

یازدهم آمار و احتمال پایا

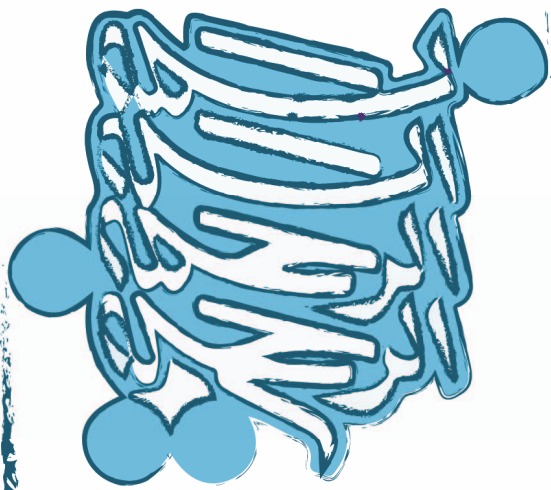
(رشته ریاضی)

از مجموعه مرشد

حمیدرضا بیات • سعید بیاتی

درس نامه

- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تألیفی و کنکور)
- پاسخ‌نامه تشریحی با نکته‌های کلیدی
- برای داوطلبان رشته‌های برتر دانشگاه‌های مشهور



دانش‌آموزان گرامی

بسیار خرسندیم که کتاب‌های ریاضی «پایا» را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب‌ها که از مجموعه کتاب‌های «مرشد» به حساب می‌آیند، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کنند. این مجموعه، برای دانش‌آموزانی به رشتهٔ تحریر درآمده است که مایلند در بهترین رشته‌های مهندسی یا علوم پایهٔ دانشگاه‌های به‌نام کشور یا خارج از ایران تحصیل کنند. کتاب «آمار و احتمال یازدهم پایا» شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها در درس حسابان آماده می‌کند.

مؤلفان کتاب‌های پایا، پس از ارائهٔ درسنامهٔ مختصر، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور گروه‌های آزمایشی ریاضی و تجربی، مسائل مسابقات معتبر ریاضی (با توجه به استفادهٔ طراحان کنکور از آن‌ها در سال‌های اخیر) و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند.

مطالعهٔ پاسخنامهٔ تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را تسهیل خواهد کرد.

در پایان، وظیفهٔ خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان: حمیدرضا بیات و سعید بیاتی و دبیر محترم مجموعه، آقای مهندس هادی عزیززاده، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، تشکر کنیم.

همچنین از آقایان مرتضی خمایی ابدی و کیان کریمی خراسانی که در تألیف کتاب همکاری داشتند، خانم حمیده نوروزی که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی، خانم نرگس سربندی که زحمت ترسیم شکل‌ها، و خانم بهاره خدایی که زحمت طراحی کتاب را برعهده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همهٔ این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

فهرست

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات

- درس اول: آشنایی با منطق ریاضی..... ۸
درس دوم: مجموعه - زیرمجموعه..... ۱۹
درس سوم: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)..... ۲۵
پاسخ‌نامه تشریحی..... ۳۴

فصل دوم: احتمال

- درس اول: مبانی احتمال..... ۴۴
درس دوم: احتمال غیر هم‌شانس..... ۵۱
درس سوم: احتمال شرطی..... ۵۴
درس چهارم: پیشامدهای مستقل وابسته..... ۶۳
پاسخ‌نامه تشریحی..... ۶۸

فصل سوم: آمار توصیفی

- درس اول: توصیف و نمایش داده‌ها..... ۷۸
درس دوم: معیارهای گرایش به مرکز..... ۸۵
درس سوم: معیارهای پراکندگی..... ۹۲
پاسخ‌نامه تشریحی..... ۱۰۲

فصل چهارم: آمار استنباطی

- درس اول: گردآوری داده‌ها..... ۱۱۴
درس دوم: برآورد..... ۱۲۰
پاسخ‌نامه تشریحی..... ۱۲۸

آزمون‌ها

- آزمون سراسری سال ۹۶..... ۱۳۲
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۶..... ۱۳۴
آزمون سراسری سال ۹۷..... ۱۳۵
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۷..... ۱۳۸

فصل آشنایی با
اول: مبانی ریاضیات

گزاره

تعریف گزاره جمله‌ای خبری است که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست باشد. به طور مثال هر یک از جملات

زیر گزاره هستند:

الف) عدد ۴ فرد است.

ب) اگر هوا ابری باشد، آنگاه باران می‌بارد.

ج) ۹ مربع کامل است و ۱۵ مضرب ۵ است.

د) مجموع هر دو عدد اول همواره عددی اول است.

تذکره جملات سؤالی، امری، عاطفی، تعجبی و نیز جملاتی که دارای ارزش نباشند، گزاره محسوب نمی‌شوند. زیرا خبری را بیان

نمی‌کنند. به طور مثال جملات زیر گزاره نیستند:

الف) علی دانش‌آموز خوبی است.

ب) کتاب را از روی میز بردار.

ج) مداد مربع کامل است.

د) امروز هوا چند درجه است؟

نمایش گزاره

گزاره‌ها را با یکی از حروف p ، q ، r ، s و ... نمایش می‌دهند. مثال:

p : هوا روشن است.

q : ۵ عددی اول است.

ارزش گزاره

درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم.

ارزش گزاره درست را با حرف «T» یا «د» و ارزش گزاره نادرست را با «F» یا «ن» نمایش می‌دهند.

هر گزاره فقط دارای یک ارزش است و نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست.

مثال ارزش هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف) هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد فرد نوشت.

ب) هر عدد زوج بزرگتر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت (حدس گلدباخ).

ج) هزارمین رقم بعد از ممیز عدد π برابر ۵ است.

د) $5 + 7 = 10$

پاسخ

الف) این گزاره درست است. چون جمع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

ب) این گزاره حدس مشهور گلدباخ است و ارزش آن فعلاً بر ما معلوم نیست و دقیقاً نمی‌توانیم درستی یا نادرستی آن را تعیین کنیم. حدس به مسائل حل‌نشده‌ای می‌گویند که تاکنون درستی آن‌ها اثبات نشده است و نیز مثال نقضی هم برای آن‌ها پیدا نشده است.

ج) ارزش این گزاره را نمی‌توان فعلاً تعیین کرد. زیرا نمی‌دانیم هزارمین رقم بعد از ممیز عدد π چه عددی است. ولی اگر روزی بتوان این رقم را مشخص کرد یا این رقم ۵ است که گزاره دارای ارزش درست می‌باشد و یا این رقم ۵ نیست که در این حالت گزاره نادرست است.

د) این گزاره نادرست است چون $5 + 7 = 12$ است.

جدول ارزش گزاره‌ها

□ برای گزاره p دو حالت ارزش گزاره طبق جدول مقابل وجود دارد.

p
د
ن

□ برای دو گزاره p و q چهار حالت ($2^2 = 4$) ارزش گزاره مطابق جدول مقابل وجود دارد.

q	p
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

□ برای سه گزاره p ، q و r هشت حالت ($2^3 = 8$) ارزش گزاره مطابق جدول زیر وجود دارد.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

نکته □ برای n گزاره، 2^n حالت ارزش گزاره در جدول ارزش وجود دارد.

گزاره‌نما

تعریف □ جمله خبری است که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود. به طور مثال هر یک از عبارتهای زیر یک گزاره‌نما هستند:

الف □ x عددی زوج است.

ب □ $x^2 + 4x \leq 0$

ج □ حاصل جمع پنج برابر عددی با سه برابر عدد دیگر برابر ۱۰ است. ($5x + 3y = 10$)

تذکره ۱ □ گزاره‌نما را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک‌متغیره، دو‌متغیره و ... می‌نامیم.

۲ □ معادلات و نامعادلات، همه «گزاره‌نما» هستند.

دامنه متغیر گزاره‌نما

تعریف □ مجموعه مقادیری است که اگر هر یک از آنها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار دهیم، گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود. دامنه متغیر گزاره‌نما را با حرف D نمایش می‌دهند.

مثال □ دامنه متغیر، هر یک از گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید.

الف □ x عددی زوج است. $x^2 + 4x \leq 0$

پاسخ □

الف □ مجموعه اعداد صحیح مجموعه اعداد حقیقی

مجموعه جواب گزاره‌ها

تعریف مجموعه عضوهایی از دامنه متغیر است که به ازای آن‌ها، گزاره‌ها تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود. مجموعه جواب گزاره‌ها را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره $S \subseteq D$ است.

مثال دامنه متغیر و مجموعه جواب هر یک از گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

الف عدد $(x+1)$ مضرب صحیح پنج است. **ب** عددی صحیح نیست. $(x \notin \mathbb{Z})$ **ج** $4x^2 + 9x + 5 = 0$

پاسخ

$$D = \mathbb{Z}$$

$$S = \{\dots, -6, -1, 4, 9, 14, \dots\} = \{x+1 = 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{x = 5k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$S = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

$$D = \mathbb{R}$$

ج برای تعیین مجموعه جواب این گزاره‌ها باید معادله درجه دوم $4x^2 + 9x + 5 = 0$ را حل کنیم.

$$4x^2 + 9x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow S = \left\{-1, -\frac{5}{4}\right\}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. **مسئله** کدام گزینه یک گزاره را مشخص می‌کند؟

- (۱) چه باران شدیدی می‌بارد.
 (۲) نیوتن یک ریاضی‌دان بود.
 (۳) عدد ۵ را روی تخته سیاه بنویس.
 (۴) پویا دانش‌آموز خوبی است.

۲. چه تعداد از جملات زیر گزاره هستند؟

- (الف) آیا معادله $x^2 - 3x + 8 = 0$ دارای ریشه حقیقی است؟
 (ب) درخت یک مکعب کامل است.
 (ج) سعدی شاعر است.
 (د) همه اعداد اول فرد می‌باشند.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳. ارزش کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) هر انسان شش پا، بیش از ۱۰۰۰ سال عمر می‌کند.
 (۲) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس عدد اول بیاید برابر $\frac{1}{4}$ است.
 (۳) $\{3\} \in \{1, 2, 3, 4\}$
 (۴) مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است.

۴. چه تعداد از جملات زیر گزاره‌ها هستند؟

- (الف) $x > 0$ (ب) x یک ریاضی‌دان است.
 (ج) $x + 2y = 5$
 ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

۵. **مسئله** دامنه متغیر کدام گزاره‌ها را می‌توان مجموعه اعداد حقیقی در نظر گرفت؟

- (۱) $\sqrt{-x} \in \mathbb{Z}$ (۲) $\sqrt{x-2} = \frac{2}{x-2}$ (۳) $\frac{x+1}{x^2-1} \in \mathbb{N}$ (۴) $x \in \mathbb{Z}$

۶. مهم کدام گزینه درست است؟

- (۱) مجموعه جواب گزاره‌نمای « $\frac{-4}{x} \in \mathbb{N}$ »، مجموعه اعداد طبیعی است.
 (۲) مجموعه جواب گزاره‌نمای « $x \notin \mathbb{Z}$ »، مجموعه اعداد حقیقی است.
 (۳) مجموعه جواب گزاره‌نمای « $\frac{x}{x+1} \in \mathbb{Z}$ »، فقط دو عضو صحیح دارد.
 (۴) مجموعه جواب گزاره‌نمای « x عددی فرد است»، مجموعه اعداد صحیح است.
۷. برای ۵ گزاره p, q, r, s و t چند حالت ارزش گزاره در جدول ارزش وجود دارد؟
- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۲۵ (۴) ۳۲

ترکیب گزاره‌ها

گزاره مرکب

تعریف گزاره‌ای است که از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیله رابطه‌های گزاره‌ای به دست می‌آید. مانند گزاره‌های زیر:

- عدد ۵ فرد است و عدد ۶ مضرب ۳ است.
- اگر عدد ۳ اول باشد، آنگاه عدد ۸ مربع کامل است.
- چنین نیست که ۳ عددی گنگ باشد.

رابطه‌های گزاره‌ای عبارتند از:

- الف** ناقض با علامت « \sim » به معنی «چنین نیست که»
- ب** فاصل با علامت « \vee » به معنی «یا»
- ج** عاطف با علامت « \wedge » به معنی «و»
- ر** شرطی با علامت « \Rightarrow » به معنی «اگر، آنگاه»
- ه** دوشروطی با علامت « \Leftarrow » به معنی «اگر و تنها اگر» یا «اگر، آنگاه و برعکس»

تذکره نقیض فقط روی یک گزاره اثر می‌کند در حالی که رابطه‌های دیگر روی دو و یا چند گزاره اثر می‌کنند.

نقیض یک گزاره

- نقیض گزاره p را که با نماد $\sim p$ نمایش می‌دهیم، گزاره‌ای است که ارزش آن خلاف ارزش p است.
- به علامت « \sim » ناقض گفته می‌شود و $\sim p$ را می‌خوانیم «چنین نیست که p ». مثلاً نقیض گزاره «۳ عددی اول است» می‌شود «۳ عددی اول نیست».

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره به صورت مقابل است:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

دو گزاره هم‌ارز

- اگر دو گزاره p و q هم‌ارزش باشند، آن‌ها را هم‌ارز می‌گوییم و می‌نویسیم $p \equiv q$. مثلاً طبق جدول مقابل می‌بینیم دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ هم‌ارز یکدیگرند و می‌نویسیم $p \equiv \sim(\sim p)$.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	د

ترکیب فصلی دو گزاره

از ترکیب دو گزاره p و q با رابط منطقی « \vee » ترکیب فصلی دو گزاره تشکیل می‌شود که به صورت $p \vee q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم p یا q . مثلاً برای دو گزاره p و q به صورت زیر:

p : ۶ عددی اول است.

q : $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.

ترکیب فصلی دو گزاره یعنی $p \vee q$ عبارت است از: «۶ عددی اول است یا $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.»

نکته ارزش گزاره فصلی $p \vee q$ زمانی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند و در بقیه حالات ارزش $p \vee q$ درست است.

جدول ارزش گزاره $p \vee q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

ترکیب عطفی دو گزاره

از ترکیب دو گزاره ساده p و q با رابط منطقی « \wedge » ترکیب عطفی دو گزاره تشکیل می‌شود که به صورت $p \wedge q$ می‌نویسیم و می‌خوانیم p و q .

نکته ارزش گزاره عطفی $p \wedge q$ زمانی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند و در بقیه حالات نادرست است.

جدول ارزش گزاره $p \wedge q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

قوانین دمورگان در منطق ریاضی

برای دو گزاره p و q داریم:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

مثال اگر ارزش گزاره‌های p و $(p \wedge \sim q)$ درست باشند، آنگاه ارزش گزاره q را تعیین کنید.

$$\sim(p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee (\sim \sim q) \equiv \sim p \vee q \equiv T$$

پاسخ چون $p \equiv T$ پس $\sim p \equiv F$ و با توجه به اینکه گزاره $\sim p \vee q$ دارای ارزش درست است، لذا ارزش q باید درست باشد، چون اگر q نادرست باشد، گزاره $\sim p \vee q$ نادرست می‌شود که مخالف فرض سؤال است.

ترکیب شرطی دو گزاره

تعریف گزاره مرکب « $p \Rightarrow q$ » را ترکیب شرطی دو گزاره p و q می‌گوییم و می‌خوانیم «اگر p آنگاه q ». در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم. مثلاً گزاره‌های مرکب زیر ترکیب شرطی هستند:

الف اگر x عددی اول باشد، آنگاه x^2 نیز عددی اول است.

ب اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آنگاه ارتفاع وارد بر وتر نصف وتر است.

- ۱ نکته هرگاه در ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$ ارزش p (مقدم) نادرست باشد، گزاره مرکب همواره درست است و ارزش آن به ارزش q بستگی ندارد. در این صورت می‌گویند ارزش « $p \Rightarrow q$ » به انتفای مقدم درست است.
- ۲ ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.
- ۳ جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ به صورت مقابل است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

تذکره گزاره $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

مثال با رسم جدول ارزش گزاره‌ها، درستی هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را نشان دهید.

الف $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

ب $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

ج $p \wedge \sim p \equiv F$

پاسخ

الف

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

$$\Rightarrow (p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

$$\Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

$$\Rightarrow p \wedge \sim p \equiv F$$

مثال ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و a^2 زوج باشد، آنگاه a عددی زوج است.

پاسخ به جای اثبات این حکم عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم، چون هم‌ارزند. یعنی:

(a^2 عددی فرد است $\Rightarrow a$ عددی فرد است) \equiv (a عددی زوج است $\Rightarrow a^2$ عددی زوج است)

هر عدد فرد را می‌توان به صورت $(2k-1)$ نوشت که $k \in \mathbb{Z}$ است، پس اگر a عددی فرد باشد داریم:

$$a = 2k - 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k^2 - 4k + 2 - 1 = 2(\underbrace{2k^2 - 2k + 1}_{k' \in \mathbb{Z}}) - 1 = 2k' - 1$$

پس عدد a^2 نیز فرد است.

ترکیب دوشرطی دو گزاره

□ برای دو گزاره p و q ، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشرطی p و q می‌نامیم و به یکی از صورت‌های زیر می‌خوانیم:

«اگر p ، آنگاه q و برعکس»، « p اگر و تنها اگر q »، « p شرط لازم و کافی برای q است»

به طور مثال گزاره‌های زیر ترکیب دوشرطی گزاره‌ها هستند:

الف) ۵ عددی زوج است \Leftrightarrow ۶ عددی اول است.

ب) اگر حاصل ضرب دو عدد حقیقی صفر شود آنگاه لااقل یکی از آن‌ها برابر صفر است و برعکس.

ج) شرط لازم و کافی برای آنکه پاره‌خطی روی دو ضلع یک مثلث قطعات متناسب ایجاد کند، این است که با ضلع سوم مثلث موازی باشد.

نکته) ارزش گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ زمانی درست است که p و q هم‌ارزش باشند. پس جدول ارزش گزاره $p \Leftrightarrow q$ به صورت مقابل است:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

هم‌ارزی‌های مهم در گزاره‌ها

□ با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی‌های منطقی زیر را می‌توان ثابت کرد. از نظر جدول دو گزاره هم‌ارزند اگر و تنها اگر ستون ارزش آن‌ها یکی باشد.

توجه) گزاره همیشه نادرست و T گزاره همیشه درست است.

$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
$p \wedge F \equiv F$	$p \vee F \equiv p$
$p \wedge T \equiv p$	$p \vee T \equiv T$
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	قوانین جابه‌جایی:
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	قوانین شرکت پذیری:
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	قوانین توزیع پذیری:
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	قوانین جذب:
$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$	
$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$	
$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$	

مثال) بدون استفاده از جدول، ارزش گزاره $p \wedge ((\sim (p \vee q)) \vee (\sim (q \Rightarrow p)))$ را تعیین کنید.

پاسخ

$$p \wedge ((\sim (p \vee q)) \vee (\sim (q \Rightarrow p))) \equiv p \wedge ((\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)) \equiv (p \wedge (\sim p \wedge \sim q)) \vee (p \wedge (q \wedge \sim p)) \equiv ((p \wedge \sim p) \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \wedge q)) \equiv (F \wedge \sim q) \vee ((p \wedge \sim p) \wedge q) \equiv F \vee (F \wedge q) \equiv F \vee F \equiv F$$

۸. اگر T گزاره همیشه درست و F گزاره همیشه نادرست باشد، کدام هم‌ارزی زیر همواره برقرار نیست؟

(۱) $T \wedge F \equiv F$ (۲) $T \vee F \equiv T$ (۳) $P \wedge T \equiv P$ (۴) $P \vee T \equiv P$

۹. **مسئله** ارزش کدام گزاره همیشه درست است؟

(۱) $(3 < -2) \wedge (x^2 + 5 \neq 0)$ (۲) $(2 \in \{2, 3, 4\}) \wedge \left(\frac{2}{4} \neq \frac{1}{2}\right)$ (۳) $\left(\frac{5}{0} \in \mathbb{R}\right) \vee (5 \times 0 \neq 0)$ (۴) $\left(-\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}\right) \vee (3 \times 7 = 12)$

۱۰. کدام هم‌ارزی درست است؟

(۱) $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ (۲) $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$ (۳) $q \vee (\sim p \wedge p) \equiv q$ (۴) هر سه گزینه صحیح است.

۱۱. **مسئله** اگر گزاره‌های $p \vee r$ ، $p \Rightarrow q$ و $\sim q$ درست باشند، کدام گزاره زیر درست است؟

(۱) p (۲) q (۳) r (۴) $p \wedge \sim q$

۱۲. **مسئله** چندتا از گزاره‌های شرطی زیر درست هستند؟

(الف) اگر مثلث سه ضلع داشته باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 200° است.

(ب) اگر ۶ عدد زوج باشد، آنگاه ۶ بر ۲ بخش پذیر است.

(ج) اگر ۲ فرد باشد، آنگاه مستطیل دو قطر مساوی ندارد.

(د) اگر ۴ فرد باشد، آنگاه π یک عدد حقیقی است.

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۳. کدام گزاره نادرست است؟

(۱) $3 < 4 \Rightarrow 4 < 5$ (۲) $3 < 4 \Rightarrow -3 < -5$ (۳) $5 < 3 \Rightarrow 2 \in \{1, 2, 3\}$ (۴) $5 < 3 \Rightarrow \{2\} \subseteq \{1, 2\}$

۱۴. **مسئله** اگر گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ نادرست و گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام گزاره زیر درست است؟

(۱) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ (۲) $(p \wedge \sim q) \vee r$ (۳) $\sim q \Rightarrow \sim p$ (۴) $(p \vee \sim q) \wedge r$

۱۵. اگر گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow s$ نادرست باشد، در این صورت ارزش گزاره $(r \wedge q) \Rightarrow s$ چگونه است؟

- (۱) همیشه درست است. (۲) همیشه نادرست است.
 (۳) بستگی به ارزش گزاره‌های r و s دارد. (۴) با گزاره $r \Rightarrow s$ هم‌ارزش است.

۱۶. **نکته‌در** گزاره $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$ چگونه است؟

- (۱) همیشه درست است. (۲) همیشه نادرست است.
 (۳) هم‌ارز گزاره $p \Rightarrow q$ است. (۴) هم‌ارز گزاره $p \Rightarrow q$ است.

۱۷. اگر p گزاره‌ای نادرست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره زیر درست است؟

(۱) $p \wedge (q \vee r)$ (۲) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ (۳) $(p \vee q) \Rightarrow (q \wedge r)$ (۴) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

۱۸. **مسئله** اگر p و q دو گزاره باشند، کدام گزاره شرطی زیر همواره درست است؟

(۱) $p \Rightarrow p \vee q$ (۲) $p \Rightarrow \sim (p \vee q)$ (۳) $p \Rightarrow (\sim p \wedge q)$ (۴) $p \Rightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

۱۹. گزاره $\sim p \wedge (p \Rightarrow q)$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

(۱) p (۲) q (۳) $\sim p$ (۴) $\sim q$

۲۰. **مسئله** نقیض گزاره «اگر x زوج باشد، آنگاه $x+1$ فرد خواهد بود» کدام گزاره است؟

- (۱) نه x زوج است و نه $x+1$ فرد است. (۲) x زوج است و $x+1$ فرد نیست.
 (۳) هم x زوج است و هم $x+1$ فرد است. (۴) x زوج نیست و $x+1$ فرد است.

۲۱. **رِسْوَر** گزاره $p \wedge ((p \Rightarrow q) \wedge \sim q)$ چگونه است؟

- (۱) همیشه درست است. (۲) همیشه نادرست است.
 (۳) هم‌ارزش با گزاره p است. (۴) هم‌ارز با گزاره $p \Rightarrow q$ است.

۲۲. **نکته‌رار** گزاره $\sim p \Rightarrow (\sim q \Rightarrow r)$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟

- (۱) $(p \vee q) \vee r$ (۲) $(p \vee q) \wedge r$ (۳) $(p \vee \sim q) \vee r$ (۴) $(p \wedge q) \wedge r$

۲۳. اگر گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام گزاره زیر درست است؟

- (۱) $p \Rightarrow (p \wedge q)$ (۲) $p \Rightarrow (\sim p \vee q)$ (۳) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee r)$ (۴) $(q \wedge r) \Rightarrow \sim p$

۲۴. **رئوسوار** گزاره $p \Rightarrow [q \Rightarrow \sim (p \Rightarrow \sim q)]$ چگونه است؟

- (۱) همیشه درست است. (۲) همیشه نادرست است.
 (۳) هم‌ارز گزاره $p \Rightarrow q$ است. (۴) هم‌ارز گزاره $\sim p \Rightarrow q$ است.

۲۵. **مهم** کدام جدول ارزش گزاره‌های زیر نادرست است؟

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

(۲)

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

(۱)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

(۴)

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

(۳)

۲۶. **مهم** چندتا از گزاره‌های زیر درست است؟

- الف) اگر $b \in \{a\}$ ، آنگاه $a = b$ و برعکس.
 ب) اگر عدد ۳۱ اول باشد، آنگاه ۳۱ بر دو قابل قسمت است و برعکس.
 ج) اگر ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ بر دو قابل قسمت است و برعکس.
 د) ۳ اول نیست اگر و تنها اگر ۳ مجذور کامل است.

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲۷. اگر $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، کدام گزاره زیر نادرست است؟

- (۱) $(q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge r)$ (۲) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$ (۳) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$ (۴) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$

۲۸. **مهم** عکس نقیض گزاره $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow S)$ کدام است؟

- (۱) $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (r \Leftrightarrow \sim S)$ (۲) $(r \Leftrightarrow S) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
 (۳) $(\sim r \Leftrightarrow S) \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim q)$ (۴) $(\sim r \Leftrightarrow \sim S) \Rightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q)$

تعریف

- عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» را سور می‌گویند.
- این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نما قرار گیرند و گزاره‌نما را به گزاره با ارزش درست یا نادرست تبدیل کنند.
 - «به ازای هر» را سور عمومی و «برای بعضی مقادیر» را سور وجودی می‌گوییم.
 - سور عمومی را با نماد \forall و سور وجودی را با نماد \exists نشان می‌دهیم.

مثال

هر یک از سورهای زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف

برای هر عدد حقیقی x داریم $x^2 + 1 \geq 2x$.

ب

مربع بعضی از اعداد حقیقی کوچکتر از صفر است.

ج

هر عدد اولی، فرد است.

پاسخ

الف

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \geq 2x$$

ب

$$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

ج

$$\forall x \in \mathbb{P} : x = 2k - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

نکته

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور عمومی همراه می‌شود، وقتی به یک گزاره درست تبدیل می‌شود که هر عضو از دامنه متغیر در گزاره‌نما صدق کند. یعنی هیچ مثال نقضی نداشته باشد.

مثلاً گزاره $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ نادرست است، زیرا برای آن یک مثال نقض است چون $\frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$. ولی گزاره $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ درست است، زیرا هیچ مثال نقضی برای این گزاره نیست و به بیان دیگر، برای هر عضو از دامنه متغیر (\mathbb{R}) گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود.

نکته

گزاره‌نمای شامل متغیر x که با سور وجودی همراه می‌شود، وقتی درست است که مجموعه جواب آن تهی نباشد. مثلاً گزاره $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$ نادرست است چون مجموعه جواب این گزاره‌نما تهی است. به بیان دیگر معادله $x^2 + 1 = 0$ جواب حقیقی ندارد.

نقیض گزاره‌های سوری

۱

$$\sim (\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x)$$

۲

$$\sim (\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x)$$

مثال

نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف

$$\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0$$

ب

$$\forall x \in \mathbb{R}; x + \frac{1}{x} \geq 2$$

ج

$$\exists x \in \mathbb{R}; (x > 0 \wedge x^2 \leq 4)$$

پاسخ

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$$

$$\sim \left(\forall x \in \mathbb{R}; x + \frac{1}{x} \geq 2 \right) \equiv \exists x \in \mathbb{R}; x + \frac{1}{x} < 2$$

$$\sim (\exists x \in \mathbb{R}; x > 0 \wedge x^2 \leq 4) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; \sim (x > 0 \wedge x^2 \leq 4) \equiv \forall x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \vee x^2 > 4$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۹. اگر $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 4\}$ دامنه متغیر باشد، ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱) $\exists x \in A; x + 5 = 3$ (۲) $\forall x \in A; x + 4 < 8$ (۳) $\exists x \in A; \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$ (۴) $\forall x \in A; x^2 > 0$

۳۰. کدام گزاره سوری زیر نادرست است؟

- (۱) $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-4}{3} = 0$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2-4}{x+2} = x-2$
 (۳) $\exists x \in (0, +\infty); x^2 < x$ (۴) $\forall x \in \mathbb{R}; x + \frac{1}{x} \leq -2 \vee x + \frac{1}{x} \geq 2$

۳۱. ارزش کدام گزاره سوری زیر درست است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2}{x} = x$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R}; \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$
 (۳) $\forall x, y \in \mathbb{R}; x^2 + y^2 > 0$ (۴) $\forall x \in \mathbb{N}; \frac{x}{x+1} < 1$

۳۲. نقیض گزاره‌های سوری $(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = -1)$ و $(\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x)$ به ترتیب کدامند؟

- (۱) $(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -1)$ و $(\forall x \in \mathbb{Q}; x^2 < x)$ (۲) $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 = -1)$ و $(\exists x \in \mathbb{Q}; x^2 \geq x)$
 (۳) $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -1)$ و $(\exists x \in \mathbb{Q}; x^2 < x)$ (۴) $(\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < x)$ و $(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \neq -1)$

۳۳. **رِسوار** نقیض گزاره $(\exists x \in \mathbb{R}; x > 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$ کدام است؟

- (۱) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$ (۲) $(\exists x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$
 (۳) $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$ (۴) $(\exists x \in \mathbb{R}; x \leq 1) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$

۳۴. **مِسم** نقیض گزاره $\exists x \in \mathbb{R}; (x-2=0) \Leftrightarrow (x+2=0)$ کدام است؟

- (۱) $\forall x \in \mathbb{R}; (x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x+2=0)$ (۲) $\forall x \in \mathbb{R}; (x-2 \neq 0) \Leftrightarrow (x+2 \neq 0)$
 (۳) $\forall x \in \mathbb{R}; (x-2=0) \Leftrightarrow (x+2 \neq 0)$ (۴) گزینه ۱ و ۳ صحیح است.

۳۵. نقیض گزاره $\forall x, y \in \mathbb{R}; (xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0)$ کدام است؟

- (۱) $\forall x, y \in \mathbb{R}; (xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ (۲) $\exists x, y \in \mathbb{R}; (xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \vee y \neq 0)$
 (۳) $\exists x, y \in \mathbb{R}; (xy = 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0)$ (۴) $\exists x, y \in \mathbb{R}; (xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0)$

۳۶. عکس نقیض گزاره $\forall x \in \mathbb{R}; (x > 1 \wedge x < 3) \Rightarrow (x = 2)$ کدام است؟

- (۱) $(x \neq 2) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (x > 1 \wedge x < 3)$ (۲) $(x \neq 2) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}; (x \leq 1 \vee x \geq 3)$
 (۳) $(x \neq 2) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; (x \leq 1 \wedge x \geq 3)$ (۴) $(x \neq 2) \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}; (x > 1 \wedge x < 3)$

زیرمجموعه

تعریف فرض کنید A و B دو مجموعه باشند در این صورت مجموعه A را یک زیرمجموعه از B می‌نامیم، هرگاه هر عضو A ، عضوی از B باشد.

اگر A زیرمجموعه B باشد، می‌نویسیم $A \subseteq B$.

چنانچه عضوی در A باشد، به طوری که آن عضو در مجموعه B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$.

مثال فرض کنید $A = \{a, \{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}$. کدام یک از روابط زیر درست است؟

الف $\{\{a\}\} \subseteq A$

ب $\{a, b\} \subseteq A$

ج $\{a, \{b\}\} \subseteq A$

د $\emptyset \subseteq A$

پاسخ

الف درست است، چون $\{a\} \in A$.

ب نادرست است، چون $b \notin A$ پس $\{a, b\} \not\subseteq A$.

ج درست است، چون $a \in A, \{b\} \in A$.

د درست است چون \emptyset زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

اگر مجموعه A دارای n عضو باشد، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ کدام است؟

پاسخ

این مجموعه سه عضو دارد پس دارای $2^3 = 8$ زیرمجموعه است.

مثال اگر سه عضو از مجموعه A را حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۵۶ عدد کم می‌شود. مجموعه A چند عضو دارد؟

پاسخ فرض کنید مجموعه A دارای n عضو باشد، پس 2^n زیرمجموعه دارد. اگر سه عضو از مجموعه A کم کنیم، مجموعه حاصل

دارای $(n-3)$ عضو است و 2^{n-3} زیرمجموعه دارد و با توجه به فرض مسئله داریم:

$$2^{n-3} = 2^n - 56 \Rightarrow 2^n - 2^{n-3} = 56 \Rightarrow 2^n(1 - 2^{-3}) = 56 \Rightarrow 2^n \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 56 \Rightarrow 2^n \left(\frac{7}{8}\right) = 56 \Rightarrow 2^n = 64$$

پس مجموعه A دارای ۶ عضو است.

مثال تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه $(2n-1)$ عضوی، ۹۶ عدد کمتر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

$(2n+1)$ عضوی است. در این صورت n کدام است؟

$$2^{2n-1} = 2^{2n+1} - 96 \Rightarrow 2^{2n+1} - 2^{2n-1} = 96 \Rightarrow 2^{2n} \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 96 \Rightarrow 2^{2n} \left(\frac{3}{2}\right) = 96 \Rightarrow 2^{2n} = 64 = 2^6 \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3$$

پاسخ

نکته تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

مثال تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی یک مجموعه با تعداد زیرمجموعه‌های ۷ عضوی آن برابر است. این مجموعه چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

پاسخ اگر تعداد اعضای مجموعه مورد نظر را n در نظر بگیریم، داریم:

$$\binom{n}{\Delta} = \binom{n}{\gamma} \rightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \rightarrow \binom{n}{n-\Delta} = \binom{n}{\gamma} \Rightarrow n - \Delta = \gamma \Rightarrow n = 12$$

پس مجموعه دارای ۱۲ عضو است و تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن برابر است با:

$$\binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x; (x \in A \wedge x \notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از مجموعه A در نظر بگیریم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم x در B وجود دارد. چون x دلخواه بوده است، در واقع نشان داده شده است که هر عضو A در B وجود دارد و در نتیجه $A \subseteq B$ است.

مثال: فرض کنیم A ، B ، C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ ، آنگاه $A \cap C \subseteq B \cap D$.

اثبات: برای اثبات $A \cap C \subseteq B \cap D$ باید ثابت کنیم $(\forall x; (x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap D)))$.

بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in (A \cap C)) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \\ \wedge \\ x \in D \xrightarrow{C \subseteq D} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in (B \cap D)$$

در نتیجه داریم:

$$A \cap C \subseteq B \cap D$$

چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها

برای مجموعه‌های A ، B ، C و D با مجموعه مرجع U ویژگی‌های زیر را می‌توان با روش عضوگیری دلخواه اثبات کرد:

۱	$A \subseteq A$ هر مجموعه، زیرمجموعه خودش است.
۲	$\emptyset \subseteq A$ تهی زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است.
۳	$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
۴	$A \subseteq B \Leftrightarrow B' \subseteq A'$ (B و A هستند.)
۵	$A \subseteq A \cup B$
۶	$A - B \subseteq A$
۷	$A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow \begin{cases} A \cup C \subseteq B \cup D \\ \text{و} \\ A \cap C \subseteq B \cap D \end{cases}$
۸	$A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C \subseteq B \cap C \\ \text{و} \\ A \cup C \subseteq B \cup C \end{cases}$
۹	$A \subseteq B \Rightarrow A - B = \emptyset$