۱ دارد، پس باقی مانده a^2 بر ۸ برابر ۱ است.

۱۱۴- گزینه ۲ با توجه به این که $a = 4k + 3$ و $b = 6k' + 1$ دو عدد فردند. مربع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است.
 حالا: $a^2 + b^2 + 5 = (4k + 3)^2 + (6k' + 1)^2 + 5 = 8k'' + 7$
 یعنی باقی مانده برابر ۷ می شود.

۱۱۵- گزینه ۲ همه گزینه ها فرد هستند. این خبر خوبی برای شما است. چرا؟ چون مربع عدد فرد، فرد است. از طرفی مربع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است، پس اگر باقی مانده تقسیم عدد فردی بر ۸ برابر ۱ نباشد، آن عدد مربع کامل نیست. باقی مانده تقسیم گزینه های ۱، ۳ و ۴ بر ۸ برابر ۱ نمی شود، پس هیچ کدام مربع کامل نیستند.
 البته توجه داشته باشید که رقم یکان هیچ مربع کاملی نمی تواند ارقام ۲، ۳، ۷ یا ۸ باشد. با این نکته می توانیم ۲ را زودتر رد کنیم.

۱۱۶- گزینه ۱ از دو عدد متوالی، یکی زوج و دیگری فرد است. توان سوم آن ها هم، یکی زوج و دیگری فرد می شود. اگر آن ها را کم کنیم، فرد می شود (فرد منهای زوج، فرد می شه). حالا مربع هر عدد فرد، به صورت $8q + 1$ است، پس باقی مانده آن بر ۸، برابر یک می شود.

۱۱۷- گزینه ۲ عددی فرد است، پس a, b و c هر سه تا فرد هستند. (آگه یکی زوج باشه، ضربشون زوج می شه). می دانیم مربع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است؛ یعنی در تقسیم بر ۸، باقی مانده ای برابر یک دارد. حالا a, b و c همگی فرد هستند، پس هر سه تا به صورت $8q + 1$ هستند.

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 8q + 1 + 2(8q' + 1) + 3(8q'' + 1)$$

$$= 8(q + 2q' + 3q'') + \underbrace{1 + 2 + 3}_6 = 8k + 6$$

پس باقی مانده آن بر ۸ برابر ۶ می شود.

۱۱۸- گزینه ۲ a زوج است، پس $3a$ زوج است و در نتیجه $3a + 1$ فرد است. می دانیم $a \mid 3a + 1$ ، پس یک عدد فرد بر b بخش پذیر است. پس b نمی تواند زوج باشد، پس b حتماً فرد است. می دانیم مربع هر عدد فرد را می توان به صورت $8q + 1$ نوشت. b^2 فرد است، پس b^4 نیز فرد است چون مربع یک عدد فرد است. $(b^2)^2$ بنابراین $b^4 = 8q + 1$ ، a, b^4 را هم که می دانستیم زوج است، یعنی $a = 2q'$. بنابراین:

$$a^3 + b^4 + 2 = 8q'^3 + 8q + 1 + 2 = 8(q'^3 + q) + 3$$

$$8(q'^3 + q) \text{ بر } 8 \text{ بخش پذیر است، پس باقی مانده کل عبارت بر } 8 \text{ برابر } 3 \text{ است.}$$

۱۱۹- گزینه ۲ عددها در تقسیم به ۴ به یکی از حالت های زیرند:

- $4k$
- $4k + 1 \Rightarrow$ فرد است.
- $4k + 2$
- $4k + 3 \Rightarrow$ فرد است.

بنابراین عددهای زوج به صورت $4k$ یا $4k + 2$ است. حالا:

$$(4k)^2 = 16k^2 = 8(2k^2) = 8q$$

$$(4k + 2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(\underbrace{2k^2 + 2k}_q) + 4 = 8q + 4$$

پس باقی مانده صفر است یا ۴، یعنی دو حالت دارد.

۱۲۰- گزینه ۳ عبارت را تجزیه می کنیم:

$$a^4 - b^4 - 2a^2 + 2b^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) - 2(a^2 - b^2)$$

$$= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2)$$

می‌دانیم مربع هر عدد فرد را می‌توان به صورت $\lambda k + 1$ نوشت، بنابراین:

$$\begin{aligned} a &= \lambda k + 1 \\ b &= \lambda k' + 1 \\ (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2) &\Rightarrow (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2) \\ &= (\lambda k + 1 - (\lambda k' + 1))(\lambda k + 1 + \lambda k' + 1 - 2) \\ &= (\lambda(k - k'))(\lambda(k + k')) = 64(k^2 - k'^2) \end{aligned}$$

این عبارت حتماً بر 64 بخش پذیر است اما دلیلی ندارد که بر عدد بزرگ‌تری بخش پذیر باشد.

برای مثال اگر $a = 5$ و $b = 3$ باشد:

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2) = (25 - 9)(25 + 9 - 2) = 512 = 64 \times 8$$

اما اگر $a = 7$ و $b = 5$ باشد:

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - 2) = (49 - 25)(49 + 25 - 2) = 64 \times 27$$

۱۲۱- گزینه ۲ اگر b فرد باشد، پس $b + 4$ هم فرد است. پس مقسوم‌علیه

آن، یعنی $a + 3$ هم فرد است. یعنی a زوج می‌شود. اگر 1 اضافه و کم کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} a^2 + 2a + b^2 + 3 &= a^2 + 2a + 1 + b^2 + 3 - 1 \\ &= (a+1)^2 + b^2 + 2 = (\lambda q + 1) + (\lambda q' + 1) + 2 = \lambda k + 4 \end{aligned}$$

دقت کنید که اگر a زوج باشد، $a + 1$ فرد می‌شود، پس $(a + 1)^2$ دوباره $\lambda q + 1$ می‌شود.

۱۲۲- گزینه ۲

$$4 \times 3^{10} - 9 \times 3^4 = 2^2 \times 3^{10} - 3^2 \times 3^4 = 2^{12} - 3^6$$

می‌دانیم $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است اما اگر n زوج باشد بر $a + b$ نیز بخش پذیر است. داریم:

$$\begin{aligned} 2^{12} - 3^6 &= (2^6)^2 - (3^3)^2 = 64^2 - 27^2 = (64 - 27)(64 + 27) \\ &= 37 \times 91 = 37 \times 7 \times 13 \end{aligned}$$

پس عدد داده شده بر 11 بخش پذیر نیست.

۱۲۳- گزینه ۲ **روش اول** اگر $n = 1$ باشد، 1 و 2 رد می‌شوند.

اگر $n = 3$ باشد، 2 رد می‌شود. اما چرا 4 درست است؟ از اتحاد چاق و لاغر داریم:

$$(n^2 + 2)(n^4 - 2n^2 + 4) = n^6 + 8 \Rightarrow n^2 + 2 \mid n^6 + 8$$

روش دوم سه تا نکته داریم که از اتحادهایی که در حسابان 2 خواندید به دست آمده است. n و k دو عدد طبیعی هستند.

1 $a^k - b^k \mid a^n - b^n$ وقتی برقرار است که n بر k بخش پذیر باشد؛ مثلاً $a^2 - b^2 \mid a^6 - b^6$

2 $a^k + b^k \mid a^n + b^n$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ فرد باشد؛ یعنی n

مضرب فرد k باشد. در 4. $(n^2)^3 + 2^3 \mid n^2 + 2$ برقرار است چون $\frac{3}{1} = 3$ می‌شود که فرد است.

3 $a^k + b^k \mid a^n - b^n$ وقتی برقرار است که $\frac{n}{k}$ زوج باشد.

۱۲۴- گزینه ۲ ابتدا توان‌ها را یکی می‌کنیم:

$$3^{39} + 7^{26} = (3^3)^{13} + (7^2)^{13} = 27^{13} + 49^{13}$$

می‌دانیم اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a + b$ بخش پذیر است، بنابراین

$27^{13} + 49^{13}$ بر $27 + 49 = 76$ بخش پذیر است و با توجه به این که $76 = 4 \times 19$ ، این عدد بر 19 بخش پذیر است.

۱۲۵- گزینه ۲ می‌دانیم اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ هم بر $a - b$

بخش پذیر است و هم بر $a + b$. در این نوع سؤال‌ها اول باید توان‌ها را یکسان کنیم:

$$2^{42} - 3^{18} = (2^7)^6 - (3^3)^6 = 128^6 - 27^6$$

این عدد بر $101 = 27 - 128$ و $155 = 27 + 128$ بخش پذیر است. بنابراین در میان عددهای داده شده $2^{42} - 3^{18}$ فقط بر 61 بخش پذیر نیست.

۱۲۶- گزینه ۳ می‌دانیم $5^0 = 7^2 + 1$ است که بر 25 بخش پذیر است.

از طرفی اگر n فرد باشد $a^n + b^n$ بر $a + b$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$7^2 + 1 \mid (7^2)^{2k+1} + 1 \Rightarrow 5^0 \mid 7^{4k+2} + 1$$

یعنی عددهای به فرم $7^{4k+2} + 1$ بر 5^0 و در نتیجه بر 25 بخش پذیرند. پس

$7^6 + 1$ بر 25 بخش پذیر است.

روش دوم

$$7^6 + 1 = (7^2)^3 + 1 = (7^2 + 1)(7^4 + 1 - 7^2)$$

۱۲۷- گزینه ۲ می‌دانیم $a^n - b^n$ همواره بر $a - b$ بخش پذیر است و

اگر n زوج باشد $a^n - b^n$ بر $a + b$ نیز بخش پذیر است. با توجه به همین نکته، $5^n - 2^n$ همواره بر $5 - 2$ یعنی 3 بخش پذیر است. اما ما می‌خواهیم این عبارت مضرب 13 باشد.

سعی می‌کنیم برای n حالت‌های مختلفی در نظر بگیریم تا ببینیم می‌توانیم کاری کنیم $a^n - b^n$ مضرب 13 شود.

$$5^{2k} - 2^{2k} = 25^k - 4^k \quad (\text{الف اگر } n \text{ زوج باشد، داریم:})$$

که مضرب $21 = 4 - 25$ است. (که به درد ما نمی‌خورد!)

$$5^{2k} - 2^{2k} = 125^k - 8^k \quad (\text{ب) اگر } n \text{ مضرب 3 باشد، داریم:})$$

که بر $117 = 125 - 8$ بخش پذیر است. حالا با توجه به این که $13 \times 3^2 = 117$ ، پس اگر n مضرب 3 باشد $5^n - 2^n$ بر 13 بخش پذیر است. در میان گزینه‌ها فقط 84 مضرب 3 است.

۱۲۸- گزینه ۳ می‌دانیم اگر n فرد باشد: $a^n + b^n$ بر $a + b$ عبارت

دیگر رابطه $a^{2k+1} + b^{2k+1}$ همواره برقرار است. با توجه به این که $3^2 = 28 + 1$ است، می‌توان نوشت:

$$3^2 + 1 \mid (3^2)^{2k+1} + 1^{2k+1} \Rightarrow 28 \mid 3^{4k+2} + 1$$

پس اگر n به صورت $6k + 3$ باشد رابطه برقرار است. با توجه به این که n عددی طبیعی و کوچک‌تر از 60 است داریم:

$$1 \leq 6k + 3 < 60 \Rightarrow -2 \leq 6k < 57$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{57}{6} = 9.5 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 9$$

پس به ازای 10 عدد رابطه برقرار است.

این سؤال‌ها با همنهشتی راحت‌تر حل می‌شوند در درس بعد

روش حل این سؤال‌ها با همنهشتی را نیز می‌بینید.

۱۲۹- گزینه ۳ برای به دست آوردن ب.م.م هر عدد کافی است هر دو

عدد را تجزیه کرده، عوامل مشترک را با توان کوچک‌تر در هم ضرب کنیم:

$$(180, 144) = (2^2 \times 3^2 \times 5, 2^4 \times 3^2) = 2^2 \times 3^2 = 36$$

۱۳۰- گزینه ۱ می‌دانیم اگر عدد a عدد b را بشمارد ب.م.م.شان می‌شود $|a|$ ،

$$\begin{cases} |a| \mid b \Rightarrow (a, b) = |a| \xrightarrow{\text{چون } a < 0} (a, b) = -a \\ |a| \mid 0 \Rightarrow (a, 0) = |a| = -a \end{cases}$$

۱۳۱- گزینه ۱ برای به دست آوردن ب.م.م دو عدد باید عددها را تجزیه کرد و عوامل مشترک را با توان کوچکتر در هم ضرب کرد. اما گاهی همانطور که می بینید تجزیه عددها کار سختی است. در این جور موارد همانطور که در درس نامه هم گفتیم می توانیم از روش نزدبانی استفاده کنیم:

q	۳	۱	۱	
۶۶۳	۱۸۷	۱۰۲	۸۵	۱۷
r	۱۰۲	۸۵	۱۷	

$$\begin{array}{r} ۱۸۷ \\ ۶۶۳ \overline{) ۵۶۱} \\ \underline{۵۶۱} \\ ۱۰۲ \end{array}$$

۶۶۳ را بر ۱۸۷ تقسیم کرده و باقی مانده و خارج قسمت را در جدول قرار می دهیم چون باقی مانده صفر نشده، باقی مانده را به سطر وسط منتقل کرده دوباره عددها را بر هم تقسیم می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۱۰۲ \\ ۱۸۷ \overline{) ۱۰۲} \\ \underline{۱۰۲} \\ ۸۵ \end{array}$$

دوباره باقی مانده را به ردیف وسط می بریم و الگوریتم را تکرار می کنیم:

$$\begin{array}{r} ۸۵ \\ ۱۰۲ \overline{) ۸۵} \\ \underline{۸۵} \\ ۱۷ \end{array}$$

و بالأخره چون ۸۵ بر ۱۷ بخش پذیر است پس ب.م.م دو عدد ۱۷ است. $d = 17 \Rightarrow 2d + 1 = 35$ مضرب ۷ است.

۱۳۲- گزینه ۱ می توانیم عوامل مشترک را از ب.م.م فاکتور بگیریم. بنابراین: $(3m, 9m^2) = 3m(1, 3m) = 12$ می دانیم همواره $(1, a) = 1$ است پس: $3m = 12 \Rightarrow m = 4$

۱۳۳- گزینه ۱ اگر $(a, b) = d$ باشد $(a^2, b^2) = d^2$ و $(\delta a, \delta b) = \delta d$ است. بنابراین: $d^2 - \delta d = 14 \Rightarrow d^2 - 5d - 14 = 0$
 $\Rightarrow (d-7)(d+2) = 0 \Rightarrow d = 7$
 غ ق ق $d = -2$

۱۳۴- گزینه ۳ قبل از این که تست را حل کنیم، چند نکته مهم کتاب درسی را مرور می کنیم:

- ① دو عدد متوالی، نسبت به هم اول اند (پس ① درسته)
- ② دو عدد فرد متوالی، نسبت به هم اول اند.
- ③ ب.م.م دو عدد زوج متوالی، برابر ۲ می شود.

خب حالا $4m+1$ و $4m+3$ دو عدد فرد متوالی هستند، پس نسبت به هم اول اند. (② درسته) شبیه همین، (④ هم درست است، اما چرا ③ غلط است؟ خیلی ساده $m=1$ بگیرید. می بینیم $(6, 8) = 2$ می شود نه. اما برای درک بهتر یکی از گزینه ها را ثابت می کنیم که چرا ب.م.م شان برابر ۱ می شود. گزینه ② را نگاه کنید. فرض کنید: $d = (4m+1, 4m+3)$

در این صورت: $\begin{cases} d | 4m+1 \\ d | 4m+3 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d | 2 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 2$

اما d نمی تواند برابر ۲ باشد، زیرا هر دو عدد $4m+1$ و $4m+3$ فردند و عددهای فرد نمی توانند بر ۲ بخش پذیر باشند.

۱۳۵- گزینه ۳ یک نکته خیلی مهمی که باید بدانیم این است که اگر $(a, b) = d$ باشد، d نه تنها ب.م.م دو عدد a و b است بلکه بر بقیه مقسوم علیه های مشترک a و b نیز بخش پذیر است. به بیان دیگر اگر $(a, b) = d$ و x نیز یک مقسوم علیه مشترک دو عدد باشد یعنی $x | a$ و $x | b$ می توان نتیجه گرفت $x | d$.

اگر $(a, b) = d$ باشد: $x | a, x | b \Rightarrow x | d$

بنابراین در این سؤال وقتی ب.م.م دو عدد ۳۶ است، هر یک از مقسوم علیه های ۳۶ نیز یک مقسوم علیه مشترک دو عدد است.
 $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ مجموعه مقسوم علیه های ۳۶ یعنی به ازای ۹ عدد، رابطه برقرار است.

- ① نادرست است، چون برای مثال ممکن است هر دو مضرب ۳ باشند: $a=6 \Rightarrow (6, 3) = 3$
 $b=3$
- ② نادرست است، چون ممکن است ب.م.م دو عدد عددی بزرگتر از ۲ شود: $a=12 \Rightarrow (a, b+1) = (12, 6) = 6$
 $b=5$
- ③ نادرست است، چون ممکن است a زوج و مضرب ۷ باشد: $a=14 \Rightarrow (14, 7) = 7$
- ④ درست است، چون اختلاف دو عدد فرد و زوج همواره فرد است و ب.م.م هر عدد فرد ۲ برابر ۱ است.

۱۳۷- گزینه ۳ $3 \times 2^2 = 12$ است، پس a نه زوج است و نه مضرب ۳. از بین اعداد یک رقمی، $a = 1, 5, 7$ می تواند باشد، پس a سه مقدار دارد.

۱۳۸- گزینه ۲ می دانیم: $d | 18$
 $(4n+1, 18) = d \Rightarrow d | 4n+1$
 $4n+1$ فرد است پس d نمی تواند زوج باشد اما هر یک از مضارب فرد 18 $d = 1, 3, 9$ می تواند باشد.

۱۳۹- گزینه ۲ می دانیم ۱۳ عدد اول است، بنابراین بزرگترین مقسوم علیه مشترک یک عدد دیگر با ۱۳ یا برابر ۱ است و یا برابر ۱۳. (برای مثال $1 = (20, 13)$ می شه ولی چون ۳۹ مضرب ۱۳ه: $13 = (39, 13)$ می شه.) حالا در این سؤال می دانیم $(n-3, 13)$ بزرگتر از ۱ است. بنابراین این مقدار برابر ۱۳ است و در نتیجه $n-3$ حتماً باید مضرب ۱۳ باشد.

$$n-3 = 13k \Rightarrow n = 13k + 3$$

می خواهیم n دورقمی باشد پس $10 \leq n \leq 99$ داریم:
 $10 \leq 13k + 3 \leq 99 \Rightarrow 7 \leq 13k \leq 96 \Rightarrow 0/6 \leq k \leq 7/3$
 $\Rightarrow k = 1, 2, \dots, 7$
 یعنی به ازای ۷ مقدار دورقمی n رابطه برقرار است.

۱۴۰- گزینه ۳ می دانیم که d هر دو عدد را می شمارد. داریم:

$$\begin{cases} d | 3n+5 \xrightarrow{\times n} d | 3n^2 + 5n \\ d | 3n^2 - 2n + 6 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d | 7n - 6$$

$$d | 7n - 6 \xrightarrow{\times 3} d | 21n - 18 \xrightarrow{(-)} d | 53$$

$$d | 3n+5 \xrightarrow{\times 7} d | 21n + 35$$

$\Rightarrow d = 53$ (چون گفته $d \neq 1$)



۱۴۵- گزینه ۱

ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(25n + 9, 11n + 4) = d$$

$$d \mid 11n + 4 \xrightarrow{\times 25} d \mid 275n + 100$$

$$d \mid 25n + 9 \xrightarrow{\times 11} d \mid 275n + 99 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$$

یعنی به ازای همه مقادیر n دو عدد همواره نسبت به هم اول‌اند. خوب چند عدد دورقمی داریم؟ درست است، 10 تا!

۱۴۶- گزینه ۱

می‌دانیم $(a, b) = d$ باشد، $d \mid a$ و $d \mid b$. داریم:

$$(\Delta n - 2, 12n + 7) = d$$

$$\begin{cases} d \mid \Delta n - 2 \xrightarrow{\times 12} d \mid 60n - 24 \\ d \mid 12n + 7 \xrightarrow{\times 5} d \mid 60n + 35 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d \mid 59 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 59$$

پس اگر دو عدد نسبت به هم اول نباشند ب.م.م.شان 59 است.

۱۴۷- گزینه ۱

ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم، داریم:

$$(7n + 5, 11n + 2) = d$$

$$\begin{cases} d \mid 11n + 2 \xrightarrow{\times 7} d \mid 77n + 14 \\ d \mid 7n + 5 \xrightarrow{\times 11} d \mid 77n + 55 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d \mid 41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 41$$

پس ب.م.م دو عدد یا 1 است و یا 41 و بنابراین هیچ‌وقت نمی‌تواند 3 باشد.

۱۴۸- گزینه ۱

ب.م.م دو عدد را d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(n + 2, 7n + 1) = d$$

$$\begin{cases} d \mid n + 2 \xrightarrow{\times 7} d \mid 7n + 14 \\ d \mid 7n + 1 \end{cases} \xrightarrow{\ominus} d \mid 13$$

$$d \mid 7n + 1 \xrightarrow{\ominus} d \mid 13$$

چون گفته $d \neq 1$ پس $d = 13$ است پس هر دو عدد $n + 2$ و $7n + 1$ باید بر 13 بخش‌پذیر باشند.

$$n + 2 = 13k \Rightarrow n = 13k - 2 \Rightarrow 41 \leq 13k - 2 \leq 100$$

$$\Rightarrow 43 \leq 13k \leq 102 \Rightarrow \frac{43}{13} \leq k \leq \frac{102}{13}$$

$$\Rightarrow k = 4, 5, 6, 7$$

پس به ازای 4 عدد رابطه برقرار است.

۱۴۹- گزینه ۳

می‌دانیم $15a + 3$ و $15a - 12$ هر دو بر 3 بخش‌پذیرند. پس عدد 3 یک مقسوم‌علیه مشترک دو عدد است. یعنی d یک عامل 3 دارد.

$$(15a - 12, 15a + 3) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid 15a - 12 \\ d \mid 15a + 3 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d \mid 15$$

چون d از یک طرف مضرب است و از طرف دیگر 15 را می‌شمارد، پس 15 یا 3 اما $d = 15$ نیز نمی‌تواند باشد، چون برای مثال عدد $15a + 3$ در تقسیم به 15 باقی‌مانده‌ای برابر 3 دارد و نمی‌تواند بر 15 بخش‌پذیر باشد. بنابراین ب.م.م این دو عدد همواره برابر 3 است.

با یک مثال هم می‌شد فهمید!

$$a = 1 \Rightarrow (15a + 3, 15a - 12) = (18, 3) = 3$$

۱۵۰- گزینه ۳

ب.م.م دو عدد را d می‌نامیم. می‌دانیم d هر دو عدد را می‌شمارد:

$$(3^k - 1, k^2 + 2k + 4) = d$$

$$\begin{cases} d \mid 3^k - 1 \xrightarrow{\times k} d \mid 3k^2 - k \\ d \mid k^2 + 2k + 4 \xrightarrow{\times 3} d \mid 3k^2 + 6k + 12 \end{cases} \xrightarrow{(-)} d \mid 7k + 12$$

برای مثال به ازای $n = 16$ داریم: $(53, 742) = 53$

روش تستی کافی است ریشه $3n + 5$ را در $3n^2 - 2n + 6$ قرار دهیم و صورت کسر حاصل را در نظر بگیریم:

$$3n + 5 = 0 \Rightarrow n = -\frac{5}{3} \Rightarrow 3n^2 - 2n + 6 = 3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^2 - 2\left(-\frac{5}{3}\right) + 6 = \frac{53}{3} \Rightarrow d \mid 53 \Rightarrow d = 53$$

۱۴۱- گزینه ۲

$$(20!, 19! - 18!) = (20 \times 19 \times 18!, 18!(19 - 1))$$

$$= (20 \times 19 \times 18!, 18 \times 18!) = 18!(20 \times 19, 18) = 2 \times 18!$$

۱۴۲- گزینه ۲

می‌دانیم اگر $(a, b) = d$ باشد آن‌گاه $d \mid a$ و $d \mid b$.

$$(n, 24) = 12 \Rightarrow 12 \mid n \Rightarrow n = 12q$$

اما q نمی‌تواند زوج باشد چون اگر q زوج باشد، n مضرب 24 می‌شود و در نتیجه $(n, 24) = 24$ برابر 24 می‌شود. پس q فرد است.

$$q = 2k + 1 \Rightarrow n = 12(2k + 1) = 24k + 12$$

n دورقمی است، بنابراین:

$$10 \leq 24k + 12 \leq 99 \Rightarrow -2 \leq 24k \leq 87$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{24} \leq k \leq \frac{87}{24} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3$$

پس به ازای چهار عدد، رابطه برقرار است.

۱۴۳- گزینه ۲

$$(6a, 10b) = 44 \Rightarrow 2(3a, 5b) = 44 \Rightarrow (3a, 5b) = 22$$

بنابراین $3a$ و $5b$ هر دو بر 22 بخش‌پذیر است و چون 3 و 5 نسبت به 22 اول‌اند پس a و b هر دو بر 22 بخش‌پذیرند و در نتیجه $(a, b) = 22$ پس **۱** نادرست است.

۲ درست است، چون اگر a مضرب 5 باشد، با توجه به این‌که $5b$ نیز بر 5 بخش‌پذیر است پس 5 در ب.م.م دو عدد نیز می‌آید:

$$(3a, 5b) = 22 \times 5 = 110$$

۳ نادرست است، b مضرب 3 نیست چون اگر b مضرب 3 بود حاصل $(3a, 5b) = 66$ می‌شود. (پون $3a$ هم مضرب 3 است و 3 می‌شه عامل مشترک و توپ 30 می‌آد).

۴ دلیلی ندارد $a + b$ بر 44 بخش‌پذیر باشد. برای مثال اگر $a = 22$ و $b = 44$ باشد $a + b = 66$ بر 44 بخش‌پذیر نیست.

۱۴۴- گزینه ۱

ب.م.م دو عدد (a, c) را برابر d فرض می‌کنیم. داریم:

$$(a, c), d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid c \end{cases}$$

در صورت سؤال گفته شده $c \mid a - b$ ، بنابراین:

$$d \mid c, c \mid a - b \Rightarrow d \mid a - b \xrightarrow{(+)} d \mid b$$

پس d یک مقسوم‌علیه مشترک a و b است اما با توجه به این‌که a و b نسبت به هم اول‌اند (خود سؤال گفته) بنابراین تنها مقسوم‌علیه مشترکشان عدد 1 است و در نتیجه $d = 1$.

روش دوم این مدل سؤال‌ها را با عددگذاری هم می‌شود حل کرد. برای

مثال در این سؤال $a = 5$, $b = 3$, $c = 2$ باشد، در این صورت $c \mid a - b$ و $(c, a) = (2, 5) = 1$

و: