درس اول. آشنایی با منطق ریاضی

مؤلف درس، تست‌های تألیفی و تنظیم تست‌های این فصل: امیرحسین ابومحبوب

منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی یا مطالعهٔ ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

استدلال: استدلال زیر را در نظر بگیرید:

هر عدد اول، دو مقسوم‌علیه مثبت دارد.

عدد ۷، عددی اول است.

نتیجه: عدد ۷، دو مقسوم‌علیه مثبت دارد.

این استدلال از چند جملهٔ خبری به‌دست می‌آید. چنانچه دوجملهٔ اول این استدلال را درست در نظر بگیریم، در این صورت نتیجه‌گیری جملهٔ سوم منطقی به نظر می‌رسد، در منطق ریاضی به دوجملهٔ خبری نخست، مفروضات استدلال و به جملهٔ خبری سوم، نتیجهٔ استدلال گفته می‌شود. یک استدلال می‌تواند از چندین جملهٔ خبری تشکیل شود که یکی از آن‌ها نتیجهٔ استدلال و بقیه مفروضات استدلال هستند.

گزاره: یکی از اساسی‌ترین مفاهیم و ابزار شروع کار در منطق ریاضی، گزاره است. گزاره جمله‌ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، به‌طور ثابت دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) می‌باشد. درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا « **T** » و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا « **F** » نمایش می‌دهیم.

تذکر ◀◀ ۱) گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است، اگر چه ممکن است درستی یا نادرستی گزاره برای ما واضح و مشخص نباشد.

۲) جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی، گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

■ مثال: از بین جمله‌های زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف) کلمهٔ «ایران» از ۵ حرف تشکیل شده است.

ب) ای کاش می‌توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم.

پ) هر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ت) صدمین رقم بعد از ممیز عدد π، برابر با ۵ است.

◀ حل:

الف) یک گزارهٔ درست است.

ب) گزاره نیست.

پ) یک گزارهٔ نادرست است.

ت) یک گزاره است، ولی ممکن است درستی یا نادرستی آن بر ما معلوم نباشد.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است. بنابراین هر گزاره مانند **p**، فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را، طبق جدول زیر می‌گیرد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزارهٔ **p** و **q**، طبق جدول روبه‌رو، دارای ۴ حالت است.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

نکته ⏮ ارزش‌های **n** گزاره، دارای ۲^{n} حالت است. به‌طور مثال ارزش سه گزارهٔ **p**، **q** و **r** دارای $۲^{۳} = ۸$ حالت مختلف است.

گزاره نما ◄ هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره نماها را برحسب تعداد متغیر به‌کار رفته در آن‌ها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

به‌عنوان مثال، جملهٔ «عدد حقیقی **x**، عدد زوج است.» یک گزاره نما است. با جای‌گذاری مقادیر مختلف به جای **x**، این جمله به یک گزاره (درست یا نادرست) تبدیل می‌شود.

دامنهٔ متغیر و مجموعهٔ جواب گزاره نما ◄ در هر گزاره نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این‌که گزاره نما تبدیل به گزاره شود، دامنهٔ متغیر گزاره نما می‌گویند و آن را با حرف **D** نمایش می‌دهند.

به عنوان مثال دامنهٔ متغیر گزاره نمای «**x** عددی فرد است.»، مجموعهٔ اعداد صحیح می‌باشد.

در هر گزاره نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره نما تبدیل به گزارهٔ با ارزش درست شود، مجموعهٔ جواب گزاره نما می‌گویند و آن را با حرف **S** نمایش می‌دهند و همواره داریم $S \subset D$.

به عنوان مثال، مجموعهٔ جواب گزاره‌نمای $x^{۲} - ۶x + ۵ = ۰$، مجموعهٔ $S = \{۱ , ۵\}$ است. (دامنهٔ متغیر این گزاره نما، مجموعهٔ اعداد حقیقی است.)

نقیض یک گزاره ◄ نقیض گزارهٔ **p** به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که **p**» می‌خوانیم. ارزش $\sim p$، همواره عکس ارزش **p** است.

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره، به‌صورت روبه‌رو است:

به‌عنوان مثال نقیض گزارهٔ «۵ عددی اول است» را می‌توان به‌صورت «چنین نیست که ۵ عددی اول باشد» یا «۵ عددی اول نیست.» نوشت.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به‌وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط)، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند. ارزش گزاره‌های مرکب فقط به ارزش گزاره‌های سادهٔ سازندهٔ آن‌ها و ادات ربط بین آن‌ها بستگی دارد. به عنوان مثال «۲ عددی زوج است و ۷ عددی اول است» یک گزارهٔ مرکب است.

ترکیب فصلی دو گزاره ◄ هرگاه دو گزاره را با حرف «یا» ترکیب کنیم، گزارهٔ مرکب تشکیل شده را ترکیب فصلی دو گزاره می‌نامیم.

ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q را به‌صورت $p \vee q$ نشان می‌دهیم.

جدول ارزش ترکیب فصلی دو گزارهٔ p و q به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

بنابراین ارزش گزارهٔ مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشد.

ترکیب عطفی دو گزاره ◄ هرگاه دو گزاره را با حرف «و» ترکیب کنیم، گزارهٔ مرکب تشکیل شده را ترکیب عطفی دو گزاره می‌نامیم.

ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q را به‌صورت $p \wedge q$ نشان می‌دهیم.

جدول ارزش ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q به‌صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

بنابراین ارزش ترکیب عطفی دو گزارهٔ p و q $(p \wedge q)$ تنها زمانی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد.

هم ارزی منطقی بین گزاره‌ها ◄ دو گزاره، هم ارز منطقی نامیده می‌شوند هرگاه ارزش آن‌ها به‌ازای تمامی حالت‌های گزاره‌های سازندهٔ آن‌ها یکسان باشد.

به‌عنوان مثال، دو گزارهٔ p و $\sim(\sim p)$ هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم. $\sim(\sim p) \equiv p$

■ مثال: نشان دهید دو گزارهٔ $\sim(p \wedge q)$ و $\sim p \vee \sim q$ هم‌ارز منطقی هستند.

◄ حل:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

قوانین گزاره‌ها:

الف) قوانین جابه‌جایی

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

ب) قوانین شرکت‌پذیری

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

پ) قوانین توزیع‌پذیری
$$\begin{cases} p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r) \\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \end{cases}$$

ت) قوانین دمورگان
$$\begin{cases} \sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q \\ \sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q \end{cases}$$

ث) قوانین جذب
$$\begin{cases} p\vee(p\wedge q)\equiv p \\ p\wedge(p\vee q)\equiv p \end{cases}$$

ترکیب شرطی دو گزاره ◄ هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

در گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$، p شرط کافی برای q و q شرط لازم برای p می‌باشد. جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p\Rightarrow q$ به‌صورت زیراست

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

با توجه به جدول، ارزش گزارهٔ $p\Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد. در حالتی که ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزارهٔ مرکب $p\Rightarrow q$ همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند ارزش $p\Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

نکته ◄◄ برای دو گزارهٔ دلخواه p و q، داریم: $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

عکس نقیض ترکیب شرطی ◄ گزارهٔ $p\Rightarrow q$ عکس ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ و گزارهٔ $\sim q\Rightarrow\sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p\Rightarrow q$ است. برای هر دو گزارهٔ دلخواه p و q، «$p\Rightarrow q\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$»، یعنی هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

گزاره‌های همیشه درست و همیشه نادرست ◄ گزاره‌ای را که برای همهٔ حالات منطقی، دارای ارزش درست باشد، گزارهٔ همیشه درست و گزاره‌ای را که برای همهٔ حالات منطقی، دارای ارزش نادرست باشد، گزارهٔ همیشه نادرست می‌گوییم.

گزاره‌های $p\Rightarrow p$ یا $p\vee\sim p$ از گزاره‌های همیشه درست (T)، گزارهٔ $p\wedge\sim p$ از گزاره‌های همیشه نادرست (F) است. همچنین داریم:

۱) $\begin{cases} P\vee T\equiv T \\ P\vee F\equiv P \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} P\wedge T\equiv P \\ P\wedge F\equiv F \end{cases}$

ترکیب دو شرطی دو گزاره ◄ هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت $p\Leftrightarrow q$، می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$، را به‌صورت‌های زیر می‌خوانیم.

«اگر p آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است»، «p اگر و تنها اگر q»

با توجه به این‌که $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است:

یعنی ارزش ترکیب شرطی دو گزارهٔ p و q، زمانی درست است که ارزش درستی دو گزارهٔ p و q یکسان باشد.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

سورها

سورها ◄ در منطق ریاضی از عباراتی مانند «به ازای هر»، «به ازای بعضی مقادیر» و «به ازای هیچ مقدار» برای ساختن جملات ریاضی استفاده می‌شود و برای هر یک از جملات ذکر شده از علامت‌های خاصی استفاده می‌کنیم. به این علامت‌ها سور می‌گوییم که در جلوی گزاره نماها قرار می‌گیرند. از این سورها برای تبدیل گزاره‌نما به گزاره استفاده می‌شود و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌شود.

سور عمومی ◄ جملهٔ «به ازای هر x، $p(x)$ برقرار است.» یک جمله با سور عمومی است که در آن $p(x)$ یک گزاره‌نما است. به این دلیل به آن سور عمومی می‌گوییم که هر عضو دارای خاصیت p است. برای سور عمومی از نماد $\forall$ استفاده می‌کنیم. این نماد از وارون حرف اول کلمهٔ «All» به معنی «همه» گرفته شده و این‌طور خوانده می‌شود: «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» و به‌صورت « $\forall x\ ;\ p(x)$ » نوشته می‌شود. گزاره نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

سور وجودی ◄ جملهٔ «به ازای بعضی مقادیر x، $p(x)$ برقرار است.» یک جمله با سور وجودی است که در آن $p(x)$ یک گزاره‌نما است. از نماد « $\exists$ » برای سور وجودی استفاده می‌کنیم. این نماد از وارون حرف اول کلمهٔ «Exist» به معنی «وجود داشتن» گرفته شده و این‌طور خوانده می‌شود: «به ازای بعضی مقادیر» یا «وجود دارد» و به‌صورت « $\exists x;p(x)$ » نمایش داده می‌شود. گزاره نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی نباشد.

سور صفر ◄ جملهٔ «هیچ مقداری برای x وجود ندارد که $p(x)$ برقرار باشد.» یک جمله با سور صفر است که در آن $p(x)$ یک گزاره نما است. از نماد « $\nexists$ » برای سور صفر استفاده می‌کنیم و این‌طور خوانده می‌شود: «هیچ عضوی وجود ندارد» یا «به ازای هیچ مقدار» و به‌صورت $\nexists x;p(x)$ نوشته می‌شود. گزاره نمای شامل متغیر x که با سور صفر همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعهٔ جواب آن تهی باشد.

نقیض گزاره‌های سوری ◄

۱) نقیض گزارهٔ « $\forall x\ ;\ p(x)$ » به‌صورت « $\exists x\ ;\ \sim p(x)$ » است.

۲) نقیض گزارهٔ « $\exists x\ ;\ p(x)$ » به‌صورت « $\forall x\ ;\ \sim p(x)$ » یا « $\nexists x\ ;\ p(x)$ » است.

۳) نقیض گزارهٔ « $\nexists x\ ;\ p(x)$ » به‌صورت « $\exists x\ ;\ p(x)$ » است.

■ مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) همهٔ دکترها دارای خط ناخوانا هستند.

ب) خرسی وجود دارد که سفید رنگ باشد.

پ) هیچ کودکی دروغ نمی‌گوید.

◄ حل:

الف) دکتری وجود دارد که دارای خط خوانا باشد.

ب) همهٔ خرس‌ها سفید رنگ نیستند یا هیچ خرسی وجود ندارد که سفید رنگ باشد.

پ) کودکی وجود دارد که دروغ می‌گوید.

جدول ارزش گزاره‌ها- ترکیب گزاره‌ها

۱- نقیض گزارهٔ $\sim p\vee \sim q$، کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۱) $p\wedge q$ ۲) $p\wedge \sim q$ ۳) $p\vee q$ ۴) $p\vee \sim q$

۲- نقیض گزارهٔ «اگر ۲ عدد اول باشد، آن‌گاه ۵ عددی فرد است» کدام است؟ (مرتبط با صفحه‌های ۶ و ۹ کتاب درسی)

۱) ۲ عدد اول نیست و ۵ عددی فرد است.
۲) ۲ عدد اول است و ۵ عددی زوج است.
۳) ۲ عدد اول است یا ۵ عددی زوج است.
۴) ۲ عدد اول نیست یا ۵ عددی فرد است.

۳- کدام گزاره همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

۱) $\sim p\Rightarrow p$ ۲) $p\Rightarrow \sim p$ ۳) $p\vee \sim p$ ۴) $p\wedge \sim p$

۴- جدول ارزش زیر مربوط به کدام گزاره است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۹ کتاب درسی)

p	q	
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

۱) $\sim p\wedge q$
۲) $p\wedge \sim q$
۳) $\sim p\vee q$
۴) $p\vee \sim q$

۵- گزارهٔ $\sim p\Rightarrow q$ معادل کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۱) $p\vee q$ ۲) $\sim p\vee q$ ۳) $\sim q\Rightarrow \sim p$ ۴) $p\wedge \sim q$

۶- گزارهٔ $\sim(p\Rightarrow \sim q)$ با کدام گزارهٔ زیر معادل است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۱) $q\vee \sim p$ ۲) $q\wedge \sim p$ ۳) $p\wedge q$ ۴) $p\vee \sim q$

۷- از درستی گزاره‌های $\sim p$ و $q\Rightarrow p$، کدام گزاره همیشه درست خواهد بود؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $\sim(p\vee q)$ ۲) $p\wedge \sim q$ ۳) $p\wedge q$ ۴) $\sim p\wedge q$

۸- کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$
۲) $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$
۳) $(p\Rightarrow q)\Rightarrow r\equiv p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$
۴) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

۹- گزارهٔ $p\vee(\sim p\wedge q)$ هم ارز با کدام گزاره است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) q ۲) $p\wedge q$ ۳) p ۴) $p\vee q$

۱۰- کدام گزینه در مورد گزارهٔ $\sim(p\Rightarrow \sim p)$ درست است؟ (مرتبط با نکته صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) این گزاره همیشه درست است.
۲) این گزاره همیشه نادرست است.
۳) با $\sim p$ هم ارز است.
۴) با p هم ارز است.

۱۱- کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با تمرین ۵ صفحهٔ ۱۷ کتاب درسی)

۱) $2>3\Leftrightarrow -2<-3$
۲) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.
۳) ۲ عدد اول نیست اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.
۴) $(\frac{1}{2}\neq\frac{3}{6})\vee(1\in\{2,3,4\})$

۱۲– گزارهٔ $p \Rightarrow q$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز نیست؟ (مرتبط با نکته صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $p \Rightarrow p \wedge q$ ۲) $p \vee q \Rightarrow p$ ۳) $\sim p \vee q$ ۴) $\sim p \wedge q$

۱۳– گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم ارز است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۱۴– گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم ارز است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۲ کتاب درسی)

۱) p ۲) q ۳) $\sim p$ ۴) $\sim q$

۱۵– عکس نقیض گزارهٔ $p \vee q$ کدام است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی)

۱) $q \vee p$ ۲) $\sim q \vee \sim p$ ۳) $\sim q \vee p$ ۴) $q \vee \sim p$

۱۶– گزارهٔ $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ هم ارز کدام گزارهٔ زیر است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $\sim (p \wedge q) \vee r$ ۲) $(p \wedge q) \wedge \sim r$ ۳) $(p \vee q) \vee r$ ۴) $(p \vee q) \wedge \sim r$

۱۷– گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ با کدام گزارهٔ زیر هم ارز است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $r \Rightarrow (p \wedge q)$ ۲) $(p \vee q) \Rightarrow r$ ۳) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ۴) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

۱۸– گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم ارز است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) $p \vee \sim q \vee r$ ۲) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ ۳) $(p \vee r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ۴) $(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r)$

۱۹– گزارهٔ $(p \wedge q) \Rightarrow r$ معادل کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) $(p \vee q) \Rightarrow r$ ۲) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ ۳) $p \vee q \vee \sim r$ ۴) $(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

۲۰– کدام گزاره با بقیه معادل نیست؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) $\sim p \vee \sim q \vee \sim r$ ۲) $p \wedge q \Rightarrow r$ ۳) $p \Rightarrow \sim (q \wedge r)$ ۴) $(p \Rightarrow \sim q) \vee (p \Rightarrow \sim r)$

۲۱– گزارهٔ $[\sim p \wedge (\sim q \wedge r)] \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ معادل کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) r ۲) $p \vee q$ ۳) $p \wedge q$ ۴) $\sim r$

۲۲– اگر p و q دو گزاره باشند، کدام گزاره همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $\sim (\sim p \wedge q \Rightarrow p \vee q)$ ۲) $(p \vee \sim p) \Rightarrow q$ ۳) $p \Rightarrow p \wedge q$ ۴) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow q$

۲۳– کدام‌یک از گزاره‌های زیر همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ ۲) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$

۳) $((\sim p \vee p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)) \Rightarrow r$ ۴) $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (\sim p \vee q \vee r)$

۲۴– کدام‌یک از گزاره‌های زیر همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$ ۲) $p \wedge \sim (p \vee q)$ ۳) $(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$ ۴) $p \wedge \sim p$

۲۵– در مورد گزارهٔ $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ کدام گزینه صحیح است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) این گزاره همیشه درست است.

۲) این گزاره همیشه نادرست است.

۳) اگر p و q ارزش درست داشته باشند، این گزاره درست است.

۴) اگر p ارزش درست و q ارزش نادرست داشته باشند، این گزاره درست است.

۲۶- کدام گزاره همیشه نادرست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $p \Rightarrow (p \vee \sim p)$ ۲) $(p \vee \sim p) \Rightarrow p$ ۳) $(p \wedge \sim p) \Rightarrow p$ ۴) $p \Leftrightarrow \sim p$

۲۷- کدام گزاره همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ ۲) $[(p \Rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$ ۳) $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ ۴) $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p \vee q$

۲۸- گزارهٔ $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$ در کدام حالت درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) نادرست $= p$ ، نادرست $= q$ ، درست $= r$
۲) درست $= p$ ، نادرست $= q$ ، درست $= r$
۳) درست $= p$ ، درست $= q$ ، نادرست $= r$
۴) درست $= p$ ، نادرست $= q$ ، درست $= r$

۲۹- گزارهٔ $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$: (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) فقط هنگامی درست است که p درست باشد.
۲) فقط هنگامی درست است که p و q درست باشند.
۳) فقط هنگامی درست است که $p \Rightarrow r$ درست باشد.
۴) همواره درست است.

۳۰- اگر گزاره‌های $p \Rightarrow \sim q$ ، $q \Rightarrow r$ و $r \Rightarrow p$ ~ به‌ترتیب درست، درست و نادرست باشند، آن‌گاه: (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) p، q و r هر سه نادرست هستند.
۲) p و q نادرست هستند و r درست است.
۳) p، q و r هر سه درست هستند.
۴) p و r نادرست هستند و q درست است.

۳۱- اگر $a \equiv [\sim q \Rightarrow (q \Rightarrow p)] \Rightarrow \sim q$ و $b \equiv \sim q \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \Rightarrow \sim q]$، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) a و b همواره درست هستند.
۲) a همواره درست و b گاهی نادرست است.
۳) a گاهی نادرست و b همواره درست است.
۴) a و b همواره نادرست هستند.

۳۲- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، یک گزاره همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $q \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
۲) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee q$
۳) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
۴) $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

۳۳- در کدام حالت زیر گزارهٔ $\sim p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$ نادرست است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) درست $= p$، نادرست $= q$
۲) نادرست $= p$، درست $= q$
۳) درست $= p$، درست $= q$
۴) نادرست $= p$، نادرست $= q$

۳۴- اگر p، q و r سه گزاره باشند، آن‌گاه گزارهٔ $[\sim q \wedge (\sim p \wedge r)] \vee [(q \wedge r) \vee (p \wedge r)] \Rightarrow q \vee r$ معادل کدام‌یک از گزاره‌های زیر است؟ (مرتبط با تمرین ۸ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) T (درست) ۲) F (نادرست) ۳) q ۴) r

۳۵- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همیشه درست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow q$
۲) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \Rightarrow p$
۳) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow p$
۴) $[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \Rightarrow q$

۳۶- گزارهٔ $p \Leftrightarrow q$ معادل کدام‌یک از گزاره‌های زیر نیست؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$
۲) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
۳) $(q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$
۴) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

۳۷- کدام‌یک از گزاره‌های زیر، نقیض گزارهٔ «اگر x عدد اول و زوج باشد، آن‌گاه x برابر با ۲ است.» می‌باشد؟ (مرتبط با تمرین ۶ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) x عدد اول و زوج است و x برابر با ۲ است.
۲) x عدد اول و زوج است و x برابر با ۲ نیست.
۳) x عدد اول و زوج نیست و x برابر با ۲ نیست.
۴) x عدد اول و زوج نیست و x برابر با ۲ نیست.

۳۸– کدام‌یک از گزاره‌های زیر، همیشه درست نیست؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim q$
۲) $[(p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)] \Rightarrow \sim q$
۳) $[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
۴) $[(q \wedge \sim p) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim q$

۳۹– کدام‌یک از گزاره‌های زیر با گزارهٔ p $[\sim q \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow \sim p$ هم ارز است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
۲) $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
۳) $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q$
۴) $[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow q$

۴۰– کدام‌یک از گزاره‌های زیر با گزارهٔ $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \vee p \vee r)$ معادل است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۱ کتاب درسی)

۱) $q \Rightarrow p \vee r$
۲) $p \Rightarrow q \vee r$
۳) $r \Rightarrow q \vee p$
۴) $\sim p \vee \sim q \Rightarrow r$

سورها

۴۱– کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۱) $\exists x \in R \; ; \; 1-2x > 5$
۲) $\exists x \in R \; ; \; x^3 = x$
۳) $\forall x \in R \; ; \; x^2 \geq 0$
۴) $\forall x \in R \; ; \; x + \frac{1}{x} \geq 2$

۴۲– اگر $A = \{x \in Z \mid 0 \leq x \leq 5\}$ دامنهٔ متغیر باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۱) $\forall x \in A \; ; \; x+2 \leq 9$
۲) $\exists x \in A \; ; \; x+4 = 10$
۳) $\exists x \in A \; ; \; x+3 \leq 4$
۴) $\forall x \in A \; ; \; x+1 \leq 6$

۴۳– بیان دقیق گزارهٔ سوری «$\nexists x \in N \;\; \forall y \in R \; ; \; y < x$» کدام است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۱) هیچ عدد طبیعی از همهٔ اعداد حقیقی بزرگ‌تر نیست.
۲) هر عدد طبیعی از یک عدد حقیقی بزرگ‌تر است.
۳) هر عدد حقیقی از هر عدد طبیعی بزرگ‌تر است.
۴) هیچ عدد حقیقی از همهٔ اعداد طبیعی بزرگ‌تر نیست.

۴۴– نقیض گزارهٔ $\exists x \; ; \; \sim p(x)$ کدام است؟ (مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱) $\forall x \; ; \; \sim p(x)$
۲) $\exists x \; ; \; p(x)$
۳) $\forall x \; ; \; p(x)$
۴) $\nexists x \; ; \; p(x)$

۴۵– نقیض کدام‌یک از گزاره‌های زیر به‌درستی بیان نشده است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۹۵)

۱) گزاره: «هر مربع، یک لوزی است.»- نقیض گزاره: «مربعی وجود دارد که لوزی نیست.»
۲) گزاره: «مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.»- نقیض گزاره: «هر مستطیل، یک مربع است.»
۳) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.»- نقیض گزاره: «چهارضلعی محدبی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن بیش‌تر از 360° است.»
۴) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»- نقیض گزاره: «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

۴۶– نقیض گزارهٔ «هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.» کدام است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)(آزمون کانون- ۹۵)

۱) هر مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه دارد.
۲) هر مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.
۳) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.
۴) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویهٔ قائمه دارد.

۴۷- نقیض گزارهٔ «همهٔ دانشجویان، فعال یا باهوش هستند.» کدام گزینه است؟ (مرتبط با صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱) دانشجویی هست که فعال یا باهوش نباشد.
۲) دانشجویی هست که فعال و باهوش نباشد.
۳) همهٔ دانشجویان، فعال یا باهوش نیستند.
۴) همهٔ دانشجویان، فعال و باهوش نیستند.

۴۸- نقیض گزارهٔ $\forall x\ ;\ p(x) \wedge \exists x\ ;\ q(x)$ کدام است؟ (مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱) $(\exists x; \sim p(x)) \vee (\forall x; \sim q(x))$
۲) $(\forall x; \sim p(x)) \wedge (\exists x; \sim q(x))$
۳) $(\forall x; p(x)) \wedge (\exists x; q(x))$
۴) $(\forall x; \sim p(x)) \vee (\exists x; \sim q(x))$

۴۹- نقیض گزارهٔ «دانش‌آموزی در مدرسه نیست که صلاحیت شرکت در المپیاد را داشته باشد.» کدام گزینه است؟

(مرتبط با صفحهٔ ۱۶ کتاب درسی)

۱) بعضی دانش‌آموزان در مدرسه هستند که صلاحیت شرکت در المپیاد را ندارند.
۲) همهٔ دانش‌آموزان مدرسه، صلاحیت شرکت در المپیاد را دارند.
۳) بعضی دانش‌آموزان در مدرسه هستند که صلاحیت شرکت در المپیاد را دارند.
۴) همه دانش‌آموزان مدرسه، صلاحیت شرکت در المپیاد را ندارند.

۵۰- اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ دامنهٔ متغیر گزاره‌نما باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(مرتبط با مثال صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

۱) $\forall x \in A\ ;\ x + ۳ < ۹$
۲) $\exists x \in A\ ;\ x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$
۳) $\forall x \in A\ ;\ x^۲ > x$
۴) $\exists x \in A\ ;\ x^۲ + x = ۲۰$

۵۱- اگر $A = \{۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\}$ دامنهٔ متغیر گزاره‌نما باشد، کدام‌یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

۱) $\exists x \in A\ \forall y \in A\ ;\ x^۲ < y + ۱$
۲) $\forall x \in A\ \exists y \in A\ ;\ x^۲ + y^۲ < ۱۲$
۳) $\forall x \in A\ \forall y \in A\ ;\ x^۲ + y^۲ < ۱۲$
۴) $\exists x \in A\ \exists y \in A\ ;\ x^۲ + y^۲ = ۵$

۵۲- اگر $p(x)$: «x بر ۶ بخش‌پذیر است» و $q(x)$: «x بر ۳ بخش‌پذیر است» و مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما باشد، آن‌گاه:

(مرتبط با تمرین ۱۱ صفحهٔ ۱۸ کتاب درسی)

۱) $\exists x\ ;\ p(x) \Rightarrow q(x)$ درست است ولی $\exists x\ ;\ p(x) \Rightarrow \exists x\ ;\ q(x)$ نادرست است.
۲) $\exists x\ ;\ p(x) \Rightarrow q(x)$ نادرست است ولی $\exists x\ ;\ p(x) \Rightarrow \exists x\ ;\ q(x)$ درست است.
۳) $\forall x\ ;\ p(x) \Rightarrow q(x)$ و $\forall x\ ;\ p(x) \Rightarrow \forall x\ ;\ q(x)$ درست هستند.
۴) $\forall x\ ;\ p(x) \Rightarrow q(x)$ و $\forall x\ ;\ p(x) \Rightarrow \forall x\ ;\ q(x)$ درست نیستند.

درس دوم. مجموعه و زیرمجموعه

تعاریف مربوط به مجموعه‌ها

مجموعه ◄ مجموعه یک مفهوم اولیه است و به عنوان دسته‌ای از اشیاء کاملاً معین در نظر گرفته می‌شود که با نام بردن اعضای آن یا خاصیت اعضای آن مشخص می‌شود. معمولاً مجموعه را با یکی از حروف بزرگ (C, B, A و ...) نمایش می‌دهیم.

به هر شیء مجموعه یک عضو یا عنصر آن مجموعه می‌گوییم.

تعلق ◄ اگر x عضو مجموعهٔ A باشد یا به عبارت دیگر x متعلق به A باشد، می‌نویسیم: $x \in A$

اگر x عضو مجموعهٔ A نباشد یا به عبارت دیگر x متعلق به A نباشد، می‌نویسیم: $x \notin A$

به‌عنوان مثال برای مجموعهٔ اعداد طبیعی (N) داریم: $۱ \in N \quad , \quad ۰ \notin N$

مجموعهٔ تهی ◄ مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نشان داده می‌شود.

به عنوان مثال، مجموعهٔ اعداد اول دو رقمی و زوج، یک مجموعهٔ تهی (بدون عضو) است.

مجموعهٔ مرجع ◄ در هر بحث معین از اعضایی صحبت می‌کنیم که این اعضا متعلق به یک مجموعهٔ بزرگ‌تر به نام مجموعهٔ جهانی یا مجموعهٔ مرجع هستند. مجموعهٔ مرجع معمولاً با نماد U نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال، اگر A مجموعهٔ اعداد اول باشد، آن‌گاه می‌توانیم مجموعهٔ اعداد طبیعی را به عنوان مجموعهٔ جهانی در نظر بگیریم.

متمم یک مجموعه ◄ متمم مجموعهٔ A نسبت به مجموعهٔ مرجع که با A' نمایش داده می‌شود شامل اعضایی از U است که در A وجود ندارند.

نمایش مجموعه با گزاره‌نما ◄ خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با $P(x)$ نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. بنابراین برای نشان دادن مجموعهٔ A در حالت کلی می‌نویسیم:

$$A = \{x \in U \mid P(x)\}$$

در رابطهٔ فوق، U مجموعهٔ مرجع و $P(x)$ شرطی است که با توجه به آن، اعضای مجموعه (یعنی xها) مشخص می‌شوند. این نوع نمایش مجموعه را، نمایش مجموعه با گزاره‌نما می‌گوییم.

■ مثال: هر یک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از یک گزاره‌نما بنویسید.

الف) $A = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ...\}$

ب) $B = \{۳, ۶, ۹, ۱۲, ...\}$

پ) $C = \{۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, ...\}$

◄ حل: الف) اعضای مجموعهٔ A، مربع اعداد طبیعی هستند، بنابراین: $A = \{x \in N \mid x = k, k^۲ \in N\}$

ب) اعضای مجموعهٔ B، مضارب ۳ اعداد طبیعی هستند، بنابراین: $B = \{x \in N \mid x = ۳k, k \in N\}$

پ) اعضای مجموعهٔ C، تمام کسرهایی است که صورت یک واحد کم‌تر از مخرج است، بنابراین:

$$C = \{x \in Q \mid x = \frac{k-۱}{k}, k \in N\}$$

■ مثال: مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضای آن‌ها مشخص کنید.

الف) $A = \{x \in Z \mid |x| \le ۲\}$

ب) $B = \{m \in Z \mid m^۳ = m\}$

پ) $C = \{a \in S \mid$ فضای نمونه پرتاب یک تاس است $S\}$

◄ حل: الف) $|x| \le ۲ \Rightarrow -۲ \le x \le ۲ \Rightarrow A = \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$

ب) $m^۳ = m \Rightarrow m^۳ - m = ۰ \Rightarrow m(m^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow B = \{-۱, ۰, ۱\}$

پ) $C = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$

نکته ◄◄ تکرار اعضا یا عوض کردن ترتیب آن‌ها تأثیری در تعداد اعضای مجموعه ندارد. به‌عنوان مثال: $\{۱, ۱, ۲, \{۲, ۱\}\} = \{۱, ۲, \{۱, ۲\}\}$

تعاریف ریاضی مربوط به زیر مجموعه‌ها

زیرمجموعه◄با حذف برخی از اعضای مجموعهٔ غیرتهی A، مجموعه‌های دیگری به‌دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. به‌عبارت دیگر مجموعهٔ B یک زیرمجموعه از مجموعهٔ A است اگر هر عضو B، عضوی از A نیز باشد و می‌نویسیم: $B \subseteq A$. با استفاده از نمادهای ریاضی داریم: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$

نکته ⏮ با توجه به تعریف زیرمجموعه، اگر A یک مجموعهٔ دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، آن‌گاه:

۱) $\varnothing \subseteq A$: مجموعهٔ تهی، زیر مجموعهٔ تمامی مجموعه‌ها است.

۲) $A \subseteq A$: هر مجموعه‌ای، زیر مجموعهٔ خودش است.

۳) $A \subseteq U$: هر مجموعه‌ای، زیر مجموعهٔ مجموعهٔ مرجع است.

نکته ⏮ برای دو مجموعهٔ A و B، اگر عضوی در B وجود داشته باشد که این عضو در A نباشد، در این صورت B زیر مجموعهٔ A نیست $(B \not\subseteq A)$ و بالعکس اگر B زیرمجموعهٔ A نباشد آن‌گاه قطعاً عضوی در B وجود دارد که در A نیست. با استفاده از نمادهای ریاضی داریم: $B \not\subseteq A \Leftrightarrow \exists x \in B \wedge x \notin A$

■ مثال: نشان دهید مجموعهٔ اعداد اول، زیر مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی نیست.

◄ حل: اگر $A = \{۲, ۳, ۵, ...\}$ مجموعهٔ اعداد اول و $B = \{۱, ۳, ۵, ...\}$ مجموعهٔ اعداد فرد طبیعی باشند، آن‌گاه $۲ \in A$ ولی $۲ \notin B$، پس $A \not\subseteq B$.

دو مجموعهٔ مساوی◄فرض کنیم A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B، عضوی از A باشد؛ یعنی $B \subseteq A$ و $A \subseteq B$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A = B$.

نکته ⏮ برای سه مجموعهٔ A، B و C، اگر داشته باشیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه داریم $A \subseteq C$.

در واقع چون $A \subseteq B$، پس هر عضو A در B است و چون $B \subseteq C$، پس هر عضو B در C است. بنابراین هر عضو A، عضو C نیز هست یعنی $A \subseteq C$.

تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه

اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، آن‌گاه تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با ۲^n است.

در واقع اگر به هر یک از اعضای مجموعهٔ A، یکی از دو رقم ۰ یا ۱ را نسبت دهیم (رقم یک در صورت وجود آن عضو در زیر مجموعهٔ دلخواه و رقم صفر در صورت عدم وجود آن عضو در آن زیر مجموعه)، می‌توانیم هر زیر مجموعهٔ را با یک کد n رقمی مشخص کنیم. تعداد حالت‌های ممکن برای چنین کدی برابر تعداد زیر مجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی A است.

رقم اول		رقم دوم		رقم سوم				رقم n ام
○		○		○				○
۲	×	۲	×	۲	×	...	×	$۲ = ۲^n$

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی◄مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد، مجموعهٔ متناهی می‌گوییم و مجموعه‌ای را که متناهی نباشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌نامیم. به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد طبیعی یک رقمی، یک مجموعهٔ متناهی و مجموعهٔ اعداد اول، یک مجموعهٔ نامتناهی است.

■ مثال: مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید. چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیر مجموعه‌های آن، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد. مشخص کنید A چند عضوی است.

◄ حل: فرض کنیم A دارای n عضو باشد، پس دارای ۲^n زیرمجموعه است. چنانچه ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، تعداد زیر مجموعه‌های A، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، یعنی تعداد زیر مجموعه‌های این مجموعه برابر $۲^n + ۴۸$ می‌شود.

از طرفی چون ۲ عضو به اعضای A اضافه شده است، پس تعداد زیر مجموعه‌های جدید برابر $۲^{n+۲}$ است و داریم

$$۲^{n+۲} = ۲^n + ۴۸ \Rightarrow ۲^n \times ۲^۲ = ۲^n + ۴۸ \Rightarrow ۲^n \times ۲^۲ - ۲^n = ۴۸ \Rightarrow ۳ \times ۲^n = ۴۸$$

$$\Rightarrow ۲^n = ۱۶ = ۲^۴ \Rightarrow n = ۴$$

در نتیجه مجموعهٔ A، چهار عضوی است.

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی برابر با $\binom{n}{k}$ است.

■ مثال: مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ چند زیر مجموعه دارد به گونه‌ای که:

الف) سه عضوی باشد. ب) سه عضوی باشد و دقیقاً یکی از اعضای آن، عددی اول باشد.

◄ حل: الف) تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی یک مجموعهٔ ده عضوی برابر است با: $\binom{۱۰}{۳}=۱۲۰$

ب) یک عضو از میان اعداد اول $\{۲,۳,۵,۷\}$ و دو عضو دیگر را از ۶ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم. تعداد زیر مجموعه‌ها برابر است با:

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۲}=۴\times۱۵=۶۰$$

نکته:

۱) برای دو مجموعهٔ A و B، $A\subseteq A\cup B$، $B\subseteq A\cup B$، $A\cap B\subseteq A$ و $A\cap B\subseteq B$.

۲) برای چهار مجموعهٔ A، B، C و D، اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$، آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$ و $A\cap C\subseteq B\cap D$.

۳) برای سه مجموعهٔ A، B و C، اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$، آن‌گاه $A\cup B\subseteq C$.

۴) برای دو مجموعهٔ A و B، اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

۵) برای سه مجموعهٔ A، B و C، اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup C$ و $A\cap C\subseteq B\cap C$.

۶) برای دو مجموعه A و B، اگر $A\cap B\neq\varnothing$، آن‌گاه $A-B=A$ و $B-A=B$.

افراز یک مجموعه

افراز ◄ فرض کنیم $A\neq\varnothing$ یک مجموعه و $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n زیرمجموعه‌های A باشند. مجموعهٔ A به n زیرمجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$، ... و A_n افراز شده است، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

$\text{I)}\ \forall i(۱\le i\le n)\ :\ A_i\neq\varnothing$ (ها ناتهی باشند A_i)

$\text{II)}\ \forall i\neq j\ :\ A_i\cap A_j=\varnothing$ (اشتراک دو به دوی A_i ها تهی باشد)

$\text{III)}\ A_۱\cup A_۲\cup...\cup A_n=\bigcup_{i=۱}^{n}A_i=A$ (اجتماع A_i ها برابر مجموعهٔ A شود)

■ مثال: مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را به چند طریق می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟ تمام افرازهای ممکن را بنویسید.

◄ حل: تمام افرازهای مجموعهٔ A به سه زیرمجموعه به‌صورت زیر است:

۱) $\{a,b\}\{c\}\{d\}$ ۲) $\{a,c\}\{b\}\{d\}$ ۳) $\{a,d\}\{b\}\{c\}$

۴) $\{b,c\}\{a\}\{d\}$ ۵) $\{b,d\}\{a\}\{c\}$ ۶) $\{c,d\}\{a\}\{b\}$

نکته: فرض کنید که A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد کل حالت‌هایی که می‌توان مجموعهٔ A را به یک زیرمجموعهٔ $n_۱$ عضوی، یک زیرمجموعهٔ $n_۲$ عضوی و ... افراز کرد، برابر است با: $\binom{n}{n_۱}\times\binom{n-n_۱}{n_۲}\times\cdots$

تذکر: اگر k زیرمجموعه با تعداد اعضای یکسان در افراز وجود داشته باشد، حاصل به $k!$ تقسیم می‌شود.

■ مثال: مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را به چند حالت می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد؟

◄ حل: یک مجموعهٔ ۵ عضوی را به دو گونه می‌توان به ۳ زیرمجموعه افراز کرد.

گونهٔ اول: ۲ مجموعهٔ دوعضوی و یک مجموعهٔ یک‌عضوی که تعداد حالت‌های آن برابر است با:

$$\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱}}{۲!}=\frac{۱۰\times۳\times۱}{۲}=۱۵$$

گونهٔ دوم: یک مجموعهٔ سه‌عضوی و ۲ مجموعهٔ یک‌عضوی که تعداد حالت‌های آن برابر است با:

$$\frac{\binom{۵}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۱}{۱}}{۲!}=\frac{۱۰\times۲\times۱}{۲}=۱۰$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۱۵+۱۰=۲۵$

تعریف مربوط به مجموعه‌ها

۵۳– مجموعهٔ $A=\{a,b,\{a,b\},\{b,a\},\varnothing,\{\}\}$، چند عضو دارد؟ (مرتبط با مثال صفحه ۲۰ کتاب درسی)(آزمون کانون ـ ۹۲)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۴– اگر دو مجموعهٔ $A=\{۰,۱\}$ و $B=\{x^۳+۵x^۲+۲x-۸,\ x\}$ برابر باشند، مجموعهٔ $C=\{۲x-۱,\ x,\ ۱,\ x^۲\}$ چند عضوی است؟
(مرتبط با صفحه ۲۰ کتاب درسی)(آزمون کانون ـ ۹۵)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۵– اگر $A=\{۱,۲\}$ باشد، آن‌گاه چه تعداد از مجموعه‌های $B=\{x\in Q \mid x^۲-۳x+۲=۰\}$، $C=\{x\in R \mid ۱\le x\le ۲\}$، $D=\{x\in Q \mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ و $E=\{x\in N \mid ۱\le x\le ۲\}$، با مجموعهٔ A برابر هستند؟ (مرتبط با کادر در کلاس صفحه۲۳ کتاب درسی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۶– کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ $A=\{x\in Z \mid x^۲\le ۲x\}$ مساوی است؟ (مرتبط با تمرین ۴ صفحه ۲۴ کتاب درسی)

۱) $\{x\in Z \mid |x|<۲\}$ ۲) $\{x\in Z \mid x^۳=x\}$

۳) $\{x\in Z \mid x^۲\le ۱\}$ ۴) $\{x\in Z \mid x^۳+۲x=۳x^۲\}$

۵۷– اگر $A=\{۲,\ x+۲y,\ ۴\}$ و $B=\{۴,\ ۵,\ x-y\}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $x+y$ کدام است؟
(مرتبط با تمرین ۷ صفحه ۲۵ کتاب درسی)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵۸– به‌ازای چند مقدار a، دو مجموعهٔ $\{a^۲+۳\}$ و $\{۲x+۱,\ x^۲-۲\}$ با هم مساوی هستند؟
(مرتبط با تمرین ۷ صفحه ۲۵ کتاب درسی)(آزمون کانون ـ ۹۳)

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

تعریف ریاضی زیر مجموعه

۵۹– در مجموعه‌ها، گزارهٔ $\forall x\in B \Rightarrow x\notin A$، نشان‌دهندهٔ کدام است؟ (مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۳ کتاب درسی)(آزمون کانون ـ ۹۱)

۱) $A\subseteq B'$ ۲) $A\subseteq B$ ۳) $B\subseteq A$ ۴) $A'\subseteq B$

۶۰– برای دو مجموعهٔ A و B، اگر $B\not\subseteq A$ و $A\not\subseteq B$، آن‌گاه چه تعداد از گزاره‌های زیر همواره صحیح هستند؟
(مرتبط با کار در کلاس صفحه ۲۳ کتاب درسی)

الف) A و B عضو مشترکی ندارند.

ب) عضوی از مجموعهٔ مرجع وجود دارد که نه در A هست و نه در B.

پ) عضوی از هر کدام از دو مجموعهٔ A و B وجود دارد که عضو دیگری نیست.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۶۱– کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟ (مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۲۴ کتاب درسی)

۱) $\varnothing=\{\varnothing\}$ ۲) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$

۳) $\varnothing\notin\{\varnothing\}$ ۴) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\subseteq\{\varnothing,\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

۶۲– در مجموعهٔ $A=\{\{۱\},\{\{۱\}\}\}$، کدام گزینه نادرست است؟ (مرتبط با تمرین ۳ صفحه ۲۴ کتاب درسی)(آزمون کانون ـ ۸۸)

۱) $\{۱\}\subseteq A$ ۲) $\{۱\}\in A$

۳) $\{\{۱\}\}\in A$ ۴) $\{\{۱\}\}\subseteq A$