

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات

گزاره

یک استدلال می تواند از چندین جمله خبری تشکیل شود که یکی از آنها نتیجه استدلال و بقیه مفروضات استدلال هستند .
 به یک جمله خبری که در حال حاضر یا آینده ، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد ، گزاره می گوئیم .
 جمله های پرسشی ، امری و عاطفی (نشان دهنده احساسات) گزاره محسوب نمی شوند .

جدول ارزش گزاره ها

p	q	p
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	
ن	ن	

هر گزاره مانند p یکی از دو حالت ارزش گزاره را می گیرد :
 ارزش های دو گزاره p و q چهار حالت دارد :
 به طور کلی اگر n گزاره داشته باشیم ، در این صورت جدول ارزش های آن گزاره ها 2^n حالت دارد .

گزاره نما

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود ، گزاره نما نامیده می شود .

دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره نما

در هر گزاره نما ، به مجموعه مقادیری که می توان آن ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا این که گزاره نما به گزاره تبدیل شود ، دامنه متغیر گزاره نما می گویند و آن را با حرف D نمایش می دهند .

در هر گزاره نما ، به مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها ، گزاره نما به گزاره ای با ارزش درست شود ، مجموعه جواب گزاره نما می گویند و آن را با حرف S نمایش می دهند . همواره داریم $S \subseteq D$.

نقیض یک گزاره

نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می شود و آن را چنین نیست که p می خوانیم . به علامت « ~ » ناقض گفته می شود .
 دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ هم ارز منطقی هستند و می نویسیم $\sim(\sim p) \equiv p$
 در حالت کلی اگر دو گزاره p و q هم ارزش باشند می نویسیم : $p \equiv q$ و می خوانیم : p هم ارز است با q .

ترکیب فصلی دو گزاره

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزاره مرکب « p یا q » را که به صورت $p \vee q$ می نویسند که ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم . به رابطه منطقی « \vee » فاصل گفته می شود .
 ارزش گزاره مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزاره p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش $p \vee q$ درست است .

ترکیب عطفی دو گزاره

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » را که خواننده می شود p و q ترکیب عطفی دو گزاره می گوئیم . به رابطه منطقی « \wedge » عطف گفته می شود .
ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \wedge q$ نادرست است .

قانون های دمورگان :

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را که خواننده می شود « اگر p آن گاه q » ترکیب شرطی دو گزاره می گوئیم . در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می نامیم .

هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد ، آن گاه ارزش گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزاره q بستگی ندارد . در این حالت می گویند : ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است .

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد .
گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ را به صورت های « p شرط کافی برای q است » و « q شرط لازم برای p است » می خوانیم .

گزاره $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است .
هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم ارز است . $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

گزاره هایی نظیر $p \Rightarrow p$ و یا $p \vee \sim p$ را گزاره هایی همیشه درست و گزاره هایی نظیر $p \wedge \sim p$ را همیشه نادرست می نامیم .

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند ، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می نامیم . گزاره $p \Leftrightarrow q$ را به صورت های زیر می خوانیم :

« اگر p ، آن گاه q و برعکس » ، « p شرط لازم و کافی برای q است » و « p اگر و فقط اگر q »
گزاره $p \Leftrightarrow q$ وقتی درست است که p و q هم ارزش باشند .
با توجه به جدول ارزش گزاره ها : $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

قوانین جابه جایی : $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$

قوانین شرکت پذیری : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

قوانین توزیع پذیری : $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

۱	۱- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها ، ثابت کنید که : $[\sim p \Rightarrow (p \wedge q)] \equiv p$
۰/۵	۲- ارزش گزاره سوری : $x^3 + 1 = 0$; $\exists x \in \mathbb{Z}$ ، را معین نموده و نقیض آن را بنویسید.
۱	۳- مجموعه $M = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ به سه مجموعه $A = \{3k-1 \mid k \in M, k \leq 3\}$ ، $B = \{n^2 \mid n \in M, n \leq 3\}$ و C افراز شده است. الف) اعضای مجموعه‌های A ، B و C را مشخص کنید. ب) تعداد زیر مجموعه‌های C چندتاست ؟
۰/۵	۴- به روش عضوگیری ثابت کنید هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U بوده و $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.
۱	۵- به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید که : $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
۰/۵	۶- هرگاه $A = (-2, 2)$ و $B = [0, 3]$ ، نمودار $A \times B$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.
۱	۷- عددی به تصادف از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 400\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که این عدد بر ۳ بخش پذیر نباشد ولی بر ۴ بخش پذیر باشد.
۱	۸- چهار دونه : a ، b ، c و d در مسابقه‌ای شرکت می‌کنند. اگر احتمال برنده شدن a و b هر کدام نصف احتمال برنده شدن d و احتمال برنده شدن c نیز دو برابر احتمال برنده شدن d باشد ، مطلوب است احتمال این که a یا c برنده شوند ؟
۱	۹- هرگاه $P(A) = 0/5$ ، $P(B) = 0/4$ و $P(A B) = 0/5$ مطلوب است تعیین : $P(A \cap B')$.
۰/۵	۱۰- در جعبه‌ای ۱۲ سیب موجود است که ۳ تای آن‌ها لکه‌ای می‌باشد. هرگاه به تصادف از این جعبه ۳ سیب متوالیاً و بدون جای‌گذاری خارج کنیم ، احتمال این که سیب اول سالم و سیب‌های دوم و سوم لکه‌ای باشند ، چقدر است ؟
۱	۱۱- دو تیرانداز A و B به هدفی شلیک می‌کنند. هرگاه احتمال این که تیرانداز A به هدف بزند برابر $0/6$ و احتمال این که تیرانداز B به هدف بزند برابر $0/5$ باشد ، احتمال آن را تعیین کنید که هدف مورد اصابت حداقل یک تیر قرار بگیرد.
۱	۱۲- سه ظرف همانند داریم . اولی شامل ۶ مهره سفید و ۲ مهره مشکی ، دومی شامل ۳ مهره سفید و ۶ مهره مشکی و سومی نیز شامل ۵ مهره سفید و ۵ مهره مشکی می‌باشد. هرگاه یکی از این سه ظرف را به تصادف انتخاب نموده و مهره‌ای از آن خارج کنیم : الف) احتمال این که مهره مشکی باشد ، چقدر است ؟ ب) اگر بدانیم این مهره مشکی است ، احتمال این که از ظرف اول باشد ، چقدر است ؟

۳

۱۳- جدول فراوانی زیر مربوط به اندازه قد ۴۰ دانش آموز پایه یازدهم است :

اندازه قد	[۱۳۰-۱۴۰)	[۱۴۰-۱۵۰)	[۱۵۰-۱۶۰)	[۱۶۰-۱۷۰)	[۱۷۰-۱۸۰]
فراوانی (f_i)	۵	۸	۱۳	۱۰	۴
درصد فراوانی					
x_i					
$f_i x_i$					

- الف) با رسم این جدول در پاسخنامه آن را کامل کنید .
ب) قد چند درصد از دانش آموزان بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ سانتی متر است ؟
پ) نمودار بافت نگاشت ، مربوط به درصد فراوانی قد دانش آموزان را رسم کنید.
ت) میانگین قد دانش آموزان را حساب کنید.

۱۴- شاخص های میانه ، مُد ، چارک اول و چارک سوم را برای داده های زیر معین نموده و نمودار جعبه ای مربوط به این داده ها را رسم کنید.
داده ها : ۷/۵ ، ۱۵ ، ۴ ، ۱۰ ، ۱۷/۵ ، ۱۹ ، ۱۴ ، ۱۰ ، ۷/۵ ، ۱۱ ، ۱۲ ، ۹ ، ۱۰

۱۵- انحراف معیار و ضریب تغییرات داده های ۱۶ ، ۱۳ ، ۱۲ ، ۱۰ ، ۹ ، ۹ ، ۷ ، ۴ را حساب کنید.

۱۶- انواع نمونه گیری را نام ببرید.

۱۷- الف) پارامتر و آماره را تعریف کنید.
ب) آمار استنباطی یعنی چه ؟

۱۸- براساس نمونه ای به اندازه ۴۰۰ ، میانگین نمونه $\bar{X} = ۲/۵$ و انحراف معیار نمونه $\sigma = ۱$ ، محاسبه شده است.
میانگین جامعه (μ) را با ضریب اطمینان ۹۵ درصد ، برآورد کنید.

۱۹- یک مؤسسه نظرسنجی ۴۸ ساعت ، قبل از برگزاری انتخابات شورای شهر ، نظر افراد یک نمونه ی ۱۰۰۰ نفری را پیرامون شرکت در انتخابات پرسیده است. اگر ۵۳۰ نفر ، نظر مثبت داده باشند ، یک بازه ی اطمینان ۹۵ درصدی ، برای درصد شرکت کنندگان ، در این انتخابات ارائه کنید.

۲۰

جمع

۱- با کامل کردن جدول ارزش‌ها مشاهده می‌کنیم که گزاره‌های p و $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$ هم‌ارز منطقی هستند.

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$\sim p \Rightarrow (p \wedge q)$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن

۲- گزاره نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. (حداقل یک جواب داشته باشد)

$-1 \in \mathbb{Z}, x = -1$ در معادله $x^3 + 1 = 0$ صدق می‌کند. در نتیجه ارزش گزاره $\exists x \in \mathbb{Z}; x^3 + 1 = 0$ درست است.
 $\sim(\exists x \in \mathbb{Z}; x^3 + 1 = 0) \equiv \forall x \in \mathbb{Z}; x^3 + 1 \neq 0$

۳- الف) $k \leq 3 \rightarrow k = 1, 2, 3 \rightarrow 3k - 1 = 2, 5, 8 \rightarrow A = \{2, 5, 8\}$

$n \leq 3 \rightarrow n = 1, 2, 3 \rightarrow n^2 = 1, 4, 9 \rightarrow B = \{1, 4, 9\}$

$A \cup B \cup C = M \rightarrow C = \{3, 6, 7, 10\}$

ب) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با 2^n ؛ در نتیجه $2^4 = 16$

$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$

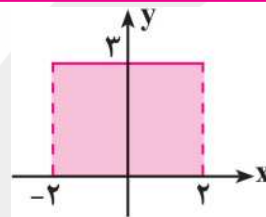
۴- برای اثبات $B' \subseteq A'$ باید ثابت کنیم که:

$\forall x; x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow B' \subseteq A'$

۵- بهتر است از طرف شلوغ‌تر به طرف ساده‌تر برسیم:

$$(A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)' = (A \cap B) \cap (A' \cup C') = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C'] \\ = [(A \cap A') \cap B] \cup [A \cap (B \cap C')] = (\emptyset \cap B) \cup [A \cap (B - C)] = \emptyset \cup [A \cap (B - C)] = A \cap (B - C)$$

$A \times B = \{(x, y) | -2 < x < 2, 0 \leq y \leq 3\}$



۷- تعداد اعداد طبیعی از یک تا n که بر عدد طبیعی k بخش پذیرند برابر است با: $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$

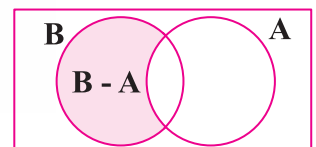
$A =$ اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند $\rightarrow n(A) = \lfloor \frac{400}{3} \rfloor = 133$

$B =$ اعدادی که بر ۴ بخش پذیرند $\rightarrow n(B) = \lfloor \frac{400}{4} \rfloor = 100$

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۳ و ۴ برابر است با: ۱۲

$A \cap B =$ اعدادی که بر ۱۲ بخش پذیرند $\rightarrow n(A \cap B) = \lfloor \frac{400}{12} \rfloor = 33$

$$p(B \cap A') = p(B - A) = p(B) - p(B \cap A) = \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(B \cap A)}{n(S)} = \frac{100}{400} - \frac{33}{400} = \frac{67}{400}$$



d - احتمال برنده شدن دونه‌ی d ، $S = \{a, b, c, d\}$ ، $x =$

$$p(a) = p(b) = \frac{x}{2} , p(c) = 2x , p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + 2x + x = 1 \rightarrow p(x) = \frac{1}{4}$$

$$c \text{ یا } a \text{ احتمال برنده شدن} = p(\{a, c\}) = p(a) + p(c) - p(a \cap c) = \frac{x}{2} + 2x - 0 = \frac{5x}{2} = \frac{5 \times \frac{1}{4}}{2} = \frac{5}{8}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{p(B)} \rightarrow 0/5 = \frac{P(A \cap B)}{0/4} \rightarrow P(A \cap B) = 0/2$$

۹- ابتدا $P(A \cap B)$ را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} A \cap B' &= A - B \\ P(A - B) &= P(A) - P(A \cap B) \end{aligned} \right\} \rightarrow P(A \cap B') = 0/5 - 0/2 = 0/3$$

۱۰- پیشامد A : انتخاب سیب سالم
پیشامد A' : انتخاب سیب لکه‌دار



قبل از انتخاب اول



قبل از انتخاب دوم



قبل از انتخاب سوم

$$P(A_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = P(A_1) \times P(A'_2 | A_1) \times P(A'_3 | (A_1 \cap A'_2)) = \frac{9}{12} \times \frac{3}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{9}{220}$$

۱۱- پیشامد $A \cup B$: هدف مورد اصابت حداقل یک تیر قرار بگیرد.

A و B دو پیشامد مستقل‌اند؛ زیرا به هدف زدن هر یک از تیرانداها تأثیری روی دیگری ندارد.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0/6 \times 0/5 = 0/3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0/6 + 0/5 - 0/3 = 0/8$$

۱۲- پیشامد B : انتخاب ظروف
پیشامد A : انتخاب مهره مشکی



ظرف اول



ظرف دوم



ظرف سوم

$$P(A) = P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{2}{6+2} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{3+6} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{5+5} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{3+8+6}{9 \times 4} = \frac{17}{36}$$

(الف)

$$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{8}}{\frac{17}{36}} = \frac{3}{17}$$

(ب) با توجه به قانون بیز

(۱۳- الف)

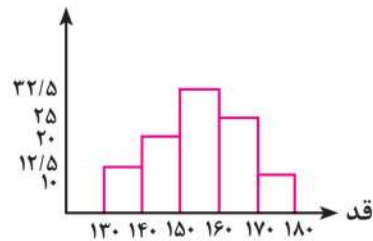
اندازه قد	[۱۳۰-۱۴۰)	[۱۴۰-۱۵۰)	[۱۵۰-۱۶۰)	[۱۶۰-۱۷۰)	[۱۷۰-۱۸۰)
فراوانی (f_i)	۵	۸	۱۳	۱۰	۴
درصد فراوانی	۱۲/۵	۲۰	۳۲/۵	۲۵	۱۰
x_i	۱۳۵	۱۴۵	۱۵۵	۱۶۵	۱۷۵
$f_i x_i$	۶۷۵	۱۱۶۰	۲۰۱۵	۱۶۵۰	۷۰۰

(ب) $x_1 = \frac{130+140}{2} = 135$, $x_2 = \frac{140+150}{2} = 145$, ..., $x_5 = \frac{170+180}{2} = 175$

درصد فراوانی دسته اول = $\frac{f_1}{\sum f_i} \times 100 = \frac{5}{5+8+13+10+4} \times 100 = 12/5$

$f_1 x_1 = 5 \times 135 = 675$, $f_2 x_2 = 8 \times 145 = 1160$, ..., $f_5 x_5 = 4 \times 175 = 700$

$20 + 32/5 = 52/5$



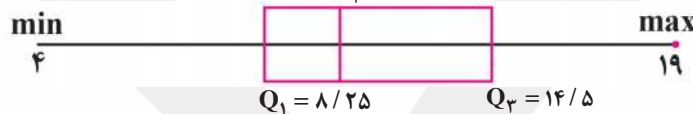
(پ)

(ت) $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{675 + 1160 + 2015 + 1650 + 700}{40} = \frac{6200}{40} = 155$

(ت)

۱۴- ابتدا این ۱۳ داده را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم: ۴, ۷/۵, ۷/۵, ۹, ۱۰, ۱۰, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۴, ۱۵, ۱۷/۵, ۱۹

تعداد داده‌ها فرد است. بنابراین میانه برابر است با داده شماره ۷ $\frac{n+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$
 میانگین سوم = $Q_3 = \frac{14+15}{2} = 14/5$, چارک اول = $Q_1 = \frac{7/5+9}{2} = 8/25$, چارک اول = $Q_2 = 10$, میانگین = $Q_2 = 10$



داده‌ی ۱۰ بیش‌تر از بقیه داده‌ها تکرار شده است، پس $مُد = 10$

۱۵- ابتدا میانگین را به دست می‌آوریم: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{4+7+9+9+10+12+13+16}{8} = 10$

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(4-10)^2 + (7-10)^2 + (9-10)^2 + (9-10)^2 + (10-10)^2 + (12-10)^2 + (13-10)^2 + (16-10)^2}{8} = 12$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, ضریب تغییرات $cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

۱۶- انواع نمونه‌گیری عبارتند از: تصادفی ساده، خوشه‌ای، طبقه‌ای، سیستماتیک یا سامانمند، احتمالی

۱۷- الف) پارامتر یا پارامتر جامعه یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده‌ی جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند، قابل محاسبه است.

آماره یا آماره نمونه مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کننده‌ی جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.
ب) فرایند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه، آمار استنباطی است.

میانگین جامعه $\mu = 2/5$, $\sigma = 1$, $\bar{x} = 2/5$, $n = 400$

-۱۸

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow 2/5 - \frac{2 \times 1}{\sqrt{400}} \leq \mu \leq 2/5 + \frac{2 \times 1}{\sqrt{400}} \rightarrow 2/4 \leq \mu \leq 2/6$$

$n = 1000$, $m = 530 \rightarrow p = \frac{m}{n} = \frac{530}{1000} = 0/53$

-۱۹

$$(p - \frac{1}{\sqrt{n}} , p + \frac{1}{\sqrt{n}}) = (0/53 - \frac{1}{\sqrt{1000}} , 0/53 + \frac{1}{\sqrt{1000}}) = (0/5 , 0/56)$$

یعنی با اطمینان ۹۵ درصد، نسبت واقعی افرادی از جامعه که در انتخابات شرکت می‌کنند در بازه‌ی $(0/5 , 0/56)$ است.

محل محاسبات