

کتاب‌های
سه‌بعدی



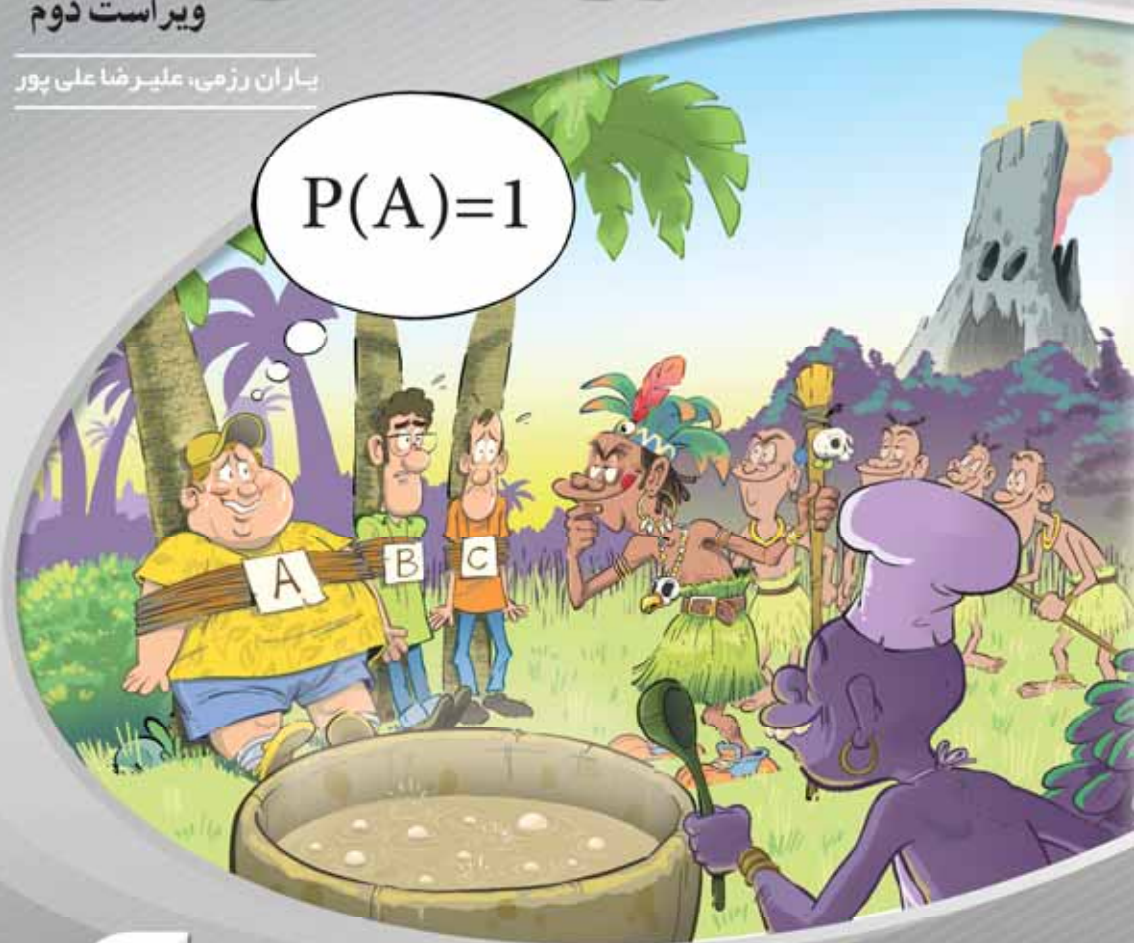
آموزش کامل + تمرین + پرسش‌های چهارگزینه‌ای

آمار و احتمال (یازدهم)

ویراست دوم

یاران رزمی، علیرضا علی‌پور

$$P(A)=1$$



انگه
انتشرالگو

پیشگفتار

به نام خدا

این کتاب را براساس محتوای آمار و احتمال پایه یازدهم و با هدف آموزش عمیق‌تر مفاهیم درسی نوشته‌ایم. بنابراین، کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، تقریباً همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم. هر چند که مواردی هم هست که برای بیان دقیق‌تر مفاهیم و درک بهتر آن‌ها پا را کمی فراتر گذاشته‌ایم.

هر فصل کتاب به چند درس تقسیم شده است. در هر درس مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی متنوع معرفی کرده‌ایم و با حل کردن مسئله‌ها و تست‌هایی که به دقت انتخاب شده‌اند، روش‌های استفاده از آن‌ها را در حل مسئله، آموزش داده‌ایم. آموختن آمار و احتمال بدون تمرین و تکرار، نشدنی است. بنابراین، در انتهای هر درس در دو بخش «تمرین» و «پرسش‌های چهارگزینه‌ای» تعداد زیادی مسئله و تست آورده‌ایم.

راه‌حل همه تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای را در انتهای کتاب آورده‌ایم. بهتر است پیش از حل کردن تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای، مسئله‌ها و تست‌های حل شده در متن درس را کامل بخوانید.

در این ویرایش تغییرات بسیاری را در درس اول از فصل اول و همچنین فصل‌های سوم و چهارم اعمال کرده‌ایم. درس اول از فصل اول، با عنوان آشنایی با منطق ریاضی، به‌طور کامل بازنویسی شده است، به‌طوری که درسنامه آن از مثال‌ها، مسئله‌ها و تست‌های متعدد، متنوع و جذاب تشکیل شده و در پایان درس نیز تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای فراوانی آورده‌ایم. در فصل‌های سوم و چهارم کتاب، که مربوط به مبحث آمار است، درسنامه با تعداد بسیاری مسئله و تست غنی شده و تعداد تمرین‌ها و پرسش‌های چهارگزینه‌ای انتهای هر درس نیز به تعداد قابل توجهی افزایش داده شده است.

با توجه به تعدد و تنوع تمرین‌ها و مسئله‌ها، کتاب حاضر منبعی بسیار مناسب برای آموزش درس آمار و احتمال پایه یازدهم است. به امید اینکه همه دانش‌آموزان عزیز نهایت بهره و استفاده را از مطالب این کتاب برده و بر مفاهیم این درس مسلط شوند.

وظیفه خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، واحد حروف‌چینی خانم نسیم نوریان و واحد ویراستاری خانم‌ها عاطفه ربیعی و مهدیه جمشیدی به سرپرستی خانم سکینه مختار، که زحمات زیادی برای آماده‌سازی و تولید کتاب کشیده‌اند، تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان

فهرست

● فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

۲	درس اول: آشنایی با منطق ریاضی
۳۲	تمرین
۳۷	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۳۹	درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه
۵۱	تمرین
۵۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۵۶	درس سوم: قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)
۶۲	تمرین
۶۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل دوم: احتمال

۶۶	درس اول: مبانی احتمال
۷۱	تمرین
۷۴	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۷۶	درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس
۸۰	تمرین
۸۱	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۸۲	درس سوم: احتمال شرطی
۹۰	تمرین
۹۳	پرسش‌های چهارگزینه‌ای
۹۷	درس چهارم: پیشامدهای مستقل و وابسته
۱۰۳	تمرین
۱۰۵	پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل سوم: آمار توصیفی

- ۱۰۸ درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها
- ۱۱۱ تمرین
- ۱۱۳ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۱۵ درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز
- ۱۲۰ تمرین
- ۱۲۲ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۲۴ درس سوم: معیارهای پراکندگی
- ۱۲۹ تمرین
- ۱۳۱ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل چهارم: آمار استنباطی

- ۱۳۴ درس اول: گردآوری داده‌ها
- ۱۳۸ تمرین
- ۱۴۰ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۴۱ درس دوم: برآورد
- ۱۴۷ تمرین
- ۱۴۸ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

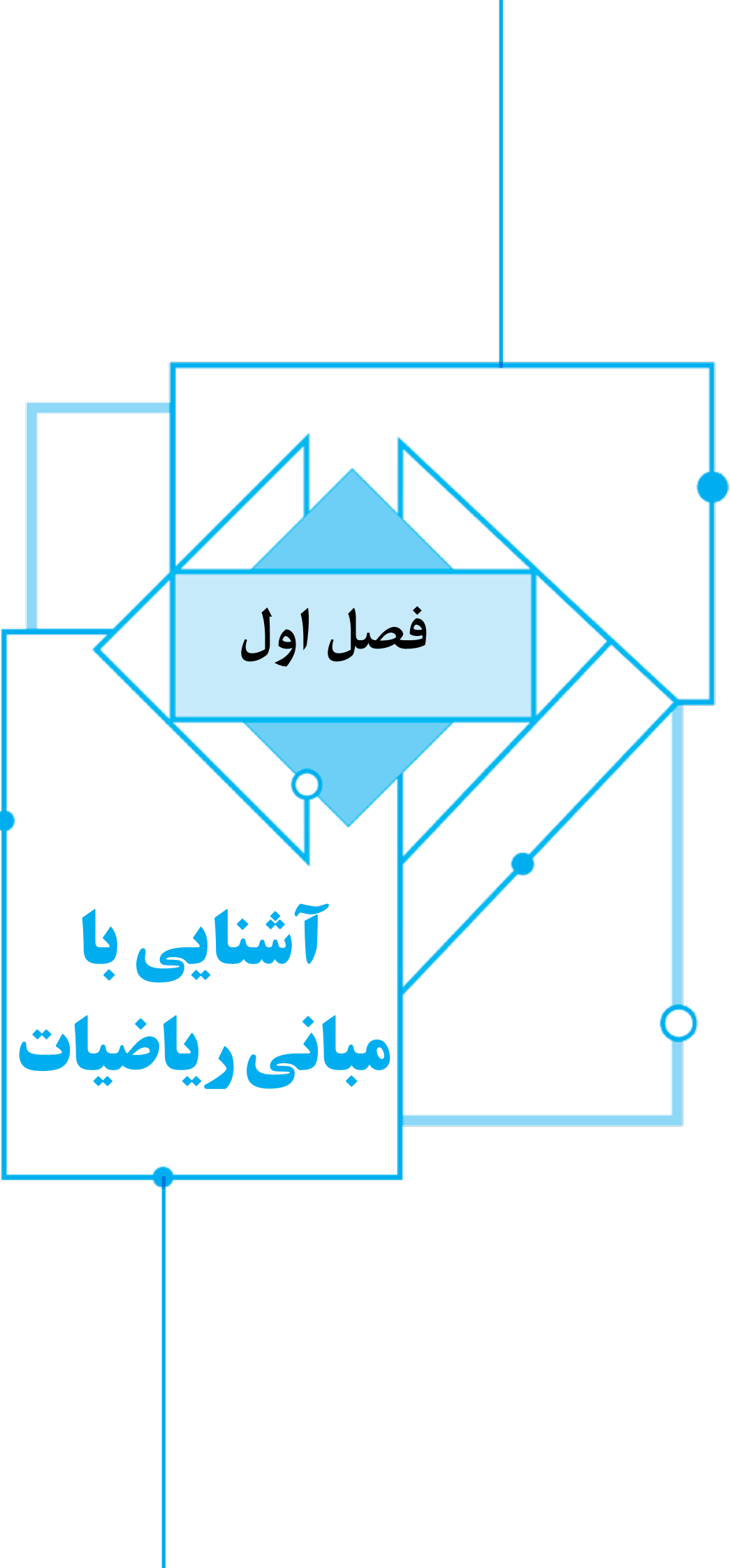
● فصل پنجم: راه‌حل تمرین‌ها

● فصل ششم: پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل هفتم: کنکور سراسری ۹۸

- ۱۸۹ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
- ۱۹۰ پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

● فصل هشتم: پاسخنامه کلیدی



فصل اول

آشنایی با
مبانی ریاضیات

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی، دستور زبان ریاضی، یا مطالعه ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار می‌روند. در منطق به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازیم و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کنیم. گزاره مفهوم پایه‌ای و اساسی منطق است.

تعریف به جمله خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p ، q ، r و ... نمایش می‌دهیم.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش** آن گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست؛ یعنی، هر گزاره فقط یک ارزش دارد.

مثال: هر یک از جملات زیر یک گزاره است.

- خورشید داغ است.
- $2+2=22$
- برخی از معادلات درجه دوم ریشه حقیقی دارند.
- مجموع زاویه‌های یک مثلث برابر 180° درجه است.

جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی گزاره محسوب نمی‌شوند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند.

مثال: هیچ‌یک از جملات زیر گزاره نیست.

- آیا ریاضیات زیباست؟
- بیا اینجا.
- چه لباس زیبایی!

مثال: هر یک از جملات زیر گزاره‌ای با ارزش درست است.

- پکن پایتخت چین است.
- $5+3>6$
- در هر مستطیل اندازه دو قطر با هم برابرند.
- عدد ۲۳ عددی اول است.

مثال: هر یک از جملات زیر گزاره‌ای با ارزش نادرست است.

- لیبی کشوری در قاره آسیا است.
- $9+15=20$
- در هر متوازی‌الاضلاع اندازه دو قطر با هم برابرند.
- عدد ۶۳ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

مسئله ۱

- از بین جملات زیر، گزاره‌ها را مشخص کنید و ارزش آن‌ها را نیز تعیین کنید.
- (الف) ماه فروردین ۳۰ روزه است. (ب) x عددی زوج است.
- (پ) حال شما چگونه؟ (ت) $2+3=3+2$
- (ث) وارد فضای سبز نشوید. (ج) هر مربع یک متوازی‌الاضلاع است.
- (چ) دومین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۴ است. (ح) ای کاش در کنکور رتبه خوبی به دست آورم!
- (خ) $5 \notin \{1, 2, 3, 4\}$ (د) مجموع هر دو عدد فرد عددی فرد است.

راه حل

(الف) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن نادرست است.
 (ب) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا اطلاعاتی در مورد X نداریم و نمی‌توانیم تشخیص دهیم که آیا جمله داده شده درست است یا نه.
 (پ) جمله داده شده یک جمله پرسشی است، پس این جمله گزاره نیست.
 (ت) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن درست است.
 (ث) جمله داده شده یک جمله امری است، پس این جمله گزاره نیست.
 (ج) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن درست است.
 (چ) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن درست است، زیرا $\pi = 3/14 \dots$.
 (ح) جمله داده شده یک جمله عاطفی است، پس این جمله گزاره نیست.
 (خ) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن درست است.
 (د) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است.

تست

۱

از جملات زیر کدام یک گزاره نیست؟

- (۱) تیم ملی ایران ۳ تا از ۴ بازی خود را برده است.
 (۲) $1+2+3=9$
 (۳) به امید موفقیت همه دانش‌آموزان در کنکور سراسری!
 (۴) قاره اروپا سرسبز است.

راه حل

جمله داده شده در گزینه (۳) یک جمله عاطفی است، پس این جمله گزاره نیست.

تست

۲

از جملات زیر کدام یک گزاره است؟

- (۱) $x-3=10$
 (۲) آیا $3+3=6$ برابر می‌شود؟
 (۳) $\sqrt{\pi}$ را حساب کنید.
 (۴) دمای امروز تهران ۲۲ درجه است.

راه حل

در جمله گزینه (۱) چون اطلاعاتی در مورد x نداریم، نمی‌توانیم در مورد درست یا نادرست بودن این جمله تصمیم‌گیری کنیم، در نتیجه این جمله گزاره نیست. جمله گزینه (۲) یک جمله پرسشی و جمله گزینه (۳) یک جمله امری است، در نتیجه این جملات نیز گزاره نیستند.

تست

۳

ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱) ۲۷، عددی اول است.
 (۲) تعداد روزهای هفته از ۱۰ کمتر است.
 (۳) مجموع هر دو عدد اول عددی مرکب است.
 (۴) معادله $x^2=2$ در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد.

راه حل

چون ۲۷ عددی مرکب است، پس گزاره گزینه (۱) نادرست است.
 چون هفته ۷ روز دارد و $7 < 10$ ، پس گزاره گزینه (۲) درست است.
 عددهای ۲ و ۳ اول‌اند و مجموع آن‌ها یعنی ۵ نیز عددی اول است، پس گزاره گزینه (۳) نادرست است.
 جواب‌های معادله $x^2=2$ عبارت‌اند از $x = \pm\sqrt{2}$ که عددهایی غیر صحیح‌اند، پس گزاره گزینه (۴) نادرست است.

تست

۴

ارزش کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) معادله $x^2-x=6$ در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد.
 (۲) مجموع هر دو عدد فرد عددی زوج است.
 (۳) معادله $x^2+1=0$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.
 (۴) $2+5=7$

راه حل

چون $x=3$ ریشه‌ای از معادله $x^2-x=6$ است، پس این معادله در مجموعه اعداد صحیح جواب دارد، پس گزاره گزینه (۱) نادرست است. در ضمن درستی سه گزاره دیگر واضح است.

برخی از گزاره‌ها هستند که ارزش آن‌ها برای ما معلوم نیستند. در واقع در ریاضیات حدس‌های بسیاری وجود دارند که نه هنوز اثبات شده‌اند و نه مثال نقضی برای آن‌ها پیدا شده است. حدس گلدباخ نمونه‌ای از این گونه است.

حدس گلدباخ

هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت حاصل جمع دو عدد اول نوشت. مثلاً،
 $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, ...
 علی‌رغم اینکه این گزاره فقط یک ارزش دارد ولی در حال حاضر ارزش آن برای ما نامعلوم است.

استدلال

به روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم **استدلال** گفته می‌شود.

مثال: معدل تمام دانش‌آموزان مدرسهٔ ابن‌سینا بالاتر از ۱۷ است.

حسین در مدرسهٔ ابن‌سینا تحصیل می‌کند.

نتیجه: معدل حسین بالاتر از ۱۷ است.

همان‌گونه که در این مثال ملاحظه می‌کنید، یک استدلال می‌تواند از چندین گزاره تشکیل شده باشد که یکی از آن‌ها **نتیجهٔ استدلال** و بقیه **مفروضات استدلال** اند. به چند مثال دیگر از استدلال توجه کنید.

مثال: در هر مستطیل اندازهٔ دو قطر برابرند.

هر مربع یک مستطیل است.

نتیجه: در هر مربع اندازهٔ دو قطر برابرند.

مثال: پدram یا پارسا به فینال مسابقات کشتی راه می‌یابد.

پدram از راه‌یابی به فینال بازمانده است.

نتیجه: پارسا به فینال مسابقات کشتی راه یافته است.

مثال: اگر بامداد سخت کار نکنند، خوابش می‌برد.

اگر بامداد نگران باشد، خوابش نمی‌برد.

بامداد سخت کار نمی‌کند.

نتیجه: بامداد نگران نیست.

مثال: اگر آرمین در جشنوارهٔ خوارزمی رتبه بیاورد یا در کنکور سراسری پذیرفته شود، وارد دانشگاه خواهد شد.

آرمین در کنکور سراسری پذیرفته شده است.

نتیجه: آرمین وارد دانشگاه خواهد شد.

مثال: اگر تیم نتیجه بگیرد، مربی از تیم برکنار می‌شود.

اگر تیم نتیجه بگیرد، مربی از تیم برکنار می‌شود.

نتیجه: مربی از تیم برکنار می‌شود.

تست

می‌دانیم «مریم ثروتمند است یا مینا معلم است»، «مریم ثروتمند نیست یا یگانه مهندس است» و «مینا معلم نیست».

کدام نتیجه‌گیری درست است؟

(۱) یگانه مهندس است.

(۲) مریم ثروتمند نیست.

(۳) یگانه مهندس نیست.

(۴) مریم معلم است.

از درستی گزاره‌های «مریم ثروتمند است یا مینا معلم است» و «مینا معلم نیست» نتیجه می‌گیریم «مریم ثروتمند است». اکنون از درستی گزاره‌های «مریم ثروتمند نیست یا یگانه مهندس است» و «مریم ثروتمند است» نتیجه می‌گیریم «یگانه مهندس است».

راه‌حل

مسئله ۲

در جزیره انسان‌نماها موجودات دو گونه‌اند: راستگو و دروغگو. راستگوها همیشه راست می‌گویند و دروغگوها همیشه دروغ می‌گویند. تام و جری ساکنان این جزیره‌اند. تام گفت: «بین من و جری حداقل یکی دروغگو است». ثابت کنید تام راستگو و جری دروغگو است.

راه‌حل

چهار حالت برای راستگو و دروغگو بودن تام و جری وجود دارد. در هر حالت ارزش راست یا دروغ بودن جمله‌ای را که تام گفته است تعیین می‌کنیم.

نام	جری	حداقل یکی از تام و جری دروغگو است.
راستگو	راستگو	دروغ
راستگو	دروغگو	راست
دروغگو	راستگو	راست
دروغگو	دروغگو	راست

در حالت اول تام راستگو است و جمله‌ای دروغ به زبان آورده و در حالت‌های سوم و چهارم تام دروغگو است و جمله‌ای راست به زبان آورده است. پس این سه حالت قابل قبول نیستند و تنها حالت قابل قبول حالت دوم جدول است. بنابراین تام راستگو و جری دروغگو است.

مسئله ۳

در جزیره انسان‌نماها (مفروضات مسئله قبل) از هریک از افراد یک جمع ۷ نفره پرسیدیم: «در جمع ۷ نفره شما چند راستگو وجود دارد؟» جواب‌ها عبارت بودند از: «۰، ۲، ۳، ۳، ۳، ۵ و ۶». در این جمع ۷ نفره چند راستگو هستند؟

راه‌حل

اگر k نفر از جمع ۷ نفره راستگو باشند، هر یک از این k نفر باید پاسخ « k » را بدهند و پاسخ هر یک از $7-k$ نفر دیگر باید عددی غیر از k باشد. با توجه به پاسخ‌های داده شده نتیجه می‌گیریم فقط یک مقدار قابل قبول برای k وجود دارد، که آن هم $k=3$ است، زیرا دقیقاً سه تا از پاسخ‌ها برابر ۳ هستند.

تست ۶

در جزیره انسان‌نماها از هریک از افراد یک جمع ۱۰ نفره پرسیدیم: «آیا در جمع ۱۰ نفره شما راستگو وجود دارد؟» کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر هر ۱۰ نفر «بله» بگویند، همگی راستگو هستند. (۲) اگر فقط ۳ نفر «بله» بگویند، ۷ نفر از این جمع راستگو هستند.
(۳) اگر فقط ۷ نفر «بله» بگویند، ۷ نفر از این جمع راستگو هستند. (۴) اگر هر ۱۰ نفر «بله» بگویند، همگی دروغگو هستند.

راه‌حل

توجه کنید که اگر همه افراد جمع ۱۰ نفره راستگو باشند، همگی پاسخ «بله» می‌دهند و همچنین اگر همه افراد جمع دروغگو باشند نیز همگی پاسخ «بله» می‌دهند، بنابراین گزینه‌های (۴) و (۱) درست نیستند. اگر در جمع ۱۰ نفره k نفر راستگو و $10-k$ نفر دروغگو باشند، $1 \leq k \leq 9$ ، آن‌گاه هریک از راستگوها پاسخ «بله» و هر یک از دروغگوها پاسخ «خیر» می‌دهد، پس در بین ۱۰ پاسخ دقیقاً k تا «بله» هستند. در نتیجه گزینه (۲) نادرست و گزینه (۳) درست است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است؛ بنابراین اگر n گزاره داشته باشیم، بنابر اصل ضرب، ارزش این گزاره‌ها 2^n حالت مختلف می‌تواند داشته باشد. می‌توانیم جدولی با n ستون و 2^n سطر در نظر بگیریم که هر سطر آن متناظر با یکی از این 2^n حالت باشد. جدول ارزش n گزاره به‌ازای $n=1, 2, 3$ به صورت زیر است.

p	p	q	p	q	r
د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	ن
	ن	د	د	ن	د
	ن	ن	د	ن	ن
			ن	د	د
			ن	د	ن
			ن	ن	د
			ن	ن	ن

مسئله ۴

الف) جدول ارزش‌های هفت گزاره چند حالت دارد؟
 ب) در چند حالت ارزش دقیقاً دو گزاره درست است؟
 پ) در چند حالت ارزش حداقل سه گزاره درست است؟

راه‌حل

الف) می‌دانیم جدول ارزش‌های n گزاره 2^n حالت دارد، پس جدول ارزش‌های هفت گزاره $2^7 = 128$ حالت دارد.
 ب) چون در جدول ارزش‌ها همه حالت‌های درست و نادرست بودن گزاره‌ها آمده است، پس تعداد حالت‌هایی که ارزش دقیقاً دو گزاره

$$\text{درست است برابر است با } \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$$

پ) تعداد حالت‌هایی که ارزش حداقل سه گزاره درست است برابر است با

تعداد گزاره‌های درست: ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

$$\binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = \frac{7!}{3!4!} + \frac{7!}{4!3!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{7!}{7!0!} = 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 99$$

تست ۷

جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۲۵۶ حالت دارد. تعداد این گزاره‌ها برابر کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

راه‌حل

اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، آن‌گاه جدول ارزش‌های آن‌ها 2^n حالت دارد، بنابراین $2^n = 256$ ، پس $n = 8$.

گزاره‌نما

تعریف هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

مثال: جمله خبری « a عددی اول است» یک گزاره‌نمای یک متغیره است. این گزاره‌نما به‌ازای $a = 5$ به گزاره‌ای با ارزش درست و به‌ازای $a = 20$ به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود.

مثال: جمله خبری «در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{2}{3}$ است» یک گزاره‌نمای یک متغیره است. این گزاره‌نما به‌ازای $A = \{1, 2, 4, 6\}$ به گزاره‌ای با ارزش درست و به‌ازای $A = \{2, 6\}$ به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود.

مثال: جمله خبری « $3x + 5y = 19$ » یک گزاره‌نمای دو متغیره است. این گزاره‌نما به‌ازای $(x, y) = (3, 2)$ به گزاره‌ای با ارزش درست و به‌ازای $(x, y) = (5, 3)$ به گزاره‌ای با ارزش نادرست تبدیل می‌شود.

تعریف در هر گزاره‌نما به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نمایش می‌دهیم.

مثال: دامنه متغیر گزاره‌نمای « a عددی فرد است» مجموعه اعداد صحیح، دامنه متغیر گزاره‌نمای « $x^2 - 3x - 5 = 0$ » مجموعه اعداد حقیقی و دامنه متغیر گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{3}$ است» مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

تذکر

معمولاً هنگامی که یک گزاره‌نما به ما می‌دهند، دامنه متغیر (یا متغیرهای) آن را نیز به ما می‌دهند، زیرا دامنه متغیر یک گزاره‌نما ممکن است به صورت یکتا تعیین نشود. مثلاً در گزاره‌نمای « $x^2 + x = 6$ » دامنه متغیر را هم می‌توان مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفت، هم مجموعه اعداد صحیح و هم مجموعه $\{1, 2, \dots, 20\}$!

تعریف در هر گزاره‌نما، به مجموعه‌عضوهایی از دامنه متغیر که به‌ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، مجموعه‌جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

مثال: گزاره‌نمای « x بر ۶ بخش‌پذیر است» با دامنه $D = \{1, 2, \dots, 20\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌جواب این گزاره‌نما برابر است با $S = \{6, 12, 18\}$.

مسئله ۵

در هر مورد مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده شده را تعیین کنید.

(الف) x مضرب ۹ است ($D = \{1, 2, \dots, 50\}$).

(ب) $x(x^2 - 1)(x^3 + 8) = 0$ ($D = \mathbb{R}$).

(پ) x بر هیچ‌یک از عددهای ۲ و ۳ بخش‌پذیر نیست ($D = \{1, 2, \dots, 20\}$).

(ت) در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{6}$ است ($D =$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 6\}$).

(ث) $\frac{3x+5}{7} \leq 2$ ($D = \mathbb{R}$).

(الف) $S = \{9, 18, 27, 36, 45\}$

راه‌حل

(ب) اگر $x(x^2 - 1)(x^3 + 8) = 0$ ، آن‌گاه $x = 0$ یا $x^2 - 1 = 0$ یا $x^3 + 8 = 0$. بنابراین

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

پس مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $S = \{0, 1, -1, -2\}$ است.

(پ)

$$S = \{1, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

(ت) در پرتاب یک تاس احتمال پیشامدهای تک‌عضوی برابر $\frac{1}{6}$ است، بنابراین مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده شده عبارت است از

$$S = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$$

(ث)

$$\frac{3x+5}{7} \leq 2 \Rightarrow 3x+5 \leq 14 \Rightarrow 3x \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$$

در نتیجه مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $S = (-\infty, 3]$ است.

تست ۸

مجموعه‌جواب گزاره‌نمای « $x^2 + 2x \leq 15$ » با دامنه اعداد حقیقی کدام است؟

- (۱) $[-5, 3]$ (۲) $[-4, 4]$ (۳) $[-3, 5]$ (۴) $(-\infty, 3]$

$$x^2 + 2x \leq 15 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \leq 16 \Rightarrow (x+1)^2 \leq 16 \Rightarrow -4 \leq x+1 \leq 4 \Rightarrow -5 \leq x \leq 3$$

پس مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $S = [-5, 3]$ است.

راه‌حل

تست ۹

مجموعه‌جواب گزاره‌نمای « $x < 15$ و x عددی مرکب است» با دامنه اعداد طبیعی چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

مجموعه‌جواب گزاره‌نمای داده شده برابر است با $S = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14\}$. بنابراین مجموعه‌مورد نظر ۷ عضو دارد.

راه‌حل

تست

□□□□

به ازای چند پیشامد مانند A ، گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر $\frac{1}{6}$ است» به گزاره‌ای

با ارزش درست تبدیل می‌شود؟

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۶ (۱)

در پرتاب یک تاس فضای نمونه‌ای برابر $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است، در نتیجه احتمال وقوع پیشامد A برابر $\frac{n(A)}{6}$ است. اگر احتمال

وقوع پیشامد A برابر $\frac{1}{6}$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{n(A)}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow n(A) = 1$$

پس به ازای پیشامدهای ۳ عضوی گزاره‌نمای داده شده به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود. تعداد این پیشامدها برابر است با

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

راه‌حل

تست

□□□□

به ازای چند زوج مرتب مانند (x, y) از اعداد طبیعی گزاره‌نمای « $x^2 + 2y = 31$ » به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۷ (۱)

به سادگی می‌توان دید که مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر است با $S = \{(1, 15), (3, 11), (5, 3)\}$. بنابراین تعداد زوج‌های مرتب مورد نظر ۳ تا است.

راه‌حل

تست

□□□□

به ازای چند زیرمجموعه از مجموعه $\{1, 2, \dots, 7\}$ مانند A گزاره‌نمای «تعداد اعضای A برابر ۳ و مجموع اعضای A

برابر ۱۰ است» به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

با یک حالت‌بندی ساده معلوم می‌شود که زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, 7\}$ که مجموع اعضای هر یک برابر ۱۰ است عبارت‌اند از $\{2, 3, 5\}$ ، $\{1, 4, 5\}$ ، $\{1, 3, 6\}$ و $\{1, 2, 7\}$. بنابراین تعداد مجموعه‌های مورد نظر ۴ تا است.

راه‌حل

ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابط‌های گزاره‌ای (ادوات ربط) گزاره‌های مرکب به دست می‌آیند. اکنون به معرفی ادوات ربط و بررسی ارزش گزاره‌های مرکب می‌پردازیم.

نقیض یک گزاره

تعریف نقیض گزاره p به صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p » می‌خوانیم.

اگر ارزش گزاره p درست باشد، ارزش گزاره $\sim p$ نادرست است و اگر ارزش گزاره p نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim p$ درست است. جدول ارزش گزاره $\sim p$ به صورت زیر است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

به علامت « \sim » ناقض می‌گوییم و آن را «چنین نیست که» می‌خوانیم.

مثال: نقیض گزاره «امروز سرکار می‌روم»، گزاره «چنین نیست که امروز سرکار بروم» یا به طور ساده‌تر «امروز سرکار نمی‌روم» است.

مسئله ۶

نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

- الف) ۷ مربع کامل است.
 ب) ۵ از ۹ کوچک‌تر است.
 پ) $7 \in \{1, 2, 4, 6\}$
 ت) دیروز هوا آفتابی نبود.

راه‌حل

- الف) «چنین نیست که ۷ مربع کامل است» یا به‌طور ساده‌تر «۷ مربع کامل نیست».
 ب) «چنین نیست که ۵ از ۹ کوچک‌تر است» یا به‌طور ساده‌تر «۵ از ۹ کوچک‌تر نیست».
 پ) «چنین نیست که $7 \in \{1, 2, 4, 6\}$ یا به‌طور ساده‌تر $7 \notin \{1, 2, 4, 6\}$ ».
 ت) «چنین نیست که حامد بتواند معادله $x^2 = 10$ را حل کند» یا به‌طور ساده‌تر «حامد نمی‌تواند معادله $x^2 = 10$ را حل کند».
 ث) «چنین نیست که دیروز هوا آفتابی نبود» یا به‌طور ساده‌تر «دیروز هوا آفتابی بود».

تست ۱۳

نقیض گزاره «احمد بهترین دوست من است» کدام است؟

- ۱) احمد بهترین دشمن من است.
 ۲) احمد بهترین دوست من نیست.
 ۳) احمد بدترین دوست من است.
 ۴) فردی غیر از احمد بهترین دوست من است.

راه‌حل

گزینه (۲) درست است.

مسئله ۷

جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید.

جدول زیر را ببینید.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید در هر حالت از جدول، ارزش گزاره‌های p و $\sim(\sim p)$ یکسان است.

تعریف اگر در همه حالت‌ها دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند، می‌گوییم p و q هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم $p \equiv q$ و می‌خوانیم

«p هم‌ارز است با q».

با توجه به جدول قبل و این تعریف، $\sim(\sim p) \equiv p$ ، یعنی نقیض نقیض هر گزاره با خود آن گزاره هم‌ارز است.

ترکیب فصلی دو گزاره

تعریف هرگاه p و q دو گزاره باشند، به گزاره مرکب «p یا q» که آن را به صورت « $p \vee q$ » می‌نویسیم ترکیب فصلی دو گزاره p و

q می‌گوییم. همچنین به رابط منطقی « \vee » فاصل می‌گوییم.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت زیر است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید گزاره $p \vee q$ فقط وقتی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند.

مسئله ۸

ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } (2 > 3) \vee (9 > 5) \quad \text{ب) } \sim(3 = 3) \vee (2 > 7)$$

پ) ۳ عددی اول است یا ماه آبان ۳۰ روز دارد. ت) ۱۰ عددی فرد است یا تبریز پایتخت ایران نیست.

الف) « $2 > 3$ » گزاره‌ای نادرست و « $9 > 5$ » گزاره‌ای درست است، بنابراین ترکیب فصلی این دو گزاره، گزاره‌ای درست است.

$2 > 3$	$9 > 5$	$(2 > 3) \vee (9 > 5)$
ن	د	د

ب)

$3 = 3$	$\sim(3 = 3)$	$2 > 7$	$\sim(3 = 3) \vee (2 > 7)$
د	ن	ن	ن

پ) فرض کنید p گزاره «۳ عددی اول است» و q گزاره «ماه آبان ۳۰ روز دارد» باشد. در این صورت هر دو گزاره p و q درست‌اند، پس گزاره $p \vee q$ نیز درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د

ت) فرض کنید p گزاره «۱۰ عددی فرد است» و q گزاره «تبریز پایتخت ایران نیست» باشد. در این صورت p گزاره‌ای نادرست و q گزاره‌ای درست است، پس ارزش گزاره $p \vee q$ درست است.

p	q	$p \vee q$
ن	د	د

مسئله ۹

جدول ارزش گزاره $\sim p \vee q$ را رسم کنید.

راه‌حل

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	ن	د	د

تست ۱۴

ارزش کدام گزاره نادرست است؟

(۲) ۶ بر ۲ بخش‌پذیر نیست یا ۱۷ عددی مرکب است.

(۱) ۵ بر ۱۰ بخش‌پذیر است یا ۷ عددی اول است.

(۴) ۳ عددی مرکب نیست یا ۲ از ۵ بزرگ‌تر است.

(۳) شنبه روز سوم هفته نیست یا ۵ عددی فرد نیست.

گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم.

راه‌حل

گزینه (۱) گزاره «۵ بر ۱۰ بخش‌پذیر است» نادرست و گزاره «۷ عددی اول است» درست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.

گزینه (۲) گزاره «۶ بر ۲ بخش‌پذیر نیست» نادرست و گزاره «۱۷ عددی مرکب است» نیز نادرست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره نادرست است.

گزینه (۳) گزاره «شنبه روز سوم هفته نیست» درست و گزاره «۵ عددی فرد نیست» نادرست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.

گزینه (۴) گزاره «۳ عددی مرکب نیست» درست و گزاره «۲ از ۵ بزرگ‌تر است» نادرست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.

قضیه ۱

رابط « \vee » جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است. یعنی

الف) برای هر دو گزاره مانند p و q ؛ $p \vee q \equiv q \vee p$.

ب) برای هر سه گزاره مانند p ، q و r ؛ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

اثبات

الف) همان گونه که ملاحظه می کنید در همه حالاتها گزاره های $p \vee q$ و $q \vee p$ ارزش یکسان دارند، در نتیجه این دو گزاره هم ارزند.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ب) همانند قسمت الف) عمل می کنیم.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

قضیه ۲

برای هر گزاره مانند p ،

ت) $p \vee F \equiv p$

ب) $p \vee T \equiv T$

ب) $p \vee \sim p \equiv T$

الف) $p \vee p \equiv p$

اثبات

الف) برای اثبات هر یک از هم ارزی ها به کمک جدول ارزش گزاره ها نشان می دهیم در همه حالاتها گزاره های داده شده ارزش یکسان دارند.

الف)

p	$p \vee p$
د	د
ن	ن

ب)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	T
د	ن	د	د
ن	د	د	د

ب)

p	T	$p \vee T$
د	د	د
ن	د	د

ت)

p	F	$p \vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

تعریف به گزاره ای که ارزش آن در همه حالاتها درست باشد، **گزاره ای همیشه درست** و به گزاره ای که ارزش آن در همه حالات نادرست باشد، **گزاره ای همیشه نادرست** می گوئیم.

مثال: با توجه به قضیه قبل، گزاره های $p \vee \sim p$ و $p \vee T$ گزاره هایی همیشه درست اند.

(ت) $\sim(\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx) \equiv \exists x, y \in \mathbb{R} : \sim(xy = yx) \equiv \exists x, y \in \mathbb{R} : xy \neq yx$

(ث) $\sim(\exists x, y \in \mathbb{N} : (x^y \in \mathbb{P}) \vee (y^x \in \mathbb{P})) \equiv \forall x, y \in \mathbb{N} : \sim((x^y \in \mathbb{P}) \vee (y^x \in \mathbb{P}))$
 $\equiv \forall x, y \in \mathbb{N} : \sim(x^y \in \mathbb{P}) \wedge \sim(y^x \in \mathbb{P})$ (دمورگان)
 $\equiv \forall x, y \in \mathbb{N} : (x^y \notin \mathbb{P}) \wedge (y^x \notin \mathbb{P})$

(ج) $\sim(\forall x, y \in \mathbb{R} : (x > y) \Rightarrow (x^2 > y^2)) \equiv \exists x, y \in \mathbb{R} : \sim((x > y) \Rightarrow (x^2 > y^2))$
 $\equiv \exists x, y \in \mathbb{R} : (x > y) \wedge \sim(x^2 > y^2)$ (قضیه ۱۱)
 $\equiv \exists x, y \in \mathbb{R} : (x > y) \wedge (x^2 \leq y^2)$

مسئله ۳۹

نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- (الف) برای هر مرد لندن یک زن پاریسی وجود دارد که با هم ازدواج کرده‌اند.
 (ب) یک امریکایی وجود دارد که همه آلمانی‌ها او را می‌شناسند.
 (پ) هر روز که هوا آفتابی باشد، گل‌ها می‌رویند.
 (ت) روزی وجود دارد که همه کارمندان سرکار می‌روند.
 (ث) هر ایرانی به کشوری از اروپا سفر کرده است.
 (ج) کشوری در اروپا وجود دارد که هر ایرانی به آن سفر کرده است.
 (چ) هر روز یکی از ساکنان ساختمان به گل‌ها آب می‌دهد.
 (ح) یکی از ساکنان ساختمان هر روز به گل‌ها آب می‌دهد.

راه‌حل

- (الف) وجود دارد مرد لندن که هر زن پاریسی با او ازدواج نکرده است، یا بهتر «وجود دارد مردی از لندن که با هیچ زنی از پاریس ازدواج نکرده است».
- (ب) برای هر امریکایی یک آلمانی وجود دارد که او را نمی‌شناسد.
 (پ) روزی وجود دارد که آفتابی است و گل‌ها نمی‌رویند.
 (ت) هر روز کارمندی وجود دارد که سرکار نمی‌رود.
 (ث) وجود دارد یک ایرانی که برای هر کشور از اروپا به آن کشور سفر نکرده است، یا بهتر «وجود دارد یک ایرانی که به هیچ کشوری از اروپا سفر نکرده است».
- (ج) برای هر کشور در اروپا وجود دارد یک ایرانی که به آن کشور سفر نکرده است.
 (چ) روزی وجود دارد که همه ساکنان ساختمان به گل‌ها آب نمی‌دهند، یا بهتر «روزی وجود دارد که هیچ‌یک از ساکنان ساختمان به گل‌ها آب نمی‌دهند».
- (ح) برای هر یک از ساکنان ساختمان روزی وجود دارد که به گل‌ها آب نمی‌دهد.

تمرین

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟ در صورت امکان ارزش هر یک از گزاره‌ها را مشخص کنید.
- (الف) هر مثلث متساوی‌الساقین دو ضلع برابر دارد. (ب) سه شنبه، سومین روز هفته است.
 (پ) آیا بهار اولین فصل سال است؟ (ت) چه هوای آلوده‌ای!
 (ث) $x^2 + 3x + 2 = 0$ (ج) حاصل ضرب هر دو عدد اول عددی مرکب است.
 (چ) یک عدد فرد مثال بزنید. (ح) عدد ۹۵ بر ۱۵ بخش پذیر نیست.
 (خ) $\{1, 2, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (د) معادله $x^2 = 5$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب ندارد.

- ذ) امروز دوشنبه است. ر) در هر مثلث زاویه‌ای با اندازه 60° درجه یا بزرگ‌تر وجود دارد.
- ز) یک مجموعه δ عضوی چند زیرمجموعه دارد؟ ژ) مجموع اعضای مجموعه A برابر ۱۷ است.
- ۲- در هر مورد مفروضات استدلال داده شده است. نتیجه استدلال را مشخص کنید.
- الف) همه اهالی روستای آلپ چشم آبی دارند. مارکو اهل روستای آلپ است.
- ب) آرش با مینا یا مریم ازدواج کرده است. آرش با مریم ازدواج نکرده است.
- پ) اگر هوا آلوده باشد، مدارس تعطیل می‌شوند. امروز مدارس تعطیل نیستند.
- ت) حمید روزهای جمعه به دیدن مادر بزرگ می‌رود. امروز حمید به دیدن مادر بزرگ نرفته است.
- ث) اگر الهام ازدواج کند یا احمد قهرمان شود، پدر جشن می‌گیرد. الهام ازدواج کرده است.
- ج) اگر حامد بیمار شود، به مدرسه نمی‌رود. اگر حامد به مدرسه نرود، معلم درس جدید نمی‌دهد. امروز معلم درس جدید داد.
- چ) هیچ‌یک از ساکنان ساختمان نیلوفر ورزشکار نیستند. جعفر در ساختمان نیلوفر زندگی می‌کند.
- ۳- در جزیره انسان‌نماها موجودات دو گونه‌اند: راستگو و دروغگو. راستگوها همیشه راست می‌گویند و دروغگوها همیشه دروغ می‌گویند.
- الف) بابی و آندره دو ساکن این جزیره‌اند. بابی گفت: «اگر من دروغگو باشم، آندره هم دروغگو است». ثابت کنید حداقل یکی از بابی و آندره راستگو است.
- ب) از هر یک از جک، دونالد و ژوزه پرسیدیم: «آیا در جمع سه نفره شما دروغگو وجود دارد؟». جک و دونالد در پاسخ به این سؤال «بله» گفتند و ژوزه «خیر» گفت. کدام‌یک از این سه نفر راستگو و کدام‌یک دروغگو است؟
- پ) از هر یک از افراد یک جمع ۸ نفره از ساکنان جزیره پرسیدیم: «در جمع ۸ نفره شما چند دروغگو وجود دارد؟». پاسخ‌ها عبارت بودند از: «۲، ۲، ۴، ۵، ۵، ۶ و ۷». تعداد افراد راستگو در این جمع چه عددی ممکن است باشد؟
- ت) پل گفت: «جک و پیت هر دو دروغگو هستند»، جک گفت: «پل و پیت هر دو دروغگو هستند» و پیت گفت: «پل راستگو و جک دروغگو است». مشخص کنید کدام‌یک از این سه نفر راستگو و کدام‌یک دروغگو است.
- ث) جان گفت: «هری راستگو است»، هری گفت: «تام دروغگو است» و تام گفت: «جان راستگو یا هری دروغگو است». مشخص کنید کدام‌یک از این سه نفر راستگو و کدام‌یک دروغگو است.
- ۴- جدول ارزش‌های ۴ گزاره p, q, r, s را رسم کنید.
- ۵- الف) جدول ارزش‌های ۶ گزاره چند حالت دارد؟ ب) در چند حالت ارزش دقیقاً سه گزاره درست است؟ پ) در چند حالت ارزش حداقل دو گزاره درست و ارزش حداقل دو گزاره نادرست است؟
- ۶- در هر مورد مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده را تعیین کنید.
- الف) x مربع کامل است $(D = \{1, 2, \dots, 50\})$. ب) x بر هیچ‌یک از ۳ و ۴ بخش‌پذیر نیست $(D = \{1, 2, \dots, 20\})$.
- پ) $(D = \mathbb{N}) \frac{2x+1}{3} \leq 5$. ت) $(D = \mathbb{Z}) (x^2 + x)(2x + 1)(x^2 - 4) = 0$.
- ث) $x + 1$ عددی اول است $(D = \mathbb{P})$. ج) x^2 بر ۴ بخش‌پذیر است $(D = \mathbb{N})$.
- چ) باقی‌مانده x در تقسیم بر ۷ برابر ۳ است $(D = \{1, 2, \dots, 40\})$. ح) $(D = \mathbb{R}) x^2 > 1$.

- ۷- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.
 الف) امروز شنبه نیست.
 ب) حامد دانشجوی پزشکی است.
 پ) نوید بهترین دانش‌آموز مدرسه است.
 ت) $۵+۷ < ۹+۶$
- ۸- ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
 الف) ۷ بر ۳ بخش‌پذیر است یا ۱۰ عددی زوج است.
 ب) ۵ بر ۲ بخش‌پذیر نیست و ۷ از ۳ بزرگ‌تر است.
 ث) $(۳ > ۵) \vee (۵+۷=۱۰)$
 ج) $(۱۰ > ۶) \wedge (۳ \neq ۳)$
 ب) ایران کشوری از قاره آسیا است و بهار سومین فصل سال است.
 ت) ۶ عددی اول است یا ۹ عددی مرکب نیست.
 ج) $(۲+۲ > ۴) \wedge (۲+۳=۵)$
 ح) $(۵=۵) \vee \sim(۲ \times ۵=۱۰)$
- ۹- جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.
 الف) $\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
 ب) $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
- ۱۰- هم‌ارزی‌های منطقی زیر را به روش جبر گزاره‌ها ثابت کنید.
 الف) $(p \vee p) \wedge (p \vee q) \equiv p$
 ب) $(p \wedge \sim p) \vee (q \vee \sim q) \equiv T$
 پ) $(\sim p \vee F) \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p$
 ت) $(p \wedge T) \vee (q \wedge F) \equiv p$
 ث) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge (p \vee q)) \equiv q$
 ج) $\sim(p \vee \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim p \wedge q$
- ۱۱- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.
 الف) نوید پزشک است و تهران شهر شلوغی است.
 ب) امروز جمعه نیست و $۲+۲ \neq ۴$.
 پ) ۵ عددی اول است یا ۷ عددی مرکب است.
 ت) امروز هوا ابری نیست یا فردا باران نمی‌بارد.
- ۱۲- ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
 الف) اگر ۷ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه هر مربع سه ضلع دارد.
 ب) اگر هوا آلوده باشد، آن‌گاه ۱۰ عددی مرکب است.
 پ) اگر $۲ \times ۲ = ۴$ ، آن‌گاه ۱۱ عددی اول است.
 ت) اگر $۵ > ۴$ ، آن‌گاه ۹ بر ۶ بخش‌پذیر است.
- ۱۳- جدول ارزش گزاره‌های زیر را رسم کنید.
 الف) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
 ب) $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge q)$
- ۱۴- به روش جبر گزاره‌ها هم‌ارزی‌های منطقی زیر را ثابت کنید.
 الف) $(p \Rightarrow p) \Rightarrow p \equiv p$
 ب) $p \Rightarrow (p \Rightarrow p) \equiv T$
 ج) $(p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow p \equiv p$
 ث) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p \equiv T$
 ت) $(p \Rightarrow T) \Rightarrow p \equiv p$
 پ) $(T \Rightarrow p) \Rightarrow p \equiv T$
 ج) $p \Rightarrow (p \Rightarrow F) \equiv \sim p$
 ح) $p \Rightarrow (F \Rightarrow p) \equiv T$
- ۱۵- در هر مورد عکس ترکیب شرطی و همچنین عکس نقیض ترکیب شرطی داده شده را بنویسید.
 الف) اگر رودخانه پر آب باشد، محصولات کشاورزی افزایش می‌یابد. ب) اگر باد بوزد، آلودگی هوا از بین می‌رود.
- ۱۶- گزاره‌های زیر را به روش برهان خلف ثابت کنید.
 الف) اگر a عددی صحیح باشد و a^2 بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه a نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.
 ب) اگر a عددی صحیح باشد و $b \notin \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $a+b \notin \mathbb{Z}$.
- ۱۷- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.
 الف) اگر ۱۵ عددی زوج باشد، آن‌گاه فردا باد می‌وزد.
 ب) اگر امین سرکار برود، حقوقش از ۲ میلیون تومان بیشتر است.
- ۱۸- ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
 الف) تابستان فصل دوم سال است اگر و تنها اگر ۱۷ عددی فرد باشد.
 ب) اگر روز اول هفته شنبه باشد، آن‌گاه $۱۵ > ۲۰$ و برعکس.
 پ) زوج بودن عدد ۱۳ شرط لازم و کافی برای اول بودن عدد ۱۹ است.
 ت) $(۹ > ۱۰) \Leftrightarrow (۳=۴)$

- ۱۹- جدول ارزش گزاره‌های زیر را رسم کنید.
- الف) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ (ب) $\sim p \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$
- ۲۰- هم‌ارزی‌های منطقی زیر را به روش جبر گزاره‌ها ثابت کنید.
- الف) $(p \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p \equiv p$ (ب) $(p \Leftrightarrow T) \Leftrightarrow p \equiv T$
- پ) $(p \Leftrightarrow \sim p) \Leftrightarrow p \equiv \sim p$ (ت) $(F \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow p \equiv F$
- ۲۱- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.
- الف) ۲ عددی اول است اگر و تنها اگر ۵ عددی مرکب باشد.
- ب) اگر برف بیارد، آن‌گاه جمعه تعطیل است و برعکس.
- ۲۲- فرض کنید p و q گزاره‌هایی درست و r و s گزاره‌هایی نادرست باشند. در هر مورد ارزش گزاره مرکب داده شده را تعیین کنید.
- الف) $(p \wedge (q \Rightarrow r)) \Leftrightarrow s$ (ب) $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow s)$
- پ) $((p \wedge s) \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ (ت) $(\sim p \vee r) \Rightarrow (q \Leftrightarrow s)$
- ۲۳- در هر مورد ارزش گزاره p را تعیین کنید.
- الف) گزاره‌های q و $p \Leftrightarrow q$ نادرست‌اند. (ب) گزاره‌های $p \wedge q$ و $q \Rightarrow r$ نادرست‌اند.
- پ) گزاره‌های $\sim r$ و $(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim r$ درست‌اند. (ت) گزاره‌های $\sim r$ و $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$ نادرست‌اند.
- ۲۴- فرض کنید گزاره‌های $p \vee q$ و $\sim p \vee r$ درست باشند. ثابت کنید گزاره $q \vee r$ نیز درست است.
- ۲۵- فرض کنید گزاره $p \Rightarrow (q \wedge r)$ درست و گزاره $p \wedge r$ نادرست باشد. ثابت کنید گزاره p نادرست است.
- ۲۶- فرض کنید گزاره‌های $p \Rightarrow (q \vee r)$ و $r \Rightarrow s$ درست و گزاره $q \vee s$ نادرست باشد. ثابت کنید گزاره p نادرست است.
- ۲۷- هم‌ارزی‌های منطقی زیر را به روش جبر گزاره‌ها ثابت کنید.
- الف) $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \equiv p \Rightarrow (q \wedge r)$ (ب) $\sim q \wedge (p \Rightarrow q) \equiv \sim (p \vee q)$
- پ) $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)) \Rightarrow \sim p \equiv T$ (ت) $((q \Rightarrow p) \Rightarrow q) \Rightarrow q \equiv T$
- ث) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q) \equiv p \vee q$ (ج) $(p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv p \Rightarrow q$
- ۲۸- هر یک از گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید و ارزش هر یک را تعیین کنید.
- الف) برای هر عدد حقیقی مانند x ، $\sqrt{x} \geq 0$.
- ب) برای هر عدد زوج مانند x ، x عددی اول نیست.
- پ) عددی حقیقی مانند x وجود دارد که $[x]$ عددی فرد است.
- ت) عددی صحیح مانند x وجود دارد که $[-x] = -[x] - 1$.
- ۲۹- هر یک از گزاره‌های زیر را به زبان معمولی بنویسید و ارزش هر یک را تعیین کنید.
- الف) $\forall x \in \mathbb{Z}: (2x \in E) \wedge (2x+1 \in O)$ (ب) $\forall x \in \mathbb{N}: (\sqrt{x} \in \mathbb{N}) \vee (\sqrt{x+1} \in \mathbb{N})$
- پ) $\exists x, y \in \mathbb{N}: (x > 1) \wedge (y > 1) \wedge (xy = 23)$ (ت) $\exists x \in \mathbb{R}: (x > 2) \wedge (x^2 < 5)$
- ۳۰- ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.
- الف) در هر مثلث متساوی‌الساقین اندازه دو تا از میانه‌ها با هم برابرند.
- ب) مثلثی وجود دارد که اندازه اضلاع آن به ترتیب ۳، ۵ و ۹ باشند.
- پ) $\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt[3]{x^3} = x$ (ت) $\forall x \in \mathbb{R}: [|\sin x|] = 0$
- ث) $\exists x \in \mathbb{R}: \sin x \cos x = 1$ (ج) $\exists x \in \mathbb{R}: \tan x \cos x = \frac{1}{2}$
- چ) $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 - 9 \in P$ (د) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 + x + 1 \in O$
- خ) $\forall x \in \mathbb{Z}: 2^x \in E$ (د) $\exists x \in \mathbb{N}: 2^{x-1} \in O$

۳۱- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } \forall x \in \mathbb{R}: x^2 > -x \quad \text{ب) } \exists x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 = 0$$

$$\text{پ) } \forall x \in \mathbb{N}: (x \in E) \vee (x+1) \in E \quad \text{ت) } \forall x \in \mathbb{R}: (x < -3) \Rightarrow (x^2 > 9)$$

$$\text{ث) } \exists x \in \mathbb{N}: (x \in P) \wedge (x+1 \in P)$$

چ) هر روز دلار گران می‌شود.
 ج) دانشمندی وجود دارد که زن است و اهل ایران است.

خ) گلی وجود دارد که زرد رنگ است یا حداقل یک سال عمر می‌کند.

د) هر بازیکن تیم ملی بازیکن تیمی از لیگ برتر یا تیمی خارج از کشور است.

۳۲- هر یک از گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید و ارزش هر یک را تعیین کنید.

$$\text{الف) عددهای طبیعی و متمایز } x \text{ و } y \text{ وجود دارند به طوری که } x^y = y^x.$$

$$\text{ب) برای هر دو عدد حقیقی مانند } x \text{ و } y, \quad x + y = y + x.$$

$$\text{پ) عددی طبیعی مانند } x \text{ وجود دارد که برای هر عدد طبیعی } y, \quad y^x = 1.$$

$$\text{ت) برای هر عدد طبیعی مانند } x \text{ عددی طبیعی مانند } y \text{ وجود دارد به طوری که } x + y = 100.$$

۳۳- هر یک از گزاره‌های زیر را به زبان معمولی بنویسید و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

$$\text{الف) } \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: xy = 1 \quad \text{ب) } \forall x \in (0, +\infty) \exists y \in \mathbb{R}: xy = 1$$

$$\text{پ) } \exists x, y \in \mathbb{R}: (x + y = 2) \wedge (x - y = 1) \quad \text{ت) } \forall x, y \in \mathbb{N}: (\sqrt{x^y} \in \mathbb{N}) \vee (\sqrt{x^{y+1}} \in \mathbb{N})$$

۳۴- ارزش گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

$$\text{الف) } \forall x \in (0, \frac{\pi}{2}): \tan x \cot x = 1$$

$$\text{ب) } \forall x \in (0, +\infty): \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

$$\text{پ) } \exists x \in (2, +\infty): x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{ت) } \exists x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}: x^2 - 2 \in P$$

$$\text{ث) } \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: xy > 1 \quad \text{ج) } \exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{R}: y^x = 1$$

$$\text{چ) } \forall x \in (0, +\infty) \exists y \in \mathbb{R}: xy = 2 \quad \text{خ) } \forall x \in \{1, 2, 3, 4\} \exists y \in \{1, 2, 3, 4\}: x + y \in P$$

۳۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

$$\text{الف) } \forall x, y \in \mathbb{R}: x + y \neq xy$$

$$\text{ب) } \exists x, y \in \mathbb{R}: (x + y = 10) \wedge (xy = 20)$$

$$\text{پ) } \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R}: (x + y > 0) \wedge (xy > 0)$$

$$\text{ت) } \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}: (x + y > 0) \vee (xy > 0)$$

ث) برای هر بازیکن از تیم ملی شرکتی تبلیغاتی وجود دارد که با او قرارداد بسته است.

ج) شرکتی تبلیغاتی وجود دارد که با هر بازیکن از تیم ملی قرارداد بسته است.

چ) هر دانشجوی حداقل یکی از دروس عمومی را گذرانده است.

خ) استادی از دانشکده ریاضی وجود دارد که همه دانشجویان دانشگاه شاگردانش بوده‌اند.

د) دانشجویی از دانشکده عمران دانشجویی از دانشکده برق وجود دارد که با هم درس مشترک داشته‌اند.

د) دانشجویی از دانشکده برق وجود دارد که با هر دانشجویی از دانشکده عمران درس مشترک داشته است.

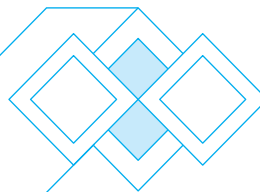
فصل اول

درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- ۱- از جملات زیر کدام یک گزاره است؟
 (۱) گل‌ها را آب دهید.
 (۲) هر تیم فوتبال از ۱۱ بازیکن تشکیل شده است.
 (۳) $x - 3$ عددی زوج است.
 (۴) آیا $2 + 3 = 5$ می‌شود؟
- ۲- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $5 + 7$ عددی مرکب است.
 (۲) بهمن دهمین ماه سال نیست.
 (۳) ۱۰ از ۵ بزرگ‌تر نیست.
 (۴) ۲۵ بر ۱۰ بخش پذیر نیست.
- ۳- جدول ارزش‌های تعدادی گزاره ۳۲ حالت دارد. در چند تا از این ۳۲ حالت ارزش دقیقاً ۳ گزاره درست است؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۰
- ۴- مجموعه جواب گزاره‌نمای « x مربع کامل نیست» با دامنه $D = \{1, 2, \dots, 50\}$ چند عضو دارد؟
 (۱) ۱۰ (۲) ۲۵ (۳) ۴۰ (۴) ۴۳
- ۵- فرض کنید p گزاره «۱۰ از ۱۵ بزرگ‌تر است» و q گزاره «۹ بر ۳ بخش پذیر است» باشد. ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $p \vee q$ (۲) $\sim p \vee q$ (۳) $p \vee \sim q$ (۴) $\sim p \vee \sim q$
- ۶- در چند تا از ۴ حالت جدول ارزش‌های گزاره $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ ارزش این گزاره درست است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴
- ۷- فرض کنید ارزش گزاره‌های p و q درست و ارزش گزاره r نادرست باشد. ارزش کدام گزاره درست است؟
 (۱) $p \wedge (\sim q \vee r)$ (۲) $\sim p \vee (q \wedge r)$ (۳) $p \vee (\sim q \wedge r)$ (۴) $(p \wedge \sim q) \vee r$
- ۸- نقیض گزاره «چین کشوری در اروپا نیست و هوا خوب است» کدام است؟
 (۱) چین کشوری در اروپا است یا هوا خوب نیست.
 (۲) چین کشوری در اروپا است و هوا خوب نیست.
 (۳) چین کشوری در اروپا نیست یا هوا خوب است.
 (۴) چین کشوری در اروپا است و هوا خوب است.
- ۹- ارزش کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) اگر ۹ عددی اول باشد، آن‌گاه ۷ عددی مرکب است.
 (۲) اگر $2 + 7 = 9$ ، آن‌گاه ۳ عددی اول است.
 (۳) اگر ۵ بر ۴ بخش پذیر باشد، آن‌گاه ۷ بر ۵ بخش پذیر است.
 (۴) اگر $5 = 5$ ، آن‌گاه $2 + 4 = 9$.
- ۱۰- نقیض گزاره «اگر علی به تفنگ علاقه داشته باشد، برای او یک تفنگ می‌خرم» کدام است؟
 (۱) علی به تفنگ علاقه دارد و برای او تفنگ نمی‌خرم.
 (۲) علی به تفنگ علاقه دارد یا برای او تفنگ نمی‌خرم.
 (۳) علی به تفنگ علاقه ندارد و برای او تفنگ می‌خرم.
 (۴) علی به تفنگ علاقه ندارد یا برای او تفنگ می‌خرم.
- ۱۱- عکس نقیض ترکیب شرطی « $(2 > 1) \Rightarrow (3 = 3)$ » کدام است؟
 (۱) $(2 \leq 1) \Rightarrow (3 \neq 3)$ (۲) $(3 \neq 3) \Rightarrow (2 \leq 1)$ (۳) $(2 \leq 1) \Rightarrow (3 = 3)$ (۴) $(3 \neq 3) \Rightarrow (2 > 1)$
- ۱۲- در چند تا از ۸ حالت جدول ارزش‌های گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee r)$ ارزش این گزاره درست است؟
 (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- ۱۳- اگر گزاره‌های p و q نادرست و گزاره r درست باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟
 (۱) $p \Leftrightarrow (q \vee r)$ (۲) $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$ (۳) $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ (۴) $(p \vee q) \Leftrightarrow r$
- ۱۴- اگر گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$ نادرست باشد، کدام گزاره درست است؟
 (۱) $p \wedge r$ (۲) $p \wedge \sim r$ (۳) $\sim p \wedge r$ (۴) $\sim p \wedge \sim r$

- ۱۵- گزاره $(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge q)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟
 T (۱) F (۲) $\sim p \vee \sim q$ (۳) $p \wedge q$ (۴)
- ۱۶- گزاره $(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim s)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟
 (۱) $(\sim r \vee s) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ (۲) $(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ (۳) $(r \vee \sim s) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ (۴) $(r \wedge \sim s) \Rightarrow (p \vee \sim q)$
- ۱۷- گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟
 q (۱) F (۲) T (۳) p (۴)
- ۱۸- کدام گزاره همواره درست است؟
 (۱) $p \vee (p \Rightarrow p)$ (۲) $p \wedge (p \Leftrightarrow p)$ (۳) $p \vee (\sim p \Leftrightarrow p)$ (۴) $p \vee (\sim p \Rightarrow p)$
- ۱۹- کدام گزاره همواره نادرست است؟
 (۱) $p \wedge (p \Rightarrow p)$ (۲) $p \wedge (p \Rightarrow \sim p)$ (۳) $p \wedge (\sim p \Rightarrow p)$ (۴) $p \wedge (\sim p \Rightarrow \sim p)$
- ۲۰- گزاره $p \Leftrightarrow (p \wedge q)$ با کدام گزاره هم‌ارز است؟
 p (۱) q (۲) $p \vee q$ (۳) $p \Rightarrow q$ (۴)
- ۲۱- نمایش گزاره «عددی فرد مانند x وجود دارد به طوری که $2x^2 + 1$ عددی اول است» با استفاده از نمادهای ریاضی به کدام صورت است؟
 (۱) $\forall x \in P: 2x^2 + 1 \in O$ (۲) $\exists x \in P: 2x^2 + 1 \in O$ (۳) $\forall x \in O: 2x^2 + 1 \in P$ (۴) $\exists x \in O: 2x^2 + 1 \in P$
- ۲۲- کدام گزاره درست است؟
 (۱) $\forall x \in (-1, +\infty): x^2 > 1$ (۲) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 = x + 2$ (۳) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 + 1 \in O$ (۴) $\exists x \in \mathbb{Z}: x^2 \in P$
- ۲۳- فرض کنید $D = \{1, 2, 3, 4\}$. کدام گزاره نادرست است؟
 (۱) $\exists x \in D: x \geq 4$ (۲) $\exists x \in D: x + 5 \in P$ (۳) $\forall x \in D: |x - 2| \leq 1$ (۴) $\forall x \in D: x < 10$
- ۲۴- فرض کنید n عددی طبیعی باشد. کدام گزاره درست است؟
 (۱) اگر n بر 7 بخش پذیر باشد، آن گاه n عددی مرکب است.
 (۲) اگر n^2 بر 8 بخش پذیر باشد، آن گاه n نیز بر 8 بخش پذیر است.
 (۳) اگر n بر 6 بخش پذیر باشد، آن گاه n عددی مرکب است.
 (۴) اگر n عددی اول باشد، آن گاه $n^2 + 1$ بر 5 بخش پذیر است.
- ۲۵- نقیض گزاره «هر ساکن از ساختمان مینو کمتر از ۴۰ سال سن دارد» کدام است؟
 (۱) هر ساکن از ساختمان مینو حداقل ۴۰ سال سن دارد.
 (۲) ساکنی از ساختمان مینو وجود دارد که حداقل ۴۰ سال سن دارد.
 (۳) ساکنی از ساختمان مینو وجود دارد که کمتر از ۴۰ سال سن دارد.
 (۴) هر کسی که ساکن ساختمان مینو نیست حداقل ۴۰ سال سن دارد.
- ۲۶- نقیض گزاره « $\forall x \in \mathbb{Z}: (x \in O) \Rightarrow (x + 1 \in E)$ » کدام است؟
 (۱) $\exists x \in \mathbb{Z}: (x \in O) \wedge (x + 1 \notin E)$ (۲) $\exists x \in \mathbb{Z}: (x \notin O) \wedge (x + 1 \in E)$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{Z}: (x \in O) \vee (x + 1 \notin E)$ (۴) $\exists x \in \mathbb{Z}: (x \notin O) \vee (x + 1 \in E)$
- ۲۷- نقیض گزاره « $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 = 2) \wedge (x^4 = 5)$ » کدام است؟
 (۱) $\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq 2) \wedge (x^4 \neq 5)$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq 2) \vee (x^4 \neq 5)$
 (۳) $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq 2) \wedge (x^4 \neq 5)$ (۴) $\exists x \in \mathbb{R}: (x^2 \neq 2) \vee (x^4 \neq 5)$



ت) هشت حالت برای راستگو و دروغگو بون پل، جک و پیتر وجود دارد. در هر حالت راست یا دروغ بودن جمله هر یک از این سه نفر را مشخص می‌کنیم.

جمله پیتر	جمله جک	جمله پل	پیتر	جک	پل
دروغ	دروغ	دروغ	راستگو	راستگو	راستگو
دروغ	دروغ	دروغ	دروغگو	راستگو	راستگو
راست	دروغ	دروغ	راستگو	دروغگو	راستگو
راست	دروغ	راست	دروغگو	دروغگو	راستگو
دروغ	دروغ	دروغ	راستگو	راستگو	دروغگو
دروغ	راست	دروغ	دروغگو	راستگو	دروغگو
دروغ	دروغ	دروغ	راستگو	دروغگو	دروغگو
دروغ	راست	راست	دروغگو	دروغگو	دروغگو

روی هر حالتی که جمله گفته شده توسط یک نفر با راستگو یا دروغگو بودن او مطابقت نداشته باشد، علامت ضربدر زده‌ایم. با توجه به این جدول تنها حالتی که ممکن است سه نفر جملات مورد نظر را گفته باشند این است که پل و پیتر دروغگو باشند و جک راستگو باشد.
ث) همانند قسمت قبل عمل می‌کنیم.

جمله تام	جمله هری	جمله جان	تام	هری	جان
راست	دروغ	راست	راستگو	راستگو	راستگو
راست	راست	راست	دروغگو	راستگو	راستگو
راست	دروغ	دروغ	راستگو	دروغگو	راستگو
راست	راست	دروغ	دروغگو	دروغگو	راستگو
دروغ	دروغ	راست	راستگو	راستگو	دروغگو
دروغ	راست	دروغ	دروغگو	راستگو	دروغگو
دروغ	دروغ	دروغ	راستگو	دروغگو	دروغگو
دروغ	راست	دروغ	دروغگو	دروغگو	دروغگو

با توجه به جدول نتیجه می‌گیریم تنها حالتی که جملات گفته شده با وضعیت سه نفر مطابقت دارد وقتی است که جان و هری دروغگو باشند و تام راستگو باشد.

۴

p	q	r	s
د	د	د	د
د	د	د	ن
د	د	ن	د
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
د	ن	د	ن
د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	د
ن	د	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د
ن	ن	ن	د
ن	ن	ن	ن

۱ الف) جمله داده شده گزاره است و ارزش آن درست است. /
ب) جمله داده شده گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا سه‌شنبه چهارمین روز هفته است. / پ) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا یک جمله پرسشی است. /
ت) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا یک جمله عاطفی است. / ث) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا اطلاعاتی در مورد X نداریم که بتوانیم در مورد درستی یا نادرستی آن تصمیم‌گیری کنیم. / ج) جمله داده شده گزاره است و ارزش آن درست است. / چ) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا یک جمله امری است. /
ح) جمله داده شده گزاره است و ارزش آن درست است. / خ) جمله داده شده یک گزاره است و ارزش آن درست است. / د) جمله داده شده گزاره است و ارزش آن نادرست است، زیرا معادله $x^2 = 5$ در مجموعه اعداد حقیقی جواب دارد. /
ذ) جمله داده شده گزاره است. ارزش آن بستگی به شرایطی که در آن قرار داریم دارد. / ر) جمله داده شده گزاره است و ارزش آن درست است، زیرا در هر مثلث، مجموع اندازه سه زاویه برابر 180° درجه است، پس حداقل یکی از این سه زاویه باید بزرگ‌تر یا مساوی 60° درجه باشد. / ز) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا یک جمله پرسشی است. / ژ) جمله داده شده گزاره نیست، زیرا اطلاعاتی در مورد A نداریم که بتوانیم درستی یا نادرستی آن را تشخیص دهیم.

۲ الف) مارکو چشم آبی دارد. / ب) آرش با مینا ازدواج کرده است. /
پ) امروز هوا آلوده نیست. / ت) امروز جمعه نیست. / ث) پدر جشن می‌گیرد. /
ج) امروز حامد بیمار نبوده است. / چ) جعفر ورزشکار نیست.

۳ الف) اگر حکم درست نباشد، بایی و آندره هر دو دروغگو هستند، پس جمله گفته شده توسط بایی راست خواهد بود، در صورتی که بایی باید دروغ بگوید! از تناقض حاصل نتیجه می‌گیریم حداقل یکی از بایی و آندره راستگوست. /
ب) هشت حالت برای راستگو و دروغگو بودن جک، دونالد و ژوزه وجود دارد. در هر حالت پاسخ‌های این سه نفر را بررسی می‌کنیم.

پاسخ ژوزه	پاسخ دونالد	پاسخ جک	ژوزه	دونالد	جک
خیر	خیر	خیر	راستگو	راستگو	راستگو
خیر	بله	بله	دروغگو	راستگو	راستگو
بله	خیر	بله	راستگو	دروغگو	راستگو
خیر	خیر	بله	دروغگو	دروغگو	راستگو
بله	بله	خیر	راستگو	راستگو	دروغگو
خیر	بله	خیر	دروغگو	راستگو	دروغگو
بله	خیر	خیر	راستگو	دروغگو	دروغگو
خیر	خیر	خیر	دروغگو	دروغگو	دروغگو

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید فقط در حالت دوم از این جدول پاسخ جک و دونالد «بله» و پاسخ ژوزه «خیر» است. پس جک و دونالد راستگو و ژوزه دروغگو است. /
پ) اگر k نفر از 8 نفر راستگو باشند، آن‌گاه $8-k$ نفر دروغگو هستند، پس k نفری که راستگو هستند باید پاسخ $8-k$ بدهند ولی دیگر هیچ‌کس نباید این پاسخ را بدهد، پس دقیقاً k تا از 8 پاسخ باید برابر $8-k$ باشد. با توجه به 8 پاسخ داده شده نتیجه می‌گیریم k برابر هر یک از عددهای صفر، 1 و 3 می‌تواند باشد (زیرا صفر پاسخ 8 ، یک پاسخ 7 و سه پاسخ 5 در بین پاسخ‌ها وجود دارد).

$\sim(\Delta=5)$	$\sim(2 \times 5=10)$	$\sim(\Delta=5) \vee \sim(2 \times 5=10)$
ن	ن	ن

ح

۵ الف $6^2 = 36$ ب $2^0 = 1$

$$\binom{6}{3} = 20$$

پ

تعداد گزاره‌های درست: ۲ ۳ ۴

$$\text{تعداد حالت‌ها} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} = 15 + 20 + 15 = 50$$

۶ الف $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

ب $\{1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, 19\}$

پ $\frac{2x+1}{3} \leq 5 \Rightarrow 2x+1 \leq 15 \Rightarrow 2x \leq 14 \Rightarrow x \leq 7$

در نتیجه مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $\{1, 2, \dots, 7\}$ است.

ت $\{0, -1, 2, -2\}$

ث باید تمام اعداد اول مانند x را بیابیم که $x+1$ نیز عددی اول است. فقط $x=2$ در این ویژگی صدق می‌کند، زیرا هر عدد اولی غیر از ۲ عددی فرد و بزرگ‌تر از ۲ است و در نتیجه اگر $x > 2$ عددی اول باشد. $x+1$ عددی زوج و بزرگ‌تر از ۲ است، پس دیگر $x+1$ عددی اول نیست. در نتیجه مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $\{2\}$ است.

ج بخش‌پذیر بودن x^2 بر ۴ معادل زوج بودن x است، پس مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر مجموعه اعداد طبیعی زوج، یعنی $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ است.

چ $\{3, 10, 17, 24, 31, 38\}$

ح

$$x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) > 0$$

$$((x-1 > 0 \wedge x+1 > 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x+1 < 0))$$

$$((x > 1 \wedge x > -1) \vee (x < -1 \wedge x < -1)) \Rightarrow (x > 1 \vee x < -1)$$

پس مجموعه جواب گزاره‌نمای داده شده برابر $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ است.

۷ الف امروز شنبه است. / ب حامد دانشجوی پزشکی نیست. / پ نوید بهترین دانش‌آموز مدرسه نیست. / ت $5+7 \geq 9+6$

۸ الف گزاره «۷ بر ۳ بخش‌پذیر است» نادرست و گزاره «۱۰ عددی زوج است» درست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره درست است.

ب گزاره «ایران کشوری از قاره آسیا است» درست و گزاره «بهار سومین فصل سال است» نادرست است، پس ترکیب عطفی این دو گزاره نادرست است.

پ گزاره «۵ بر ۲ بخش‌پذیر نیست» درست و گزاره «۷ از ۳ بزرگ‌تر است» نیز درست است، پس ترکیب عطفی این دو گزاره درست است.

ت گزاره «۶ عددی اول است» نادرست و گزاره «۹ عددی مرکب نیست» نیز نادرست است، پس ترکیب فصلی این دو گزاره نادرست است.

$\sim(3 > 5)$	$5+7=10$	$\sim(3 > 5) \vee (5+7=10)$
د	ن	د

ث

$2+2 > 4$	$2+3=5$	$(2+2 > 4) \wedge (2+3=5)$
ن	د	ن

ج

$\sim(3 \neq 3)$	$10 > 6$	$\sim(3 \neq 3) \wedge (10 > 6)$
د	د	د

چ

۹ الف

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p$	$\sim p \vee (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

ب

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$
د	د	ن	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د	د

۱۰ الف

(قانون جذب) $(p \vee p) \wedge (p \vee q) \equiv p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ب

$$(p \wedge \sim p) \vee (q \vee \sim q) \equiv F \vee T \equiv T$$

پ

(قانون جذب) $(\sim p \vee F) \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p \wedge (\sim p \vee q) \equiv \sim p$

ت

$$(p \wedge T) \vee (q \wedge F) \equiv p \vee F \equiv p$$

ث

(توزیع پذیری) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge (p \vee q)) \equiv (p \wedge q) \vee ((\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q))$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (F \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$$

(فاکتورگیری) $\equiv (p \vee \sim p) \wedge q$

$$\equiv T \wedge q \equiv q$$

ج

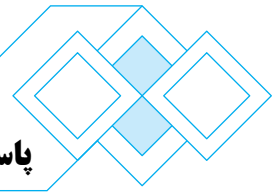
(دمورگان) $\sim(p \vee \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv \sim(p \wedge \sim(\sim q)) \wedge (\sim(\sim p) \vee \sim(\sim q))$

(شرکت پذیری) $\equiv (\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge (q \wedge (p \vee q))$

(قانون جذب) $\equiv \sim p \wedge q$

۱۱ الف نوید پزشک نیست یا تهران شهر شلوغی نیست. / ب امروز جمعه است یا $2+2=4$. / پ ۵ عددی اول نیست و ۷ عددی مرکب نیست. / ت امروز هوا ابری است و فردا باران می‌بارد.

۱۲ الف گزاره «۷ بر ۳ بخش‌پذیر است» نادرست است، در نتیجه ترکیب شرطی داده شده مستقل از ارزش تالی آن به انتقای مقدم درست است. / ب گزاره «۱۰ عددی مرکب است» درست است، در نتیجه ترکیب شرطی داده شده مستقل از ارزش مقدم آن درست است. / پ گزاره « $2 \times 2 = 4$ » درست و گزاره «۱۱ عددی اول است» نیز درست است، در نتیجه ارزش گزاره شرطی داده شده درست است. / ت گزاره « $5 > 4$ » درست و گزاره «۹ بر ۶ بخش‌پذیر است» نادرست است، در نتیجه ارزش گزاره شرطی داده شده نادرست است.



۱- گزینه ۲ جمله گزاره (۱) یک جمله امری و جمله گزاره (۴) یک جمله پرسشی است، پس این دو گزاره نیستند. جمله گزاره (۳) نیز یک گزاره‌نما است و ارزش درستی آن به مقدار x بستگی دارد.

۲- گزینه ۳

۳- گزینه ۱ اگر تعداد گزاره‌ها برابر n باشد، آن‌گاه $2^n = 32$ ، پس $n = 5$. در نتیجه تعداد حالت‌هایی که دقیقاً ۳ تا از گزاره‌ها درست باشند برابر $\binom{5}{3} = 10$ است.

۴- گزینه ۴ اعداد مربع کامل در مجموعه D عبارت‌اند از $1, 4, 9, \dots$ و 7^2 که تعداد آنها برابر ۷ است، پس در مجموعه D ، $50 - 7 = 43$ عدد مربع کامل نیستند.

۵- گزینه ۳ گزاره p نادرست و گزاره q درست است، پس در بین چهار گزاره داده شده فقط $p \vee \sim q$ گزاره‌ای نادرست است.

۶- گزینه ۱ جدول ارزش گزاره $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ به صورت زیر است:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$
د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د	ن

بنابراین در یک حالت ارزش گزاره مورد نظر درست است.

۷- گزینه ۳ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه (۱)

$$p \wedge (\sim q \vee r) \equiv T \wedge (\sim T \vee F) \equiv T \wedge (F \vee F) \equiv T \wedge F \equiv F$$

گزینه (۲)

$$\sim p \vee (q \wedge r) \equiv \sim T \vee (T \wedge F) \equiv F \vee F \equiv F$$

گزینه (۳)

$$p \vee (\sim q \wedge r) \equiv T \vee (\sim T \wedge F) \equiv T \vee (F \wedge F) \equiv T \vee F \equiv T$$

گزینه (۴)

$$(p \wedge \sim q) \vee r \equiv (T \wedge \sim T) \vee F \equiv (T \wedge F) \vee F \equiv F \vee F \equiv F$$

۸- گزینه ۱ با توجه به قانون دموورگان نقیض گزاره $p \wedge q$ هم‌ارز با $\sim p \vee \sim q$ است.

۹- گزینه ۴ گزاره شرطی فقط وقتی نادرست است که ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست باشد. در بین ۴ گزاره شرطی داده شده فقط گزاره گزاره (۴) این ویژگی را دارد. مقدم آن یعنی « $5=5$ » گزاره‌ای درست و تالی آن یعنی « $2+4=9$ » گزاره‌ای نادرست است.

۱۰- گزینه ۱ نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ هم‌ارز با $p \wedge \sim q$ است.

۱۱- گزینه ۲ عکس نقیض گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ گزاره $\sim p \Rightarrow \sim q$ است.

۱۲- گزینه ۲ جدول ارزش گزاره $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee r)$ به صورت زیر است:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \vee r$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د
د	ن	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن
ن	د	ن	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	د

بنابراین در چهار حالت ارزش گزاره مورد نظر درست است.

۱۳- گزینه ۳ گزینه‌ها را یکی یکی بررسی می‌کنیم.

گزینه (۱)

$$p \Leftrightarrow (q \vee r) \equiv F \Leftrightarrow (F \vee T) \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$$

گزینه (۲)

$$(p \wedge q) \Leftrightarrow r \equiv (F \wedge F) \Leftrightarrow T \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$$

گزینه (۳)

$$p \Leftrightarrow (q \wedge r) \equiv F \Leftrightarrow (F \wedge T) \equiv F \Leftrightarrow F \equiv T$$

گزینه (۴)

$$(p \vee q) \Leftrightarrow r \equiv (F \vee F) \Leftrightarrow T \equiv F \Leftrightarrow T \equiv F$$

۱۴- گزینه ۲ چون گزاره شرطی $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee s)$ نادرست است،

پس مقدم آن یعنی $p \wedge q$ درست و تالی آن یعنی $r \vee s$ نادرست است. چون $p \wedge q$ درست است، پس p و q هر دو درست‌اند و چون $r \vee s$ نادرست است، پس r و s هر دو نادرست‌اند. اکنون واضح است که در بین چهار گزاره داده شده فقط ارزش گزاره $p \wedge \sim r$ درست است.

۱۵- گزینه ۴

$$(p \vee \sim p) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv T \Rightarrow (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

۱۶- گزینه ۱ هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

$$(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge \sim s) \equiv \sim (r \wedge \sim s) \Rightarrow \sim (p \vee \sim q)$$

$$\equiv \sim (r \vee s) \Rightarrow \sim (p \wedge q) \quad (\text{دمورگان})$$

۱۷- گزینه ۱

$$(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)$$

(قضیه ۸)

$$\equiv (\sim p \wedge p) \vee q \quad (\text{فکتورگیری})$$

$$\equiv F \vee q \equiv q$$