فصل ۷: آمار و احتمال

- درس اوّل: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
- درس دوم: آمار توصیفی

- پدیدهٔ تصادفی
  - فضای نمونه ← $n(s)$
  - پیشامد تصادفی ← $n(A)$
  - $\subseteq$
  - ناسازگار: $P(A \cap B) = ۰$ ← $P(A \mid B) = ۰$
  - مستقل: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ← $P(A \mid B) = P(A)$
- قوانین احتمال
  - احتمال شرطی: احتمال رخ دادن A اگر B رخ دهد: $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  - $P(A \cup B)$: حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهند: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - $P(A \cap B)$: دو پیشامد A و B با هم رخ دهند
  - $P(A')$: پیشامد A رخ ندهد: $P(A') = ۱ - P(A)$
  - $P(A - B)$: فقط پیشامد A رخ دهد: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- شاخص‌های آماری
  - معیارهای گرایش به مرکز
    - میانگین: $\bar{x} = \dfrac{x_۱ + x_۲ + ... + x_n}{n}$
    - میانه
      - تعداد داده‌ها فرد: داده وسط
      - تعداد داده‌ها زوج: میانگین دو دادهٔ وسط
  - معیارهای پراکندگی
    - واریانس: $\sigma^۲ = \sum \dfrac{(x_i - \bar{x})^۲}{n}$ ← جذر ← انحراف معیار
    - دامنه تغییرات: اختلاف بین بیشترین و کمترین داده
    - ضریب تغییرات: $cv = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$
    - چارک‌ها
      - چارک اوّل: دادهٔ وسط داده‌های قبل از میانه
      - چارک دوم: داده وسط ← میانه
      - چارک سوم: دادهٔ وسط داده‌های بعد از میانه

درس اوّل: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

یادآوری: در سال‌های گذشته با مفاهیم زیر که مطالب مقدماتی و زیربنای موضوع بسیار مهم احتمال هستند، آشنا شده‌ایم. به‌عنوان یادآوری برای شروع مبحث احتمال، ابتدا به مطالب زیر توجه کنید.

پدیده‌ها در این عالم بر دو نوع‌اند: ۱. قطعی ۲. تصادفی

پدیده‌های قطعی آن‌هایی هستند که نتیجه وقوع آن‌ها از قبل بر ما بدون تردید معلوم است. به عنوان مثال می‌دانیم در پدیدهٔ رعد و برق، صدای رعد، دیرتر از نور برق به ما می‌رسد.

اما پدیده‌های تصادفی آن‌هایی هستند که نتیجه وقوعشان از قبل به‌صورت قطعی بر ما معلوم نیست. مانند آن‌که در پرتاب یک تاس نمی‌توانیم بگوییم چه عددی رو خواهد آمد.

اکثر پدیده‌های این عالم، تصادفی‌اند. شاخه‌ای از ریاضیات که تلاش دارد این‌گونه پدیده‌ها را تحتِ نظم در آورد تا بهتر بتوانیم آن‌ها را تفسیر و تحلیل کنیم، احتمال است.

فضای نمونه‌ای

درست است که در پرتاب تاس‌ها نمی‌توانیم به‌صورت قطعی پیش‌بینی کنیم چه عددی رو خواهد شد، اما مسلم است که این عدد، یکی از اعداد طبیعی یک تا شش خواهد بود (و مثلاً ۲۵ نخواهد بود!).

به مجموعهٔ تمام نتایج قابل پیش‌بینی از انجام آزمایش تصادفی، فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم.

به‌عنوان نمونه در پرتاب تاس داریم:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

پیشامد تصادفی

به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد تصادفی گوییم. به عنوان مثال در پرتاب یک تاس، $۲^۶=۶۴$ پیشامد داریم (تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی برابر است با ۲^n) که چند تای آن‌ها را می‌توان این‌گونه تعریف کرد: ۱. پیشامد آن‌که تاس عددی زوج بیاید $\{۲,۴,۶\}$، ۲. پیشامد آن‌که تاس عددی فرد بیاید $\{۱,۳,۵\}$، ۳. پیشامد آن‌که تاس عددی اوّل بیاید $\{۲,۳,۵\}$ و ... .

برآمد

به هر کدام از اعضای فضای نمونه‌ای یک برآمد می‌گوییم. به عنوان مثال در پرتاب یک تاس ۶ برآمد داریم، مانند برآمد (۱) یا (۲) یا ... .

یعنی:

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(s)=۶$$

منظور از رخداد یا وقوع یک پیشامد چیست؟

منظور، مشاهدهٔ عضوی از آن پیشامد به‌عنوان نتیجه آزمایش تصادفی است.

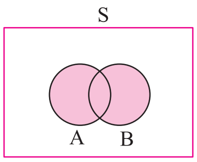
مثال:

تاسی را پرتاب کرده‌ایم و عدد ۳ رو شده‌است. چند پیشامد از فضای نمونه‌ای رخ داده است؟

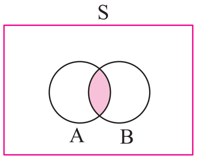
پاسخ: تمام پیشامدهایی که شامل عدد ۳ هستند، رخ داده‌اند. مثلاً پیشامد مضرب ۳ رخ داده‌است: $\{۳,۶\}$، پیشامد اعداد اوّل رخ داده‌است: $\{۲,۳,۵\}$، پیشامد اعداد فرد رخ داده‌است: $\{۱,۳,۵\}$ و ... . ولی اگر به این صورت پیش برویم، شمردن پیشامدهایی که رخ داده‌اند، خیلی زمان‌بر خواهد بود. بهتر است از تفکر متّمم استفاده کنیم، یعنی بگوییم کدام پیشامدها رخ نداده‌اند. معلوم است که آن‌ها باید یکی از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۴,۵,۶\}$ باشند، پس $۲^۵=۳۲$ پیشامد رخ نداده است. لذا $۶۴-۳۲=۳۲$ پیشامد رخ داده است.

جبر پیشامدها (اعمال روی پیشامدها)

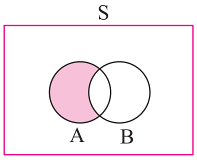
۱. $A\cup B$: پیشامد آن‌که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهند(یعنی یا A رخ بدهد یا B و یا هردو).



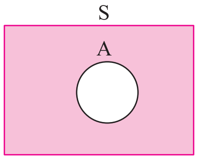
۲. $A\cap B$: پیشامد وقوع هم‌زمان A و B.



۳. $A-B$: پیشامد آن‌که A رخ بدهد، ولی B رخ ندهد.

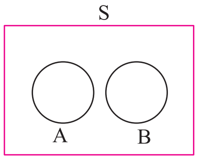


۴. A' یا A^c: پیشامد آن‌که A رخ ندهد.



دو پیشامد ناسازگار

دو پیشامد A و B را ناسازگار گوییم، هرگاه احتمال وقوع هم‌زمان آن‌ها صفر باشد؛ یعنی A و B نتوانند با هم رخ بدهند. به عنوان مثال در پرتاب تاس، اگر پیشامد A را پیشامد زوج بودن عدد رو شده $A=\{۲,۴,۶\}$ و پیشامد B را پیشامد فرد بودن آن تعریف کنیم $B=\{۱,۳,۵\}$، واضح است که این دو پیشامد ناسازگارند، زیرا در پرتاب یک تاس عدد رو شده نمی‌تواند هم‌زمان هم زوج باشد و هم فرد.



رابطهٔ اصلی احتمال

اصلی‌ترین رابطه‌ای که به کمک آن احتمال وقوع یک پیشامد را محاسبه می‌کنیم، رابطهٔ زیر است:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}\xrightarrow{\text{یعنی}}\text{احتمال وقوع پیشامد } A=\frac{\text{حالات مطلوب}}{\text{تمام حالات ممکن}}$$

۳ گام اساسی در حل مسائل احتمال

از رابطهٔ اساسی احتمال می‌فهمیم که برای حل هر مسئله باید ۳ گام زیر را به‌ترتیب انجام دهیم.

گام اوّل: تعیین تمام حالات ممکن از انجام آزمایش تصادفی (S یا $n(S)$).

گام دوم: تعیین تمام حالات مطلوب با توجه به آن چیزی‌که صورت مسئله احتمالش را از ما خواسته‌است (A یا $n(A)$).

گام سوم: محاسبهٔ احتمال از رابطهٔ اصلی آن

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال:

دو تاس را پشت سرهم پرتاب کرده‌ایم. احتمال آن‌را حساب کنید که مجموع اعداد رو شده بیشتر از ۱۰ باشند.

پاسخ: گام اوّل: $S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۱,۶),(۲,۱),\dots,(۲,۶),\dots,(۶,۶)\} \Rightarrow n(S)=۶\times۶=۳۶$

گام دوم: $A=\{(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\} \Rightarrow n(A)=۳$

گام سوم: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)} \Rightarrow P(A)=\dfrac{۳}{۳۶}=\dfrac{۱}{۱۲}$

رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع دو پیشامد (قانون جمع احتمالات)

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، آن‌گاه احتمال وقوع **حداقل** یکی از پیشامدهای A یا B از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

مثال:

احتمال قبولی دانش‌آموزی در درس ریاضی ۷۰ درصد، احتمال قبولی او در درس فیزیک ۷۵ درصد و احتمال قبولی او در هر دو درس ۶۵ درصد است. این دانش‌آموز با چه احتمالی حداقل در یکی از دو درس ریاضی یا فیزیک نمرهٔ قبولی خواهد گرفت؟

پاسخ:

$P(\text{ریاضی})=\dfrac{۷۰}{۱۰۰}$ و $P(\text{فیزیک})=\dfrac{۷۵}{۱۰۰}$

$P(\text{ریاضی}\cup\text{فیزیک})=P(\text{ریاضی})+P(\text{فیزیک})-P(\text{ریاضی}\cap\text{فیزیک})$

$P(\text{ریاضی}\cup\text{فیزیک})=\dfrac{۷۰}{۱۰۰}+\dfrac{۷۵}{۱۰۰}-\dfrac{۶۵}{۱۰۰}$

$P(\text{مطلوب})=\dfrac{۸۰}{۱۰۰}=٪۸۰$

مدل احتمال شرطی

فرض کنید قبل از انجام یک آزمایش تصادفی بدانیم یکی از پیشامدهای ممکن در فضای نمونه‌ای قطعاً رخ می‌دهد. واضح است که در این حالت هم فضای نمونه‌ای تغییر خواهد کرد (کوچک خواهد شد) و هم احتمالات آن فضا تغییر می‌کند. به چنین مدلی، **مدل احتمال شرطی** می‌گوییم. در حقیقت چراغ راهنمای ما برای فهمیدن این‌که مسئله داده شده مربوط به احتمال شرطی است، دیدن یکی از عبارت‌های «به شرط آن‌که»، «مشروط بر این‌که» و یا «اگر بدانیم» در صورت مسئله است.

مثال:

در پرتاب دو تاس سفید و قرمز با یکدیگر،

الف. مطلوب است محاسبه احتمال آن‌که مجموع اعداد رو شده مضربی از ۳ باشد؟

ب. اگر بدانیم حداقل یکی از دو تاس همواره شش خواهد آمد، احتمال آن‌که مجموع دو تاس مضربی از ۳ باشد چه‌قدر است؟

پاسخ: الف. طبق معمول ۳ گام اساسی برای حل مسئله را به‌ترتیب انجام می‌دهیم.

۱) $n(S)=۶\times۶=۳۶$

۲) $A=\{(۱,۲),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۶),(۴,۲),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۴),(۶,۳),(۶,۶)\} \Rightarrow n(A)=۱۲$

۳) $P(A)=\dfrac{۱۲}{۳۶}=\dfrac{۱}{۳}$

ب. قسمت (الف) معرّف یک مسئله معمولی احتمال بود، اما در قسمت (ب) با یک احتمال شرطی روبرو هستیم.

۱) کوچک شده $S=\{(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶),(۱,۶),(۲,۶),(۳,۶),(۴,۶),(۵,۶)\} \Rightarrow n(S)=۱۱$

۲) $A=\{(۶,۳),(۶,۶),(۳,۶)\} \Rightarrow n(A)=۳$

۳) $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{۳}{۱۱}$

رابطهٔ محاسبهٔ احتمال شرطی

همان‌طور که در مثال صفحه قبل دیدیم، پیشامد شش آمدن حداقل یکی از دو تاس (پیشامد B) حتماً رخ می‌دهد. در واقع در رابطهٔ اساسی احتمال $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$، در مدل احتمال شرطی، B نقش S را بازی می‌کند.

هم‌چنین در پاسخ به آن مثال دیدیم که ما باید از درون B (همان فضای نمونه‌ای کوچک شده) حالت‌های مطلوب خود را انتخاب کنیم (حالت‌هایی که مجموع اعداد رو شده، مضربی از ۳ باشد). پس درواقع در رابطهٔ اساسی احتمال به‌جای حالات مطلوب در صورت کسر، $n(A\cap B)$ را خواهیم داشت. یعنی به‌طور خلاصه احتمال وقوع پیشامد A به‌شرط وقوع قبلی پیشامد B که آن را با $P(A|B)$ نمایش دهیم، به‌صورت مقابل است:

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

حال اگر صورت و مخرج کسر را بر $n(S)$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$P(A|B)=\frac{\dfrac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(B)}{n(S)}}\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}(*)$$

اما همان‌طور که در پاسخ مثال مذکور نیز مشاهده کردیم، اغلب نیازی به استفاده از فرمول $(*)$ نداریم و مسائل احتمال شرطی با همان رابطهٔ اصلی $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ قابل پاسخ‌گویی هستند.

مثال:

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری‌که $P(A)=0/2$ ، $P(A\cup B)=0/6$ و $P(B|A)=0/1$ باشد، آن‌گاه $P(B)$ چه‌قدر است؟

پاسخ: در این مثال، مجبوریم از فرمول احتمال شرطی استفاده کنیم، زیرا به خود پیشامدهای A و B (برآمدهایشان) دسترسی نداریم، می‌دانیم:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Rightarrow 0/1=\frac{P(B\cap A)}{0/2}\Rightarrow P(B\cap A)=0/02\xrightarrow{\text{از طرفی}}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$0/6=0/2+P(B)-0/02\Rightarrow P(B)=0/42$$

پیشامدهای مستقل

دو پیشامد A و B را مستقل گوییم، هرگاه وقوع (یا عدم وقوع) یکی بر وقوع دیگری تأثیری نگذارد. به‌عنوان مثال، نتیجهٔ پرتاب‌های دو تاس از هم مستقل‌اند. یعنی اگر به عنوان مثال تاس اوّل عدد ۶ بیاید (یا نیاید) هیچ تأثیری در شش آمدن (یا نیامدن) عدد تاس دوم ندارد. یا تولد فرزندان یک خانواده از هم مستقل‌اند. مثلاً اگر فرزند اوّل پسر (یا دختر) باشد، هیچ تأثیری در دختر یا پسر شدن فرزند دوم ندارد. از این مثال‌ها در اطرافتان فراوان می‌بینید.

علامت اصلی مستقل بودن دو پیشامد: دیدیم که فرمول احتمال شرطی به صورت زیر است:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

اگر A و B مستقل باشند وقوع B روی A تأثیری ندارد، پس:

$$P(A|B)=P(A)$$

و خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

یعنی احتمال وقوع هم‌زمان دو پیشامد مستقل برابر است با حاصل ضرب احتمال‌های تک تک آن‌ها.

مثال:

۷۵ درصد افراد جامعه‌ای دارای چشم مشکی و ۴۰ درصد از افراد همان جامعه دارای گروه خونی A می‌باشند. اگر یک فرد به تصادف از میان آن‌ها انتخاب کنیم، چه‌قدر احتمال دارد که این فرد دارای چشم مشکی و گروه خونی A باشد؟

پاسخ: می‌دانیم گروه خونی افراد هیچ تأثیری در رنگ چشم آن‌ها ندارد. پس این دو پیشامد از هم مستقل‌اند، لذا داریم:

$$P(\text{چشم مشکی}, \text{گروه خونی } A) = P(\text{چشم مشکی}) \times P(\text{گروه خونی } A) \Rightarrow P(\text{مطلوب}) = \frac{۷۵}{۱۰۰} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} \Rightarrow P(\text{مطلوب}) = \frac{۳۰}{۱۰۰} = ۳۰\%$$

نکته: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آن‌گاه پیشامدهای A' و B' نیز مستقل خواهد بود. همچنین پیشامدهای $(A' \text{ و } B)$ و $(A \text{ و } B')$ هم مستقل می‌باشند.

اشتباهات رایج (رابطهٔ ناسازگاری با استقلال):

نباید ناسازگاری و استقلال را باهم اشتباه بگیریم. دو پیشامد ناسازگار هرگز با هم رخ نمی‌دهند $(P(A \cap B) = ۰)$ اما دو پیشامد مستقل، می‌توانند با هم رخ دهند، فقط این که روی هم تأثیری ندارند.

دو پیشامد وابسته: اگر وقوع پیشامد A (یا عدم وقوع آن) روی وقوع B تأثیر بگذارد، می‌گوییم A و B وابسته‌اند.

نکته: رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع هم‌زمان دو پیشامد وابسته از رابطهٔ احتمال شرطی به‌دست می‌آید:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$$

این رابطه به قانون «ضرب احتمالات» نیز معروف است.

مثال:

درون کیسه‌ای ۱۰ مهرهٔ سفید و ۷ مهره سیاه موجود است. دو مهره را به تصادف به‌صورت متوالی و بدون جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که اولی سفید و دومی سیاه باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ: این مثال، نمونه خوبی از دو پیشامد وابسته است. زیرا وقتی مهرهٔ اوّل را از کیسه خارج می‌کنیم روی مهرهٔ دوم تأثیر می‌گذارد (چون هم از تعداد کل مهره‌ها کم شده‌است و هم از یک رنگ خاص). می‌توان نوشت:

$$P(\text{اولی سفید، دومی سیاه}) = P(\text{اولی سفید}) \times P(\text{دومی سیاه} | \text{اولی سفید})$$

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{\overset{۵}{\cancel{۱۰}}}{۱۷} \times \frac{۷}{\underset{۸}{\cancel{۱۶}}} \Rightarrow P(\text{مطلوب}) = \frac{۳۵}{۱۳۶}$$

پیشامدهای تصادفی
- سازگار
  - مستقل: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
  - وابسته: $P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B)$
- ناسازگار: $P(A \cap B) = ۰$

مثال:

در کیسه‌ای ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه وجود دارد. ۳ مهره از آن خارج می‌کنیم. بدون آن‌که به رنگ آن‌ها نگاه کنیم، مهرهٔ چهارمی را نیز خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که مهرهٔ آخر سفید باشد، چه‌قدر است؟

پاسخ: در این‌گونه مثال‌ها می‌توانیم فرض کنیم اصلاً مهره‌ای از کیسه خارج نشده‌است (چون حالات مختلفی که ۳ مهره اوّل می‌توانند داشته باشند بسیار متنوع است). حال خیلی ساده، احتمال سفید بودن مهرهٔ آخری را حساب کنیم:

$$P(\text{مطلوب}) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

تمرین‌های امتحانی

۱. اگر A و B مستقل باشند و $P(A)=0/3$ و $P(B)=0/6$، $P(A\cup B)$ را حساب کنید.

۲. اگر A و B دو پیشامد مستقل از یک آزمون تصادفی باشند و $P(B)=2P(A)=0/8$ باشد، آن‌گاه $P(A'\cap B')$ چه‌قدر است؟

۳. در آزمایشگاهی ۵ موش سالم و ۳ موش دیابتی نگهداری می‌شود. اگر دو موش از محفظه گریخته باشند، چه‌قدر احتمال دارد فقط یکی از موش‌های فراری دیابتی باشد؟

۴. دو تاس متمایز را با هم پرتاب می‌کنیم. چه‌قدر احتمال دارد که هیچ‌کدام از اعداد رو شده مضرب ۳ نباشند؟

۵. در یک کلاس ۴۰ نفری، ۷ نفر فوتبالیست هستند. دو نفر به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر نفر اوّل فوتبالیست باشد، چه‌قدر احتمال دارد که نفر دوم هم فوتبالیست باشد؟

۶. اگر $P(A)=\frac{1}{6}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A|B)=\frac{1}{3}$ باشد، آن‌گاه $P(A\cup B)$ چه‌قدر است؟

۷. در پرتاب دو تاس با هم می‌دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فردند؟

۸. اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری‌که $A\subset B$، $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$، آن‌گاه $P(B|A')$ چه‌قدر است؟

۹. دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. در هر یک از حالات زیر مشخص کنید که آیا پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا خیر؟

الف. A پیشامد آن‌که تاس اوّل ۴ بیاید و B پیشامد آن‌که مجموع دو تاس ۱۰ شود.

ب. A پیشامد آن‌که تاس اوّل ۴ بیاید و B پیشامد آن‌که مجموع دو تاس ۷ شود.

۱۰. دو تاس را با هم می‌ریزیم. در حالی که عدد هر دو تاس با هم، مضرب ۳ نباشد، با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده، مضرب ۳ است؟

درس دوم: آمار توصیفی

هدف علم آمار، خلاصه کردنِ اطلاعات جمع‌آوری شده است. به‌عنوان مثال وقتی شما به‌جای نمرات مربوط به دروس مختلف، معّدلِ نمرات دروس را به کسی اعلام می‌کنید، آن شخص با شنیدن یک عدد، قضاوتِ تقریباً درستی درمورد نحوهٔ درس خواندن شما خواهد داشت. مثلاً اگر معّدل شما ۱۸ باشد واضح است که دانش‌آموز درس‌خوان و پرتلاشی بوده‌اید. به‌طور خلاصه می‌توان گفت: آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب معیارهای گرایش به مرکز و معیارهای پراکندگی می‌پردازد و به این صورت، اطلاعات بسیار مفیدی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده در اختیار ما قرار می‌دهد.

معیارهای گرایش به مرکز (مرکزی)

این معیارها عبارت‌اند از: میانگین، میانه و مُد (در کتاب درسی حرفی از مُد به میان نیامده است.)

میانگین $(\bar{x})$: مهم‌ترین شاخص مرکزی، میانگین است. درواقع میانگین، متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست. به‌همین سبب آن را میانگین وزنی هم می‌نامیم. میانگین به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

(x_i داده و n تعداد کل داده‌ها را نمایش می‌دهد.)

نمونه سؤال امتحانی فصل هفتم

ردیف	سؤالات	بارم
۱	ظرفی شامل ۲ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. مهره‌ای از آن خارج کرده و پس از مشاهدهٔ رنگ آن، آن را به جعبه برمی‌گردانیم و مجدداً مهره‌ای خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که فقط یک‌بار مهرهٔ سفید بیرون آمده باشد، چه‌قدر است؟	۱/۵
۲	در ظرفی ۴ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه و ۱ مهرهٔ سبز موجود است. در ظرف دیگر ۶ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سبز قرار دارد. به تصادف از هر ظرف یک مهره بیرون می‌آوریم، چه‌قدر احتمال دارد دو مهره هم‌رنگ نباشند؟	۲
۳	در امتحانات یک کلاس، ۲۰ درصد دانش‌آموزان در ریاضی، ۱۵ درصد در فیزیک و ۱۰ درصد در هر دو درس مردود شده‌اند. احتمال آن‌که دانش‌آموزی از این کلاس در درس فیزیک مردود شده باشد، مشروط به این‌که در درس ریاضی نیز تجدید شده باشد، چه‌قدر است؟	۱/۵
۴	خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. می‌دانیم که دو فرزند اوّل آن‌ها پسر است. احتمال آن‌که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشند، چه‌قدر است؟	۲
۵	پدر و مادری هر یک دارای یک ژن رنگ چشم مغلوب (b) و یک ژن رنگ چشم غالب B هستند و $P(B)=۳P(b)$. اگر این پدر و مادر دارای ۳ فرزند باشند، با کدام احتمال فقط یکی از فرزندان دارای ژن چشم مغلوب است؟	۲
۶	اگر میانگین و واریانس داده‌های $a+۶$ و $a+۴$ و $a+۲$ و a برابر باشند، واریانس داده‌های $a,۲a,۳a,۴a,۵a$ چقدر است؟	۲
۷	میانگین و انحراف معیار ۱۸ دادهٔ آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ می‌باشد. اگر داده‌های ۲۰ و ۲۷ و ۲۸ به آنان افزوده شود، واریانس ۲۱ دادهٔ جدید چقدر است؟	۲/۵
۸	در جدول فراوانی زیر، میانگین به‌صورت $\bar{x}=۱۲+۲\bar{a}$ محاسبه شده است. $\bar{a}$ چه قدر است؟ x: ۱۶، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ۸ f: ۳، ۹، ۵، ۵، ۲	۲
۹	در کدام‌یک از موارد زیر، واریانس داده‌ها عدد بزرگ‌تری است؟ الف. ۱۰۵ و ۱۰۴ و ۹۶ و ۹۵ ب. ۱۰۵ و ۱۰۵ و ۹۵ و ۹۵	۲/۵
۱۰	در ۶۰ دادهٔ آماری، میانگین ۳ و انحراف معیار ۱/۲ محاسبه شده است. اگر به تمام داده‌ها ۹ واحد اضافه کنیم، ضریب تغییرات داده‌های جدید چه‌قدر است؟	۲
	جمع نمره	۲۰

پرسش‌های چهارگزینه‌ای فصل هفتم

۱. در گروه زنان ساکن یک روستا ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد از آنان مهارت قالی‌بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی‌بافی دارد؟ (سراسری تجربی)

۱) ۰/۷ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۸۵

۲. دو تاس سالم را با هم آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای اولین بار هر دو عدد رو شده زوج باشند. با کدام احتمال حداکثر در ۳ پرتاب، نتیجه حاصل می‌شود؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{۲۷}{۶۴}$ ۲) $\frac{۳۷}{۶۴}$ ۳) $\frac{۱۹}{۳۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۶۴}$

۳. در یک خانوادهٔ ۳ فرزندی می‌دانیم فرزند اوّل آن‌ها دختر است. با کدام احتمال لااقل یکی از فرزندان پسر است؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۴. دو تاس همگن را انداخته‌ایم. اگر حاصل جمع شماره‌های رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آن‌که شمارهٔ یکی از تاس‌های رو شده ۲ باشد، چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵. احتمال این‌که روز تولد ۳ نفر در روزهای مختلف هفته باشد، چه‌قدر است؟ (سراسری ریاضی خارج از کشور)

۱) $\frac{۲۴}{۳۵}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳۵}$ ۳) $\frac{۳۰}{۴۹}$ ۴) $\frac{۲۱}{۴۹}$

۶. مجموع ۴۰ دادهٔ آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این داده‌ها ۳۴۰ می‌باشد، انحراف معیار کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵ ۳) ۲/۲۵ ۴) ۲/۵

۷. در ۱۰۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۸ و انحراف معیار ۲، تمام داده‌ها را در عدد ۱/۵ ضرب می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید کدام است؟ (سراسری انسانی)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۶/۲۵

۸. در ۱۵۰ دادهٔ آماری با میانگین ۱۲، به دو برابر هر یک از داده‌ها، ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟ (سراسری تجربی)

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۹. میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها ۶۵/۴۴ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها کدام است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۲ ۴) ۰/۲۵

۱۰. ۸ دادهٔ آماری با میانگین ۱۵ و واریانس ۴ مفروض‌اند. اگر دو دادهٔ ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ۱۰ دادهٔ حاصل کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۴/۸ ۴) ۵

پاسخ تمرین‌های امتحانی درس اوّل

۱

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

مستقل‌اند B و A : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$\to P(A\cup B)=۰/۳+۰/۶-(۰/۳\times ۰/۶)$

$\to P(A\cup B)=۰/۹-۰/۱۸=۰/۷۲$

۲

$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=۱-P(A\cup B)$

از طرفی : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\to P(B)=۲P(A)=۰/۸$

مستقل‌اند B و A : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$\Rightarrow P(A\cup B)=۰/۴+۰/۸-(۰/۴\times ۰/۸)=۰/۸۸$

$\to P(A'\cap B')=۱-۰/۸۸=۰/۱۲$

۳

گام اوّل : $n(S)=\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$

گام دوم : $n(A)=\binom{۳}{۱}\times\binom{۵}{۱}=۱۵$

گام سوم : $P(A)=\frac{۱۵}{۲۸}$

۴ نتایج پرتاب‌های دو تاس از هم مستقل‌اند، پس داریم:

P(هیچکدام مضرب ۳ نباشد) = P(اولی مضرب ۳ نباشد, دومی مضرب ۳ نباشد)

= P(اولی مضرب ۳ نباشد) × P(دومی مضرب ۳ نباشد)

P(مطلوب) $=\frac{۴}{۶}\times\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۴}{۹}$

۵

P(دومی فوتبالیست | اولی فوتبالیست) $=\frac{۶}{۳۹}=\frac{۲}{۱۳}$

(دقت کنید که نفر اوّل فوتبالیست بوده، پس از فوتبالیست‌ها ۶ نفر و از کل کلاس ۳۹ نفر باقی مانده‌اند.)

۶

$P(A|B)=\frac{۱}{۳}\to\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۱}{۳}$

$\xrightarrow{P(B)=\frac{۱}{۴}}P(A\cap B)=\frac{۱}{۱۲}$

$\xrightarrow{\text{از طرفی}}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(A\cup B)=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۲+۳-۱}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$

۷

کوچک شده $S=\{(۱,۱),(۱,۲),\dots,(۱,۶),(۲,۱),\dots,(۳,۶),$
$(۳,۱),\dots,(۳,۶),(۴,۱),\dots,(۴,۵),(۵,۱),\dots,$
$(۵,۴),(۶,۱),(۶,۲),(۶,۳)\}$

$\to n(S)=۳۰$

$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳)\}$

$n(A)=۸\to P(A)=\frac{۸}{۳۰}=\frac{۴}{۱۵}$

۸

$P(B|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}(*)$

$\xrightarrow{\text{از طرفی}}P(A)=\frac{۱}{۳}\to P(A')=۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$

هم چنین: $A\subset B\Rightarrow A\cap B=A\to P(A\cap B)=P(A)=\frac{۱}{۳}$

$(*):P(B|A')=\frac{P(B-A)}{\frac{۲}{۳}}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۳}{۴}-\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}}$

$P(B|A')=\frac{\frac{۹-۴}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳\times ۵}{۲\times ۱۲}=\frac{۵}{۸}$

۹

الف) $n(S)=۶\times ۶=۳۶$

$A=\{(۴,۱),(۴,۲),\dots,(۴,۶)\}\to P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}\to P(B)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

$A\cap B=\{(۴,۶)\}\to P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$

$P(A\cap B)\overset{?}{=}P(A)\times P(B)\Rightarrow\frac{۱}{۳۶}\overset{?}{=}\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۱۲}$

$\to\frac{۱}{۳۶}\neq\frac{۱}{۷۲}$ پس A و B مستقل نیستند.