

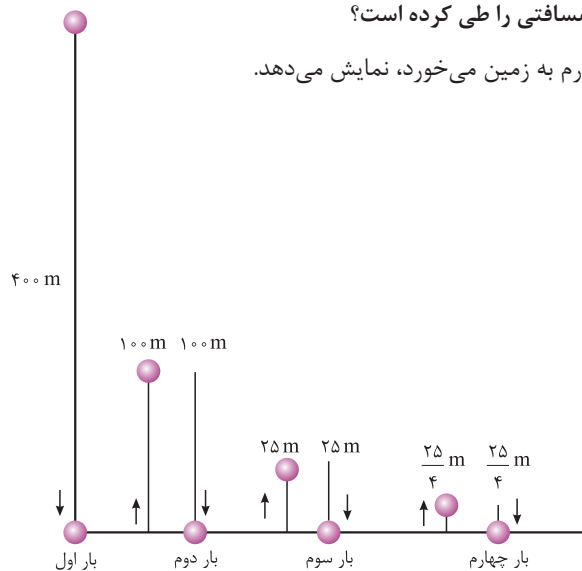
# فصل اول: راهبردهای حل مسئله

## راهبرد رسم شکل

همان‌طور که در کتاب درسی مشاهده کردید، رسم شکل مناسب می‌تواند حل بعضی از مسئله‌ها را برای ما ساده‌تر کند، مانند مسئله‌های مسافت طی شده توسط توپ» یا «جهش قورباغه». اگر احساس می‌کنید در حل آن‌ها کمی دچار مشکل هستید، به مثال‌های زیر توجه کنید:

### مسئله‌ی مسافت طی شده توسط توپ

تویی را از ارتفاع ۴۰۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. این توپ پس از هر بار برخورد با زمین،  $\frac{1}{4}$  ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ در لحظه‌ای که برای چهارمین بار به زمین برخورد می‌کند، در مجموع چه مسافتی را طی کرده است؟



شکل زیر، مسافت طی شده توسط توپ را تا زمانی که برای بار چهارم به زمین می‌خورد، نمایش می‌دهد.

با توجه به شکل، واضح است که مسافت طی شده توسط توپ برابر است با:

$$400 + (100 + 100) + (25 + 25) + \left(\frac{25}{4} + \frac{25}{4}\right) = 662.5 \text{ m}$$

برای آن‌که این مسئله را سریع‌تر حل کنید، بدون آن‌که شکلی رسم کنید، کافی است ارتفاع اولیه‌ی توپ را یک بار بنویسید و برای ۳ مرتبه‌ی دیگر برخورد توپ با زمین، هر بار  $\frac{1}{4}$  مسافت قبلی را پیدا کرده و ۲ بار جمع کنید.

تویی را از ارتفاع ۲۴۰ متری سطح زمین رها می‌کنیم. این توپ پس از هر بار برخورد با زمین، نصف ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا لحظه‌ای که برای بار ششم به زمین خورده است، مجموعاً چه مسافتی را طی کرده است؟

با توجه به آن‌چه گفته شد:  $240 + (120 + 120) + (60 + 60) + (30 + 30) + (15 + 15) + (7.5 + 7.5) = 705 \text{ m}$



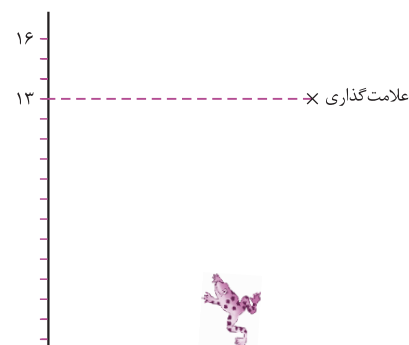
### مسئله‌ی جهش قورباغه

قورباغه‌ای می‌خواهد از یک دیوار ۱۶ متری بالا برود. او در هر جهش ۳ متر بالا می‌رود و ۲ متر سُر می‌خورد. این قورباغه در جهش چندم خود به پشت بام رسیده است؟

برای حل سریع مسئله به نکات زیر توجه کنید:

- چون هر جهش قورباغه ۳ متری است، تا سه متر مانده به بالای دیوار را علامت‌گذاری کنید.
- چون میزان حرکت قورباغه، پس از هر جهش و سُر خوردن ۱ متر است، پس برای رسیدن به نقطه‌ی علامت‌گذاری شده ۱۳ جهش انجام داده است.

قورباغه در جهش چهاردهم روی پشت بام خواهد بود.



قورباغه‌ای می‌خواهد از یک دیوار ۵۰ متری بالا برود. او در هر جهش ۵ متر بالا رفته و ۲ متر سر می‌خورد. او در پرش چندم، به بالای

دیوار رسیده است؟

$$50 - 5 = 45$$

$$45 \div 3 = 15$$

$$15 + 1 = 16$$

(چون جهش‌ها ۵ متری بود، تا ۵ متر مانده به بالای دیوار را علامت‌گذاری کردیم؛ یعنی ۴۵ متر و چون میزان حرکت قورباغه در هر جهش ۳ متر بود، ۴۵ را بر ۳ تقسیم کردیم.)

توجه داشته باشید اگر عدد مربوط به علامت‌گذاری کردن روی دیوار در این سؤال بر ۳ بخش‌پذیر نبود، باید حاصل تقسیم را به بالا رُند می‌کردیم؛ مثلاً اگر به جای ۵۰ متر، ارتفاع دیوار برابر با ۳۰ متر بود آن‌گاه:

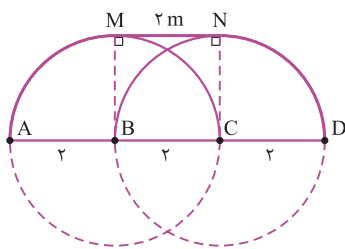
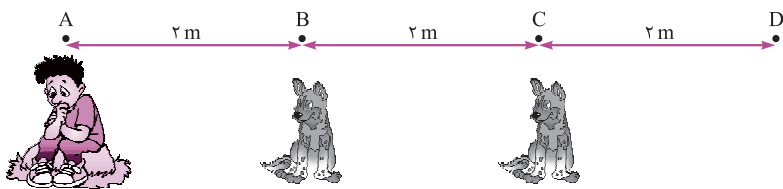
$$30 - 5 = 25$$

$$25 \div 3 = 8 \frac{1}{3} \rightarrow 9 \text{ رُند به بالا}$$

$$9 + 1 = 10 \text{ (تعداد جهش‌ها)}$$

در مثال زیر رسم شکل دقیق کمک بسیار زیادی به حل مسئله می‌کند.

شخصی می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی D برود. در نقاط B و C دو سگ وحشی ایستاده‌اند. فاصله‌ی نقاط A و B و B و C و C و D از یکدیگر ۲ متر است. سگ‌ها هر موجودی که فاصله‌ی آن‌ها با خودشان کم‌تر از ۲ متر باشد را می‌خورند! کوتاه‌ترین مسیری که شخص می‌تواند از A به D برسد، تقریباً چند متر است؟ ( $\pi = 3.14$ )



دو دایره به مرکزهای B و C و شعاع‌های ۲ m رسم می‌کنیم. هر موجودی که داخل این دایره‌ها شود، توسط سگ‌ها خورده می‌شود.

کوتاه‌ترین مسیری که شخص می‌تواند به نقطه‌ی D برسد، در شکل مشخص شده است.

این شخص ابتدا از نقطه‌ی A روی محیط دایره حرکت می‌کند تا به نقطه‌ی M برسد. فاصله‌ی نقاط M و N برابر ۲ m است. پس از رسیدن به نقطه‌ی N مجدداً روی محیط دایره حرکت می‌کند تا به نقطه‌ی D برسد. پس:

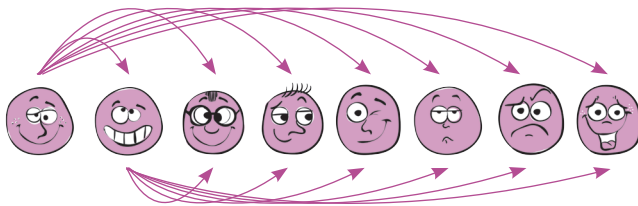
$$\text{کوتاه‌ترین مسیر} = (\text{محیط ربع دایره } AM) + (\text{طول پاره‌خط } MN) + (\text{محیط ربع دایره } ND)$$

$$= (\text{محیط نیم‌دایره به شعاع } 2) + 2 = 2\pi + 2 \approx 8.28 \text{ m}$$

## راهبرد الگوسازی

گاهی در حل بعضی از مسئله‌ها، لازم است همه‌ی حالت‌های ممکن را پیدا کنیم. برای این کار باید روشی را بیابیم که همه‌ی حالت‌ها، بدون آن‌که حالتی فراموش شود، نوشته شوند. بنابراین باید الگوی مناسبی بسازیم تا از نظم و ترتیب خاصی پیروی کند. در حل مسئله‌های زیر از روش الگوسازی استفاده کرده‌ایم.

۸ نفر در یک میهمانی حضور دارند. همه‌ی آن‌ها با هم دست می‌دهند. در مجموع، چند دست فشرده شده است؟



نفر اول را در نظر می‌گیریم. او می‌تواند با ۷ نفر دیگر دست بدهد. نفر اول را کنار می‌گذاریم. نفر دوم می‌تواند با ۶ نفر دیگر دست بدهد. نفر دوم را کنار می‌گذاریم. نفر سوم می‌تواند با ۵ نفر دیگر دست بدهد. به همین ترتیب نفر آخر، دیگر با کسی دست نمی‌دهد. پس مجموع دست‌های فشرده شده برابر است با:

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

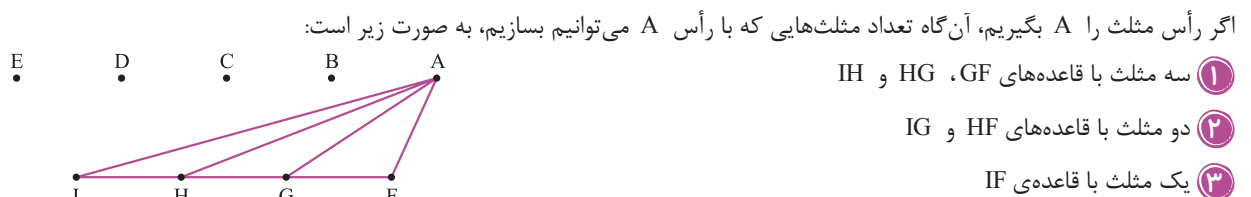
$$1 + 2 + 3 + \dots + 29 = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

### مسئله‌ی مثلث‌ها

به وسیله‌ی نقطه‌های زیر چند مثلث می‌توانیم رسم کنیم که رأس همه‌ی مثلث‌ها روی نقطه‌ها قرار داشته باشد؟



برای حل این مسئله لازم است راهبرد مناسب و منظمی داشته باشیم. ابتدا نقاط داده شده را نام‌گذاری می‌کنیم.



اگر رأس مثلث را A بگیریم، آن‌گاه تعداد مثلث‌هایی که با رأس A می‌توانیم بسازیم، به صورت زیر است:

۱ سه مثلث با قاعده‌های GF، HG و IH

۲ دو مثلث با قاعده‌های HF و IG

۳ یک مثلث با قاعده‌ی IF

بنابراین با رأس A مجموعاً  $3 + 2 + 1 = 6$  مثلث می‌توانیم بسازیم. به همین ترتیب با رأس‌های B، C، D و E نیز هر کدام ۶ مثلث ساخته می‌شود. ۵ نقطه در ردیف بالای شکل داریم، پس مجموعاً  $5(1 + 2 + 3) = 5 \times 6 = 30$  مثلث خواهیم داشت.

اکنون نقطه‌ی F را رأس مثلث‌ها در نظر می‌گیریم:



با رأس F می‌توانیم مثلث‌های زیر را بسازیم:

۱ چهار مثلث با قاعده‌های BA، CB، DC و ED

۲ سه مثلث با قاعده‌های CA، DB و EC

۳ دو مثلث با قاعده‌های DA و EB

۴ یک مثلث با قاعده‌ی EA

بنابراین مجموعاً  $4 + 3 + 2 + 1 = 10$  مثلث با رأس F خواهیم داشت. به همین ترتیب با رأس‌های G، H و I نیز می‌توانیم ۱۰ مثلث دیگر

بسازیم. پس چون چهار نقطه در ردیف پایین داریم،  $4(1 + 2 + 3 + 4) = 40$  مثلث تشکیل خواهد شد. بنابراین تعداد کل مثلث‌هایی که با نقاط داده‌شده‌ی مسئله می‌توانیم بسازیم، برابر  $30 + 40 = 70$  تا است.

با حل این مسئله، الگوی مناسبی پیدا کرده‌ایم. اگر تعداد نقاط بالایی و پایینی را داشته باشیم، می‌توانیم به سرعت، تعداد مثلث‌ها را پیدا کنیم. مثلاً اگر در ردیف بالا ۱۰ نقطه و در ردیف پایین ۸ نقطه داشته باشیم:



$$10 \times (1+2+3+\dots+7) + 8 \times (1+2+3+\dots+9) = 280 + 360 = 640$$

تعداد مثلث‌ها برابر است با:

تعداد نقاط ردیف بالا  $\times$  مجموع اعداد ۱ تا یکی کم‌تر از تعداد نقاط ردیف پایین + تعداد نقاط ردیف پایین  $\times$  مجموع اعداد ۱ تا یکی کم‌تر از تعداد نقاط ردیف بالا

### مسئله‌ی لامپ‌ها

در کتاب درسی، مسئله‌ای به شکل زیر وجود دارد:

«با انگشتان یک دست به چند طریق می‌توانیم عدد ۲ را نمایش دهیم؟» این مسئله شبیه به سؤال زیر است:

«اگر ۵ لامپ خاموش داشته باشیم، به چند طریق می‌توانیم ۲ لامپ را روشن کنیم؟» در مثال‌های زیر مسئله‌ی لامپ‌ها را در حالت کلی‌تر بسط داده و حالت‌های دیگر آن را بررسی می‌کنیم.

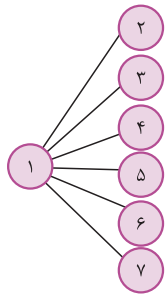
۷ لامپ خاموش داریم؛ به چند طریق می‌توانیم:



(الف) یک لامپ را روشن کنیم؟ (ب) دو لامپ را روشن کنیم؟

(الف) واضح است که برای روشن کردن یک لامپ ۷ روش وجود دارد.

(ب) لامپ ۱ را روشن می‌کنیم. به همراه لامپ ۱ می‌توانیم لامپ‌های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را روشن کنیم. پس به همراه لامپ ۱، ۶ حالت برای روشن کردن لامپ‌های دیگر وجود دارد.



اکنون لامپ ۱ را کنار گذاشته و لامپ ۲ را روشن می‌کنیم.

لامپ ۲ را نیز به ۵ حالت می‌توانیم با لامپ‌های ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ روشن کنیم.

به همین ترتیب لامپ ۲ را کنار گذاشته و لامپ ۳ را روشن می‌کنیم. اگر همین کار را ادامه دهیم تا لامپ‌ها تمام شوند، تعداد کل حالت‌ها برای روشن کردن دو لامپ برابر است با:

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

الگوی مناسبی برای روشن کردن ۲ لامپ به دست آورده‌ایم. به عنوان مثال اگر ۱۰ لامپ خاموش داشته باشیم، می‌توانیم به:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

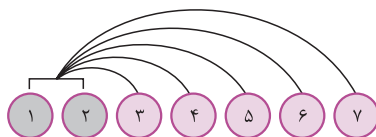
طریق، دوتا از لامپ‌ها را روشن کنیم.

۷ لامپ خاموش داریم. به چند طریق می‌توانیم ۳ لامپ را روشن کنیم؟

به حل این مسئله دقت کنید. در انتها به الگوی بسیار جالبی می‌رسیم. ابتدا لامپ‌ها را به صورت زیر شماره‌گذاری می‌کنیم.

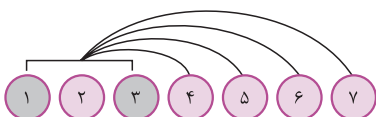
لامپ ۱ را به همراه لامپ ۲ روشن می‌کنیم. این دو لامپ به ۵ حالت می‌توانند به همراه لامپ‌های

۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ روشن شوند.

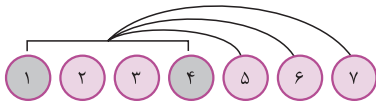


اکنون لامپ‌های ۱ و ۳ را روشن می‌کنیم.

این دو لامپ به همراه لامپ‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ به ۴ حالت می‌توانند روشن شوند.



به همین ترتیب لامپ‌های ۱ و ۴ را روشن می‌کنیم.



آن‌ها نیز به همراه لامپ‌های ۵، ۶ و ۷ به ۳ حالت روشن می‌شوند.

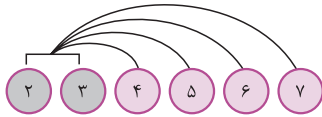
اگر همین کار را با لامپ‌های ۱ و ۵ و هم‌چنین ۱ و ۶ انجام دهیم، به ترتیب دو و یک حالت دیگر خواهیم داشت.

پس با ثابت نگه داشتن لامپ ۱ و تغییر لامپ‌های دیگر مجموعاً  $۱+۲+۳+۴+۵$  حالت خواهیم داشت.

اکنون لامپ ۱ را به طور کلی حذف می‌کنیم و لامپ ۲ را ثابت روشن می‌کنیم. لامپ‌های ۲ و ۳

به همراه لامپ‌های دیگر به ۴ حالت روشن می‌شوند و اگر لامپ‌های ۲ و ۴ را در نظر بگیریم، به

۳ حالت و به همین ترتیب تعداد کل حالت‌ها برابر خواهد بود با:  $۱+۲+۳+۴$ .



اکنون لامپ ۲ را به طور کلی حذف کرده و مسئله را با ثابت نگه داشتن لامپ ۳ ادامه می‌دهیم که تعداد حالت‌ها برابر خواهد بود با:  $۱+۲+۳$ .

اگر این کار را تا لامپ شماره ۵ ادامه دهیم، تعداد کل حالت‌های مسئله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(۱+۲+۳+۴+۵)+(۱+۲+۳)+(۱+۲)+(۱)=۳۵$$

بنابراین برای حل مسئله‌ی مشابه برای ۳ لامپ، می‌توانید از دوتا کم‌تر از تعداد لامپ‌ها شروع کرده و مانند الگوی بالا، حالت‌ها را با هم جمع

کنید. مثلاً اگر ۱۰ لامپ خاموش داشته باشیم، تعداد حالت‌هایی که می‌توانیم ۳ تا از لامپ‌ها را روشن کنیم، برابر است با:

$$(۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰)+(۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸)+(۱+۲+۳+۴+۵+۶)+(۱+۲+۳)+(۱+۲)+(۱)=۱۲۰$$

اگر  $m$  لامپ خاموش داشته باشید، تعداد حالت‌هایی که می‌توانید  $a$  لامپ را روشن کنید، با تعداد حالت‌هایی که می‌توانید  $m-a$

لامپ را روشن کنید، برابر است.<sup>۱</sup>

مثلاً برای ۷ لامپ خاموش، تعداد حالت‌های ممکن برای روشن کردن لامپ‌های زیر با هم برابر است.

$$\left. \begin{array}{l} ۷ \text{ لامپ} \\ ۶ \text{ لامپ} \\ ۵ \text{ لامپ} \\ ۴ \text{ لامپ} \\ ۳ \text{ لامپ} \\ ۲ \text{ لامپ} \\ ۱ \text{ لامپ} \\ ۰ \text{ لامپ} \end{array} \right\}$$

در همه‌ی حالت‌های بالا مجموع دو عدد برابر ۷ است.

۷ لامپ خاموش داریم. به چند طریق می‌توانیم ۴ لامپ را روشن کنیم؟

تعداد حالت‌های ۴ لامپ با تعداد حالت‌های  $۷-۴=۳$  لامپ برابر است؛ پس ۳۵ حالت خواهیم داشت.

### راهِبرد الگویابی

الگویابی، کشف رابطه‌های بین اعداد یا اشکال یا اشیا و ... است. اگر شما توانایی یافتن یک الگوی صحیح را داشته باشید، می‌توانید در جای

مناسب از آن بهره برده و مسائل را حل کنید. در واقع یافتن یک الگو بیشتر شبیه به حل یک معماست. بنابراین می‌توان گفت یکی از بخش‌های

جالب فصل «راهِبردهای حل مسئله» مربوط به الگویابی است.

در هر یک از الگوهای عددی زیر، دو عدد بعدی را بنویسید.

الف)  $۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, \dots, ?$

ب)  $۱۱, ۲۴, ۳۹, ۵۶, \dots, ?$

پ)  $۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, \dots, ?$

ت)  $۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, \dots, ?$

الف) رابطه‌ی اعداد به صورت زیر است:

$$۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, ۲۱, ۲۸$$

$$۱ \times ۱ = ۱$$

$$۲ \times ۱۲ = ۲۴$$

$$۳ \times ۱۳ = ۳۹$$

$$۴ \times ۱۴ = ۵۶$$

ب) داریم:

پس عددهای بعدی به ترتیب  $۷۵=۵ \times ۱۵$  و  $۹۶=۶ \times ۱۶$  هستند.

۱- اثبات این نکته را در درس ترکیبیات در دوره‌ی دوم دبیرستان می‌آموزید.

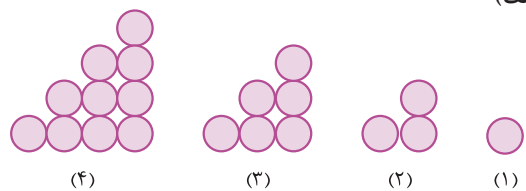
پ) هر عدد، مجموع دو عدد قبلی است با این شرط که دو عدد اول را یک فرض کنیم. بنابراین عددهای بعدی به ترتیب  $5+8=13$  و  $8+13=21$  هستند.

ت) داریم:  $1 \times 2 = 2$  ،  $1 \times 2 \times 3 = 6$  ،  $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$  ،  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

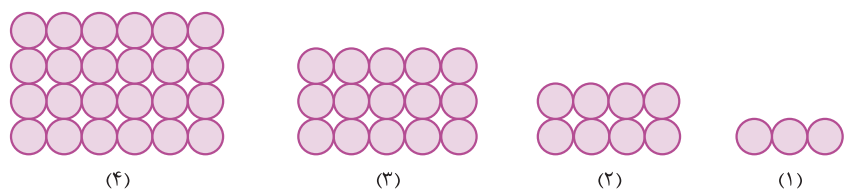
پس عددهای بعدی به ترتیب  $120 \times 6 = 720$  و  $720 \times 7 = 5040$  هستند.

در هر یک از شکل‌های زیر تعداد گلوله‌های شکل دهم را پیدا کنید.

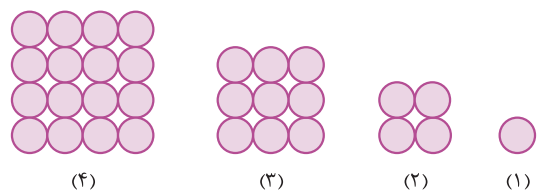
الف)



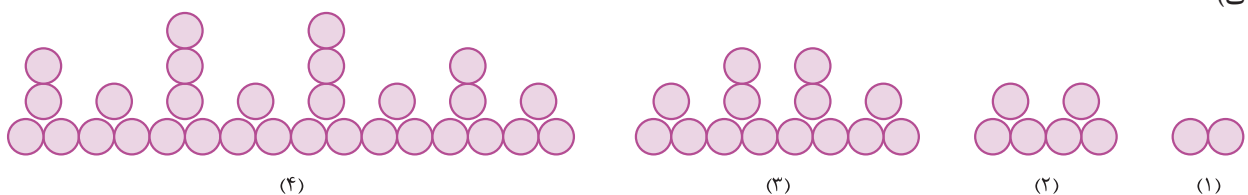
ب)



پ)



ت)



الف) تعداد گلوله‌های هر شکل از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

شماره‌ی شکل	تعداد گلوله‌ها
(۱)	۱
(۲)	$1+2=3$
(۳)	$1+2+3=6$
(۴)	$1+2+3+4=10$
⋮	⋮
(۱۰)	$1+2+3+\dots+10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n \times (n+1)}{2}$$

یادآوری می‌کنیم که برای پیدا کردن مجموع اعداد ۱ تا n از این فرمول استفاده می‌کنیم:

(ب) داریم:

شماره‌ی شکل	تعداد گلوله‌ها
(۱)	$1 \times 3 = 3$
(۲)	$2 \times 4 = 8$
(۳)	$3 \times 5 = 15$
(۴)	$4 \times 6 = 24$
⋮	⋮
(۱۰)	$10 \times 12 = 120$

(پ) اگر شماره‌ی شکل را در خودش ضرب کنید، تعداد گلوله‌ها به دست می‌آید، بنابراین تعداد گلوله‌های شکل دهم برابر است با:  $10 \times 10 = 100$ .

(ت) داریم:

شماره‌ی شکل	تعداد گلوله‌ها
(۱)	۲
(۲)	$2 + 4$
(۳)	$2 + 4 + 8$
(۴)	$2 + 4 + 8 + 16$
⋮	⋮
(۱۰)	$2 + 4 + 8 + \dots + \underbrace{(2 \times 2 \times \dots \times 2)}_{\text{تا } 10}$

بنابراین کافی است حاصل عبارت مقابل را پیدا کنیم:

$$2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$$

می‌توانیم مجموع فوق را با یافتن یک الگوی مناسب، بدون آن که اعداد را یکی یکی جمع کنیم، به دست آوریم:

$$2 + 4 = 6 \quad (\text{دوتا کمتر از عدد سوم})$$

$$2 + 4 + 8 = 14 \quad (\text{دوتا کمتر از عدد چهارم})$$

$$2 + 4 + 8 + 16 = 30 \quad (\text{دوتا کمتر از عدد پنجم})$$

⋮

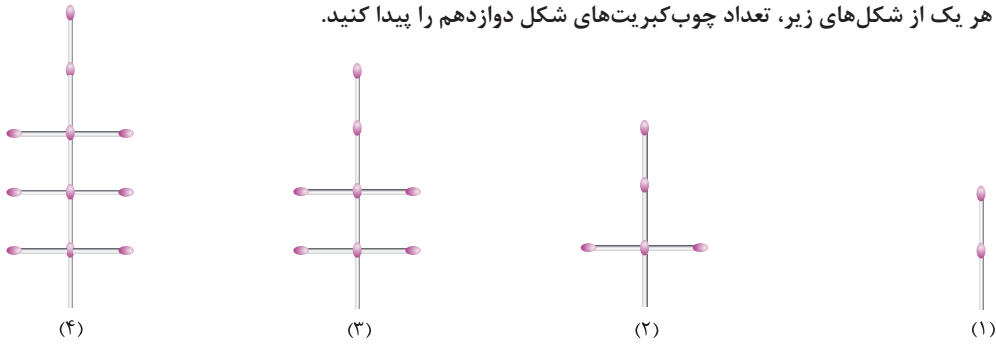
$$2 + 4 + 8 + \dots + 1024 = \underbrace{2048}_{\text{حاصل ضرب}} - 2 = 2046 \quad (\text{دوتا کمتر از عدد یازدهم})$$

حاصل ضرب  
۲ تا عدد ۱۱

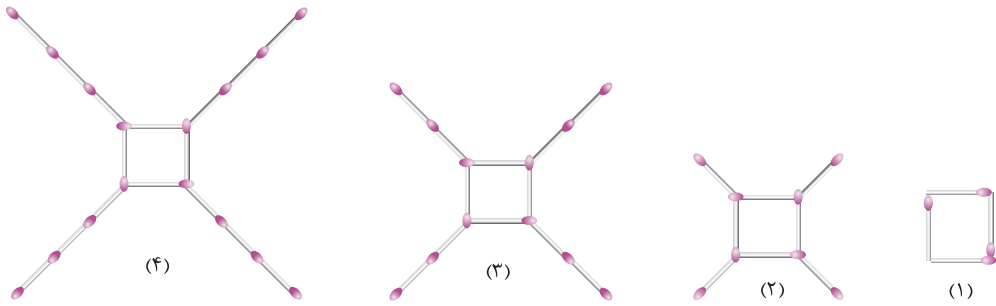


در هر یک از شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دوازدهم را پیدا کنید.

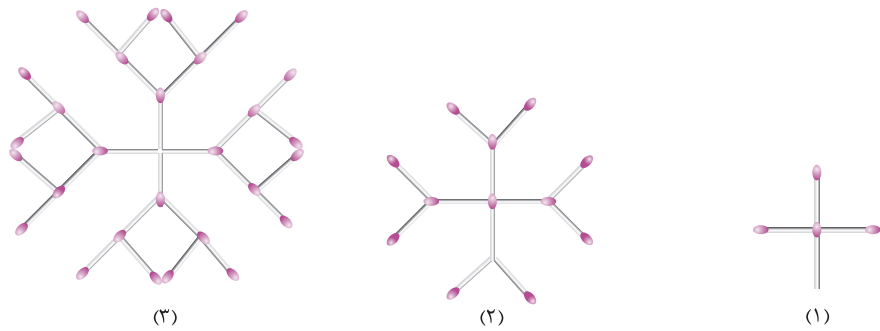
(الف)



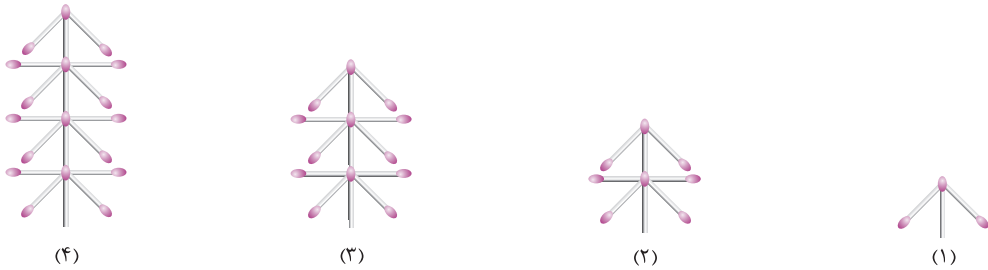
(ب)



(ج)



(د)



(الف) اگر به هر شکل ۳ چوب‌کبریت اضافه شود، شکل بعدی به دست می‌آید.



شماره‌ی شکل	تعداد چوب‌کبریت‌ها
(۱)	$۲ = ۲ + (۰ \times ۳)$
(۲)	$۲ + ۳ = ۲ + (۱ \times ۳)$
(۳)	$۲ + ۳ + ۳ = ۲ + (۲ \times ۳)$
(۴)	$۲ + ۳ + ۳ + ۳ = ۲ + (۳ \times ۳)$
⋮	⋮
(۱۲)	$۲ + (۱۱ \times ۳) = ۳۵$



ب) کافی است شماره‌ی هر شکل را در عدد ۴ ضرب کنیم. بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دوازدهم برابر است با:  $4 \times 12 = 48$ .

پ)

شماره‌ی شکل	تعداد چوب‌کبریت‌ها
(۱)	$4 \times 1 = 4 \times (2 - 1) = 4$
(۲)	$4 \times 3 = 4 \times (2 \times 2 - 1) = 12$
(۳)	$4 \times 7 = 4 \times (2 \times 2 \times 2 - 1) = 28$
(۴)	$4 \times 15 = 4 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1) = 60$
⋮	⋮
(۱۲)	$4 \times \frac{(2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 - 1)}{2 \times 12} = 4 \times (4096 - 1) = 16380$

ت) دنباله‌ی عددی مقابل، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل را نشان می‌دهد:  $3, 8, 13, 18, \dots$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، فاصله‌ی اعداد دنباله ۵ تا ۵ است و هر یک از عددهای دنباله از مضرب‌های ۵، دو تا کم‌تر هستند:

$$\text{عدد اول دنباله} : (5 \times 1) - 2 = 3$$

$$\text{عدد دوم دنباله} : (5 \times 2) - 2 = 8$$

$$\text{عدد سوم دنباله} : (5 \times 3) - 2 = 13$$

$$\text{عدد چهارم دنباله} : (5 \times 4) - 2 = 18$$

⋮

$$\text{عدد دوازدهم دنباله} : (5 \times 12) - 2 = 58$$

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دوازدهم ۵۸ تا می‌باشد.

اگر عدد ۵ را ۱۰۰۰ بار در خودش ضرب کنیم، سه رقم آخر عدد حاصل چه عددی هستند؟

به حاصل ضرب‌های زیر دقت کنید:

مضرب‌های ۵	سه رقم آخر
$5 \times 5 \times 5 = 125$	۱۲۵
$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$	۶۲۵
$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$	۱۲۵
$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 15625$	۶۲۵
$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 78125$	۱۲۵
⋮	⋮

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، اگر تعداد عامل‌های ۵ که در هم ضرب شده‌اند، فرد باشد، سه رقم آخر عدد حاصل برابر ۱۲۵ و اگر تعداد عامل‌های ۵ که در هم ضرب شده‌اند زوج باشد، سه رقم آخر عدد حاصل ۶۲۵ است. بنابراین اگر عدد ۵ را ۱۰۰۰ بار در خودش ضرب کنیم، با توجه به زوج بودن عدد ۱۰۰۰، سه رقم آخر عدد حاصل ۶۲۵ خواهد بود.

۱, ۳, ۵, ۱, ۳, ۵, ۱, ۳, ...

در دنباله‌ی اعداد مقابل، عدد دویستم چند است؟

چون اعداد سه‌تا سه‌تا تکرار می‌شوند، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۲۰۰ بر ۳ را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{array}{r} 200 \quad | \quad 3 \\ -198 \quad 66 \\ \hline 2 \end{array}$$

این بدان معناست که اعداد ۳، ۱ و ۵ تا رسیدن به عدد ۱۹۸ هر کدام ۶۶ بار تکرار می‌شوند؛ بنابراین عدد صد و نود و نهم برابر ۱ و عدد دویستم برابر ۳ است.

### راهنمای حل مسئله‌ی ساده‌تر

گاهی لازم است برای حل یک مسئله‌ی پیچیده، ابتدا آن را در حالت‌های ساده‌تر حل کنیم و با توجه به الگویی که به دست می‌آوریم، جواب نهایی مسئله‌ی اصلی را پیدا کنیم. در مثال‌های زیر چند نمونه از این مسائل آمده است.

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2048}$

ب)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{6561}$

پ)  $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots + \frac{1}{1000000000}$

ت)  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$

ث)  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 100$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

الف) ابتدا مسئله را در حالت‌های ساده‌تر حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود صورت همه‌ی کسرها یک واحد کم‌تر از مخرج آن‌ها می‌باشند؛ بنابراین حاصل عبارت داده‌شده، برابر  $\frac{2047}{2048}$  است.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

ب) داریم:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{13}{27}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{40}{81}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مخرج همه‌ی کسرها از دو برابر صورت کسر، یکی بیشتر هستند؛ بنابراین حاصل عبارت نهایی برابر  $\frac{3280}{6561}$  است.

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} = \frac{11}{100}$$

پ) داریم:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{111}{1000}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} = \frac{1111}{10000}$$

ملاحظه می‌شود که تعداد یک‌ها در صورت کسرها برابر است با تعداد صفرهای مخرج کسرها. پس حاصل عبارت نهایی، برابر است با:

$$\frac{11111111}{1000000000}$$

ت) به جدول زیر توجه کنید.

عدد های مسئله	تعداد عددهایی که با هم جمع شده اند	الگوی به دست آوردن حاصل عبارت	حاصل عبارت
1+3	2	2×2	4
1+3+5	3	3×3	9
1+3+5+7	4	4×4	16
1+3+5+7+9	5	5×5	25
⋮	⋮	⋮	⋮
1+3+5+⋯+99	50	50×50	2500

بنابراین می توانیم رابطه ی زیر را داشته باشیم:


$$1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$$

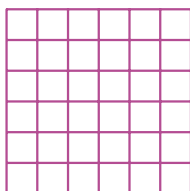
ث) داریم:

عدد های مسئله	تعداد عددهایی که با هم جمع شده اند	الگوی به دست آوردن حاصل عبارت	حاصل عبارت
2+4	2	2×3	6
2+4+6	3	3×4	12
2+4+6+8	4	4×5	20
2+4+6+8+10	5	5×6	30
⋮	⋮	⋮	⋮
2+4+6+⋯+100	50	50×51	2550



بنابراین می توانیم فرمول زیر را داشته باشیم:

$$2+4+6+8+\dots+2n = n \times (n+1)$$

در شکل زیر چند مربع با اندازه های مختلف وجود دارد؟ 



مسئله را در حالت‌های ساده‌تر حل کرده و درون جدول زیر آورده‌ایم:

ابعاد مربع‌ها	تعداد مربع‌های $1 \times 1$	تعداد مربع‌های $2 \times 2$	تعداد مربع‌های $3 \times 3$	تعداد مربع‌های $4 \times 4$
	۱ ( $1 \times 1$ )			
	۴ ( $2 \times 2$ )	۱ ( $1 \times 1$ )		
	۹ ( $3 \times 3$ )	۴ ( $2 \times 2$ )	۱ ( $1 \times 1$ )	
	۱۶ ( $4 \times 4$ )	۹ ( $3 \times 3$ )	۴ ( $2 \times 2$ )	۱ ( $1 \times 1$ )

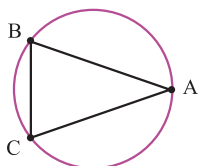
بنابراین در یک صفحه‌ی مربع‌شکل  $6 \times 6$ ، تعداد کل مربع‌هایی که می‌توانیم شمارش کنیم برابر است با:

$$(6 \times 6) + (5 \times 5) + (4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) = 91$$

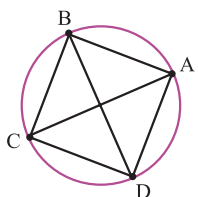
روی یک دایره، ۲۰ نقطه‌ی مختلف قرار داده‌ایم. به وسیله‌ی این نقطه‌ها چند پاره‌خط می‌توانیم تشکیل دهیم؟

ابتدا مسئله را برای ۳ نقطه و ۴ نقطه‌ی مختلف حل می‌کنیم:

۳ نقطه: هر یک از نقاط A، B و C، دوبه‌دو دو پاره‌خط تشکیل می‌دهند ولی چون پاره‌خط‌های AB و BA و AC و CA و همین‌طور BC و CB یکی هستند، تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با:



$$\begin{aligned} & \text{تعداد پاره‌خط‌های تشکیل شده در هر رأس} \\ & \text{تعداد رأس‌ها} \\ & \text{تعداد پاره‌خط‌ها} = \frac{3 \times 2}{2} = 3 \\ & \text{تکراری بودن پاره‌خط‌ها} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \text{تعداد پاره‌خط‌های تشکیل شده در هر رأس} \\ & \text{تعداد رأس‌ها} \\ & \text{تعداد پاره‌خط‌ها} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \\ & \text{تکراری بودن پاره‌خط‌ها} \end{aligned}$$

۴ نقطه:

$$\frac{20 \times 19}{2} = 190$$

بنابراین اگر ۲۰ نقطه داشته باشیم، تعداد پاره‌خط‌ها برابر است با:

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 89}{91 + 93 + 95 + \dots + 179}$$

به حاصل عبارات زیر دقت کنید:

$$\frac{1+3}{5+7} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3+5}{7+9+11} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+3+5+7}{9+11+13+15} = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$$

در عبارت اصلی، تعداد اعداد در صورت کسر و تعداد اعداد در مخرج کسر برابر ۴۵ تا است و از الگوی موردنظر در حالت‌های ساده‌تر پیروی می‌کند؛ پس حاصل آن برابر  $\frac{1}{3}$  است.

### راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب

برای حل بعضی از مسئله‌ها می‌توانیم به کمک راهبرد الگوسازی، همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسیم و با توجه به شرایط مسئله حالت‌های نامطلوب را حذف کنیم یا در برخی مواقع با تعیین یک راه مناسب، حالت‌هایی از مسئله را که منجر به جواب نیستند آن‌قدر حذف کنیم تا به جواب نهایی برسیم.

۸ گوی داریم که همگی از لحاظ ظاهری یکسان هستند ولی یکی از آن‌ها از بقیه کمی سنگین‌تر است. چگونه می‌توانیم تنها با ۲ بار



وزن کردن، گوی سنگین را پیدا کنیم؟

۳ گوی را در یک طرف ترازو و ۳ گوی دیگر را در طرف دیگر ترازو قرار می‌دهیم. اگر دو طرف ترازو مساوی باشد، گوی سنگین‌تر بین دو گوی مانده است که به راحتی با یک بار وزن کردن مشخص می‌شود. در غیر این صورت گوی‌های آن طرف ترازو که سنگین‌تر است را برداشته و مجدداً دوتا از آن‌ها را روی دو کفه‌ی ترازو قرار می‌دهیم. واضح است که اگر دو طرف مساوی شوند، گوی مانده، همان گوی سنگین‌تر است و در غیر این صورت کفه‌ای از ترازو که پایین‌تر آمده، گوی سنگین را مشخص می‌کند.

سه جعبه‌ی یکسان داریم که درون آن‌ها، گوی‌هایی به رنگ‌های آبی یا قرمز وجود دارد. ولی روی تمام جعبه‌ها، رنگ‌ها به غلط نوشته شده‌اند. چگونه می‌توانید فقط با خارج کردن یک گوی از یکی از جعبه‌ها، رنگ‌های دقیق گوی‌های هر جعبه را مشخص کنید؟

آبی، آبی | آبی، قرمز | قرمز، قرمز

از جعبه‌ای که روی آن «آبی، قرمز» نوشته شده است، یک گوی خارج می‌کنیم. فرض کنید گوی خارج شده قرمز باشد، در این صورت گوی دیگر آبی نیست پس آن جعبه «قرمز، قرمز» است. پس جعبه‌ای که روی آن «قرمز، قرمز» نوشته است، «آبی، آبی» است و جعبه‌ای که روی آن «آبی، آبی» نوشته است، «قرمز، آبی» است.

مسئله‌ی جالب زیر کمی به معما شبیه است ولی شما می‌توانید با استفاده از راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب به جواب صحیح برسید.

یک معلم ریاضی با دوستش در مورد سن فرزندانش صحبت می‌کرد:

معلم ریاضی: من سه پسر دارم که سن هر یک از آن‌ها یک عدد طبیعی بوده و حاصل ضرب سن آن‌ها ۳۶ است. آیا می‌توانی سن بچه‌های من را بگویی؟  
دوست معلم: اطلاعات کافی نیست.

معلم ریاضی: مجموع سن پسران من برابر با پلاک خانگی ما است.

دوست معلم به پلاک خانگی معلم ریاضی نگاه کرد و سپس گفت: اطلاعات کافی نیست.

معلم ریاضی: پسر بزرگ‌ترم پارسال در مسابقات دوچرخه‌سواری اول شد. در این هنگام دوست معلم، سن بچه‌ها را فهمید و گفت. آیا شما می‌توانید سن پسرهای معلم ریاضی را بگویید؟

ابتدا تمام حالت‌هایی را که حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی برابر ۳۶ می‌شود، درون جدول می‌نویسیم:

مجموع	حاصل ضرب	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
۳۸ ✗	۳۶	۳۶	۱	۱
۲۱ ✗	۳۶	۱۸	۲	۱
۱۶ ✗	۳۶	۱۲	۳	۱
۱۴ ✗	۳۶	۹	۴	۱
۱۳ ✓	۳۶	۶	۶	۱
۱۳ ✓	۳۶	۹	۲	۲
۱۱ ✗	۳۶	۶	۳	۲
۱۰ ✗	۳۶	۴	۳	۳

هنگامی که دوست معلم پلاک خانه را دید باید متوجه سن بچه‌ها می‌شد، ولی چون عنوان کرد که «اطلاعات کافی نیست» پس حتماً پلاک خانه برابر ۱۳ بوده که دو بار در جدول آمده است و در نهایت چون معلم ریاضی در مرحله‌ی بعد از پسر بزرگ‌ترش صحبت کرد، معلوم می‌شود که سن بچه‌های معلم ۲، ۲ و ۹ سال است.

### راهبرد حدس و آزمایش

گاهی حل بعضی از مسئله‌ها از طریق محاسبات پیچیده و مشکل است. در این گونه مواقع می‌توانیم با استفاده از حدس‌های هدف‌دار و منظم به جواب مسئله برسیم. البته توجه داشته باشید که این حدس‌ها باید منطقی باشند و با توجه به مسئله، شما را به هدف نزدیک‌تر نمایند.

در یک مرغداری کوچک ۹۹ مرغ وجود دارد. بعضی از مرغ‌ها روی دو پا ایستاده‌اند و بعضی از مرغ‌ها روی یک پا و بعضی از مرغ‌ها نیز نشسته‌اند و باهاشان معلوم نیست؛ که تعداد آن‌ها نصف مجموع تعداد مرغ‌های دیگر است. اگر روی هم ۱۰۰ پا ببینیم، تعداد مرغ‌هایی که روی یک پا ایستاده‌اند، چندتا است؟ (انرژی اتمی)

در حل این مسئله توجه داشته باشید که در حدس‌های شما حتماً باید مجموع هر سه نوع مرغ ۹۹ تا و مجموع مرغ‌هایی که روی یک پا دو پا ایستاده‌اند، دو برابر تعداد مرغ‌های نشسته باشد.

مجموع پاها	مجموع مرغ‌ها	تعداد مرغ‌های نشسته	تعداد مرغ‌های یک پا	تعداد مرغ‌های دو پا
۶۰ + ۳۶ = ۹۶ ✗	۹۹	۳۳	۳۶	۳۰
۶۴ + ۳۴ = ۹۸ ✗	۹۹	۳۳	۳۴	۲۲
۶۶ + ۳۳ = ۹۹ ✗	۹۹	۳۳	۳۳	۲۳
۶۸ + ۳۲ = ۱۰۰ ✓	۹۹	۳۳	۳۲	۳۴

پس تعداد مرغ‌هایی که روی یک پا ایستاده‌اند، ۳۲ تا است.

با قراردادن پرانتز در عبارت زیر، به جواب‌های متفاوتی می‌رسیم. با این کار چند مقدار متفاوت می‌توانیم به دست آوریم؟ (سلام)

$$2 \times 3 + 4 \times 5$$

حالت‌های گوناگون را آزمایش می‌کنیم:

$$(2 \times 3) + (4 \times 5) = (6) + (20) = 26$$

$$2 \times (3 + 4 \times 5) = 2 \times (23) = 46$$

$$2 \times (3 + 4) \times 5 = 2 \times (7) \times 5 = 70$$

$$(2 \times 3 + 4) \times 5 = (10) \times 5 = 50$$

بنابراین ۴ جواب مختلف به دست می‌آید.

چهار عمل اصلی + ، - ، × ، ÷ را درون دایره‌ها به گونه‌ای قرار دهید که عبارت بدون استفاده از پرانتز به یک تساوی درست تبدیل شود.

$$۳۰ \bigcirc ۷ \bigcirc ۲ \bigcirc ۲۰ \bigcirc ۱۰ \bigcirc ۸ = ۱۰$$

برای حل این مسئله باید حالت‌های مختلف را آزمایش کنید و در نهایت جواب مسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$۳۰ \bigcirc (-) ۷ \bigcirc (\times) ۲ \bigcirc (+) ۲۰ \bigcirc (\div) ۱۰ \bigcirc (-) ۸ = ۱۰$$

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را از چپ به راست به ترتیب بنویسید و بین آن‌ها را خانه‌های خالی در نظر بگیرید یا علائم جمع و

تفریق بگذارید، به طوری که حاصل برابر ۱۰۰ شود.

$$۹۸ - ۷ - ۶ - ۵ - ۴ + ۳ + ۲۱ = ۱۰۰$$

یکی از جواب‌ها به صورت روبه‌رو است:

آیا می‌توانید جواب‌های دیگری پیدا کنید؟

### راهبرد روش‌های نمادین

در این روش با استفاده از نمادهایی به جای مجهول، مسئله را به صورت ریاضی تصویر می‌کنیم؛ سپس با استفاده از حدس و آزمایش مجهول مسئله را به دست می‌آوریم. توانایی شما در این راهبرد، بعدها شما را در تشکیل معادله‌های جبری مسلط خواهد کرد.

علی در ۶ روز ۳۰۰ تومان جمع کرد. اگر او هر روز ۱۰ تومان بیشتر از روز قبل پول جمع کرده باشد، در روز اول علی چه قدر پول

داشته است؟

اگر پول علی را در روز اول با  $\bigcirc$  نشان دهیم آن‌گاه:

$$\bigcirc + (\bigcirc + ۱۰) + (\bigcirc + ۲۰) + (\bigcirc + ۳۰) + (\bigcirc + ۴۰) + (\bigcirc + ۵۰) = ۳۰۰ \Rightarrow ۶ \bigcirc + ۱۵۰ = ۳۰۰$$

با چند حدس ساده، به دست می‌آید:  $\bigcirc = ۲۵$ .

علی، محمد و رضا با هم یک کتاب ۹۴ صفحه‌ای را صحافی کرده‌اند. علی ۷ صفحه کم‌تر از محمد صحافی کرده است. رضا ۱۱ صفحه

بیشتر از محمد صحافی کرده است. علی چند صفحه را صحافی کرده است؟

تعداد صفحاتی را که علی صحافی کرده است، با  $\bigcirc$  نشان می‌دهیم. در این صورت:

$$\bigcirc + (\bigcirc + ۷) + (\bigcirc + ۷ + ۱۱) = ۹۴ \Rightarrow ۳ \bigcirc + ۲۵ = ۹۴$$

با چند آزمایش و حدس ساده به دست می‌آید:  $\bigcirc = ۲۳$ .

اگر از ۷ برابر عددی ۱۰ واحد کم کنیم، حاصل برابر با ۵ برابر همان عدد می‌شود. آن عدد را پیدا کنید.

$$۷ \bigcirc - ۱۰ = ۵ \bigcirc$$

طبق اطلاعات مسئله باید داشته باشیم:

از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود  $\bigcirc = ۱۰$  است، یعنی  $\bigcirc = ۵$  می‌باشد.

### راهبرد زیر مسئله

با این روش از سال‌های قبل آشنا هستید. در این روش مسئله را مرحله‌به‌مرحله به صورت چند مسئله‌ی ساده‌تر حل کرده و به جواب اصلی می‌رسیم.

گنجایش یک آسانسور ۲۰ کودک یا ۱۵ بزرگسال است. اکنون ۱۲ کودک سوار این آسانسور شده‌اند. در این صورت چند بزرگسال

دیگر می‌توانند سوار آسانسور شوند؟

ابتدا محاسبه می‌کنیم که هر کودک معادل چند بزرگسال است:

۲۰ کودک	۱۵ بزرگسال
۱	؟

$$? = \frac{1 \times 15}{20} = \frac{3}{4}$$

بنابراین یک کودک معادل  $\frac{3}{4}$  یک بزرگسال است. پس زمانی که ۱۲ کودک سوار بر آسانسور هستند، معادل آن است که  $۱۲ \times \frac{3}{4} = ۹$  بزرگسال

سوار آسانسور شده‌اند. بنابراین  $۱۵ - ۹ = ۶$  بزرگسال دیگر می‌توانند سوار آسانسور شوند.

در کتاب قضاوت‌های حضرت علی (ع) آمده است:



دو عرب مسافرت می‌کردند. یکی از آن‌ها ۵ قرص نان و دیگری ۳ قرص نان با خود داشت. عرب سومی به آن‌ها پیوست. هنگام شب، همه آن‌ها با هم ۸ قرص نان را به میزان مساوی خوردند. فردای آن روز، عرب سوم ۸ درهم به آن دو عرب دیگر داد و خداحافظی کرد. آن دو نفر بر سر تقسیم ۸ درهم به اختلاف خوردند. آن که ۵ قرص نان داشت، می‌گفت: تقسیم پول باید به نسبت ۵ به ۳ باشد و دیگری می‌گفت چون هر ۳ به یک اندازه نان خورده‌ایم، تقسیم باید به تساوی باشد. اختلافشان بالا گرفت و سرانجام از حضرت علی (ع) داوری خواستند. آن حضرت ۷ درهم را حق صاحب ۵

قرص نان و ۱ درهم را حق صاحب ۳ قرص نان دانستند! چرا؟

چون هر سه عرب به میزان مساوی نان خورده‌اند، پس هر یک  $\frac{8}{3}$  یا همان  $2\frac{2}{3}$  نان خورده‌اند. پس عرب سوم بابت خوردن  $2\frac{2}{3}$  نان مبلغ

۸ درهم را پرداخته است. اکنون قیمت یک قرص نان را محاسبه می‌کنیم:

۸ درهم	$2\frac{2}{3}$ نان
۱	؟

$$? = \frac{1 \times 8}{2\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 3 \text{ درهم}$$

پس آن که ۵ قرص نان داشته در واقع  $5 \times 3 = 15$  درهم وسط گذاشته است و با احتساب آن که ۸ درهم هزینه‌ی نان خورده‌شده‌ی خودش می‌شود، باید  $15 - 8 = 7$  درهم برایش بماند و آن که ۳ قرص نان داشته  $3 \times 3 = 9$  درهم گذاشته که ۸ درهم هزینه‌ی نان خورده‌شده‌ی خودش شده است، پس باید برایش ۱ درهم بماند.



۱- با انگشتان دو دست، به چند طریق می‌توانیم:

الف) عدد ۱ را نشان دهیم؟      ب) عدد ۲ را نشان دهیم؟      پ) عدد ۳ را نشان دهیم؟

۲- تویی را از ارتفاع یک متری سطح زمین رها می‌کنیم. این توپ پس از هر بار برخورد با زمین،  $\frac{1}{4}$  ارتفاع قبلی خود بالا می‌آید. این توپ از

لحظه‌ی اول، تا لحظه‌ای که برای دوازدهمین بار به زمین می‌خورد، مجموعاً چه مسافتی را طی کرده است؟

۳- در هر یک از دنباله‌های عددی زیر، جمله‌ی بعدی را بنویسید.

الف)  $1, 3, 11, 43, 171, ?$

ب)  $2, 5, 10, 17, ?$

پ)  $1, 2, 5, 26, 677, ?$

ت)  $3, 6, 15, 42, 123, ?$

ث)  $1, 16, 81, 256, 625, ?$

ج)  $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{2}{27}, ?$

چ)  $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, ?$



۴- در هر یک از دنباله‌های زیر، عدد صدم را پیدا کنید.

الف) ۲, ۵, ۸, ۱۱, ...

ب) ۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ...

پ) ۱۰, ۱۷, ۲۴, ۳۱, ...

ت) ۵, ۱۵, ۲۵, ۳۵, ...

ث) ۶, ۳, ۱, ۷, ۶, ۳, ۱, ۷, ۶, ...

ج) ۱, ۱, ۲, ۱, ۱, ۲, ۱, ...

چ) ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۰, ...

۵- در رشته‌عددهای زیر، اولین عدد مشترک ۲۲ است.

$\left\{ \begin{array}{l} ۴, ۱۰, ۱۶, \textcircled{۲۲}, \dots \\ ۶, ۱۴, \textcircled{۲۲}, ۳۰, \dots \end{array} \right.$

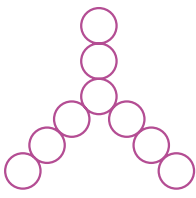
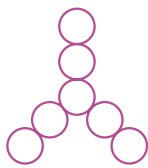


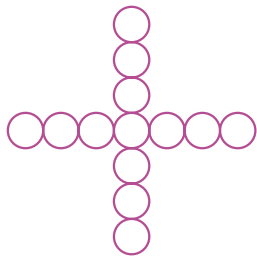
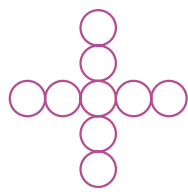


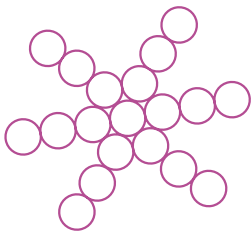






دویستمین عدد مشترک، چند است؟

۶- در رشته‌عددهای زیر، اولین عدد مشترک ۱۳ است.

$\left\{ \begin{array}{l} ۳, ۵, ۷, ۹, ۱۱, \textcircled{۱۳}, \dots \\ ۱, ۴, ۷, ۱۰, \textcircled{۱۳}, \dots \\ ۱, ۷, \textcircled{۱۳}, ۱۹, \dots \end{array} \right.$

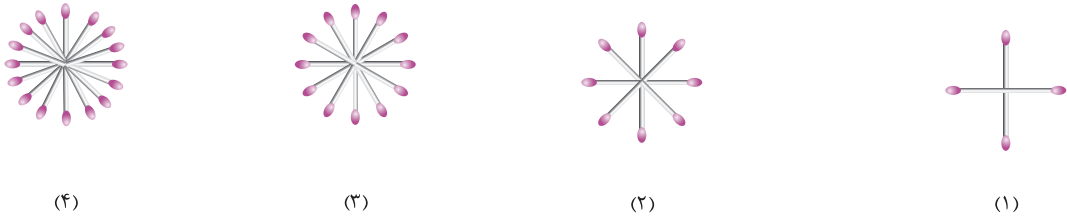
یکصدمین عدد مشترک، چند است؟

۷- در هر یک از شکل‌های زیر، تعداد گلوله‌های شکل بیستم چندتا است؟

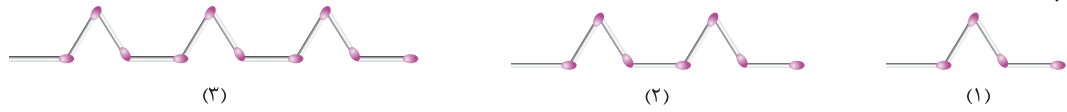
				الف)
(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	
				ب)
(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	
				پ)
(۳)	(۲)	(۱)		
				ت)
(۴)	(۳)	(۲)	(۱)	

۸- در هر یک از شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دهم را پیدا کنید.

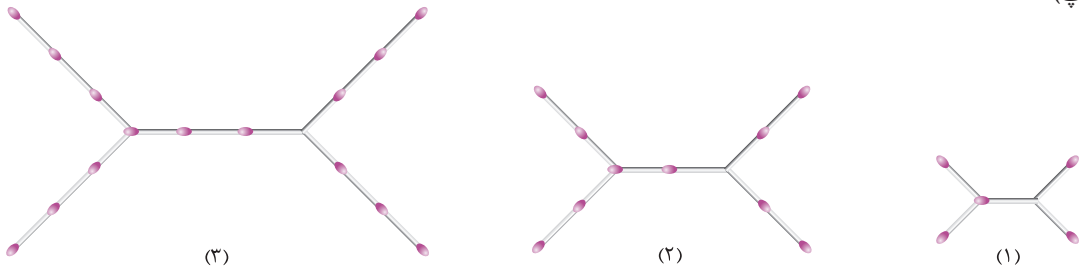
(الف)



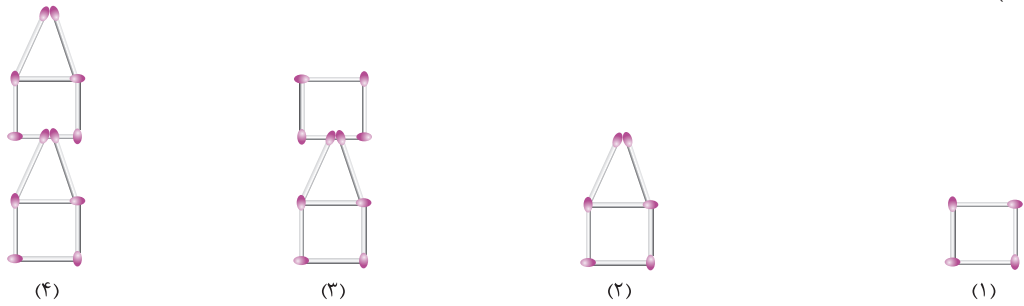
(ب)



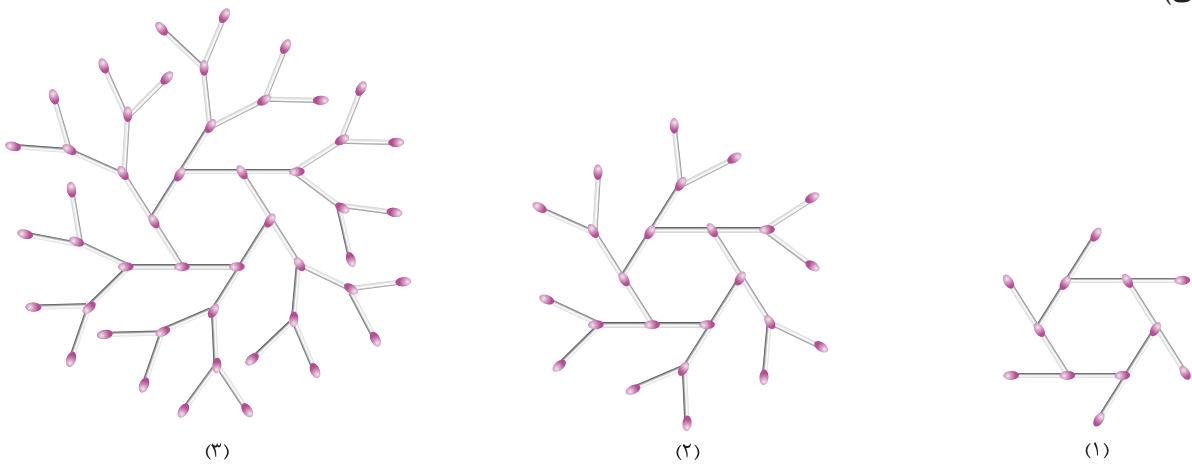
(پ)



(ت)

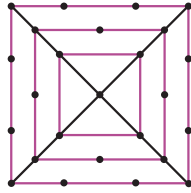


(ث)

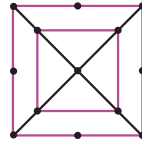


۹- در شکل دهم چند نقطه وجود دارد؟

(الف)



(۴)



(۳)

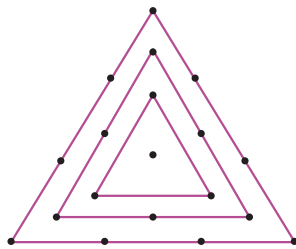


(۲)

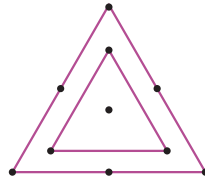
•

(۱)

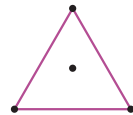
(ب)



(۴)



(۳)

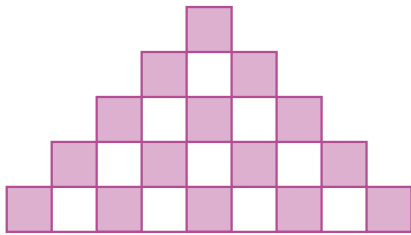


(۲)

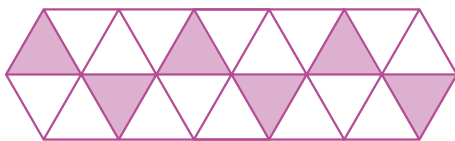
•

(۱)

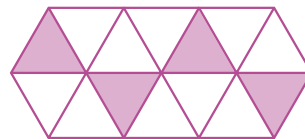
۱۰- اگر شکل روبه‌رو تا ۲۰۰ ردیف ادامه پیدا کند، مجموع مربع‌های رنگی، چقدر تا بیشتر از مجموع مربع‌های سفید خواهد بود؟



۱۱- با توجه به شکل‌های زیر، چه کسری از شکل دهم رنگی است؟



(۳)

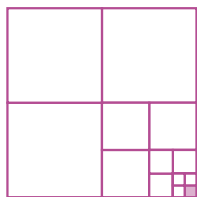


(۲)

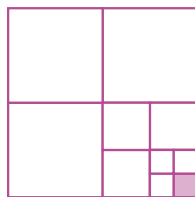


(۱)

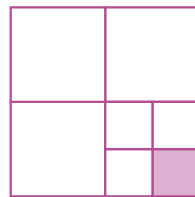
۱۲- طول ضلع هر مربع بزرگ ۱ واحد است. مجموع مساحت قسمت‌های رنگی در شکل اول را پیدا کنید.



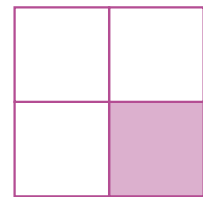
(۴)



(۳)

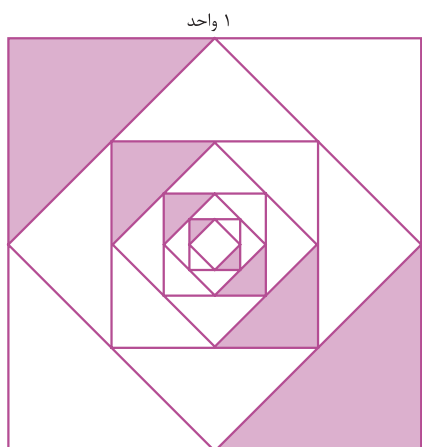


(۲)

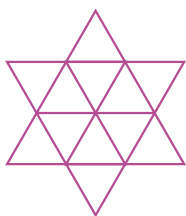


(۱)

۱۳- در شکل مقابل طول ضلع مربع بزرگ ۱ واحد است. مجموع مساحت‌های قسمت رنگی را پیدا کنید.



۱۴- در شکل مقابل چند مثلث می‌توان شمرد؟



۱۵- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر)

الف)  $\frac{1}{50} + \frac{1}{500} + \frac{1}{5000} + \dots + \frac{1}{500000000}$

ب)  $\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots + \frac{1}{15625}$

پ)  $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 99$

ت)  $5 + 10 + 15 + 20 + \dots + 200$

۱۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $100 - 99 + 98 - 97 + \dots + 2 - 1$

ب)  $0/1 + 0/2 + 0/3 + 0/4 + \dots + 0/10$

پ)  $35 + 36 + 37 + \dots + 90$

ت)  $\frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{5 \times 6} + \frac{1}{6 \times 7}$

ث)  $\frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$

۱۷- اگر مجموع اعداد فرد ۱ تا ۳۰۰ را از مجموع اعداد زوج ۱ تا ۳۰۰ کم کنیم، حاصل برابر چه عددی می‌شود؟

۱۸- اگر عدد ۲ را ۵۰ بار در خودش ضرب کنیم، یکان عدد حاصل برابر چه عددی خواهد شد؟

۱۹- اگر عدد ۳ را ۴۰ بار در خودش ضرب کنیم، یکان عدد حاصل برابر چه عددی خواهد شد؟

۲۰- اگر عدد ۴ را ۲۰ بار در خودش ضرب کنیم، یکان عدد حاصل برابر چه عددی خواهد شد؟

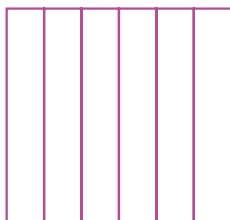
۲۱- در یک صفحه‌ی شطرنج چند مربع می‌توان شمرد؟

۲۲- به وسیله‌ی سکه‌های ۱۰۰ تومانی، ۵۰۰ تومانی و ۱۰۰۰ تومانی به چند طریق می‌توانیم ۲۰۰۰ تومان را تهیه کنیم؟ (لازم نیست حتماً از همه‌ی سکه‌ها استفاده کنیم.)

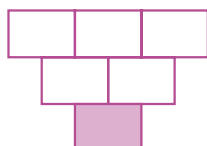
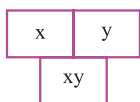
۲۳- طول و عرض یک مستطیل اعداد طبیعی هستند. اگر ۵ برابر مساحت مستطیل با دو برابر محیط آن، از نظر عددی برابر باشند، طول و عرض مستطیل چه قدر است؟

۲۴- چند عدد دورقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن‌ها ۹ باشد؟

۲۵- چند عدد سه رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن‌ها ۲۵ باشد؟



۲۶- مربع مقابل به ۶ مستطیل یکسان تقسیم شده است. اگر محیط یکی از مستطیل‌ها ۲۸ cm باشد، مساحت مربع را پیدا کنید.



۲۷- در مستطیل‌های شکل طرف راست، عددهای طبیعی بزرگ‌تر از واحد می‌گذاریم و مطابق شکل طرف چپ عمل می‌کنیم. کدام عدد ممکن نیست در مستطیل رنگی باشد؟

۹۰ (۴)

۱۴۵ (۳)

۱۰۰ (۲)

۸۸ (۱)

۲۸- گل‌فروشی ۱۰۲ شاخه‌ی گل دارد که شامل ۲۴ گلایل سفید، ۴۲ گلایل قرمز و ۳۶ گلایل صورتی است. او می‌خواهد با استفاده از تمام این گل‌ها، چند دسته‌گل یکسان درست کند. او حداکثر چند دسته‌گل می‌تواند درست کند؟ (سلام ۹۲)

۲۹- در یک رشته چراغ چشمک‌زن، فاصله‌ی هر دو چراغ ۶ cm است. چراغ‌ها رنگی هستند و به ترتیب زیر روی رشته قرار گرفته‌اند:

... ، سبز، قرمز، قرمز، سبز، سبز، قرمز، قرمز، قرمز، قرمز

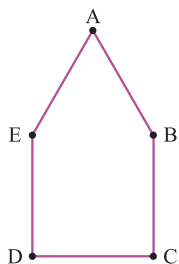
و همین‌طور هر دو چراغ قرمز با سه چراغ سبز دنبال می‌شود. فاصله‌ی بین سومین چراغ قرمز و بیست و یکمین چراغ قرمز چند سانتی‌متر است؟

(انرژی اتمی ۹۲)

۳۰- قورباغه‌ای روی محور اعداد صحیح و در نقطه‌ی ۷- نشسته است. او در هر جهش، ابتدا یک واحد به سمت راست، سپس دو واحد به

سمت چپ و به همین ترتیب سه واحد به سمت راست و چهار واحد به سمت چپ و ... می‌پرد. در جهش چهل و پنجم، این قورباغه در چه

نقطه‌ای قرار دارد؟



۳۱- ۶ رنگ داریم و می‌خواهیم هر یک از رأس‌های پنج‌ضلعی ABCDE را با یکی از آن‌ها رنگ بزنیم؛ به طوری

که هیچ دو رأسی که با یک قطر به هم متصل هستند، رنگ‌های یکسانی نداشته باشند. به چند طریق این کار

(سلام ۹۱)

امکان پذیر است؟

۳۲- روی محیط یک دایره، ۷ نقطه با فاصله‌های مساوی قرار دارند. به چند طریق می‌توانیم ۳ نقطه از آن‌ها را انتخاب کنیم، به طوری که

(سلام ۹۱)

مثلث تشکیل شده توسط آن‌ها متساوی‌الساقین نباشد؟

۳۳- در شکل زیر، داخل هر دایره عددی صحیح قرار می‌دهیم، طوری که مجموع اعداد هر سه دایره‌ی متوالی (پشت سر هم) برابر ۳۰ شود.

(سلام ۹۱)

مجموع اعداد دایره‌های رنگی را پیدا کنید.



۲	۵			
			۱	*
	۳		۴	
		۴		
۳				۱

۳۴- می‌خواهیم در خانه‌های جدول مقابل، اعداد ۱ تا ۵ را بنویسیم، به طوری که در هر سطر و در هر ستون، همه‌ی اعداد ظاهر شوند. عدد واقع در خانه‌ی مشخص‌شده با علامت \* چند است؟ (انرژی اتمی ۹۱)

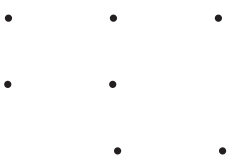
۳۵- در جمع شش نفره‌ی علی، آرش، سینا، حمید، پویا و پارسا، می‌دانیم علی و آرش با هم دوست هستند. هم‌چنین سینا، حمید و پویا به ترتیب ۲، ۳ و ۴ دوست دارند. پارسا با چند نفر از این جمع دوست است؟ (توجه داشته باشید کسی با خودش دوست نیست!) (انرژی اتمی ۸۹)

۳۶- یک دامدار تعدادی گوسفند و مرغ دارد. او تعداد گوسفندهای خود را ۳ برابر و تعداد مرغ‌های خود را نصف می‌کند و مشاهده می‌کند که تعداد پاهای حیوانات، روی هم دو برابر می‌شود. تعداد اولیه‌ی مرغ‌ها چند برابر تعداد اولیه‌ی گوسفندان بوده است؟ (انرژی اتمی ۸۹)

۳۷- در شکل زیر، فاصله‌ی نقاط افقی و عمودی کنار هم، برابر یک واحد است. چند مثلث به مساحت یک واحد می‌توان یافت به طوری که رأس‌های آن‌ها متعلق به نقاط شکل باشند؟ (انرژی اتمی ۹۰)



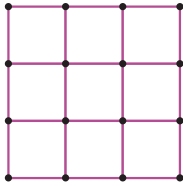
۳۸- هفت نقطه مطابق شکل در یک صفحه قرار گرفته‌اند. با استفاده از این نقاط چند مثلث مختلف می‌توان ساخت به طوری که هر ۳ رأس مثلث‌ها از این نقاط باشند؟ (انرژی اتمی ۸۹)



۳۹- در یک اردوی دانش‌آموزی، از بین هر ۳ دانش‌آموزی که انتخاب می‌کنیم، حداقل یکی از آن‌ها عینک دارد. می‌دانیم در این اردو ۴۰ دانش‌آموز عینک دارند. حداکثر چند دانش‌آموز به اردو آمده‌اند؟ (سلام ۹۰)

۴۰- اعداد طبیعی را به ترتیب زیر چیده‌ایم؛ عدد ۱۳۸۸ در کدام ستون و کدام ردیف آن قرار می‌گیرد؟ (سلام ۸۹)

۱	۲	۳	۴	۵	۶		
		۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸		
		۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰		



۴۱- در شکل مقابل، ۹ مربع به ضلع واحد دیده می‌شوند. چندضلعی‌هایی که محیط آن‌ها برابر ۸ است، چندتا هستند؟  
(مدارس هماهنگ)

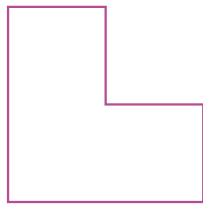
۴۲- یک روباه در تعقیب خرگوشی است که  $\frac{7}{6}$  متر از او جلوتر است. روباه با هر پرش  $\frac{5}{5}$  متر و خرگوش با هر پرش  $\frac{2}{2}$  متر جلو می‌روند. اگر فاصله‌ی خرگوش تا لانه‌اش ۵ متر باشد، آیا خرگوش می‌تواند به لانه برسد؟

۴۳- علی و رضا در مسابقه‌ی دوی ۱۰۰ متر شرکت کردند. در مسابقه‌ی اول، علی با اختلاف ۱۰ متر برنده شد. در مسابقه‌ی دوم، علی ۱۱ متر عقب‌تر ایستاد. این بار چه کسی برنده می‌شود؟ با چه اختلافی؟

۴۴- ۱۰ جعبه‌ی قند یک‌شکل داریم که درون هر جعبه، ۱۰ حبه‌قند وجود دارد. وزن حبه‌قندهای درون جعبه‌ها ۱۰ گرم است. فقط در یکی از این ۱۰ جعبه، وزن حبه‌قندها ۹ گرم است. چگونه می‌توانیم فقط با یک بار وزن کردن، جعبه‌ای را که شامل حبه‌قندهای ۹ گرمی است، پیدا کنیم؟

۴۵- یک شیر آب، بالای یک استخر خالی از آب وجود دارد. شیر آب را باز می‌کنیم. با زیادشدن تدریجی فشار آب، مشاهده می‌کنیم که آب درون استخر هر ۵ دقیقه ۲ برابر می‌شود. اگر پس از گذشت یک ساعت استخر پر شود، دقیقه‌ی چندم آب استخر به وسط رسیده است؟

۴۶- شکل مقابل،  $\frac{3}{4}$  از یک مربع را نشان می‌دهد. شکل را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید، به



طوری که قسمت‌های ایجادشده بر هم منطبق باشند.

۴۷- قیمت هر اردک ۲۰۰۰ تومان، هر مرغ ۱۰۰۰ تومان و هر ۱۰ گنجشک، هزار تومان است. شخصی با ۲۵ هزار تومان ۲۵ پرنده شامل هر سه نوع آن‌ها خرید. او از هر پرنده چندتا خریده است؟



۱- اگر تکرار ارقام مجاز باشد، با رقم‌های ۲، ۳ و ۴، چند عدد ۳ رقمی می‌توانیم بسازیم؟

۲۷ (۴)

۲۴ (۳)

۲۱ (۲)

۲۰ (۱)

۲- حاصل عبارت  $\frac{1}{7} + \frac{1}{7 \times 7} + \frac{1}{7 \times 7 \times 7} + \dots + \frac{1}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7}$  برابر است با:

$\frac{32158}{228412}$  (۴)

$\frac{23108}{117649}$  (۳)

$\frac{16204}{117649}$  (۲)

$\frac{19608}{117649}$  (۱)

۳- باغچه‌ای داریم مستطیل‌شکل، به طول ۱۰ m و عرض ۷ m. می‌خواهیم دور‌تادور باغچه را به فاصله‌ی ۳ متر از لبه‌ها، نرده بکشیم. چند متر نرده لازم است؟

۵۸ (۴)

۲۰۸ (۳)

۱۳۰ (۲)

۴۶ (۱)

۴- در الگوی روبه‌رو، عدد بعدی کدام است؟

$-6, +15, -\frac{75}{2}, \frac{375}{4}, ?$

$-\frac{1025}{16}$  (۴)

$-\frac{1875}{16}$  (۳)

$-\frac{1225}{8}$  (۲)

$-\frac{1875}{8}$  (۱)

۵- چند عدد ۲ رقمی وجود دارد که مجموع ارقام آن‌ها برابر ۱۰ است؟

۶ (۴)

۹ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

۶- اگر  $A = \underbrace{9 \times 9 \times 9 \times 9 \times \dots \times 9}_{40 \text{ بار}}$  آن‌گاه رقم یکان عدد A برابر است با:

۷ (۴)

۱ (۳)

۹ (۲)

۳ (۱)

۷- ۲۰ لامپ خاموش داریم. به چند طریق می‌توانیم ۱۸ لامپ را روشن کنیم؟

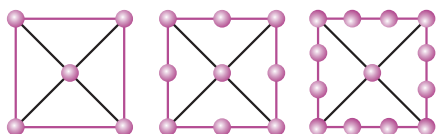
۷۲ (۴)

۳۶ (۳)

۱۹۰ (۲)

۲۱۰ (۱)

۸- با توجه به شکل‌های زیر، تعداد دایره‌های شکل دهم چندتا است؟



۵۱ (۲)

۳۹ (۱)

۴۱ (۴)

۴۷ (۳)

۹- وقتی ۸۰ درصد از ظرفی خالی است، ۱۸۰ لیتر کم‌تر از زمانی است که ۸۰ درصد از ظرف پُر است. گنجایش ظرف چه قدر است؟

۴۰۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۳۰۰ (۲)

۲۴۰ (۱)

$(3 \times 37) + (6 \times 37) + (9 \times 37) + (12 \times 37) + \dots + (27 \times 37)$

۱۰- رقم یکان عدد مقابل چیست؟

۹ (۴)

۳ (۳)

۷ (۲)

۵ (۱)

## پاسخ‌نامه پرسش‌های تشریحی

۱- الف) ۱۰ طریق

$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$

ب)

$(1+7+6+\dots+1) + (7+6+5+\dots+1) + (6+5+4+\dots+1) + (5+4+3+2+1) + (4+3+2+1) + (3+2+1) + (2+1) + 1 = 120$

پ)

$1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + \dots + (\frac{1}{2048} + \frac{1}{2048}) = 1 + 1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1024}) = 2 + \frac{1023}{1024} = \frac{3071}{1024}$

۲-

$(171 \times 4) - 1 = 683$

۳- الف)

$(5 \times 5) + 1 = 26$

ب)

$(677 \times 677) + 1 = 458230$

پ)

$3 \quad \overset{+3}{\curvearrowright} \quad 6 \quad \overset{+9}{\curvearrowright} \quad 15 \quad \overset{+27}{\curvearrowright} \quad 42 \quad \overset{+81}{\curvearrowright} \quad 123 \quad \overset{+243}{\curvearrowright} \quad 366$

ت)

$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

ث) هر عدد طبیعی ۴ بار در خودش ضرب شده است، پس ششمین عدد طبیعی برابر است با:



$$\begin{array}{cccccc}
 & \times \frac{2}{3} & & \times \frac{2}{3} & & \times \frac{2}{3} \\
 \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{9} & \frac{2}{27} & \frac{4}{81} & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \frac{1+1}{1 \times 1} & \frac{2+2}{2 \times 2} & \frac{3+3}{3 \times 3} & \frac{4+4}{4 \times 4} & \frac{5+5}{5 \times 5} & \frac{6+6}{6 \times 6} \\
 \frac{7+7}{7 \times 7} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7} & & & & & \\
 2, 5, 8, 11, \dots & & & & & 
 \end{array}$$

(ج)  
(چ)

پس عدد بعدی برابر است با:

(۴- الف)

عدد اول = ۲

عدد دوم = ۲+۳

عدد سوم = ۲+۳+۳

عدد چهارم = ۲+۳+۳+۳

⋮

عدد صدم =  $2 + \underbrace{(3+3+\dots+3)}_{3 \times 99} = 2 + (3 \times 99) = 299$

۱, ۶, ۱۱, ۱۶, ...

(ب)

عدد اول = ۱

عدد دوم = ۱+۵

عدد سوم = ۱+۵+۵

عدد چهارم = ۱+۵+۵+۵

⋮

عدد صدم =  $1 + \underbrace{(5+5+\dots+5)}_{5 \times 99} = 1 + (5 \times 99) = 496$

(پ) ۷۰۳ (مانند قسمت ب)

(ت) ۹۹۵ (مانند قسمت ب)

(ث) اعداد ۴ تا ۴ تا تکرار می‌شوند. چون باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۰۰ بر ۴ برابر صفر است، پس عدد صدم همان عدد چهارم، یعنی ۷ است.

(ج) اعداد ۳ تا ۳ تا تکرار می‌شوند. چون باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۱۰۰ بر عدد ۳ برابر یک است، پس عدد صدم همان عدد اول، یعنی ۱ است.

(چ) ۱۰ (مانند قسمت ج)

۵- در رشته‌اعداد اول، عددها ۶ تا ۶ تا اضافه می‌شوند و در رشته‌اعداد دوم، عددها ۸ تا ۸ تا اضافه می‌شوند. کوچک‌ترین عددی که هم بر ۶ و

هم بر ۸ بخش‌پذیر است، عدد ۲۴ می‌باشد. پس:

۲۲: اولین عدد مشترک

۲۲+۲۴: دومین عدد مشترک

۲۲+۲۴+۲۴: سومین عدد مشترک

⋮

دویستمین عدد مشترک:  $22 + \underbrace{(24+24+\dots+24)}_{24 \times 199} = 22 + (24 \times 199) = 4798$

۶- در رشته‌اعداد اول عددها ۲ تا ۲ تا، در رشته‌اعداد دوم عددها ۳ تا ۳ تا و در رشته‌اعداد سوم، عددها ۶ تا ۶ تا اضافه می‌شوند. کوچک‌ترین عددی که هم بر ۲، هم بر ۳ و هم بر ۶ بخش‌پذیر است، عدد ۶ می‌باشد، پس:

۱۳: اولین عدد مشترک

۱۳+۶: دومین عدد مشترک

۱۳+۶+۶: سومین عدد مشترک

⋮

$$۱۳ + \overbrace{(۶+۶+\dots+۶)}^{۶ تا ۹۹} = ۱۳ + (۶ \times ۹۹) = ۶۰۷$$

۷- الف) در هر شکل، دو گلوله به تعداد گلوله‌ها افزوده می‌شود تا شکل بعدی به دست آید. چون شکل اول ۳ گلوله دارد، پس تعداد گلوله‌های

$$۳ + (۱۹ \times ۲) = ۴۱ \quad \text{شکل بیستم برابر است با:}$$

ب) در هر شکل، چهار گلوله به تعداد گلوله‌ها افزوده می‌شود تا شکل بعدی به دست آید. چون شکل اول یک گلوله دارد پس تعداد گلوله‌های

$$۱ + (۱۹ \times ۴) = ۷۷ \quad \text{شکل بیستم برابر است با:}$$

$$۷ + (۱۹ \times ۶) = ۱۲۱ \quad \text{پ) مانند قسمت قبل:}$$

$$۱ = \text{تعداد گلوله‌های شکل ۱} \quad \text{ت) داریم:}$$

$$۱+۲ = \text{تعداد گلوله‌های شکل ۲}$$

$$۱+۲+۳ = \text{تعداد گلوله‌های شکل ۳}$$

$$۱+۲+۳+۴ = \text{تعداد گلوله‌های شکل ۴}$$

⋮

$$۲۰ = \text{تعداد گلوله‌های شکل } ۲۰ = ۱+۲+۳+\dots+۲۰ = \frac{۲۰ \times ۲۱}{۲} = ۲۱۰$$

۸- الف)

شماره‌ی شکل	تعداد چوب‌کبریت‌ها
(۱)	$۱ \times ۴ = ۴$
(۲)	$۲ \times ۴ = ۸$
(۳)	$۳ \times ۴ = ۱۲$
⋮	⋮
(۱۰)	$۱۰ \times ۴ = ۴۰$

۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ...

ب) اگر تعداد چوب‌کبریت‌های هر شکل را بنویسیم، دنباله‌ی عددی مقابل تشکیل می‌شود:

$$۴ + (۹ \times ۳) = ۳۱$$

که عدد دهم دنباله‌ی بالا برابر است با:

پ)

شماره‌ی شکل	تعداد چوب‌کبریت‌ها
(۱)	۵
(۲)	$۵+۵=۱۰$
(۳)	$۵+۵+۵=۱۵$
⋮	⋮
(۱۰)	$\overbrace{۵+۵+\dots+۵}^{۱۰تا} = ۵ \times ۱۰ = ۵۰$

۴: تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱

۲+۴: تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۲

۴+۲+۴: تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۳

۲+۴+۲+۴: تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۴

⋮

۳۰: تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰:  $(۴+۴+۴+۴+۴)+(۲+۲+۲+۲+۲)=۳۰$

(ت)

(ث)

شماره‌ی شکل	تعداد چوب‌کبریت‌ها
(۱)	$۶+۶$
(۲)	$۱۲+۱۲$
(۳)	$۲۴+۲۴$
(۴)	$۴۸+۴۸$
⋮	⋮
(۱۰)	$۳۰۷۲+۳۰۷۲=۶۱۴۴$

۹- الف)

۱ = تعداد نقطه‌های شکل ۱

$۱+(۱ \times ۴)$  = تعداد نقطه‌های شکل ۲

$۱+(۱ \times ۴)+(۲ \times ۴)$  = تعداد نقطه‌های شکل ۳

$۱+(۱ \times ۴)+(۲ \times ۴)+(۳ \times ۴)$  = تعداد نقطه‌های شکل ۴

⋮

$۱۰$  = تعداد نقطه‌های شکل ۱۰:  $۱+(۱ \times ۴)+(۲ \times ۴)+(۳ \times ۴)+\dots+(۹ \times ۴)=۱+۴(۱+۲+۳+\dots+۹)=۱+۴\left(\frac{۹ \times ۱۰}{۲}\right)=۱۸۱$

$۱+۳(۱+۲+۳+\dots+۹)=۱۳۶$

(ب) اگر مانند قسمت (الف) عمل کنیم خواهیم داشت:

۱۰- در هر ردیف تعداد مربع‌های رنگی، یکی بیشتر از تعداد مربع‌های سفید است؛ پس در مجموع ۲۰۰ مربع رنگی بیشتر از مربع‌های سفید وجود دارد.

$$\frac{2}{6}, \frac{4}{14}, \frac{6}{22}, \dots, \frac{2n}{8n-2}$$

-۱۱

پس در شکل دهم:  $\frac{2(10)}{8(10)-2} = \frac{20}{78}$  یا همان  $\frac{10}{39}$  شکل، رنگی است.

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \frac{1}{4096} = \frac{1365}{4096}$$

-۱۲

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} = \frac{85}{256}$$

-۱۳

۱۴-۲۰ تا

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{500} = \frac{11}{500}$$

۱۵- الف)

$$\frac{1}{50} + \frac{1}{500} + \frac{1}{5000} = \frac{111}{5000}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد صفرهای مخرج با تعداد یک‌های صورت برابر است؛ پس حاصل عبارت نهایی برابر است با:

$$\frac{1111111111}{5000000000}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{6}{25}$$

ب)

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} = \frac{31}{125}$$

$$\frac{3906}{15625}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مخرج کسرها از ۴ برابر صورت کسرها، یکی بیشتر است؛ پس حاصل عبارت نهایی برابر است با:

پ) ۱۶۸۳

ت) ۴۱۰۰

$$\underbrace{(100-99)}_1 + \underbrace{(98-97)}_1 + \dots + \underbrace{(2-1)}_1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{1 تا 50} = 50$$

۱۶- الف) اعداد را دوتا دوتا جدا می‌کنیم:

$$\frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{100}{10} = \frac{1+2+3+\dots+100}{10} = \frac{50 \cdot 50}{10} = 50 \cdot 5$$

ب)

پ) کافی است حاصل عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$(1+2+3+\dots+90) - (1+2+3+\dots+34) = \left(\frac{90 \times 91}{2}\right) - \left(\frac{34 \times 35}{2}\right) = 3500$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$$

ت)

$$\frac{1}{7 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{1}{9 \times 10} = \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{7} - \frac{1}{10} = \frac{3}{70}$$

ث)

$$(2+4+6+\dots+300) - (1+3+5+\dots+299) = (2-1) + (4-3) + (6-5) + \dots + (300-299) = \underbrace{1+1+1+\dots+1}_{1 تا 150} = 150$$

۱۷-

۱۸- داریم:

۲

$$2 \times 2 = 4$$

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

⋮

اگر دقت کنید، یکان اعداد حاصل ۴ تا ۴ تکرار می‌شوند. پس کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۵۰ را بر ۴ پیدا کنیم که برابر ۲ است. پس

اگر عدد ۲ را ۵۰ بار در خودش ضرب کنیم، یکان عدد حاصل با یکان عدد ۴ برابر است.

۱۹- داریم:

۳

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times 3 \times 3 = 27$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$$

یکان اعداد حاصل ۴ تا ۴ تا تکرار می‌شوند. چون باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد ۴۰ بر ۴ برابر صفر است، پس یکان عدد حاصل از ضرب ۴۰ بار عدد ۳ در خودش، با یکان عدد  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  یعنی ۱، برابر است.

۲۰- داریم:

۴

$$4 \times 4 = 16$$

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

:

بنابراین مشاهده می‌شود اگر تعداد ۴‌هایی که در هم ضرب شده‌اند فرد باشد، یکان عدد حاصل ۴ و اگر تعداد ۴‌ها زوج باشد، یکان عدد حاصل ۶ است. چون ۲۰ عددی زوج است، پس یکان حاصل از ضرب ۲۰ بار عدد ۴ در خودش برابر ۶ است.

$$(8 \times 8) + (7 \times 7) + (6 \times 6) + (5 \times 5) + (4 \times 4) + (3 \times 3) + (2 \times 2) + (1 \times 1) = 204 \quad -21$$

۲۲- ۹ طریق

۱۰۰ تومانی	۵۰۰ تومانی	۱۰۰۰ تومانی	۲۰۰۰ تومان
۰	۰	۲	۲۰۰۰
۲۰	۰	۰	۲۰۰۰
۰	۴	۰	۲۰۰۰
۱۵	۱	۰	۲۰۰۰
۱۰	۲	۰	۲۰۰۰
۵	۳	۰	۲۰۰۰
۰	۲	۱	۲۰۰۰
۱۰	۰	۱	۲۰۰۰
۵	۱	۱	۲۰۰۰

۲۳- طول ۴ و عرض ۱ است.

دهگان	یکان
۹	۰
۸	۱
۱	۸
۷	۲
۲	۷
۶	۳
۳	۶
۵	۴
۴	۵

صدگان	دهگان	یکان
۸	۸	۹
۹	۸	۸
۸	۹	۸
۹	۹	۷
۹	۷	۹
۷	۹	۹

۲۶- اگر عرض مستطیل‌ها را  $\bigcirc$  و طول مستطیل‌ها را  $\triangle$  فرض کنید، آن‌گاه  $\bigcirc = \triangle = ۶$  و  $\bigcirc + \triangle = ۱۴$  خواهد بود. از طریق راهبرد حدس و آزمایش به دست می‌آید:  $\bigcirc = ۲$  و  $\triangle = ۱۲$ . پس مساحت مربع برابر خواهد بود با:

$$۱۲ \times ۱۲ = ۱۴۴ \text{ cm}^2$$

۲۸- ۶ دسته‌گل می‌تواند درست کند.

۲۹- ۲۷۰ cm (با کمی دقت متوجه خواهید شد که چراغ سوم تا چراغ بیست و یکم شامل ۴۵ تا ۶ سانتی‌متر است.)

$$-۷ + ۱ - ۲ + ۳ - ۴ + \dots + ۴۳ - ۴۴ + ۴۵$$

۳۰- کافی است عبارت مقابل را محاسبه کنیم:

$$= -۷ + (۱-۲) + (۳-۴) + \dots + (۴۳-۴۴) + ۴۵$$

$$= -۷ + \underbrace{(-۱-۱-۱-\dots-۱)}_{-۱ \text{ تا } ۲۲} + ۴۵ = -۷ - ۲۲ + ۴۵ = ۱۶$$

بنابراین قورباغه در نقطه‌ی ۱۶+ قرار می‌گیرد.

۲۸۸۰ - ۳۱

۳۲- فقط ۱۴ مثلث می‌توان یافت که متساوی‌الساقین نیستند.

۳۳- ۲۵ (توجه داشته باشید که هر انتخابی از اعداد صحیح انجام دهید که شرایط مسئله را برقرار کند، در هر صورت مجموع اعداد دایره‌های رنگی، ۲۵ خواهد شد).

۳۴- ۵

۲	۵	۱	۳	۴
۴	۲	۳	۱	۵
۱	۳	۵	۴	۲
۵	۱	۴	۲	۳
۳	۴	۲	۵	۱

۳۵- پارسا با ۳ نفر دوست است.

۳۶- تعداد گوسفندان این دامدار را با  $\bigcirc$  و تعداد مرغ‌های او را با  $\triangle$  نمایش می‌دهیم. در این صورت تعداد پاهای حیوانات او برابر  $4\bigcirc + 2\triangle$  خواهد بود. اگر او تعداد گوسفندان خود را ۳ برابر و تعداد مرغ‌های خود را نصف کند، تعداد پاهای حیوانات دو برابر می‌شود. یعنی:

$$3\bigcirc + \frac{1}{2}\triangle \xrightarrow{\text{تعداد پاها}} 4(3\bigcirc) + 2(\frac{1}{2}\triangle) = 12\bigcirc + \triangle \Rightarrow 12\bigcirc + \triangle = 2(4\bigcirc + 2\triangle)$$

$$\Rightarrow 12\bigcirc + \triangle = 8\bigcirc + 4\triangle \Rightarrow 4\bigcirc = 3\triangle \Rightarrow \frac{\triangle}{\bigcirc} = \frac{4}{3}$$

۳۷- ۳۰

۳۸- ۲۲

۳۹- ۴۲

۴۰- ستون چهارم، ردیف ۲۳۲

۴۱- ۲۶ تا

۴۲- خرگوش در پرش ۲۵م به لانه می‌رسد و روباه در پرش ۲۵م  $\frac{1}{10}$  متر با لانه فاصله دارد؛ پس روباه نمی‌تواند خرگوش را بگیرد.

۴۳- علی دوباره برنده می‌شود با اختلاف  $\frac{1}{10}$  متر، زیرا:

رضا	علی
۹۰	۱۰۰
x	۱۱۱

$$x = \frac{111 \times 90}{100} = \frac{9990}{100} = 99.9$$

یعنی زمانی که علی به نقطه‌ی پایان رسیده است، رضا  $\frac{99}{90}$  متر دویده است؛ یعنی این بار علی با اختلاف  $\frac{1}{10}$  متر برنده می‌شود.

۴۴- جعبه‌ها را از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری می‌کنیم. از جعبه‌ی شماره‌ی ۱، یک قند، از جعبه‌ی شماره‌ی ۲، دو قند، از جعبه‌ی شماره‌ی ۳، سه قند و به همین ترتیب از جعبه‌ی شماره‌ی ۱۰، ده قند خارج کرده و همه‌ی قندهای خارج‌شده را روی ترازو می‌گذاریم. هر عددی را که ترازو نشان دهد از ۱۰۰۰ کم می‌کنیم. عدد حاصل شماره‌ی جعبه‌ای است که در آن قندهای ۹ گرمی وجود دارد.

۴۵- دقیقه‌ی پنجاه و پنجم

۴۶-

—	—		
—	x		
○	x	x	△
○	○	△	△

۴۷- ۱۰ گنجشک، ۶ مرغ و ۹ اردک.

# پاسخ نامه پرسش‌های ۴ گزینه‌ای

۱- گزینه ۴

۲- گزینه ۱

از راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7 \times 7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{49} = \frac{10}{49}$$

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7 \times 7} + \frac{1}{7 \times 7 \times 7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{49} + \frac{1}{343} = \frac{57}{343}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، مخرج کسرهای به دست آمده، از ۶ برابر صورت آن‌ها یکی بیشتر است؛ پس به دلیل این که  $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 117649$

$$(117649 - 1) \div 6 = 19608$$

است، صورت آن برابر است با:

$$10 + 3 + 3 = 16$$

۳- گزینه ۴

$$7 + 3 + 3 = 13$$

$$\text{طول نرده} = 2(13 + 16) = 58 \text{ m}$$

$$(-6) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = 15$$

داریم:

۴- گزینه ۱

$$15 \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{75}{7}$$

$$\left(-\frac{75}{7}\right) \times \left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{375}{49}$$

$$\frac{375}{49} \times \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{1875}{343}$$

$$19, 91, 28, 82, 37, 73, 46, 64, 55$$

عبارت‌اند از:

۵- گزینه ۳

اگر ۹ به تعداد دفعات فرد در خودش ضرب شود، یکان عدد حاصل برابر ۹ و اگر به تعداد دفعات زوج در خودش ضرب

۶- گزینه ۳

شود، یکان عدد حاصل برابر ۱ خواهد بود. بنابراین گزینه‌ی (۳) صحیح می‌باشد.

تعداد حالت‌هایی که می‌توانیم ۱۸ لامپ را روشن کنیم با تعداد حالت‌های ۲ لامپ برابر است (چون  $18 + 2 = 20$ ).

۷- گزینه ۲

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$$

بنابراین:

$$1 \text{ شکل}: 1 + (1 \times 4) = 5$$

۸- گزینه ۴

$$2 \text{ شکل}: 1 + (2 \times 4) = 9$$

$$3 \text{ شکل}: 1 + (3 \times 4) = 13$$

⋮

$$10 \text{ شکل}: 1 + (10 \times 4) = 41$$

$$\frac{60}{100} = \frac{180}{x} \Rightarrow x = 300$$

از مفهوم سؤال برمی‌آید که ۶۰ درصد ظرف حاوی ۱۸۰ لیتر است، پس:

۹- گزینه ۲

$$3 \times 37 = 111$$

داریم:

۱۰- گزینه ۱

$$6 \times 37 = 222$$

$$9 \times 37 = 333$$

⋮

$$27 \times 37 = 999$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$$

پس یکان عدد حاصل برابر است با یکان مجموع مقابل:

یعنی ۵.