فهرست

آموزش مفهومی

درس اول: تناوب

تابع متناوب

در زندگی روزمره بسیار به پدیده‌هایی برخورد می‌کنیم که با نظمی معین دقیقاً تکرار می‌شوند. شاید یکی از ساده‌ترین آن‌ها پدیده‌های روز و شب یا فصل‌های سال باشد.

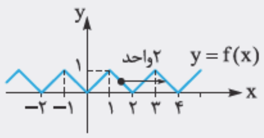
مثلاً اگر امشب شب یلدا باشد، پس از گذشت ۳۶۵ شب دیگر مجدداً شب یلدا خواهد بود و همین‌طور ۳۶۵×۲، ۳۶۵×۳ و ... شب بعد، شب یلدا خواهیم داشت (البته با در نظر نگرفتن سال‌های کبیسه). پس می‌توان گفت با دورهٔ تناوبی به اندازهٔ ۳۶۵ شب یا مضرب صحیحی از آن، شب یلدا تکرار می‌شود که در این صورت ۳۶۵ را دورهٔ **تناوب اصلی** آن در نظر می‌گیریم.

تعریف تابع f را متناوب گوییم، هرگاه عددی مانند T وجود داشته باشد به طوری که برای هر x از دامنهٔ f:

$$f(x+T)=f(x)$$

عدد T را دورهٔ تناوب تابع f و کوچک‌ترین مقدار مثبت T را در صورت وجود، دورهٔ تناوب اصلی تابع f می‌نامند.

مثلاً دورهٔ تناوب تابع مقابل برابر ۲ $T=$ است؛ چون ۲واحد ۲واحد تابع تکرار می‌شود. اگر بخواهیم علمی‌تر صحبت کنیم، $f(x+۲)=f(x)$ است؛ یعنی هر نقطه روی تابع را که دوست دارید انتخاب کنید. اگر ۲ واحد جلو بروید، دوباره روی خود تابع می‌افتید.



مثال نشان دهید اگر ۲ $T_1=$ دورهٔ تناوب تابع $f(x)$ باشد، ۴ $T_2=$ هم یک دورهٔ تناوب آن است.

حل ۲ $T_1=$ دورهٔ تناوب f است؛ یعنی $f(x+۲)=f(x)$ می‌باشد. برای این‌که ثابت کنیم ۴ $T_2=$ هم دورهٔ تناوب f است، باید به این نتیجه برسیم که $f(x+۴)=f(x)$ می‌باشد.

$$f(x+۴)=f((x+۲)+۲)=f(x+۲)=f(x)$$

پس تابع f متناوب به دورهٔ تناوب ۴ هم هست. البته از اول هم واضح بود که این اتفاق می‌افتد. وقتی f، ۲واحد ۲واحد تکرار می‌شود، پس ۴واحد ۴واحد هم تکرار می‌شود!

حالا می‌توانیم نکتهٔ زیر را نتیجه بگیریم.

نکته اگر T_1 دورهٔ تناوب یک تابع متناوب باشد، kT_1 هم حتماً یک دورهٔ تناوب آن خواهد بود. $(k\in\mathbb{Z})$

مثال در تابع $f(x)=\sin x$، ثابت کنید ۲π دورهٔ تناوب آن است.

حل باید ثابت کنیم $f(x+۲\pi)=f(x)$ است:

$$f(x+۲\pi)=\sin(x+۲\pi)=\sin x=f(x)$$

یعنی $f(x)=\sin x$ تابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲π است.

تست اگر در تابع $y=f(x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، به ازای هر x رابطهٔ $f(x-۱)=f(x+۲)$ برقرار باشد، دورهٔ تناوب آن لزوماً کدام است؟

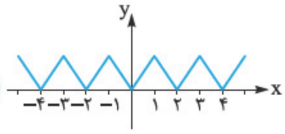
۱) ۱ $T=$　　۲) ۲ $T=$　　۳) ۳ $T=$　　۴) لزوماً متناوب نیست.

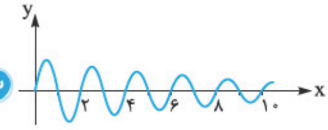
پاسخ گزینهٔ ۳ در رابطهٔ $f(x-۱)=f(x+۲)$ به جای x مقدار $x_1+۱$ را می‌گذاریم:

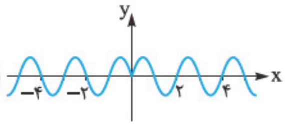
$$f(x-۱)=f(x+۲)\xrightarrow{x=x_1+۱}f(x_1+۱-۱)=f(x_1+۱+۲)\Rightarrow f(x_1)=f(x_1+۳)$$

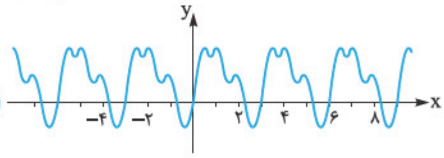
رابطهٔ اخیر به ما می‌گوید ۳ $T=$ است. البته از همان اول هم مشخص بود؛ چون رابطهٔ داده‌شده می‌گفت که مقدار تابع یک واحد قبل از x با دو واحد بعد از x برابر است. پس تابع ۳واحد ۳واحد تکرار می‌شود.

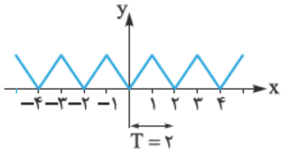
مثال **مشخص کنید کدام‌یک از توابع زیر متناوب است و در صورت امکان دورهٔ تناوب آن‌ها را مشخص کنید.**

الف


ب


پ


ت


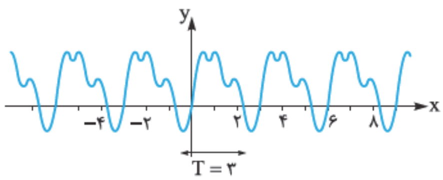


حل الف تابع متناوب است و دورهٔ تناوب آن هم ۲ می‌باشد.

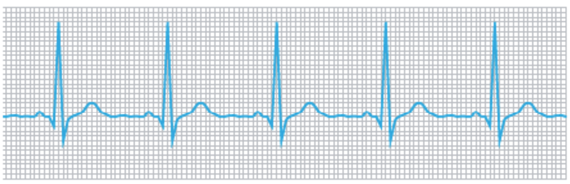
ب تابع متناوب نیست.

پ بعد از $x = \circ$ و قبل از آن، تابع متناوب است، ولی $x = \circ$ کار ما را خراب کرده و روال نمودار را به هم ریخته است؛ پس تابع متناوب نیست. *بر عاشقان علم و دانش عارضم*، نموداری که می‌بینید، مربوط به تابع $y = \sin(|\pi x|)$ است.

ت با چشمان غیرمسلح هم می‌توان فهمید که تابع متناوب است و دورهٔ تناوب آن هم $T = ۳$ است.



راستی، ضربان قلب در افراد سالم هم متناوب است. در شکل روبه‌رو، نوار قلب یک فرد ناشناس را می‌بینید که برای درک بهتر، آن را آورده‌ایم:



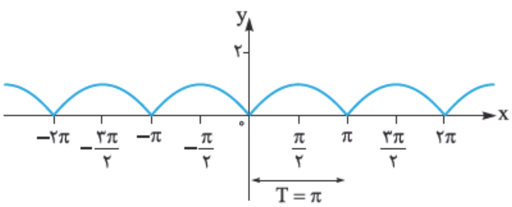
یک دورهٔ تناوب از آن هم این‌شکلی است:

مثال **کدام‌یک از توابع زیر، متناوب هستند؟ در صورت امکان دورهٔ تناوب آن‌ها را پیدا کنید.**

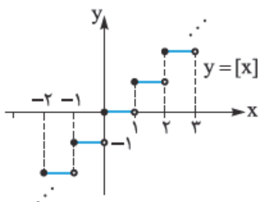
الف $y = |\sin x|$ ب $y = [x]$ پ $y = ۲^{\cos x}$

ت $y = x - [x]$ ث $y = \cos(\sin x)$

حل الف با اقتدار نمودار $y = |\sin x|$ را رسم می‌کنیم. نمودار به تنهایی گویای همه‌چیز هست.



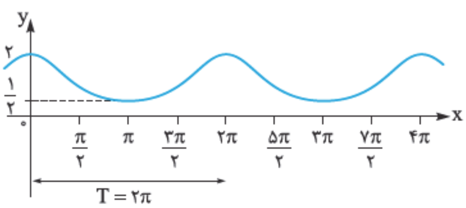
ب نمودار $y = [x]$ متناوب نیست!



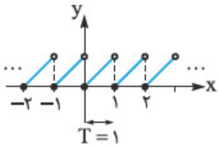
پ $\cos x$ متناوب است؛ پس $۲^{\cos x}$ هم متناوب می‌شود؛ یعنی ۲π، ۲π تکرار می‌شود.

$$f(x) = ۲^{\cos x} \Rightarrow f(x + ۲\pi) = ۲^{\cos(x + ۲\pi)} = ۲^{\cos x} = f(x)$$

نمودار $f(x)$ هم این‌شکلی است:



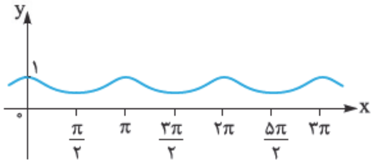
ت نمودار $y = x - [x]$ از نمودارهای مهم است که باید آن را حفظ باشید، به آن نمودار اره‌ای می‌گوییم.
دورهٔ تناوب این تابع $T = 1$ است.



ث چون $\sin x$ هر 2π تکرار می‌شود، پس $f(x) = \cos(\sin x)$ هم تکرار می‌شود، $f(x + 2\pi) = \cos(\sin(x + 2\pi)) = \cos(\sin x) = f(x)$
البته اتفاق جالبی که می‌افتد، این است که دورهٔ تناوب اصلی این تابع یعنی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب آن $T = \pi$ می‌باشد؛ چون:

$$f(x + \pi) = \cos(\sin(x + \pi)) = \cos(-\sin x) = \cos(\sin x) = f(x)$$

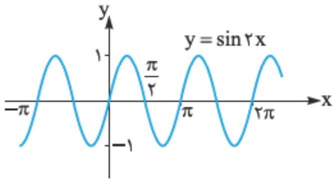
نمودار این تابع را بد نیست ببینید که این‌شکلی است:

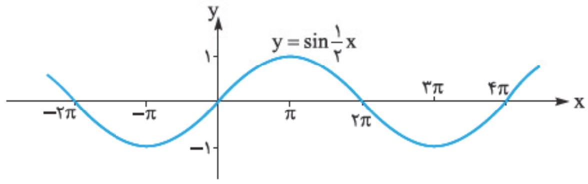


تناوب در توابع مثلثاتی

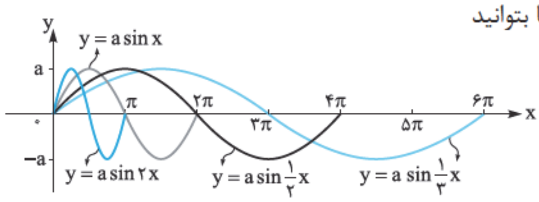
نکته دورهٔ تناوب اصلی نمودار توابع $y = \sin kx$ و $y = \cos kx$ برابر $\frac{2\pi}{|k|}$ است.

نکتهٔ بالا به ما می‌گوید دورهٔ تناوب $y = \sin 2x$ برابر $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ و دورهٔ تناوب $y = \sin \frac{1}{2}x$ برابر $\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$ است. به زبان غیرعلمی می‌گوییم نمودار $y = \sin 2x$، ۲ برابر نسبت به $y = \sin x$ فشرده شده و نمودار $y = \sin(\frac{1}{2}x)$ دو برابر نسبت به آن باز شده است. نمودارها را ببینید:





در نمودار مقابل هم چندتای دیگر را در یک دوره از تناوب رسم کرده‌ایم تا بتوانید آن‌ها را با هم مقایسه کنید:

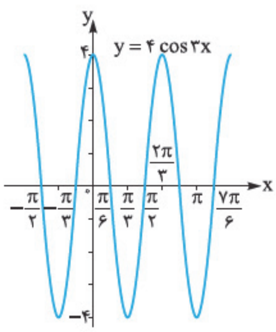


لطفاً دلیل این نوع رفتار توابع را درک کنید و خیلی زود و سطحی از آن‌ها گذر نکنید.

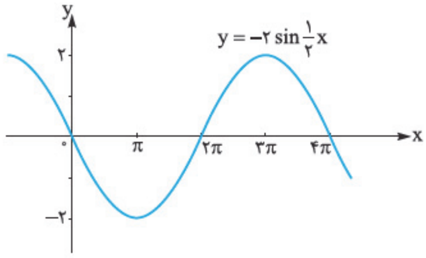
مثال **دورهٔ تناوب هر یک از توابع زیر را بیابید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.**

الف) $y = 4\cos 3x$ ب) $y = -2\sin \frac{1}{2}x$ پ) $y = 3\sin 2(x - \frac{\pi}{4})$ ت) $y = \frac{3}{4}\cos(2x + \frac{2\pi}{3})$

حل الف) دورهٔ تناوب تابع $y = 4\cos 3x$ برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است؛ پس ۳ برابر در جهت محور xها فشرده‌تر می‌شود و باید برد آن را هم ۴ برابر کنیم. نمودار این‌شکلی است:



ب دورهٔ تناوب تابع $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ است. نمودار ۲ برابر در جهت محور xها باز می‌شود؛
به علاوه باید آن را نسبت به محور xها قرینه کرده و برد آن را هم ۲ برابر کنیم.

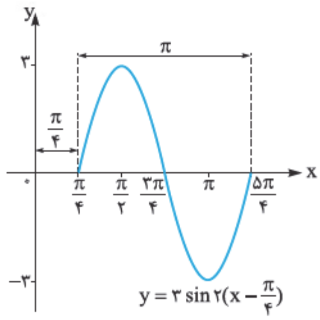


پ

دورهٔ تناوب $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$ می‌شود؛ یعنی ۲ برابر فشرده.

$$y=3\sin 2(x-\frac{\pi}{4})$$

برد ۳ برابر می‌شود. $\frac{\pi}{4}$ سمت راست می‌رود.

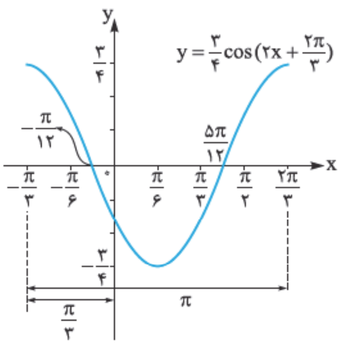


ت اول باید $y=\frac{3}{4}\cos(2x+\frac{2\pi}{3})$ را به صورت $y=\frac{3}{4}\cos 2(x+\frac{\pi}{3})$ بنویسیم.

دورهٔ تناوب π می‌شود؛ پس ۲ برابر فشرده.

$$y=\frac{3}{4}\cos 2(x+\frac{\pi}{3})$$

برد $\frac{3}{4}$ برابر می‌شود. $\frac{\pi}{3}$ سمت چپ می‌رود.



مثال **هر بار که قلب شما می‌تپد، ابتدا فشار خون شما افزایش یافته و سپس هنگامی که قلب بین ضربان‌ها استراحت می‌کند، کاهش می‌یابد. حداکثر و حداقل فشار خون به ترتیب، فشار سیستولیک و دیاستولیک (Systolic ،Diastolic) گفته می‌شود و فشار خون شما به صورت $\frac{\text{سیستولیک}}{\text{دیاستولیک}}$ نوشته می‌شود؛ مثلاً فشار خون $\frac{120}{80}$ نرمال است. فشار خون فردی را با تابع روبه‌رو مدل‌سازی کرده‌ایم:** $P(t)=115+25\sin(160\pi t)$

که در آن $P(t)$ فشار برحسب mmHg (میلی‌متر جیوه) و t زمان برحسب دقیقه است.

الف دورهٔ تناوب P را بیابید.

ب تعداد ضربان‌های قلب در هر دقیقه را پیدا کنید.

پ نمودار تقریبی P را رسم کنید.

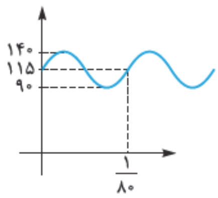
ت وضعیت این فرد را چه‌طور تحلیل می‌کنید؟

حل

الف $T=\frac{2\pi}{|160\pi|}=\frac{1}{80}$

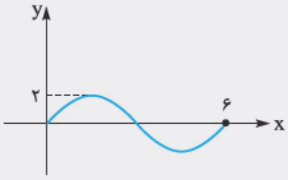
ب با توجه به رابطهٔ بالا، در $\frac{1}{80}$ دقیقه یک بار قلب او می‌زند؛ پس در هر دقیقه ۸۰ بار.

پ



ت بیشترین مقدار فشار این فرد برابر $115+25=140$ و کم‌ترین میزان آن $115-25=90$ است؛ پس فشار او $\frac{140}{90}$ می‌باشد؛ پس این فرد فشار بالاتر از حد نرمال دارد (یا به اصطلاح پزشکی Hypertension در نظر گرفته می‌شود).

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام است؟ (خارج ۹۳)

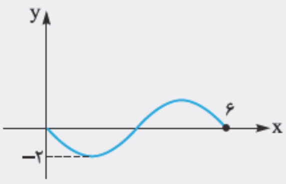


۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۷}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

پاسخ گزینهٔ ۳ **راه اول** بیشترین مقدار تابع برابر ۲ است؛ پس $a = ۲$ به دست می‌آید. از روی نمودار، دورهٔ تناوب تابع $T = ۶$ است، از روی ضابطهٔ $y = a\sin(b\pi x)$، دورهٔ تناوب برابر $T = \frac{۲\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید. این دو مقدار را برابر می‌گذاریم:

$$T = \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۶ \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{۱}{۳} \\ b = -\frac{۱}{۳} \end{cases}$$



اگر $b = \frac{۱}{۳}$ باشد، ضابطهٔ تابع $y = ۲\sin(\frac{\pi}{۳}x)$ می‌شود و شبیه نمودار داده شده است؛ ولی اگر $b = -\frac{۱}{۳}$ باشد، ضابطهٔ آن به صورت $y = ۲\sin(-\frac{\pi}{۳}x) = -۲\sin(\frac{\pi}{۳}x)$ است و نمودار آن این‌شکلی است:

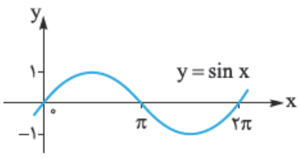
بنابراین: $a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$

راه دوم با کمی نبوغ می‌توانیم تست را خیلی شیک‌تر و قشنگ‌تر حل کنیم. از روی نمودار، رفتار تابع در $x = ۶$ شبیه رفتار $y = \sin x$ در $x = ۲\pi$ است؛ پس وقتی در عبارت $y = a\sin(b\pi x)$، x را برابر ۶ می‌گذاریم باید مقدار $b\pi x$ برابر ۲π شود.

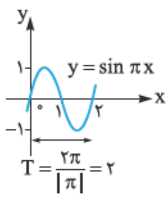
$$b\pi x \xrightarrow{x=۶} b\pi(۶) = ۲\pi \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

چیزی که گفتیم کمی سخت است و انتظار نداشته باشید به راحتی به ذهن هر کسی برسد و بتواند از آن استفاده کند.

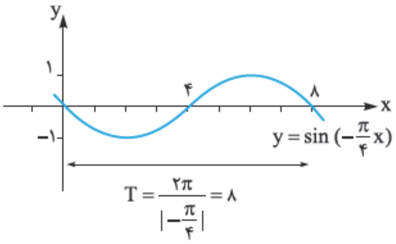
در زیر برای درک بهتر آن‌چه گفتیم، نمودار چند تابع را برایتان رسم می‌کنیم.



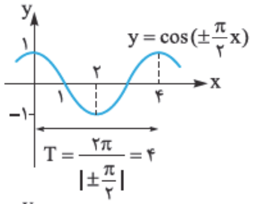
برای رسم $y = \sin \pi x$ طول نقاط نمودار $y = \sin x$ را $\frac{۱}{\pi}$ برابر می‌کنیم.



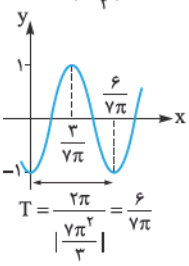
برای رسم $y = \sin(-\frac{\pi}{۴}x)$، نمودار $y = \sin x$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم؛ به علاوه طول نقاط در $\frac{۴}{\pi}$ ضرب می‌شوند. توجه کنید که $y = \sin(-\frac{\pi}{۴}x) = -\sin(\frac{\pi}{۴}x)$.



حالا $y = \cos(\pm\frac{\pi}{۲}x)$ را رسم می‌کنیم. طول نقاط نمودار $y = \cos x$ را در $\frac{۲}{\pi}$ ضرب می‌کنیم. توجه کنید که $y = \cos(-\frac{\pi}{۲}x) = \cos(\frac{\pi}{۲}x)$.



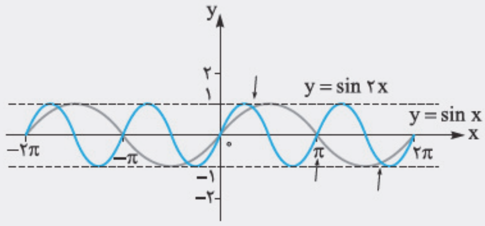
آخری هم سعی می‌کنیم یک مقدار عجیب باشد! نمودار $y = -\cos(\frac{۷\pi^۲}{۳}x)$:



تست نمودار توابع $y=\sin x$ و $y=\sin ۲x$ در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ در چند نقطه با هم برخورد می‌کنند؟

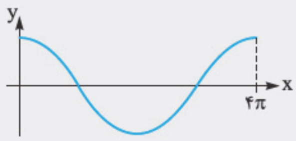
۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵



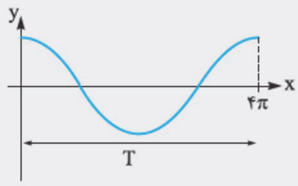
پاسخ گزینهٔ۲ کتاب درسی‌تان این نمودار را رسم کرده است.
مشخص است که نمودار دو تابع در فاصلهٔ $(۰,۲\pi)$ در ۳ نقطه برخورد دارند. (نقاط برخورد را با فلش مشخص کردیم.) دقت کنید که $x=۰$ و $x=۲\pi$ در بازه نیستند.

تست شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}+۲\cos mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۱۶\pi}{۳}$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۶)*



۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) صفر



پاسخ گزینهٔ۱ مطابق شکل، یک دورهٔ تناوب از تابع به اندازهٔ $T=۴\pi$ است.

پس واضح است که $m=\frac{۱}{۲}$ می‌شود. (البته $m=-\frac{۱}{۲}$ هم قابل قبول است.)

$$y=\frac{۱}{۲}+۲\cos mx \xrightarrow{m=\frac{۱}{۲}} y=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\frac{۱}{۲}x)$$

مقدار تابع را در $\frac{۱۶\pi}{۳}$ می‌خواهیم.

$$y(\frac{۱۶\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\frac{۱۶\pi}{۶})=\frac{۱}{۲}+۲\cos(\frac{۸\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+۲\cos(۲\pi+\frac{۲\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}+۲\underbrace{\cos\frac{۲\pi}{۳}}_{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۲}+۲(-\frac{۱}{۲})=-\frac{۱}{۲}$$

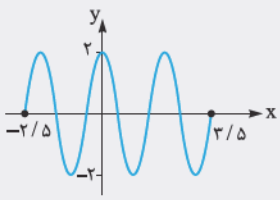
دوتذکرمهم ۱

$$\cos\frac{۲\pi}{۳}=\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})=-\cos\frac{\pi}{۳}=-\frac{۱}{۲}$$

۲ دورهٔ تناوب را این‌گونه هم می‌توانستید حساب کنید.

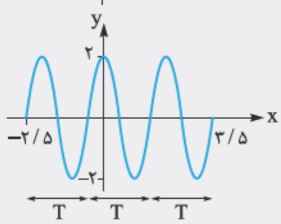
$$\frac{۲\pi}{|m|}=۴\pi \Rightarrow |m|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx)$ است. $a\times b$ کدام است؟ *(ریاضی ۹۲)*



۱) ۲ ۲) ۲/۵

۳) ۳ ۴) ۳/۵



پاسخ گزینهٔ۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$y=a\sin(\frac{\pi}{۲}+b\pi x)=a\cos b\pi x$$

طبق نمودار، برد تابع $[-۲,۲]$ می‌باشد؛ پس $a=۲$ است. در فاصلهٔ $-۲/۵$ تا $۳/۵$ تابع ۳ دوره از تناوبش را گذرانده!

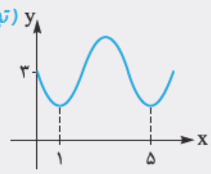
پس:

$$۳T=۳/۵-(-۲/۵) \Rightarrow ۳T=۶ \Rightarrow T=۲$$

$$T=۲=\frac{۲\pi}{|b\pi|} \Rightarrow ۲=\frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b|=۱ \Rightarrow \begin{cases} b=۱ \\ b=-۱ \end{cases}$$

هر دو مقدار به دست آمده برای b قابل قبول است؛ چون کسینوس منفی را می‌خورد! بنابراین $a\times b=۲\times(\pm۱)=\pm۲$ می‌شود که فقط $+۲$ در گزینه‌ها هست.

تست شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $y=a+\sin(b\pi x)$ است. مقدار y در نقطهٔ $x=\frac{۲۵}{۳}$ کدام است؟ *(تجربی ۹۳)*



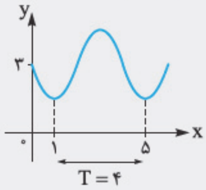
۱) ۲ ۲) ۲/۵

۳) ۳ ۴) ۳/۵

پاسخ **گزینهٔ ۲** مقدار تابع در $x=۰$ برابر ۳ شده است:

$$y=a+\sin(b\pi x) \Rightarrow y(۰)=a+\sin(۰) \Rightarrow a=۳$$

مطابق شکل، دورهٔ تناوب تابع برابر $T=۴$ است.



$$T=۴=\frac{۲\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۱}{۲} & \times \\ b=-\frac{۱}{۲} & \checkmark \end{cases}$$

بعد از $x=۰$، نمودار تابع پایین آمده است؛ پس $b=-\frac{۱}{۲}$ قابل قبول است. اگر $b=\frac{۱}{۲}$ بود، نمودار باید این‌شکلی  می‌شد؛ در حالی که الان این‌شکلی  است. حالا مقدار تابع را در $x=\frac{۲۵}{۳}$ به دست می‌آوریم:

$$y=۳+\sin(-\frac{\pi}{۲}x) \xrightarrow{x=\frac{۲۵}{۳}} y(\frac{۲۵}{۳})=۳-\sin(\frac{۲۵\pi}{۶})$$

$$=۳-\sin(\frac{۲۴\pi}{۶}+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin(۴\pi+\frac{\pi}{۶})=۳-\sin\frac{\pi}{۶}=۳-\frac{۱}{۲}=۲/۵$$

مدل‌سازی با استفاده از توابع مثلثاتی

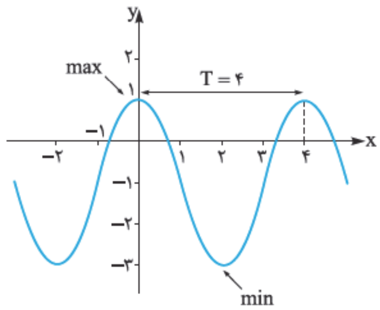
نکته در حالت کلی می‌توان گفت در توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$، حداکثر و حداقل مقدار تابع وقتی به دست می‌آید که $\sin x=\pm۱$ و $\cos x=\pm۱$ باشد. پس می‌توان گفت که:

۱) مقدار ماکزیمم $|a|+c$ است. ۲) مقدار مینیمم $-|a|+c$ است. ۳) دورهٔ تناوب $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

برای مثال در تابع $y=۲\cos(\frac{\pi}{۲}x)-۱$ داریم:

۱) $\max=۲-۱=۱$ ۲) $\min=-۲-۱=-۳$ ۳) $T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴$

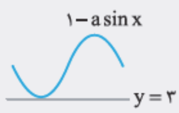
نمودار را ببینید:

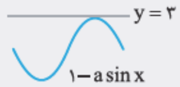


تست **خط $y=۳$ بر نمودار تابع $y=۱-a\sin(x)$ مماس است. مجموعهٔ مقادیر a کدام است؟**

۱) ±۱ ۲) ±۲ ۳) $-۱,۲$ ۴) $۱,-۲$

پاسخ **گزینهٔ ۲** وقتی تابع بر خط $y=۳$ مماس است که نمودار شبیه یکی از دو شکل روبه‌رو باشد:



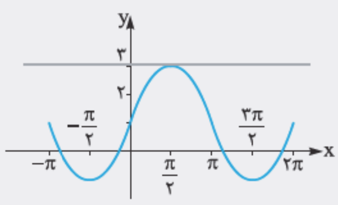


بنابراین یا ماکزیمم تابع $y=۱-a\sin x$ برابر ۳ است و یا مینیمم آن.

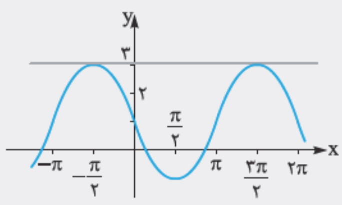
$$\min: -|a|+۱=۳ \Rightarrow |a|=-۲ \ \times$$

$$\max: |a|+۱=۳ \Rightarrow |a|=۲ \Rightarrow a=\pm۲ \ \checkmark$$

نمودار تابع $y=۱-۲\sin x$ و $y=۱+۲\sin x$ را هم برایتان رسم می‌کنیم:



$y=۱+۲\sin x$

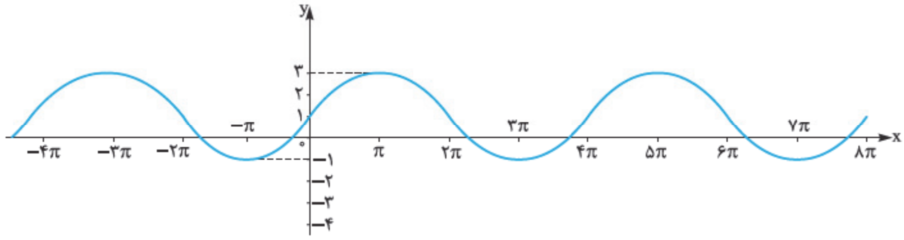


$y=۱-۲\sin x$

نکته برعکس اگر در سؤال‌های مقادیر max و min توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ را داشته باشیم، داریم:

① $|a|=\dfrac{\max-\min}{۲}$ ② $c=\dfrac{\max+\min}{۲}$

مثال **ضابطهٔ مربوط به نمودار زیر را بنویسید.** *(کتاب درسی)*

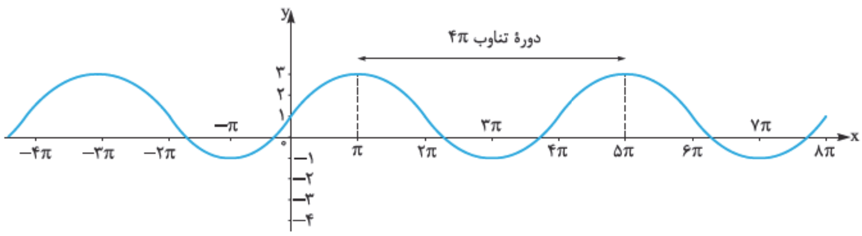


حل از نمودار می‌فهمیم که $\max=۳$ و $\min=-۱$ است و نمودار شبیه $y=a\sin bx+c$ است.

$a=\dfrac{\max-\min}{۲}=\dfrac{۳-(-۱)}{۲}=۲$ $c=\dfrac{\max+\min}{۲}=\dfrac{۳+(-۱)}{۲}=۱$ $|b|=\dfrac{۲\pi}{T}$

پس تابع به صورت $y=۲\sin bx+۱$ است، می‌ماند دورهٔ تناوب.

از نمودار مشخص است که دورهٔ تناوب برابر ۴π است.



$\dfrac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \Rightarrow b=|\dfrac{۱}{۲}| \Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{۱}{۲} & \checkmark \\ b=-\dfrac{۱}{۲} & \times \end{cases}$

با توجه به این‌که نمودار بعد از صفر این‌شکلی است:  پس b باید مثبت باشد و ضابطهٔ مربوط به این تابع $y=۲\sin\dfrac{x}{۲}+۱$ است. این تمرین از کتاب درسی ۴ قسمت دارد که بقیهٔ آن‌ها را در تمارین تشریحی این درس‌نامه حل کردیم. خیلی مهم هستند. لطفاً حتماً آن‌ها را حل کنید.

مثال **در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.** *(کتاب درسی)*

الف $T=۳\ ,\ \max=۹\ ,\ \min=۳$ **ب** $T=\dfrac{\pi}{۲}\ ,\ \max=-۳\ ,\ \min=-۷$

حل **الف** $y=-۳\sin(\dfrac{۲\pi}{۳}x)+۶$ یا $y=۳\cos(\dfrac{۲\pi}{۳}x)+۶$ هر دو قابل قبول‌اند. مثال‌های دیگری هم می‌توانیم بیاوریم:

$\dfrac{\max-\min}{۲}=\dfrac{۹-۳}{۲}=۳$ (ضریب کلی) $\dfrac{\max+\min}{۲}=\dfrac{۹+۳}{۲}=۶$ (عدد ثابت) ضریب x: $\dfrac{۲\pi}{T}=\dfrac{۲\pi}{۳}$

ب $y=۲\sin(۴x)-۵$ یا $y=-۲\cos(-۴x)-۵$ هر دو قابل قبول‌اند.

$\dfrac{\max-\min}{۲}=\dfrac{-۳-(-۷)}{۲}=۲$ (ضریب کلی) $\dfrac{\max+\min}{۲}=\dfrac{-۳+(-۷)}{۲}=-۵$ (عدد ثابت) ضریب x: $\dfrac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴$

تست **طول روز در یک سال، یک متغیر تناوبی است. اگر طول روز اُم را با $L(t)=A\sin(Bt)+C$ نمایش دهیم و طول سال را ۳۶۵ روز فرض کنیم، مقدار تقریبی B کدام است؟ $(\pi=۳/۱۴)$**

۱) ۰/۰۱۵ ۲) ۰/۰۱۷ ۳) ۰/۰۲ ۴) ۰/۰۲۵

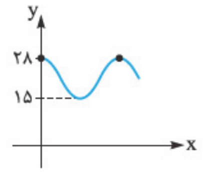
پاسخ **گزینهٔ۲** دورهٔ تناوب $L(t)$ برابر ۳۶۵ روز است.

$\dfrac{۲\pi}{|B|}=۳۶۵ \Rightarrow \dfrac{۲\times۳/۱۴}{B}=۳۶۵ \Rightarrow B=\dfrac{۶/۲۸}{۳۶۵}\simeq۰/۰۱۷$

مثال **مجموعه‌ای از داده‌های مربوط به دمای هوای یک شهر داده شده‌اند. اگر داده‌های این شهر هر ۱۲ ماه یک بار تکرار شده باشند و بیشترین و کم‌ترین دما در داده‌ها به ترتیب ۲۸ و ۱۵ درجهٔ سانتی‌گراد باشند. آن‌گاه با فرض این‌که تابعی کسینوسی به صورت $y = a\cos(bx) + c$ برای داده‌ها مناسب باشد، این تابع را بیابید.** *(کتاب درسی)*

حل چون داده‌ها هر ۱۲ ماه تکرار می‌شوند؛ پس دورهٔ تناوب باید ۱۲ باشد. پس: $\frac{۲\pi}{b} = ۱۲ \Rightarrow b = \frac{\pi}{۶}$

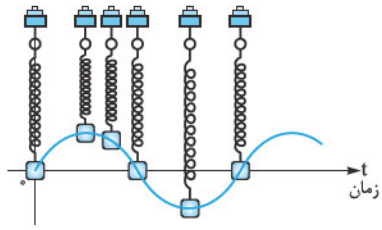
به نمودار تقریبی که برای این داده‌ها کشیده‌ایم، توجه کنید.

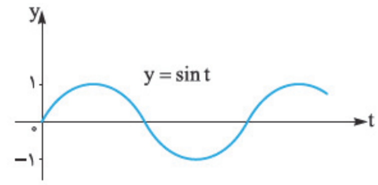


c برابر میانگین کم‌ترین و بیشترین مقدار تابع است: $c = \frac{۲۸ + ۱۵}{۲} = ۲۱/۵$

و a هم برابر تفاضل بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع تقسیم بر ۲ است: $a = \frac{۲۸ - ۱۵}{۲} = ۶/۵$

مثال **اگر وزنه‌ای را به یک فنر متصل کنیم و آن را رها کنیم، حرکت این فنر را می‌توانیم به کمک توابع مثلثاتی مدل‌سازی کنیم. در شکل زیر اگر t برحسب زمان باشد، وزنه روی نمودار $y = \sin t$ حرکت می‌کند.**





برای مثال فرض کنید حرکت وزنه‌ای متصل به یک فنر با رابطهٔ مقابل مدل‌سازی شده باشد: $y = ۱۰\sin ۴\pi t$

الف) بیشترین فاصلهٔ وزنه از حالت تعادلش چه‌قدر است؟

ب) مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا وزنه یک نوسان کامل انجام بدهد، چه‌قدر است؟

پ) این وزنه در یک ثانیه چند بار نوسان می‌کند؟

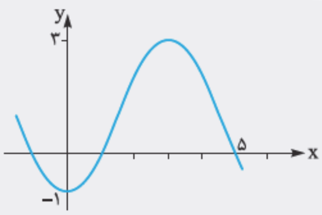
حل الف) وقتی که $\sin ۴\pi t = \pm ۱$ است، وزنه بیشترین فاصله از حالت تعادل را دارد که در این صورت بیشترین فاصله برابر $\pm ۱۰\,cm$ است.

ب) هر ۰/۵ ثانیه، وزنه یک نوسان می‌کند. $T = \frac{۲\pi}{|۴\pi|} = \frac{۱}{۲}s$

پ) با توجه به قسمت قبل، در یک ثانیه ۲ بار نوسان دارد.

طبق معمول هم انتظار نداشته باشید که آخرین سؤال راحت باشد.

تست **شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a - ۲\cos(b\pi x)$ است. $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟**



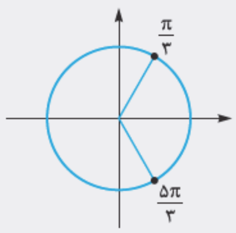
۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۷}{۶}$

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

پاسخ **گزینهٔ ۳** اول این‌که مقدار تابع در $x = ۰$ برابر ۱− است. $y(۰) = a - ۲\cos(۰) = a - ۲ = -۱ \Rightarrow a = ۱$

پس ضابطهٔ تابع $y = ۱ - ۲\cos(b\pi x)$ است. آن را برابر صفر می‌گذاریم: $y = ۰ \Rightarrow ۱ - ۲\cos(b\pi x) = ۰ \Rightarrow \cos b\pi x = \frac{۱}{۲}$

در نقاطی که $\cos(b\pi x)$ برابر $\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار تابع صفر می‌شود. در دایرهٔ مثلثاتی وقتی از $x = ۰$ شروع به حرکت در جهت مثبت می‌کنیم، اول در $x = \frac{\pi}{۳}$ و سپس در $x = \frac{۵\pi}{۳}$ مقدار کسینوس برابر صفر می‌شود.



نمودار به ما می‌گوید دومین نقطه‌ای که تابع صفر می‌شود، در $x = ۵$ است؛ یعنی $b\pi x$ به ازای $x = ۵$ برابر $\frac{۵\pi}{۳}$ است:

$$b\pi(۵) = \frac{۵\pi}{۳} \Rightarrow b = \frac{۱}{۳} \qquad a + b = ۱ + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳}$$

البته b برابر $-\frac{۱}{۳}$ هم می‌تواند باشد.

دم بچه‌هایی که الان می‌رن سراغ تمرین‌های تشریحی ۱ تا ۶ و تست‌های ۱ تا ۲۸ گرم.

مسائل تشریحی

درس اول: تناوب

۱- دورهٔ تناوب هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sin ۳x$ ب) $g(x)=\cos\sqrt{۲}x$ پ) $h(x)=\sin\frac{x}{۲}$

ت) $s(x)=\sin\pi x$ ث) $t(x)=-\pi\sin\frac{۱}{۲}(x-۲)$

۲- ثابت کنید اگر تابع f متناوب به دورهٔ تناوب T باشد، آن‌گاه gof هم با همین دورهٔ تناوب، متناوب است.

۳- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

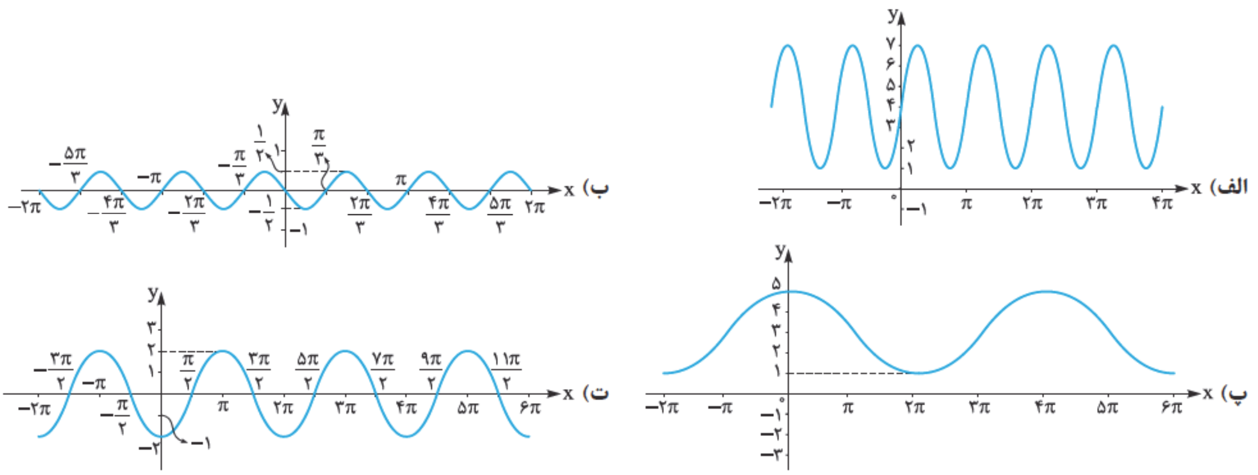
الف) $y=\cos(-x)+۱$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ پ) $y=۱+\sin(x+۱)$

ت) $y=|۱-\sin x|$ ث) $y=\frac{۱}{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$

۴- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۲\cos ۲x$ ب) $y=-\frac{۱}{۲}\cos(\frac{۱}{۲}x)$ پ) $y=\sin\pi x$ ت) $y=-۲\cos(\frac{\pi x}{۲})$

۵- هر یک از نمودارهای داده‌شده در زیر، مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\sin bx+c$ یا $f(x)=a\cos bx+c$ است. با دقت در شکلِ نمودار و تشخیص دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطهٔ آن را مشخص نمایید.



۶- در هر مورد ضابطهٔ تابعی مثلثاتی با دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده‌شده بنویسید.

الف) $T=\pi\ ,\ \max=۳\ ,\ \min=-۳$ ب) $T=۲\ ,\ \max=-۱\ ,\ \min=-۷$

پرسش‌های چندگزینه‌ای

درس اول: تناوب

۱- در یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب $T=۱$ ، می‌دانیم $f(\frac{۳}{۴})=-\frac{۱}{۲}$ است. آن‌گاه کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

۱) $f(\frac{۵}{۴})=-\frac{۱}{۲}$ ۲) $f(\frac{۵}{۴})=\frac{۱}{۲}$ ۳) $f(-\frac{۱}{۴})=\frac{۱}{۲}$ ۴) $f(-\frac{۱}{۴})=-\frac{۱}{۲}$

۲- کوچک‌ترین دورهٔ تناوب تابع $y=|\sin\frac{\pi}{۲}x|$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۲π ۴) ۴π

۳- کدام تابع، متناوب نیست؟

۱) $y=\cos|x|$ ۲) $y=\sin|x|$ ۳) $y=\sin^{۲}x$ ۴) $y=\cos^{۲}x$

۴- دورهٔ تناوب تابع $y=af(bx+c)+d$ برابر T است. در این صورت دورهٔ تناوب تابع $y=f(x)$ برابر کدام گزینه می‌باشد؟

۱) $\frac{T}{|b|}$ ۲) $|b|T$ ۳) T ۴) $\frac{T}{|a|}$

۵- یک سری دادهٔ آماری را می‌خواهیم با موج سینوسی $a\sin(bt)+c$ مدل‌سازی کنیم. اگر بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار این داده‌ها به ترتیب برابر ۲۸ و ۴/۳ باشند، a کدام است؟ *(کتاب درسی)*

۱) ۲۸ ۲) ۲۳/۷ ۳) ۱۱/۸۵ ۴) ۱۶/۱۵

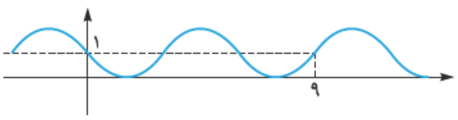
۶- می‌خواهیم وضعیت آب‌وهوای یک سال شهری را با تابعی به صورت $f(t)=a\sin(bt)+c$ مدل‌سازی کنیم که t برحسب روز است. مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳۶۵}$ ۴) $\frac{\pi}{۳۶۵}$

۷- ماکزیمم تابع $y=۱-۲\sin\frac{x}{۲}$ برابر کدام گزینه است؟

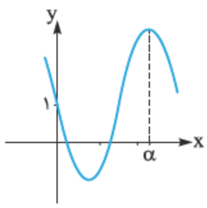
۱) صفر ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) ۳

۸- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+\cos(\frac{-۱}{۲}+bx)\pi$ است. حاصل $f(۲۹)$ کدام است؟ *(کانون ۹۵)*



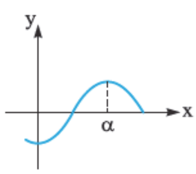
۱) $۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۲) $۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۹- شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=۱-۲\sin ۲x$ است. α کدام است؟



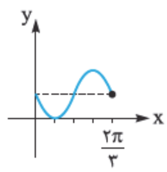
۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۳\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۰- شکل مقابل قسمتی از تابع $y=۲\sin\pi x-۱$ است. α کدام است؟



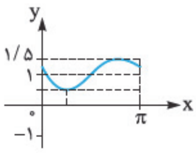
۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۲

۱۱- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y=۱-\sin mx$ است. مقدار تابع در نقطهٔ $x=\frac{۷\pi}{۶}$ کدام است؟ *(ریاضی خارج ۹۶)*



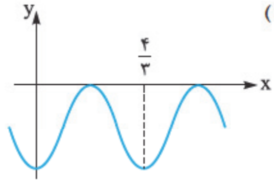
۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱ ۴) ۲

۱۲- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = 1 + a\sin(bx - \frac{\pi}{6})$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)



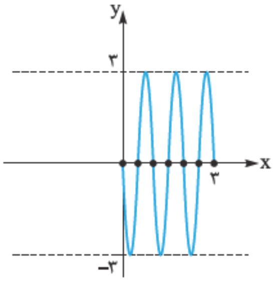
۱) $\frac{1}{2}$
۲) 1
۳) $\frac{3}{2}$
۴) 2

۱۳- شکل روبه‌رو قسمتی از نمودار تابع $f(x) = -2 + a\cos(1 + bx)\pi$ است. ab کدام می‌تواند باشد؟ $(a > 0)$



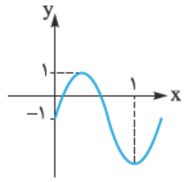
۱) $\frac{3}{2}$
۲) $\frac{5}{2}$
۳) 3
۴) 5

۱۴- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin(b\pi x)$ است. ab کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)



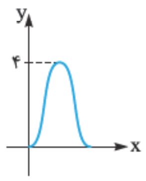
۱) -6
۲) -3
۳) $4/5$
۴) 6

۱۵- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a\sin b\pi x - 1$ است. مقدار $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



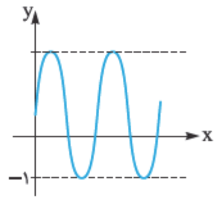
۱) $2/5$
۲) 3
۳) $3/5$
۴) 4

۱۶- شکل مقابل نمودار تابع $y = a + b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ در بازهٔ $(0, 4)$ است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۷)



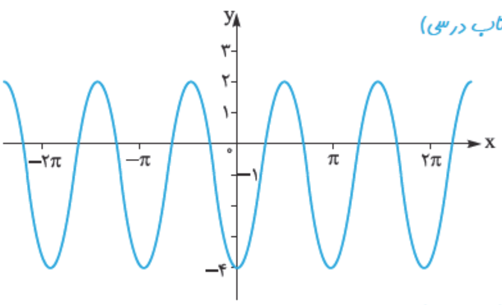
۱) -2
۲) -1
۳) 1
۴) 2

۱۷- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = 1 + a\sin(b\pi x)$ در بازهٔ $(0, \frac{4}{3})$ است. $a + b$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



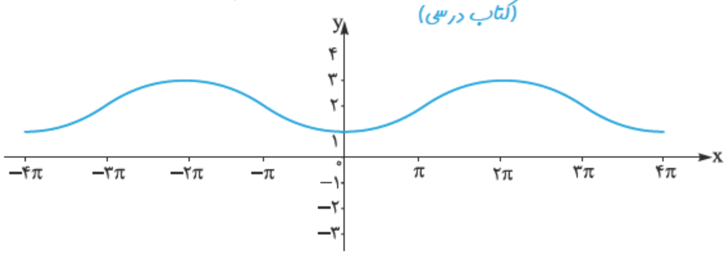
۱) 3
۲) 4
۳) 5
۴) 6

۱۸- ضابطهٔ مربوط به نمودار مقابل، کدام است؟ (کتاب درسی)



۱) $y = -3\cos(\frac{x}{2}) - 1$
۲) $y = -3\cos(-2x) - 1$
۳) $y = \cos(\frac{x}{2}) - 4$
۴) $y = \cos(2x) - 4$

۱۹- نمودار مقابل مربوط به کدام تابع است؟ (کتاب درسی)



۱) $y = 2 - \cos\frac{x}{2}$
۲) $y = 1 + \sin\frac{x}{2}$
۳) $y = 2\cos\frac{x}{2} - 1$
۴) $y = 2\sin\frac{x}{2} + 1$

۲۰- در تابع $y=a+b\sin cx$، اختلاف ماکزیمم و مینیمم برابر ۴ و مجموع آن‌ها برابر ۶ است. حاصل $a+|b|$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۱- کدام تابع زیر دارای هر سه ویژگی $T=۳$ ، $\max=۹$ و $\min=۳$ است؟ (کتاب درسی)

۱) $y=۳+۶\cos(\frac{۲\pi}{۳}x)$ ۲) $y=۶-۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)$ ۳) $y=۶+۳\cos(\frac{۳\pi}{۲}x)$ ۴) $y=۳-۶\sin(\frac{۳\pi}{۲}x)$

۲۲- تابع $y=-۲\cos ۳x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ در چند نقطه به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۳- دورهٔ تناوب تابع $y=۸\cos\frac{x}{۳}$، چند برابر دورهٔ تناوب تابع $y=۳\sin ۲x$ است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۲۴- برای هر x عضو دامنهٔ f، $x\pm T$ نیز عضو دامنهٔ f است. با فرض $f(x\pm T)=-f(x)$، آن‌گاه دورهٔ تناوب اصلی f کدام است؟ $(T>۰)$

۱) T ۲) $۲T$ ۳) $۳T$ ۴) $۴T$

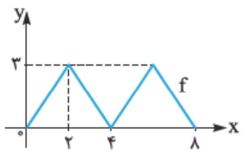
۲۵- اگر در نقاط $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{۳\pi}{۴}$، تابع $f(x)=۲\cos bx-۱$ با ماکزیمم مقدار خود برابر باشد، دورهٔ تناوب f برابر کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۱۰}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۵}$

۲۶- تابع متناوب f در بازهٔ $[۰,۱]$ با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}$ تعریف می‌شود. اگر دورهٔ تناوب تابع برابر یک باشد، $f(-۳/۷۶)$ کدام است؟ (کانون ۹۴)

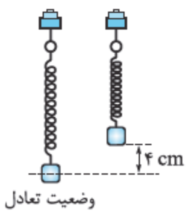
۱) تعریف نشده ۲) ۰/۱ ۳) ۰/۷ ۴) $\sqrt{۱/۰۱}$

۲۷- دورهٔ تناوب تابع f برابر $T=۴$ است. اگر قسمتی از نمودار تابع f به صورت زیر باشد، آن‌گاه حاصل $f(۱۳۹۵)$ کدام است؟ (کانون ۹۶)



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$

۲۸- مطابق شکل، وزنه‌ای را به یک فنر متصل کرده و به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متری از حالت تعادلش می‌بریم و رها می‌کنیم. اگر بعد از $\frac{۱}{۳}$ ثانیه وزنه به جایی که رها شده بود برگردد، می‌توانیم حرکت آن را به کمک $y=a\cos\omega t$ مدل‌سازی کنیم. $\frac{\omega}{a}$ کدام است؟



۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۴) ۴π

پاسخ مسائل تشریحی

۱- ب) $T=\frac{۲\pi}{|\sqrt{۲}|}=\sqrt{۲}\pi$ الف) $T=\frac{۲\pi}{|۳|}=\frac{۲\pi}{۳}$

ت) $T=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲$ پ) $T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi$

ث) $T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi$

۲- چون دورهٔ تناوب f برابر T است، می‌دانیم: $f=(x+T)=f(x)$

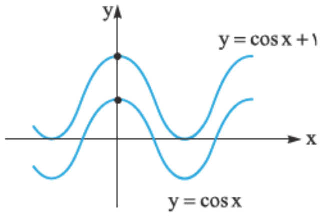
حالا برای تابع gof داریم:

$$(gof)(x+T)=g(f(x+T))=g(f(x))=(gof)(x)$$

پس تابع gof هم متناوب است.

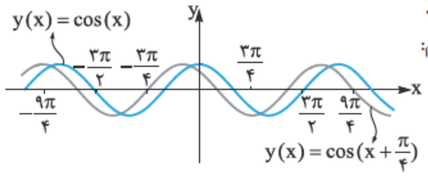
۳- الف) $y=\cos(-x)+۱=\cos x+۱$

نمودار $\cos x$ را به اندازهٔ ۱ واحد بالا می‌بریم:



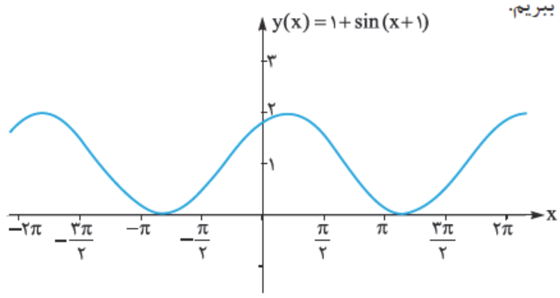
ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$

باید نمودار $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۴}$ به سمت چپ ببریم:



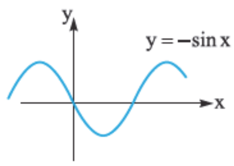
پ) $y=۱+\sin(x+۱)$

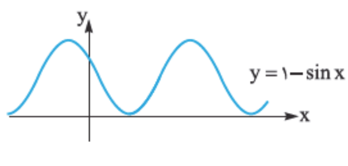
نمودار $y=\sin x$ را باید ۱ واحد (تقریباً $\frac{\pi}{۳}$) سمت چپ و سپس ۱ واحد بالا ببریم.



ت) $y=|۱-\sin x|$

اول نمودار $y=۱-\sin x$ را می‌کشیم:



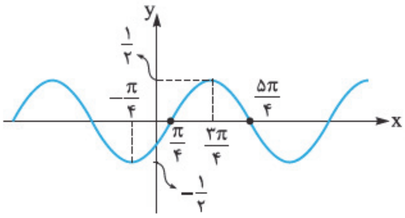


نمودار $y=۱-\sin x$ همواره نامنفی است؛ چون بالای محور xها قرار دارد.

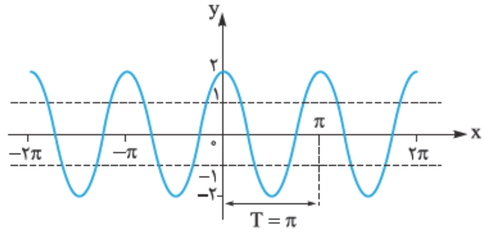
پس قدرمطلق آن خودش می‌شود؛ یعنی: $y=|۱-\sin x|=۱-\sin x$

ث) $y=\frac{۱}{۲}\sin(x-\frac{\pi}{۴})$

باید برد $y=\sin x$ را $\frac{۱}{۲}$ برابر کنیم و سپس نمودار را $\frac{\pi}{۴}$ سمت راست ببریم:

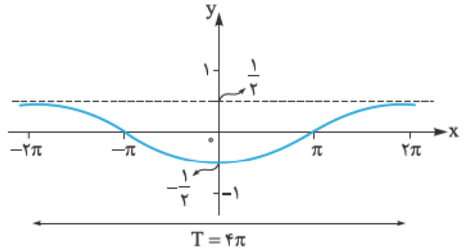


۴- الف)



عرض نقاط را ۲ برابر کرده‌ایم تا نمودار $۲\cos x$ به دست آید؛ سپس طول نقاط را $\frac{۱}{۲}$ برابر می‌کنیم تا به $y=۲\cos ۲x$ برسیم.

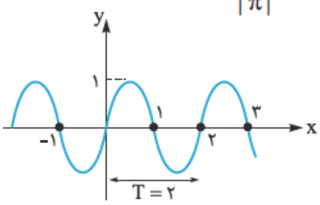
ب)



نمودار نسبت به محور xها قرینه شده است.

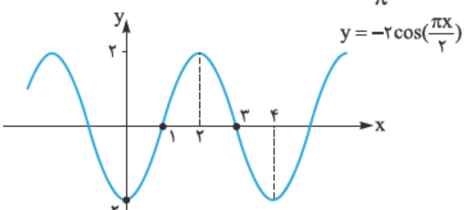
برد تابع $\frac{۱}{۲}$ برابر شده است و به علاوه طول نقاط هم ۲ برابر می‌شوند. دورهٔ تناوب تابع برابر ۴π به دست می‌آید.

پ) دورهٔ تناوب $y=\sin \pi x$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲$ است و نمودار π برابر فشرده‌تر از $y=\sin x$ است؛ یعنی طول نقاط روی نمودار $y=\sin x$ را باید $\frac{۱}{\pi}$ برابر کنیم:



توجه دارید که رفتار تابع در $x=۲$ مشابه رفتار $y=\sin x$ در $x=۲\pi$ است.

ت) دورهٔ تناوب تابع $y=-۲\cos(\frac{\pi x}{۲})$ برابر $T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴$ است. به علاوه باید نمودار $y=\cos x$ را نسبت به محور xها قرینه کنیم و برد آن را نیز ۲ برابر کنیم و طول نقاط هم $\frac{۲}{\pi}$ برابر می‌شوند:



رفتار تابع در $x=۱$ مشابه رفتار $y=-۲\cos x$ در $x=\frac{\pi}{۲}$ است.

۵- الف) نمودار شبیه $y=a\sin bx+c$ است.

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۷-۱}{۲}=۳ \qquad c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۷+۱}{۲}=۴$$

دورهٔ تناوب تابع داده‌شده برابر π است؛ پس:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\pi \Rightarrow |b|=۲ \Rightarrow \begin{cases} b=۲ \ \checkmark \\ b=-۲ \ \times \end{cases}$$

تابع به صورت $y=۳\sin(۲x)+۴$ است؛ چون نمودار بعد صفر این‌شکلی است: 

ب) نمودار شبیه $y=a\sin bx+c$ است.

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۲})}{۲}=\frac{۱}{۲} \qquad c=\frac{\max+\min}{۲}=۰$$

دورهٔ تناوب تابع هم که برابر $T=\frac{۲\pi}{۳}$ است.

$$\frac{۲\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۳ \Rightarrow \begin{cases} b=۳ \ \times \\ b=-۳ \ \checkmark \end{cases}$$

با توجه به این‌که نمودار بعد از صفر این‌شکلی است: ، باید b منفی باشد.

$$y=\frac{۱}{۲}\sin(-۳x)=-\frac{۱}{۲}\sin ۳x$$

پ) نمودار شبیه $y=a\cos bx+c$ است.

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۵-۱}{۲}=۲ \qquad c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۵+۱}{۲}=۳$$

دورهٔ تناوب تابع برابر ۴π است.

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi \Rightarrow |b|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} b=\frac{۱}{۲} \ \checkmark \\ b=-\frac{۱}{۲} \ \checkmark \end{cases}$$

عبارت داخل کسینوس می‌تواند منفی یا مثبت باشد. فرقی ندارد؛ چون نمودار اطراف صفر این‌شکلی است:  پس a هم مثبت در نظر می‌گیریم:

$$y=۲\cos(\pm\frac{x}{۲})+۳$$

ت) نمودار شبیه $y=a\cos bx+c$ است.

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۲-(-۲)}{۲}=۲$$

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۲+(-۲)}{۲}=۰$$

دورهٔ تناوب تابع هم که ۲π است؛ پس $b=\pm۱$ می‌شود. با توجه به این‌که نمودار اطراف صفر این‌شکلی است:  پس باید $a<۰$ باشد:

$$y=-۲\cos x$$

۶- الف) اگر ضابطهٔ تابع را به صورت $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ بگیریم، داریم:

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۳-(-۳)}{۲}=۳$$

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳+(-۳)}{۲}=۰$$

دورهٔ تناوب هم که π است: $\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=۲$

نمونه‌هایی از توابع با این ویژگی عبارت‌اند از: $y=۳\cos ۲x$ یا $y=۳\sin ۲x$.

ب)

$$a=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{-۱-(-۷)}{۲}=۳$$

$$c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{-۱+(-۷)}{۲}=-۴$$

$$T=۲=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\pi$$

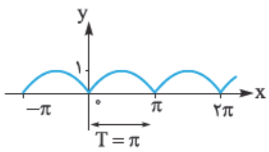
نمونه‌هایی از توابع با این ویژگی عبارت‌اند از: $y=۳\sin\pi x-۴$ یا $y=۳\cos\pi x-۴$.

پاسخ پرسش‌های چندگزینه‌ای فصل دوم

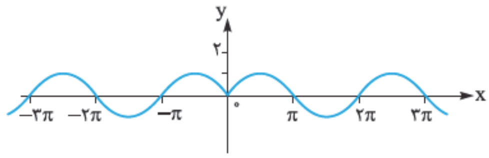
۱- گزینهٔ ۴ می‌دانیم وقتی $T=1$ است، $f(x+1)=f(x)$ می‌شود؛ یعنی وقتی ۱واحد ۱واحد روی نمودار جابه‌جا شویم، مقدار تابع تغییری نمی‌کند. پس اگر از $x=\frac{3}{4}$ به اندازهٔ ۱ واحد عقب برویم، داریم:

$$f(\frac{3}{4})=f(\frac{3}{4}-1)=f(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{2}$$

۲- گزینهٔ ۱ نمودار $y=|\sin x|$ به ما می‌گوید که دورهٔ تناوب این تابع $T=\pi$ است؛ پس دورهٔ تناوب تابع $y=|\sin\frac{\pi}{2}x|$ برابر $T=\frac{\pi}{|\frac{\pi}{2}|}=2$ می‌شود.

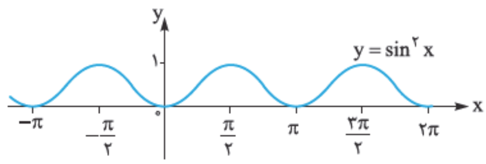


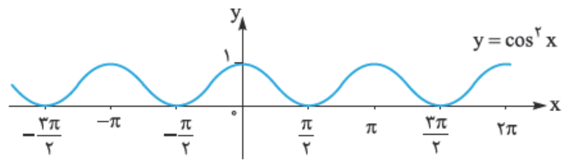
۳- گزینهٔ ۲ می‌دانیم $\cos|x|=\cos x$ است؛ پس گزینهٔ (۱) حتماً متناوب است. برای رسم $\sin|x|$، نمودار $\sin x$ را رسم می‌کنیم، عبارت سمت چپ را پاک کرده و قرینهٔ سمت راست را رسم می‌کنیم:



پس متناوب نیست.

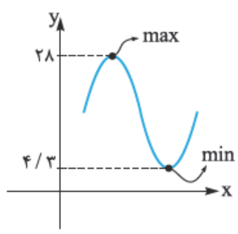
در گزینه‌های (۳) و (۴)، $f(x+\pi)=f(x)$ است؛ پس هر دو متناوب هستند. نمودار آن‌ها را هم کشیده‌ایم که از دیدنشان لذت ببرید.





۴- گزینهٔ ۲ اگر دورهٔ تناوب $f(x)$ برابر T باشد، آن‌گاه دورهٔ تناوب $f(bx)$ برابر $\frac{T}{|b|}$ است؛ حالا برعکس آن را سؤال خواسته. دورهٔ تناوب $af(bx+c)+d$ برابر T است؛ پس دورهٔ تناوب $f(x)$ برابر $|b|T$ می‌شود.

۵- گزینهٔ ۳ نمودار باید روی این نقاط قرار بگیرد.



به شکل نگاه کنید. a برابر تفاضل بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار، تقسیم بر ۲ است.

$$a=\frac{28-4/3}{2}=11/85$$

در ضمن $c=\frac{28+4/3}{2}=16/15$ می‌شود.

۶- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب ۳۶۵ است؛ زیرا t را برحسب روز گرفته‌ایم و یکسال ۳۶۵ روز می‌شود.

$$\frac{2\pi}{|b|}=365\Rightarrow b=\frac{2\pi}{365}$$

۷- گزینهٔ ۴ می‌دانیم $-1\le\sin\frac{x}{2}\le1$ می‌باشد؛ پس:

$$-2\le-2\sin\frac{x}{2}\le2\xrightarrow{+1}-1\le1-2\sin\frac{x}{2}\le3$$

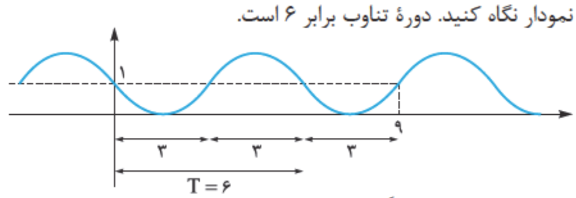
بنابراین بیشترین مقدار یا همان ماکزیمم تابع برابر ۳ است.

۸- گزینهٔ ۱ اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=a+\cos(-\frac{\pi}{2}+b\pi x)=a+\sin(b\pi x)$$

با توجه به نمودار $f(0)=1$ است. $f(0)=a+\sin(0)=a+0=a=1$

به نمودار نگاه کنید. دورهٔ تناوب برابر ۶ است.



$$\frac{2\pi}{|b\pi|}=6\Rightarrow\frac{2}{|b|}=6\Rightarrow|b|=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{3} & \times\\ b=-\frac{1}{3} & \checkmark\end{cases}$$

اگر $b>0$ باشد، نمودار بعد از $x=0$ باید این‌شکلی  باشد؛ در حالی که نمودار الان این‌شکلی  است.

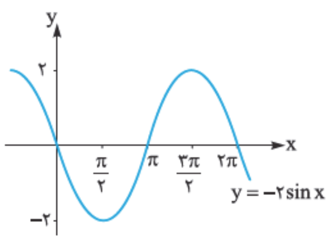
پس $f(x)=1+\sin(-\frac{\pi}{3}x)$ است.

$$f(29)=1+\sin(-\frac{29\pi}{3})=1-\sin(\frac{29\pi}{3})=1-\sin(\frac{30\pi}{3}-\frac{\pi}{3})$$

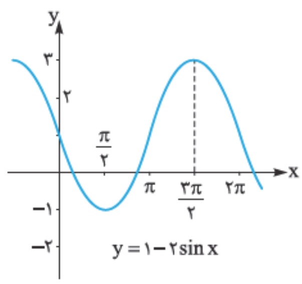
$$=1-\sin(10\pi-\frac{\pi}{3})=1-\sin(-\frac{\pi}{3})=1+\sin\frac{\pi}{3}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

این تست را دوست خوبم مهدی ملارمضانی عزیز طراحی کرده بود که مشابه تست کنکور ۹۳ است. جا دارد که به خاطر این تست قشنگ از او تشکر کنیم.

۹- گزینهٔ ۳ اول نمودار $y=1-2\sin x$ را می‌کشیم:



سپس نمودار $y=1-2\sin x$ را رسم می‌کنیم. برای این کار نمودار قبلی را ۱ واحد بالا می‌بریم:



مطابق شکل، در $x=\frac{3\pi}{2}$ تابع بیشترین مقدار را دارد.

برای رسم $y=1-2\sin 2x$ طول نقاط را باید $\frac{1}{2}$ برابر کنیم. پس این نقطه روی $\frac{3\pi}{4}$ قرار دارد.

۱۰- گزینهٔ ۱ تابع وقتی max می‌شود که $\sin \pi x = 1$ باشد؛ پس α را باید طوری انتخاب کنیم که عبارت داخل سینوس برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد؛ در نتیجه $\alpha = \frac{1}{2}$ است.

به علاوه می‌توانید نمودار $y = 2\sin \pi x - 1$ را بکشید و مقدار α را پیدا کنید.

۱۱- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع برابر $T = \frac{2\pi}{3}$ است:

$$T = \frac{2\pi}{|m|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |m| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \ \checkmark \\ m = -3 \ \times \end{cases}$$

توجه کنید که $-\sin mx$ را باید ۱ واحد بالا ببریم تا به نمودار داده‌شده برسیم. اگر $m > 0$ باشد، $-\sin mx$ بعد صفر این‌شکلی  و اگر $m < 0$ باشد  است؛ پس $m > 0$ است.

$$y = 1 - \sin 3x \Rightarrow y(\frac{7\pi}{6}) = 1 - \sin(3 \times \frac{7\pi}{6}) = 1 - \sin(\frac{7\pi}{2})$$

$$= 1 - \sin(4\pi - \frac{\pi}{2}) = 1 - \sin(-\frac{\pi}{2}) = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

۱۲- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب تابع، π است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ b = -2 \end{cases}$$

ماکزیمم تابع ۱/۵ است؛ پس: $1 + |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow |a| = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$

مقدار تابع در $x = 0$ عددی بین ۱ و ۱/۵ است:

$$y(0) = 1 + a\sin(-\frac{\pi}{6}) = 1 - \frac{1}{2}a > 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a < 0 \Rightarrow a < 0$$

بنابراین $a = -\frac{1}{2}$ است. با توجه به گزینه‌ها فقط $b = 2$ می‌تواند باشد. البته اگر $b < 0$ بود، نمودار تابع بعد صفر این‌شکلی  می‌شد!

$$a + b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

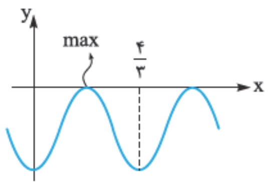
۱۳- گزینهٔ ۳ اول ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = -2 + a\cos(\pi + b\pi x) = -2 - a\cos b\pi x$$

دورهٔ تناوب تابع $\frac{4}{3}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \ \checkmark \\ b = -\frac{3}{2} \ \checkmark \end{cases}$$

$\cos\frac{3\pi}{2}x$ با $\cos(-\frac{3\pi}{2}x)$ برابر است؛ پس هر دو مقدار برای b قابل قبول است.



برای پیداکردن a، ۲تا راه داریم:

۱) بیشترین مقدار تابع با توجه به نمودار صفر است.

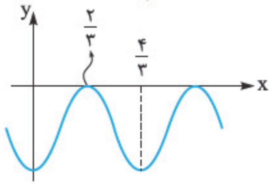
می‌دانیم $-1 \le -\cos(b\pi x) \le 1$ می‌باشد.

چون $a > 0$ است، داریم: $-a \le -a\cos(b\pi x) \le a$

$$\xrightarrow{-2} -2 - a \le -2 - a\cos(b\pi x) \le a - 2$$

بیشترین مقدار، $a - 2$ است که باید صفر باشد؛ پس $a = 2$ می‌شود.

۲) با توجه به تقارن نمودار می‌توان فهمید که مقدار آن در $x = \frac{2}{3}$ صفر است.



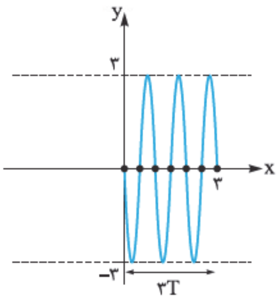
$$f(x) = -2 - a\cos(\frac{3\pi}{2}x)$$

$$f(\frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow -2 - a\cos(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow -2 + a = 0 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a \times b = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

۱۴- گزینهٔ ۱ این‌که بفهمیم $a = 3$ است کار سختی نیست!

با توجه به شکل، $3T = 3$ است و در نتیجه $T = 1$ می‌شود.



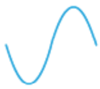
$$1 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \ \times \\ b = -2 \ \checkmark \end{cases}$$

نمودار اول پایین رفته، پس $b = -2$ قابل قبول است.

بنابراین $ab = 3(-2) = -6$ می‌شود.

تذکر یک جواب دیگر سؤال، $a = -3$ و $b = 2$ است.

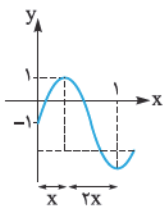
۱۵- گزینهٔ ۳ می‌دانیم $a > 0$ است؛ در غیر این صورت نمودار تابع بعد صفر شبیه  بود!

$$-1 \le \sin(b\pi x) \le 1 \xrightarrow{\times a} -a \le a\sin(b\pi x) \le a$$

$$\xrightarrow{-1} -a - 1 \le a\sin(b\pi x) - 1 \le a - 1$$

بیشترین مقدار تابع $a - 1$ است که با توجه به شکل برابر ۱ می‌باشد؛ پس $a = 2$ می‌شود. تابع به صورت $y = 2\sin(b\pi x) - 1$ است.

برای پیداکردن b، ۲تا راه‌حل داریم:



۱) با توجه به شکل مقابل اگر دورهٔ تناوب تابع برابر $4x$ باشد، $3x = 1$ است؛ پس $x = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید. بنابراین دورهٔ تناوب تابع $T = 4x = \frac{4}{3}$ خواهد بود. از ضابطهٔ تابع، دورهٔ تناوب برابر $T = \frac{2\pi}{|b\pi|}$ به دست می‌آید.

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|} = \frac{4}{3} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \ \checkmark \\ \text{یا} \\ b = -\frac{3}{2} \ \times \end{cases}$$

۲) کم‌ترین مقدار تابع $y = 2\sin(b\pi x) - 1$ وقتی رخ می‌دهد که $\sin(b\pi x)$ برابر -1 باشد؛ یعنی عبارت داخل آن $\frac{3\pi}{2}$ شود؛ پس در $x = 1$ عبارت داخل سینوس باید $\frac{3\pi}{2}$ باشد: $b\pi(1) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$

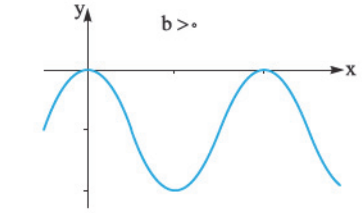
بنابراین $a + b = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$ است.

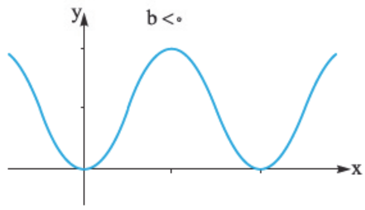
تذکر یک جواب دیگر سؤال، $b = -\frac{3}{2}$ و $a = -2$ است.

۱۶- گزینهٔ ۱ مقدار تابع در $x=۰$ برابر صفر است؛ یعنی:

$$y(۰)=a+b\cos(۰)=a+b=۰ \Rightarrow a=-b$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $y=-b+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ است. نمودار را با شرط $b>۰$ و $b<۰$ رسم کرده‌ایم:

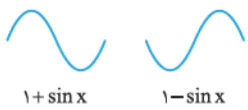




پس $b<۰$ است. در تابع $y=-b+b\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ بیشترین مقدار وقتی رخ می‌دهد که $\cos\frac{\pi}{۲}x=-۱$ باشد:

$$\max(y)=-b+b(-۱)=-۲b=۴ \Rightarrow b=-۲$$

۱۷- گزینهٔ ۳ اولاً $a>۰$ است؛ چون نمودار تابع بعد صفر شبیه $y=۱+\sin x$ است و شبیه $۱-\sin x$ نیست.

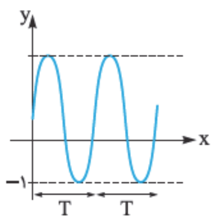


کم‌ترین مقدار تابع از روی نمودار برابر -۱ است و وقتی رخ می‌دهد که در عبارت $y=۱+a\sin(b\pi x)$، $\sin(b\pi x)=-۱$ باشد:

$$\min(y)=-۱=۱+a(-۱) \Rightarrow -a=-۲ \Rightarrow a=۲$$

حالا برویم سراغ دورهٔ تناوب. نمودار تابع در ۲ دوره از تناوبش رسم شده است و سؤال گفته نمودار در فاصلهٔ $(۰,\frac{۴}{۳})$ رسم شده؛ یعنی:

$$۲T=\frac{۴}{۳} \Rightarrow T=\frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow |b|=۳ \Rightarrow \begin{cases} b=۳ \ ✓ \\ b=-۳ \ ✗ \end{cases}$$

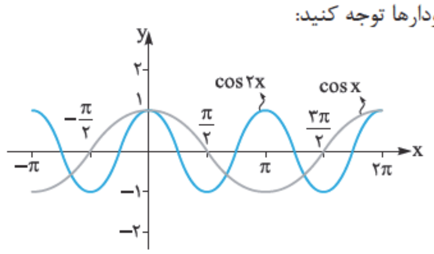


پس $a+b=۵$ می‌شود. البته یک جواب هم این است که $a=-۲$ و $b=-۳$ باشد که البته کنکور اعتقادی به بررسی این حالت‌ها ندارد!

۱۸- گزینهٔ ۲ با توجه به شکل، ضابطهٔ این تابع به صورت $y=a\cos bx+c$ است که مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن ۲ و -۴ است و دورهٔ تناوب هم π می‌باشد؛ بنابراین $|b|=۲$ و $|a|=۳$ و $c=-۱$ است.

ضابطهٔ تابع به صورت روبه‌رو می‌شود: $y=-۳\cos(\pm ۲x)-۱$

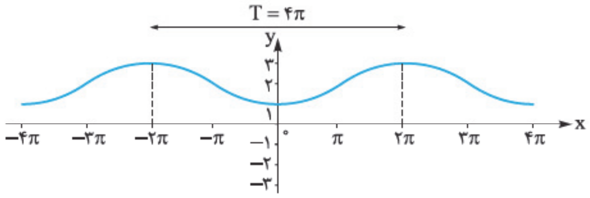
حالا به نمودارها توجه کنید:



۱۹- گزینهٔ ۱ نمودار شبیه $y=a\cos bx+c$ است.

$$|a|=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۳-۱}{۲}=۱ \qquad c=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۳+۱}{۲}=۲$$

دورهٔ تناوب تابع برابر ۴π است؛ پس $b=\frac{۱}{۲}$ می‌شود.



به علاوه چون نمودار اطراف $x=۰$ این شکلی است: ، a باید منفی باشد:

$$y=۲-\cos\frac{x}{۲}$$

۲۰- گزینهٔ ۳ طبق فرمول‌هایی که ارائه دادیم، داریم:

$$b=\frac{\max-\min}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲ \qquad a=\frac{\max+\min}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$a+|b|=۵$$

۲۱- گزینهٔ ۲ دورهٔ تناوب تابع $y=۶-۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)$ برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{\frac{۲\pi}{۳}}=۳$$

از طرفی $-۳\le -۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)\le ۳$ است؛ در نتیجه:

$$۳\le ۶-۳\sin(\frac{۲\pi}{۳}x)\le ۹$$

و ماکزیمم تابع برابر ۹ و مینیمم آن برابر ۳ است.

۲۲- گزینهٔ ۳ تابع $y=\cos x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ یک بار ماکزیمم مقدار خود را تولید می‌کند. از طرفی دورهٔ تناب تابع $y=-۲\cos ۳x$ برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ است و در نتیجه ۳ بار در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ بیشترین مقدار خود را تولید می‌کند.

۲۳- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع $y=\cos\frac{x}{۳}$ برابر است با: $T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}}=۶\pi$

و دورهٔ تناوب تابع $y=۳\sin ۲x$ برابر است با: $T_۲=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$ و در نتیجه داریم:

$$\frac{T_۱}{T_۲}=\frac{۶\pi}{\pi}=۶$$

۲۴- گزینهٔ ۲ در بین گزینه‌ها، T قطعاً دورهٔ تناوب نیست؛ چون $f(x+T)$ با $f(x)$ برابر نیست. حالا $۲T$ را آزمایش می‌کنیم:

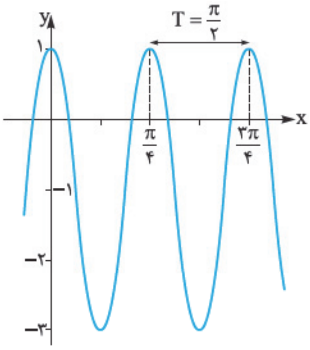
$$f(x+۲T)=f((x+T)+T)=-f(x+T)=-(-f(x))=f(x)$$

در نتیجه $۲T$ دورهٔ تناوب تابع f است.

۲۵- گزینهٔ ۲ نمودار $f(x)=۲\cos bx-۱$ شبیه شکل زیر است:

اگر تابع در نقاط $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{۳\pi}{۴}$ ماکزیمم شود، بنابراین دورهٔ تناوب باید مضربی از فاصلهٔ آن‌ها یعنی $\frac{۳\pi}{۴}-\frac{\pi}{۴}=\frac{\pi}{۲}$ باشد.

در بین گزینه‌ها فقط $x=\frac{\pi}{۱۰}$ را داریم که $\frac{\pi}{۲}$ مضربی از آن است.



۲۶- گزینهٔ ۴ دورهٔ تناوب تابع $T=۱$ است؛ پس اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد، داریم:

$$f(k(۱)+x)=f(x)\ \Rightarrow\ f(-۳/۷۶)=f(-۴(۱)+۰/۲۴)$$

$$=f(۰/۲۴)=\sqrt{۰/۲۴+\frac{۱}{۴}}=\sqrt{۰/۲۴+۰/۲۵}=\sqrt{۰/۴۹}=۰/۷$$

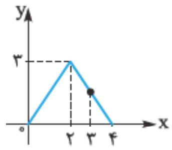
۲۷- گزینهٔ ۲ نمودار متناوب با دورهٔ تناوب ۴ است؛ پس اگر $k\in\mathbb{Z}$ باشد:

$$f(x+k(۴))=f(x)$$

می‌دانیم ۳+۴×۳۴۸=۳+۱۳۹۲=۱۳۹۵ است؛

پس: $f(۱۳۹۵)=f(۳)$

پس باید مقدار $f(۳)$ را پیدا کنیم:



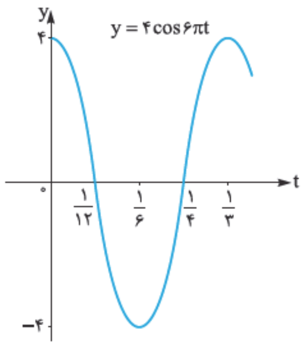
معادلهٔ خطی که $x=۳$ روی آن قرار می‌گیرد، برابر $y=-\frac{۳}{۲}(x-۴)$ است؛

پس: $f(۳)=-\frac{۳}{۲}(۳-۴)=\frac{۳}{۲}$

۲۸- گزینهٔ ۳ دورهٔ تناوب حرکت وزنه $\frac{۱}{۳}$ ثانیه بوده است که برابر با $T=\frac{۲\pi}{|\omega|}$ می‌شود:

$$\frac{۱}{۳}=\frac{۲\pi}{|\omega|}\Rightarrow|\omega|=۶\pi\Rightarrow\omega=۶\pi$$

با توجه به این‌که بیشترین فاصلهٔ وزنه از حالت تعادلش $۴\,cm$ است، پس $a=۴$ می‌شود. یعنی $y=۴\cos ۶\pi t$ خواهد بود. این هم از نمودار:



حاصل $\frac{\omega}{a}=\frac{۶\pi}{۴}=\frac{۳\pi}{۲}$ است.