# فصل اول

# مجموعه، الگو و دنباله

## درس اول- مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

**مجموعه‌های اعداد:**

برخی از مجموعه‌های اعداد که در سال‌های گذشته آشنا شده‌اید به‌صورت زیر است:

$N=\{۱,۲,۳,\dots\}$ : مجموعه‌ی اعداد طبیعی

$W=\{۰,۱,۲,\dots\}$ : مجموعه‌ی اعداد حسابی

$Z=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}$ : مجموعه‌ی اعداد صحیح

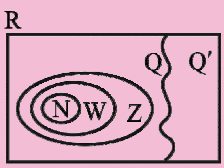
$Q=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in \mathbb{Z}, b\neq ۰\right\}$ : مجموعه‌ی اعداد گویا

$Q'=$ مجموعه‌ی اعدادی که نتوان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد : مجموعه‌ی اعداد گنگ (اصم)

$R=Q\cup Q'$ : مجموعه‌ی اعداد حقیقی

برای مجموعه‌های فوق، رابطه‌ی $N\subseteq W\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$ برقرار است.

نمودار ون مجموعه‌های فوق به‌صورت زیر است:

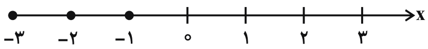



▼**مثال ۱)** **مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرحسابی را نمایش و روی محور نشان دهید.** (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۲)

☑**پاسخ:** *مجموعه‌ی اعداد صحیح غیرحسابی برابر است با:* $Z-W$

$$Z-W=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}-\{۰,۱,۲,\dots\}=\{\dots,-۲,-۱\}$$

نمایش این مجموعه روی محور به صورت زیر است:




**نکته: اعداد صحیح غیرحسابی همان اعداد صحیح منفی است.**

**▼مثال ۲) هریک از اعداد داده شده را روی محور نشان دهید و سپس مشخص کنید کدام گنگ است؟** (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۳)

$$۳\frac{۲}{۳}, -\sqrt{۵}, \pi, -\frac{۴۹}{۱۰}, ۴, -۲/۸۵$$

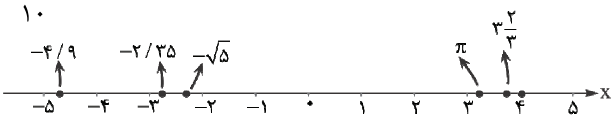
☑پاسخ: تمامی اعداد را به صورت تقریبی و اعشاری می‌نویسیم و سپس روی محور نمایش می‌دهیم:

$۳\frac{۲}{۳} = \frac{۱۱}{۳} \approx ۳/۶۶$ ؛گنگ

$-\sqrt{۵} \approx -۲/۲۴$ ؛گنگ

$\pi \approx ۳/۱۴$ ؛گنگ

$\frac{-۴۹}{۱۰} = -۴/۹$




**▼مثال ۳) اگر تمام اعضای مجموعه‌ی اعداد حسابی را قرینه کنیم، کدام مجموعه بدست می‌آید؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۲-آزمون کانون- ۹۵)

۱) $Q-N$ ۲) $Z-N$ ۳) $Z-W$ ۴) $W-N$

☑پاسخ: اعداد حسابی برابر است با $W=\{۰,۱,۲,...\}$ اگر آن‌ها را قرینه کنیم، مجموعه‌ی زیر بدست می‌آید.

قرینه‌ی اعداد حسابی $=\{۰,-۱,-۲,-۳,...\}$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه (۱): این مجموعه اعداد گویایی است که اعداد طبیعی از آن کم شده است و قطعاً با مجموعه‌ی مورد نظر برابر نیست.

گزینه (۲):

$$Z-N=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}-\{۱,۲,...\}=\{...,-۲,-۱,۰\}$$

گزینه (۳):

$$Z-W=\{...,-۲,-۱,۰,۱,۲,...\}-\{۰,۱,۲,...\}=\{...,-۲,-۱\}$$

گزینه (۴):

$$W-N=\{۰,۱,۲,...\}-\{۱,۲,...\}=\{۰\}$$

گزینه‌ی ۲ صحیح است.

**▼مثال ۴) مجموعه‌ی اعداد گویا، صحیح، حسابی و طبیعی به‌ترتیب $Q$ ، $Z$ ، $W$ و $N$ هستند؛ کدام حکم نادرست است؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۲- آزاد انسانی ۸۴)

۱) $N\cup W=W$ ۲) $Z\subseteq Q$ ۳) $W\cap Z=W$ ۴) $W-N=\varnothing$

☑پاسخ:

$$N \subseteq W \quad \Rightarrow \quad N \cup W = W$$
$$W \subseteq Z \quad \Rightarrow \quad W \cap Z = W$$

و می‌دانیم $Z \subseteq Q$ است، اما داریم:

$$W - N = \{0\}$$

پس گزینه‌ی (۴) نادرست و جواب سؤال است.

## بازه‌ها

زیرمجموعه‌هایی از $R$ که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص می‌باشند را بازه یا فاصله می‌نامیم.

$$A = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

بازه‌ها را به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌کنیم:

۱) **بازه‌ی باز:** بازه‌ای که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه در مجموعه‌ی مورد نظر نباشد:

$A = \{x \in R \mid a < x < b\}$ , $A = (a,b)$ ,

مجموعه‌ی فوق به‌صورت بازه‌ی باز بین $a$ و $b$ خوانده می‌شود.

۲) **بازه‌ی بسته:** بازه‌ای که نقاط ابتدایی و انتهایی بازه در مجموعه‌ی مورد نظر باشد:

$B = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ , $B = [a,b]$ ,

مجموعه‌ی فوق به‌صورت بازه‌ی بسته‌ی بین $a$ و $b$ خوانده می‌شود.

۳) **بازه‌ی نیم‌باز:** بازه‌ای که یک سمت آن باز و سمت دیگر آن بسته باشد.

$C = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ , $C = (a,b]$ ,

$D = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ , $D = [a,b)$ ,

**نکته: ] یا [ نماد بسته بودن و ) یا ( نماد باز بودن بازه است.**

علاوه‌بر بازه‌های فوق، با بازه‌های زیر نیز آشنا شوید:

$E = \{x \in R \mid x > a\}$ , $E = (a, +\infty)$ ,

$F = \{x \in R \mid x \le a\}$ , $F = (-\infty, a]$ ,

$+\infty$ و $-\infty$ را به‌ترتیب بخوانید مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت.

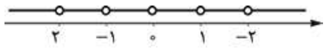
**نکته: $E$ یک بازه‌ی باز و $F$ یک بازه‌ی نیم‌باز است.**

▼**مثال ۵) کدام‌یک از مجموعه‌های زیر نمایان‌گر یک بازه است؟** (کتاب درسی، مشابه مثال صفحه‌ی ۴- آزمون کانون ۹۵)

۱) $R-Z$ ۲) $\{x\in R \mid x^{۲}+۳x+۲=۰\}$

۳) $\{x\in Q \mid x>۱\}$ ۴) $(-\infty,۱]\cap(-۲,+\infty)$

☑**پاسخ:** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه‌ی (۱): نمایش هندسی مجموعه‌ی $R-Z$ به‌صورت  است، مجموعه‌ی فوق را نمی‌توان به‌صورت یک بازه نمایش داد.

گزینه‌ی (۲):

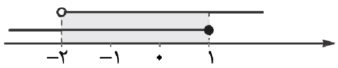
$$x^{۲}+۳x+۲=(x+۲)(x+۱)=۰ \Rightarrow x=-۱,-۲$$

مجموعه به‌صورت $\{-۱,-۲\}$ است که همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نمی‌توان آن را به‌صورت بازه نمایش داد.

گزینه‌ی (۳): مجموعه‌ی $\{x\in Q \mid x>۱\}$ شامل تمام اعداد گویای بزرگ‌تر از یک است، دقت کنید که بی‌شمار عدد گنگ بزرگ‌تر از یک است که در این مجموعه قرار ندارد. پس نمایش هندسی آن شامل بی‌شمار نقطه‌ی توخالی است، پس نمی‌توان به‌صورت بازه نمایش داد.

گزینه‌ی (۴):

$$(-\infty,۱]\cap(-۲,+\infty)=(-۲,۱]$$



گزینه‌ی ۴ صحیح است.

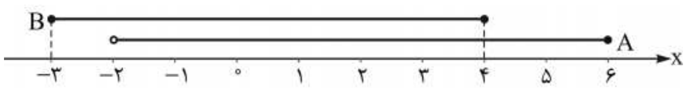
▼**مثال ۶) نمایش هندسی دو بازه‌ی $A=(-۲,۶]$ و $B=[-۳,۴]$ را روی محور رسم کنید و سپس هریک از موارد زیر را نیز روی محور رسم کنید و حاصل آن را بنویسید.** (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۳، صفحه‌ی ۵)

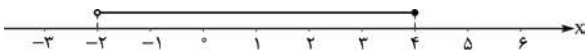
الف) $A\cap B$ ب) $A\cup B$ پ) $A-B$ ت) $B-A$

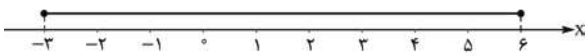
☑**پاسخ:**

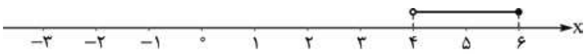
$A=(-۲,۶]$

$B=[-۳,۴]$



الف)  $\Rightarrow A\cap B=(-۲,۴]$

ب)  $\Rightarrow A\cup B=[-۳,۶]$

پ)  $\Rightarrow A-B=(۴,۶]$

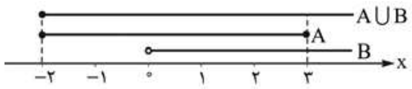
ت)  $\Rightarrow B-A=[-۳,-۲]$

▼**مثال ۷) اگر $A=\{x\in R \mid -۲\le x\le ۳\}$ ، $B=\{x\in R \mid x>۰\}$ و $C=\{x\in R \mid x\le ۴\}$ باشد، مجموعه‌ی $(A\cup B)\cap C$ کدام است؟** (کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۷- آزمون کانون ۹۵)

۱) $[-۲,۴]$ ۲) $(۰,۳]$ ۳) $(-۲,۳]$ ۴) $(-۲,۴]$

☑**پاسخ:** هریک از مجموعه‌های $A$ و $B$ و $C$ را به صورت بازه نشان می‌دهیم و با نمایش آن‌ها روی محور، مطلوب مسئله را به دست می‌آوریم:

$$A=\{x\in R \mid -۲\le x\le ۳\}\Rightarrow A=[-۲,۳]$$
$$B=\{x\in R \mid x>۰\}\Rightarrow B=(۰,+\infty)$$




$$\Rightarrow A\cup B=[-۲,+\infty)$$

$$C=\{x\in R \mid x\le ۴\}\Rightarrow C=(-\infty,۴]$$


$$\Rightarrow (A\cup B)\cap C=[-۲,۴]$$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

▼**مثال ۸)** **چه تعداد از موارد زیر درست است؟** (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۱، صفحه‌ی ۵- آزمون کانون ۹۵)

**الف)** $(-۲,۳]\subseteq[-۳,۴)$ **ب)** $\{-\pi,\sqrt{۲}\}\subseteq(-۴,۲)$ **پ)** $-۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}\in(-۳۰,+\infty)$

۱)صفر ۲)۱ ۳)۲ ۴)۳

☑**پاسخ:** موارد را تک تک بررسی می‌کنیم:

الف) $(-۲,۳]\subseteq[-۳,۴)$

می‌دانیم وقتی $B \subseteq A$ است، هر عضو مجموعه‌ی $A$ عضوی از مجموعه‌ی $B$ است. که این رابطه در مورد بالا صدق می‌کند. پس این گزاره صحیح است.

ب) $\{-\pi,\sqrt{۲}\}\subseteq(-۴,۲)$

چون $-\pi\in(-۴,۲)$ و $\sqrt{۲}\in(-۴,۲)$ است، بنابراین گزاره‌ی فوق صحیح است، یعنی $\{-\pi,\sqrt{۲}\}$ زیر مجموعه‌ی $(-۴,۲)$ است.

پ) $-۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}\in(-۳۰,+\infty)$

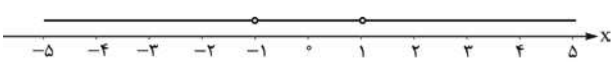
چون $-۶/۰۲۲\times ۱۰^{۲۳}<-۳۰$ است، پس این عدد عضو مجموعه‌ی $(-۳۰,+\infty)$ نیست. بنابراین این گزاره غلط است.

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

**نکته: اگر انتهای بازه ( یا ) باشد، نمایش آن روی محور توخالی و اگر [ یا ] باشد نمایش آن روی محور توپر می‌شود.**

▼**مثال ۹)** **مجموعه‌ی $R-\{-۱,۱\}$ را روی محور نشان دهید و سپس به صورت اجتماع بازه‌ها بنویسید.** (کتاب درسی، مشابه تمرین ۵، صفحه‌ی ۷)

☑**پاسخ:** نقاط ۱+ و ۱- باید توخالی باشند:



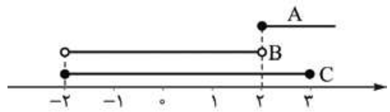

$$R-\{-۱,۱\}=(-\infty,-۱)\cup(-۱,۱)\cup(۱,+\infty)$$

**▼مثال ۱۰) سه بازه‌ی $A=[۲,+\infty)$ ، $B=(-۲,۲)$ و $C=[-۲,۳]$ را در نظر بگیرید. مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.**

(کتاب درسی، مشابه مثال، صفحه‌ی ۴)

**الف)** $A\cup B\cup C$ **ب)** $(C-A)\cup A$ **پ)** $(C-B)\cup A$

☑پاسخ: *با توجه به نمایش هندسی مجموعه‌های $A$ ، $B$ و $C$، مجموعه‌های مورد نظر را به‌دست می‌آوریم.*




الف) $A\cup B\cup C=[-۲,+\infty)$

ب) $C-A=[-۲,۲) \Rightarrow (C-A)\cup A=[-۲,+\infty)$

پ) $C-B=[۲,۳]\cup\{-۲\} \Rightarrow (C-B)\cup A=\{-۲\}\cup[۲,+\infty)$

**مجموعه‌ی متناهی:** مجموعه‌هایی مانند $A$ که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی می‌باشد را مجموعه‌های متناهی (با پایان) می‌نامیم.

**▼مثال ۱۱) در هر یک از مجموعه‌های زیر مشخص کنید که کدام متناهی و کدام نامتناهی است.**

(کتاب درسی، مکمل و مشابه کار در کلاس، صفحه‌ی ۶)

**الف) مجموعه‌ی اعداد اول**

**ب) بازه‌ی $(-۱,۰)$**

**پ) مجموعه مولکول‌های روی زمین**

**ت) مجموعه‌ی اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۰**

**ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱**

**ج) مجموعه تمام مستطیل‌هایی به مساحت ۲**

☑پاسخ: *الف) بی‌شمار عدد اول داریم پس مجموعه‌ی اعداد اول نامتناهی است* $\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,...\}$

*ب) در بازه‌ی $(-۱,۰)$ بی‌شمار عدد وجود دارد، پس این مجموعه نامتناهی است.*

*پ) هر چند مولکول‌های روی زمین بسیار زیاد هستند اما می‌توان تعداد آن‌ها را با یک عدد حسابی نشان داد، پس این مجموعه متناهی است.*

*ت) این مجموعه نیز نامتناهی است.*

$\{۱۱,۱۲,۱۳,...\}$

*ث) مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از یک تهی است که صفر عضو دارد. چون تعداد اعضای آن حسابی است، پس مجموعه متناهی است.*

*ج) اگر $x$ طول و $y$ عرض مستطیل باشد داریم: $xy=۲$. چون $x$ و $y$ بی‌شمار مقدار می‌توانند داشته باشند، پس این مجموعه نامتناهی است.*

**نکته: مجموعه‌ی اعداد گنگ و یا مجموعه‌ی اعداد گویا در بازه‌ی $(a,b)$، نامتناهی است.**

**▼مثال ۱۲) کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟**

(کتاب درسی، مشابه فعالیت صفحه‌ی ۷- آزمون کانون ۹۵)

۱) مجموعه‌ی اعداد گویای موجود در بازه‌ی $[-۱,۰)$، مجموعه‌ای متناهی است.

۲) مجموعه‌ی اعداد گنگ موجود در بازه‌ی $[-۱,۰]$، مجموعه‌ای متناهی است.

۳) مجموعه‌ی اعداد صحیح موجود در بازه‌ی $[-۱۰^۶,۱۰^۶]$ ، مجموعه‌ای نامتناهی است.

۴) مجوعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳، مجموعه‌ای نامتناهی است.

☑پاسخ: دقت کنید که مجموعه‌ی اعداد گنگ و یا گویا در بازه‌ی $(a,b)$، نامتناهی است. اما مجموعه‌ی اعداد صحیح در بازه‌ی $(a,b)$، متناهی است. بنابراین گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) نادرست است. مجموعه‌ی اعداد طبیعی مضرب ۳ برابر $\{۳,۶,۹,...\}$ است که مجموعه‌ای نامتناهی است.

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

▼مثال ۱۳) **اگر مجموعه‌ی اعداد طبیعی، حسابی و صحیح به‌ترتیب $N$، $W$ و $Z$ باشد، کدام مجموعه با پایان است؟**

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه‌ی ۷ - آزاد انسانی ۸۳)

۱) $Z-W$ ۲) $W\cap N$ ۳) $Z\cap W$ ۴) $W-N$

☑پاسخ:

$W-N=\{۰,۱,۲,...\}-\{۱,۲,۳,...\}=\{۰\}$ با پایان

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

**نکته‌ی ۱) اگر $A\subseteq B$ و $A$ نامتناهی باشد، آن‌گاه $B$ نیز نامتناهی است.**

**نکته‌ی ۲) اگر $A\subseteq B$ و $B$ متناهی باشد، آن‌گاه $A$ نیز متناهی است.**

## درس دوم - متمم یک مجموعه

**مجموعه‌ی مرجع:** مجموعه‌ای که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث، زیرمجموعه‌ی آن باشند را مجموعه مرجع می‌نامیم و آن را با $U$ نشان می‌دهیم.

**متمم یک مجموعه:** هرگاه $U$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A\subseteq U$، آن‌گاه مجموعه‌ی $U-A$ را متمم $A$ می‌نامیم و آن را با نماد $A'$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر $A'$ شامل عضوهایی از $U$ می‌باشد که در $A$ نیستند.

▼مثال ۱۴) **مجموعه‌ی اعداد حقیقی را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیرید. متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را به‌دست آورید.**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۳، صفحه‌ی ۹)

$A=[-۲,۵)$ $B=(-\infty,۲]\cup(۵,۱۳]$ $C=R-[-۲,۶)$

☑پاسخ:

$$A=[-۲,۵) \Rightarrow A'=(-\infty,-۲)\cup[۵,+\infty)$$
$$B=(-\infty,۲]\cup(۵,۱۳] \Rightarrow B'=(۲,۵]\cup(۱۳,+\infty)$$
$$C=R-[-۲,۶)=(-\infty,-۲)\cup[۶,+\infty) \Rightarrow C'=[-۲,۶)$$

▼مثال ۱۵) **با توجه به مجموعه‌ی مرجع داده شده در هر مورد، متمم مجموعه را پیدا کنید.**

(مشابه کار در کلاس ۵، صفحه‌ی ۹، کتاب درسی)

الف) $U=Z$ , $A=\{x\in W \mid x<۳\}$

ب) $U=W$ , $B=N$

پ) $U=[۰,+\infty)$ , $C=Q$

☑پاسخ:

الف) $U=\{\dots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\dots\}\ ,\ A=\{۰,۱,۲\} \Rightarrow A'=\{\dots,-۲,-۱,۳,۴,\dots\}$

ب) $U=\{۰,۱,۲,\dots\}\ ,\ B=\{۱,۲,۳,\dots\} \Rightarrow B'=\{۰\}$

پ) مجموعه‌ی مرجع، اعداد حقیقی بزرگ‌تر یا مساوی صفر است و مجموعه‌ی $C$ اعداد گویا است. بنابراین $C'$ برابر مجموعه اعداد گنگ بزرگ‌تر از صفر می‌شود. $C=\{x\in Q' \mid x>۰\}$

**نکته: برخی از روابط حاکم به متمم‌ها در زیر آمده است:**

۱) $\varnothing'=U$
۲) $U'=\varnothing$
۳) $(A')'=A$
۴) $A\cup A'=U$
۵) $A\cap A'=\varnothing$
۶) $(A\cup B)'=A'\cap B'$
۷) $(A\cap B)'=A'\cup B'$
۸) $A-B=A-(A\cap B)$
۹) $A-B=A\cap B'$
۱۰) $A\subseteq B \Rightarrow B'\subseteq A'$

**▼مثال ۱۶) اگر مجموعه‌ی مرجع، مجموعه‌ی اعداد صحیح باشد، $A'=\{۱,۲,۳\}$ و $B'=\{۲,۳,۴,۵\}$، آنگاه $(A\cup B)'$ کدام مجموعه است؟** (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه‌ی ۹)

۱) $\{۲,۳\}$ ۲) $\{۲,۴,۵\}$ ۳) $\{۳,۴,۵\}$ ۴) $\{۴,۵\}$

☑پاسخ: با توجه به خواص بالا داریم:

$$(A\cup B)'=A'\cap B'=\{۱,۲,۳\}\cap\{۲,۳,۴,۵\}=\{۲,۳\}$$

گزینه‌ی ۱ صحیح است.

**▼مثال ۱۷) کدام‌یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟** (کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه‌ی ۹- آزاد انسانی-۷۷)

۱) $(B\cap B')\cup(A\cup A')=U$
۲) $(A\cap A')\cap(B\cup B')=\varnothing$
۳) $(B\cap B')\cup(A\cup A')=\varnothing$
۴) $[(A\cap B)\cap A']\cup[(B\cap C)\cap B']=\varnothing$

☑پاسخ:

گزینه‌ی (۳) نادرست است. $(B\cap B')\cup(A\cup A')=\varnothing\cup U=U \Rightarrow$ گزینه‌های (۱) و (۳):

گزینه‌ی (۲): $(A\cap A')\cap(B\cup B')=\varnothing\cap U=\varnothing$

گزینه‌ی (۴): $A\cap A'=\varnothing \xrightarrow{(A\cap B)\subset A} (A\cap B)\cap A'=\varnothing$

$B\cap B'=\varnothing \xrightarrow{(B\cap C)\subset B} (B\cap C)\cap B'=\varnothing \Rightarrow [(A\cap B)\cap A']\cup[(B\cap C)\cap B']=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

**▼مثال ۱۸) اگر $A=[۰,۱۰)$ و $B=[-۱۵,۱۵]$ زیرمجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع $U$ باشند و $A'=[-۲۰,۰)\cup[۱۰,۲۰]$ آنگاه $B'$ شامل چند عدد صحیح است؟** (کتاب درسی، مشابه تمرین ۱، صفحه‌ی ۱۲- آزمون کانون-۹۲)

۱) ۱۱ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰

☑پاسخ: می‌دانیم $A\cup A'=U$ است:

$$A\cup A'=[۰,۱۰)\cup[-۲۰,۰)\cup[۱۰,۲۰]=[-۲۰,۲۰]$$
$$B=[-۱۵,۱۵] \Rightarrow B'=[-۲۰,-۱۵)\cup(۱۵,۲۰]$$

پس $B'$ شامل اعداد صحیح $\{-۲۰,-۱۹,-۱۸,-۱۷,-۱۶,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۰\}$ است که تعداد آن‌ها ۱۰ تا است.

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

**دو مجموعه‌ی جدا از هم:** به هر دو مجموعه‌ی مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه جدا از هم یا مجزا می‌گوییم.

اشتراک دو مجموعه‌ی جدا از هم برابر تهی است.

A و B جدا از هم $\Leftrightarrow$ $A\cap B=\varnothing$

**تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه**

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشد، داریم:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

که $n(A)$، تعداد اعضای مجموعه‌ی A است.

▼**مثال ۱۹)** اگر A و B به‌ترتیب مجموعه‌ی شمارنده‌های طبیعی ۲۴ و ۱۸ باشد، $n(A\cup B)$ را به‌دست آورید.

(کتاب درسی، مشابه فعالیت ۲، صفحه‌ی ۱۰)

☑**پاسخ:** اعضای مجموعه‌های A و B را می‌نویسیم:

$$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\} \Rightarrow n(A)=۸$$
$$B=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\} \Rightarrow n(B)=۶$$
$$A\cap B=\{۱,۲,۳,۶\} \Rightarrow n(A\cap B)=۴$$
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۸+۶-۴=۱۰$$

**نکته‌ی ۱:**

۱) $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

۲) $B\subseteq A\Rightarrow n(A-B)=n(A)-n(B)$

۳) $A\cap B=\varnothing \Rightarrow n(A-B)=n(A)$

۴) $n(A')=n(U)-n(A)$

**نکته‌ی ۲: در حالت کلی:** $n(A-B)\neq n(A)-n(B)$.

▼**مثال ۲۰)** اگر U مجموعه‌ی مرجع باشد و $n(U)=۶۵$، $n(A)=۴۰$، $n(B)=۳۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$ باشد، آنگاه مقادیر زیر را حساب کنید.

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۴، صفحه‌ی ۱۳)

الف) $n(A'\cap B')$    ب) $n(A'\cap B)$    پ) $n(A'\cup B)$

☑**پاسخ:**

الف) $A'\cap B'=(A\cup B)'=U-(A\cup B)$

$$n(A'\cap B')=n(U-(A\cup B))=n(U)-n(A\cup B)=n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]=۶۵-[۴۰+۳۰-۲۰]=۱۵$$

ب) $A'\cap B=B\cap A'=B-A$

$$n(A'\cap B)=n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=۳۰-۲۰=۱۰$$

پ) $n(A'\cup B)=n(A')+n(B)-n(A'\cap B)=(n(U)-n(A))+n(B)-n(A'\cap B)=(۶۵-۴۰)+۳۰-۱۰=۴۵$

**▼مثال ۲۱) در یک کلاس ۴۰ نفره، ۲۰ نفر عضو گروه سرود، ۱۵ نفر عضو گروه تئاتر هستند، اگر ۱۰ نفر در هیچ گروهی نباشند، آنگاه:**

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۵، صفحه‌ی ۱۳)

**الف) چند نفر در هر دو گروه هستند.**

**ب) چند نفر فقط در گروه سرود هستند.**

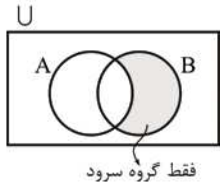
☑پاسخ: $A$ را گروه تئاتر و $B$ را گروه سرود و $U$ را کل کلاس می‌نامیم.

الف) خواسته‌ی مسئله $A\cap B$ است.

$$n(A\cup B)=n(U)-n(\underbrace{(A\cup B)'}_{\text{هیچ گروه}})=۴۰-۱۰=۳۰$$

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n\underbrace{(A\cap B)}_{\text{هر دو گروه}}\Rightarrow ۳۰=۱۵+۲۰-n(A\cap B)\Rightarrow n(A\cap B)=۵$$

ب) خواسته‌ی مسئله $B-A$ است.




$$n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)=۲۰-۵=۱۵$$

**▼مثال ۲۲) ۳۰ درصد از افراد یک شهر چشم قهوه‌ای و ۵۰ درصد آن‌ها مو مشکی هستند. اگر ۲۰ درصد افراد مو مشکی و چشم قهوه‌ای باشند، چند درصد نه مو مشکی هستند و نه چشم قهوه‌ای؟**

(کتاب درسی، مشابه تمرین ۶، صفحه‌ی ۱۳)

☑پاسخ: ابتدا درصد افرادی را حساب می‌کنیم که یا مو مشکی $(A)$ یا چشم قهوه‌ای $(B)$ هستند:

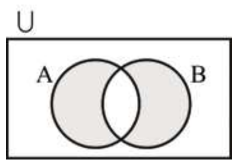
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۳۰+۵۰-۲۰=۶۰ \text{ درصد}$$

حال مطلوب مسئله، یعنی افرادی که نه مو مشکی هستند و نه چشم قهوه‌ای، برابر است با:

$$n(A'\cap B')=n\left((A\cup B)'\right)=n(U)-n(A\cap B)=۱۰۰-۶۰=۴۰ \text{ درصد}$$

**▼مثال ۲۳) مجموعه‌ای که اعضای آن فقط در $A$ یا فقط در $B$ باشند را با نمودار ون نشان داده و سپس تعداد اعضای آن را به‌دست آورید.**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۱، صفحه‌ی ۱۱- تبریز- توکلی -۹۲)




☑پاسخ: مجموعه‌ی موردنظر به‌صورت هاشورخورده است.

این مجموعه برابر $(A-B)\cup(B-A)$ است:

$$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing \quad\Rightarrow$$

$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)=n(A)-n(A\cap B)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)$$

بنابراین:

$$n((A-B)\cap(B-A))=n(A)+n(B)-۲n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(A\cap B)$$

**▼مثال ۲۴) اگر $A=\{۱,\{۱\}\}$ و $B=\{\{۱,\{۱\}\}\}$، حاصل $B-A$ کدام است؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه‌ی ۹- آزاد پزشکی - ۷۸)

۱) $\{۱\}$ ۲) $\varnothing$ ۳) $B$ ۴) $\{\{۱\}\}$

پاسخ: مجموعه‌ی B یک عضو دارد که برابر $\{\{1,\{1\}\}\}$ است چون این عضو در A نیست پس A و B دو مجموعه‌ی مجزا هستند. پس:

$$B-A=B-(A\cap B)=B-\varnothing=B$$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

**▼مثال ۲۵) مجموعه‌ی اعداد طبیعی و کوچک‌تر از ۲۲ را مجموعه‌ی مرجع در نظر بگیرید. اگر مجموعه‌ی A شامل اعداد اول، مجموعه‌ی B شامل اعداد زوج و مجموعه‌ی C شامل اعدادی باشد که حداقل در یکی از دو مجوعه‌ی A و B قرار داشته باشد، متمم مجموعه‌ی C چند عضو دارد؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۶، صفحه‌ی ۹- آزمون کانون ۹۵)

۱) ۱۷ ۲) ۹ ۳) ٤ ٤) ۱۶

پاسخ: هریک از مجموعه‌ها را با نوشتن اعضایشان مشخص می‌کنیم:

$$U=\{1,2,\ldots,21\}$$

$$A=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

$$B=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$$

مجموعه‌ی C با توجه به صورت سوال، برابر است با اجتماع A و B:

$$C=A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,18,19,20\}$$

در مجموعه‌ی فوق، فقط اعداد ۱ و ۹ و ۱۵ و ۲۱ وجود ندارد. بنابراین متمم C برابر است با:

$$C'=\{1,9,15,21\}\Rightarrow n(C')=4$$

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

**▼مثال ۲۶) به هرکدام از دو مجموعه‌ی غیر تهی A و B، ۹ عضو جدید اضافه می‌کنیم، به نحوی که به مجموعه‌ی $A-(A-B)$، ٤ عضو جدید اضافه می‌شود. در این حالت به مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ چند عضو جدید افزوده شده است؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۲، صفحه‌ی ۱۲- آزمون کانون-۹۵)

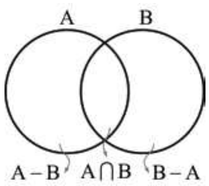
۱) ٤ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ٤) ۱٤

پاسخ: ابتدا حاصل $A-(A-B)$ را می‌یابیم:

$$(A-B)\subseteq A\Rightarrow n(A-(A-B))=n(A)-n(A-B)=n(A)-(n(A)-n(A\cap B))=n(A\cap B)$$

بنابراین وقتی به $A-(A-B)$، ۴ عضو اضافه می‌شود یعنی به $A\cap B$ چهار عضو اضافه می‌شود و در نتیجه به هریک از $A-B$ و $B-A$، ۵=۴-۹ عضو اضافه می‌شود.

به شکل زیر دقت کنید:




مطلوب مساله، افزایش تعداد اعضای $(A-B)\cup(B-A)$ است. داریم:

$$n((A-B)\cup(B-A))=n(A-B)+n(B-A)=5+5=10$$

بنابراین به مجموعه‌ی $(A-B)\cup(B-A)$ ده عضو جدید اضافه می‌شود.

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

**نکته:** مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,n\}$ را در نظر بگیرید، تعداد مضرب‌های عدد $k$ در این مجموعه برابر است با $\frac{n}{k}$. اگر حاصل $\frac{n}{k}$ عدد صحیح نشود، برابر اولین عدد صحیح کوچکتر از $\frac{n}{k}$ است.

▼**مثال ۲۷)** اگر $U=\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A$ مجموعه‌ی اعداد مضرب ۵ و $B$ مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ باشد، کدام گزینه نادرست است؟ (کتاب درسی، مشابه فعالیت ۲، صفحه‌ی ۱۰- آزمون کانون-۹۵)

۱) $n(A\cap B)=۶$ ۲) $n(A\cap B')=۱۴$ ۳) $n(A\cup B)=۴۷$ ۴) $n(B')=۷۷$

☑**پاسخ:** با توجه به نکته‌ی فوق داریم:

$$A=\{۵,۱۰,...,۹۵,۱۰۰\}\Rightarrow n(A)=\frac{۱۰۰}{۵}=۲۰$$
$$B=\{۳,۶,...,۹۶,۹۹\}\Rightarrow n(B)=\frac{۱۰۰}{۳}=۳۳/...\Rightarrow n(B)=۳۳$$

گزینه (۱): $A\cap B$ برابر است با مضرب‌های عدد ۱۵:

$$A\cap B=\{۱۵,۳۰,۴۵,۶۰,۷۵,۹۰\}\Rightarrow n(A\cap B)=۶$$

گزینه (۲): $n(A\cap B')=n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=۲۰-۶=۱۴$

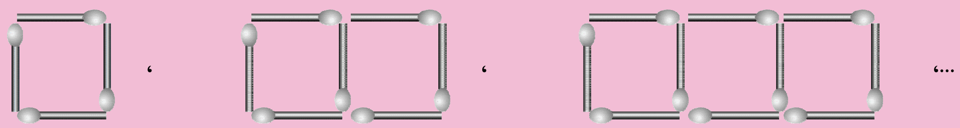
گزینه (۳): $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۲۰+۳۳-۶=۴۷$

گزینه (۴): $n(B')=n(U)-n(B)=۱۰۰-۳۳=۶۷$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.

## درس سوم- الگو و دنباله

یکی از مهم‌ترین رسالت‌های ریاضیات، مدل‌سازی کردن پدیده‌های طبیعی و پی بردن به الگوهای حاکم بر آن‌ها است. یافتن یک مدل یا الگوی ریاضی برای طرح‌ها و آزمایش‌های متوالی نیاز به سازماندهی و تنظیم اطلاعات دارد. به شکل‌های زیر و تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در هر یک از آن‌ها دقت کنید.



شکل (۱)، شکل (۲)، شکل (۳)، ...

جدول زیر را می‌توان تنظیم کرد:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $n$ : شماره شکل | ۱ | ۲ | ۳ |
| $a_n$ : تعداد چوب‌کبریت‌ها | ۴ | ۷ | ۱۰ |
| رابطه‌ی بین $n$ و $a_n$ | $a_۱=۴$ | $\xrightarrow{+۳}$ $a_۲=۷$ | $\xrightarrow{+۳}$ $a_۳=۱۰$ |

همان‌طور که می‌بینید در هر مرحله سه عدد چوب‌کبریت اضافه می‌شود. پس در مرحله‌ی $n$ ام، $۳\times(n-۱)$ چوب‌کبریت به تعداد

چوب‌کبریت‌های موجود در مرحله اول اضافه می‌شود.

$a_۱ = ۴$

$a_۲ = ۴ + ۳$

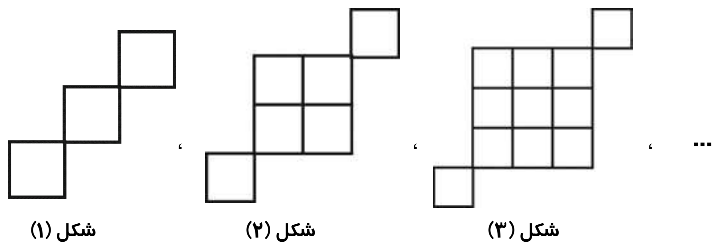
$a_۳ = ۴ + ۳ \times ۲$

$\vdots$

$a_n = ۴ + ۳(n - ۱) = ۳n + ۱$

$a_n$ را جمله‌ی عمومی الگو می‌نامیم، زیرا این رابطه، ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند. در واقع در اختیار داشتن جمله‌ی عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگو می‌باشد.

**▼مثال ۲۸) در شکل زیر تعداد مربع‌ها، تابع الگویی است. جمله‌ی عمومی الگو را بنویسید.** (کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه‌ی ۱۵- تهران ـ آرمان ـ ۸۹)




☑پاسخ: *اگر شماره‌ی هر مرحله را $n$ و تعداد مربع‌ها را $a_n$ بنامیم، داریم:*

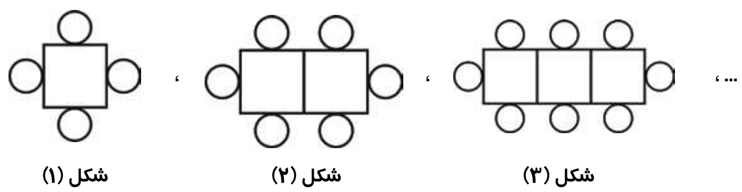
$n = ۱ \Rightarrow a_۱ = ۱ + ۲ = ۱^۲ + ۲$

$n = ۲ \Rightarrow a_۲ = ۴ + ۲ = ۲^۲ + ۲$

$n = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۹ + ۲ = ۳^۲ + ۲$

*با توجه به تعداد مربع‌ها، در شکل $n$ام، $n^۲ + ۲$ مربع وجود دارد. یعنی جمله‌ی این الگو به‌صورت $a_n = n^۲ + ۲$ است.*

**▼مثال ۲۹) در شکل زیر مدلی از میز و صندلی‌ها رسم شده است. فرمول مناسب برای تعداد صندلی‌ها در هر مرحله کدام است؟**
(کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه‌ی ۱۵- زنجان ـ استعداد درخشان ـ ۸۸)




☑پاسخ: *اگر شماره‌ی هر مرحله را $n$ و تعداد صندلی‌ها را $a_n$ بنامیم، داریم:*

$n = ۱ \Rightarrow a_۱ = ۴ = ۲(۱) + ۲$

$n = ۲ \Rightarrow a_۲ = ۶ = ۲(۲) + ۲$

$n = ۳ \Rightarrow a_۳ = ۸ = ۲(۳) + ۲$

*با توجه به الگوی به‌دست آمده، در شکل $n$ام $۲n + ۲$ صندلی وجود دارد. یعنی فرمول تعداد صندلی‌ها برابر $a_n = ۲n + ۲$ است.*

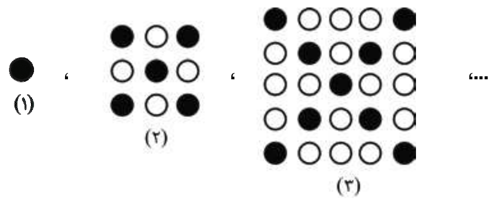
▼**مثال ۳۰)** **درکدام مرحله از الگوی زیر، تعداد گوی های سفید برابر ۱۹۶ خواهد شد؟** (کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه‌ی ۱۷- آزمون کانون-۹۵)

۱) ۷

۲) ۸

۳) ۹

۴) ۱۱




☑**پاسخ:** *اگر شماره‌ی هر مرحله را $n$ و تعداد گوی‌های سفید را $a_n$ بنامیم، داریم:*

$$\begin{aligned}
&n=1 \Rightarrow a_1=0=4\times(1-1)^2\\
&n=2 \Rightarrow a_2=4=4\times(2-1)^2\\
&n=3 \Rightarrow a_3=16=4\times(3-1)^2\\
&n=4 \Rightarrow a_4=36=4\times(4-1)^2\\
&\vdots\\
&n=n \Rightarrow a_n=4(n-1)^2
\end{aligned}$$

*باتوجه به الگوی فوق، در شکل $n$ام، $4(n-1)^2$ گوی سفید وجود دارد. یعنی جمله‌ی این الگو به صورت $a_n=4(n-1)^2$ است، داریم:*

$$4(n-1)^2=196 \Rightarrow (n-1)^2=49 \Rightarrow n-1=7 \Rightarrow n=8$$

*گزینه‌ی ۲ صحیح است.*

▼**مثال ۳۱)** **در الگوی زیر، جمله‌ی عمومی مربوط به تعداد مربع های کوچک کدام است؟ ( $n$ شماره‌ی مرحله است.)**

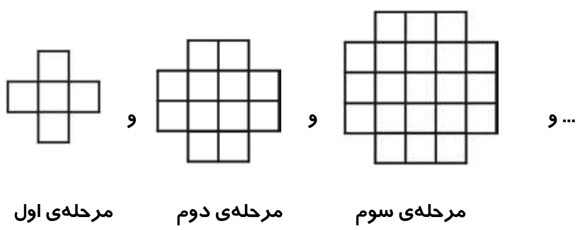
(کتاب درسی، مشابه فعالیت، صفحه‌ی ۱۷)

۱) $a_n=2n^2-n+4$

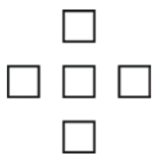
۲) $a_n=7n-2$

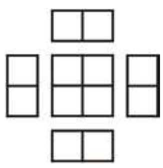
۳) $a_n=n^2+4n$

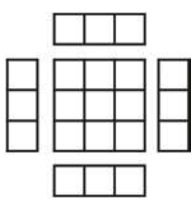
۴) $a_n=9n-6$




☑**پاسخ:** *تعداد مربع‌های کوچک در هر مرحله را با $a_n$ نمایش می‌دهیم که $n$ شماره‌ی هر مرحله است. شکل‌ها را به صورت زیر تغییر می‌دهیم:*

*مرحله‌ی اول* : $n=1 \Rightarrow$  $\Rightarrow a_1=1^2+4(1)=5$

*مرحله‌ی دوم* : $n=2 \Rightarrow$  $\Rightarrow a_2=2^2+4(2)=12$

*مرحله‌ی سوم* : $n=3 \Rightarrow$  $\Rightarrow a_3=3^2+4(3)=21$

بنابراین در مرحله‌ی $n$اُم تعداد مربع‌ها برابر است با $a_n = n^2 + 4n$.

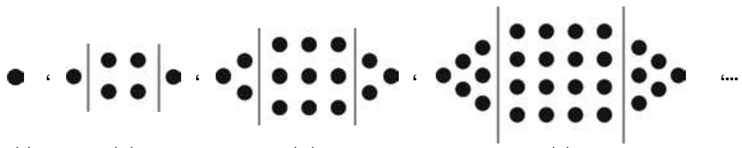
دقت کنید که در جمله‌ی فوق، $n^2$ تعداد مربع‌های وسطی و $4n$ تعداد مربع‌های کناری در هر مرحله است.

گزینه‌ی ۳ صحیح است.

**▼مثال ۳۲) الگوی زیر را در نظر بگیرید.** (کتاب درسی، مشابه تمرین ۲، صفحه‌ی ۲۰)

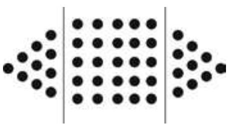
**الف) شکل بعد را رسم کنید.**

**ب) جملهٔ عمومی دنباله را بنویسید.**



(۱) (۲) (۳) (۴)

**☑پاسخ:** همان‌طور که مشاهده می‌کنیم در هر مرحله تعداد نقطه‌های بین دو خط مربع، یک عدد کامل است. پس در شکل (۵) باید ۲۵ نقطه بین دو خط باشد. داریم:



ب)

$$n=1 \rightarrow a_1 = 1$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 4+2 = 2^2 + 2(1)$$

$$n=3 \rightarrow a_3 = 9+6 = 3^2 + 2(1+2)$$

$$n=4 \rightarrow a_4 = 16+12 = 4^2 + 2(1+2+3)$$

$$n=5 \rightarrow a_5 = 25+20 = 5^2 + 2(1+2+3+4)$$

$$\vdots$$

$$n=n \rightarrow a_n = n^2 + 2\times\frac{n(n-1)}{2} = 2n^2 - n$$

**نکته:**

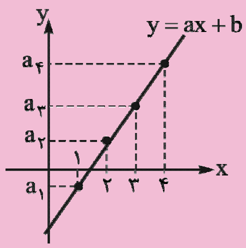
$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

**الگوی خطی:** الگوهایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ باشد را الگوهای خطی می‌نامیم که در آن $a$ و $b$ اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

**نکته: در الگوی خطی اختلاف دو جمله‌ی متوالی برابر مقدار ثابت است. این اختلاف برابر ضریب $n$ در جمله‌ی عمومی است. به‌عنوان مثال در جمله‌ی عمومی $a_n = 2n + 3$، اختلاف دو جمله‌ی متوالی برابر ۲ است.**

**نکته‌ی ۱:** اگر نقاط به مختصات $(n, t_n)$ را در صفحه‌ی مختصات مشخص کنیم، همگی بر روی خط $y = ax + b$ قرار دارند.




**نکته‌ی ۲:** به الگویی که خطی نباشد غیرخطی می‌گویند.

**▼مثال ۳۳)** در یک الگوی خطی جملات ششم و هشتم به‌ترتیب از راست به چپ برابر ۸- و ٤ است.

(کتاب درسی، مشابه مثال، صفحه‌ی ۱۶- گلپایگان- فرزانگان- ۹۲)

الف) جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

ب) چندمین جمله‌ی دنباله برابر ۱۰ است؟

☑پاسخ: الف) فرض کنید جمله‌ی عمومی الگوی خطی به‌صورت $t_n = an + b$ باشد، داریم:

$$\begin{cases} t_۶ = -۸ \\ t_۸ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a + b = -۸ \\ ۸a + b = ۴ \end{cases}$$

$$\overline{۲a = ۱۲} \Rightarrow a = ۶ \Rightarrow b = -۴۴$$

$$\Rightarrow t_n = ۶n - ۴۴$$

ب) $t_n = ۱۰ \Rightarrow ۶n - ۴۴ = ۱۰ \Rightarrow ۶n = ۵۴ \Rightarrow n = ۹$ (نهمین جمله برابر ۱۰ است.)

**▼مثال ۳۴)** در دنباله‌ی خطی $t_n$، اگر تفاضل دو جمله‌ی متوالی برابر با ٤ و مجموع جملات دوم و سوم برابر با ۱۰ باشد، جمله‌ی ششم کدام است؟

(کتاب درسی، مشابه مثال، صفحه‌ی ۱۶- گرمسار-نرجس-۹۳)

☑پاسخ: می‌دانیم اختلاف دو جمله‌ی متوالی در یک دنباله‌ی خطی $t_n = an + b$، برابر ضریب $n$ یعنی $a$ است.

$$a = ۴ \Rightarrow t_n = ۴n + b$$
$$t_۲ + t_۳ = ۱۰ \Rightarrow (۴(۲) + b) + (۴(۳) + b) = ۱۰ \Rightarrow ۲۰ + ۲b = ۱۰ \Rightarrow ۲b = -۱۰ \Rightarrow b = -۵$$
$$t_n = ۴n - ۵ \Rightarrow t_۶ = ۴(۶) - ۵ = ۱۹$$

**دنباله:** هر تعداد عدد که پشت سر هم قرار می‌گیرند را یک دنباله می‌نامیم. این اعداد جملات دنباله نامیده می‌شود. مانند دنباله‌های زیر:

دنباله: الف) $۳, \sqrt{۳}, -۲, ۰, ۲\sqrt{۵}, \ldots$

ب) $۱, ۳, ۵, ۷, ۹, \ldots$

جملات دنباله ممکن است الگو داشته باشند مثل (ب) یا فاقد الگو باشند مثل (الف).

▼**مثال ۳۵)** **سه جمله‌ی بعدی هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید و همچنین جمله‌ی عمومی هر دنباله را حدس بزنید.**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۳، صفحه‌ی ۱۹)

الف) $1,3,5,7,\dots$

ب) $\sqrt{2},\sqrt{4},\sqrt{6},\sqrt{8},\dots$

پ) $0/1,0/001,0/00001,0/0000001,\dots$

ت) $\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{3}{27},\frac{4}{81},\dots$

ث) $-1,4,-9,16,\dots$

☑پاسخ:

الف) $1,3,5,7,9,11,12 \rightarrow a_n=2n-1$

ب) $\sqrt{2},\sqrt{4},\sqrt{6},\sqrt{8},\sqrt{10},\sqrt{12},\sqrt{14} \rightarrow a_n=\sqrt{2n}$

پ) $10^{-1},10^{-3},10^{-5},10^{-7},10^{-9},10^{-11},10^{-13} \rightarrow a_n=10^{-(2n-1)}$

ت) $\frac{1}{3},\frac{2}{9},\frac{3}{27},\frac{4}{81},\frac{5}{243},\frac{6}{729},\frac{7}{2187} \rightarrow a_n=\frac{n}{3^n}$

ث) $-1,4,-9,16,-25,36,-49 \rightarrow a_n=(-1)^n n^2$

▼**مثال ۳۶)** **اگر جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به‌صورت $a_n=\frac{1+3n}{n+1}$ باشد:**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۲، صفحه‌ی ۱۹- تهران ـ کاوه ـ ۸۹)

**الف) جمله‌ی نهم آن را به‌دست آورید.**

**ب) چندمین جمله‌ی آن برابر $\frac{7}{3}$ می‌باشد.**

☑پاسخ: الف) برای به‌دست آوردن جمله‌ی نهم کافیست $n=9$ قرار دهیم:

$$a_9=\frac{1+3(9)}{9+1}=\frac{28}{10}=2/8$$

ب) جمله‌ی عمومی را برابر $\frac{7}{3}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{1+3n}{n+1}=\frac{7}{3}\Rightarrow 3+9n=7n+7\Rightarrow 2n=4\Rightarrow n=2$$

▼**مثال ۳۷)** **جمله‌ی چندم دنباله‌ی $a_n=n^2-12n+11$ با جمله‌ی نهم همین دنباله برابر است؟**

(کتاب درسی، مشابه کار در کلاس ۲، صفحه‌ی ۱۹- آزمون کانون-۸۹)

۱)هفتم　۲)پنجم　۳)چهارم　۴)سوم

☑پاسخ: ابتدا مقدار جمله‌ی نهم را بدست می‌آوریم، کافیست $n=9$ قرار دهیم:

$$n=9: a_9=9^2-12(9)+11=81-108+11=-16$$

حال $a_n$ را برابر ۱۶- قرار می‌دهیم:

$$a_n=-16\Rightarrow n^2-12n+11=-16\Rightarrow n^2-12n+27=0\Rightarrow (n-9)(n-3)=0\Rightarrow \begin{cases} n=9 & \text{غ ق ق} \\ n=3 \end{cases}$$

گزینه‌ی ۴ صحیح است.