فصل ۳: توابع نمایی و لگاریتمی

- درس اوّل: تابع نمایی
- درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم
- درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

- **تابع نمایی**
  - $f(x)=a^x (a>0,\ a\neq 1)$
    - $a>1$ ← تابع روند افزایشی دارد
    - $0<a<1$ ← تابع روند کاهشی دارد
  - ویژگی‌ها
    - نمودار تابع از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کند
    - $D_f=\mathbb{R}, R_f=(0,+\infty)$
    - یک‌به‌یک و وارون‌پذیر است
    - نمودارهای a^x و $(\frac{1}{a})^x$ نسبت به محور yها متقارن‌اند
- **نامساوی نمایی**
  - توان‌ها برابر ← $a>b$
    - $x>0$ ← $a^x>b^x$
    - $x<0$ ← $a^x<b^x$
  - پایه‌ها برابر ← $x_2>x_1$
    - $a>1$ ← $a^{x_2}>a^{x_1}$
    - $0<a<1$ ← $a^{x_2}<a^{x_1}$
- **تابع لگاریتمی**
  - $x=a^y \Leftrightarrow y=\log_a x$
    - $a>1$ ← تابع روند افزایشی دارد
    - $0<a<1$ ← تابع روند کاهشی دارد
  - ویژگی‌ها
    - نمودار تابع از نقطهٔ $(1,0)$ عبور می‌کند
    - $D_f=(0,+\infty), R_f=\mathbb{R}$
    - نمودارهای $\log_a x$ و $\log_{\frac{1}{a}} x$ نسبت به محور xها متقارن‌اند
    - تابع $\log_a x$ وارون تابع $y=a^x$ است
- **نامساوی لگاریتمی**
  - متغیرها برابر ← $a>b$
    - $x>1$ ← $\log_a x<\log_b x$
    - $0<x<1$ ← $\log_a x>\log_b x$
  - پایه‌ها برابر ← $x_2>x_1$
    - $a>1$ ← $\log_a x_2>\log_a x_1$
    - $0<a<1$ ← $\log_a x_2<\log_a x_1$
- **ویژگی‌های لگاریتم**
  - $\log_c ab=\log_c a+\log_c b$
  - $\log_c \frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$
  - $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$
- **معادلات لگاریتمی**
  - $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ← $f(x)=g(x)$

درس اوّل: تابع نمایی

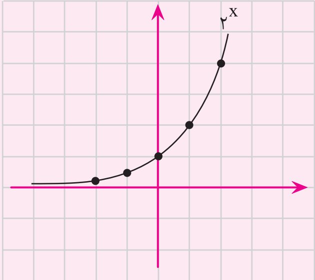
هر تابع به صورت $f(x)=a^x$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود، به‌طوری‌که a عددی ثابت، بزرگ‌تر از صفر و مخالف یک بوده ($a>۰$ و $a\neq ۱$) و توانِ x متغیر است.

مثال:

نمودار تابع $f(x)=۲^x$ را رسم کنید.

پاسخ:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x)=۲^x$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴



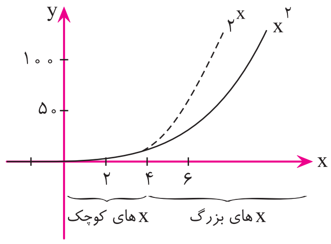
نکته: مقایسه رشد توابع توانی $f(x)=x^a$ (پایه متغیر و توان ثابت) و توابع نمایی $f(x)=a^x$ (پایهٔ ثابت و توان متغیر) بسیار بااهمیت است. در جدول‌های زیر مقدارهای توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ آمده است. با توجه به x های کوچک، به نظر می‌رسد دو تابع رشدی شبیه به هم دارند. این تصوّر کاملاً اشتباه است، بلکه برای xهای نه‌چندان بزرگ تابع نمایی خیلی سریع‌تر رشد می‌کند.

$f(x)=x^۲$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
$f(x)$	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	$\cdots$

$g(x)=۲^x$

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	$\cdots$
$g(x)$	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	$\cdots$

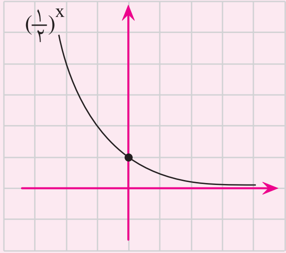


مثال:

نمودار تابع $f(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را رسم کنید.

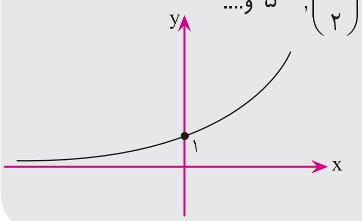
پاسخ: تابع $f(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ را می‌توان به صورت $f(x)=۲^{-x}$ در نظر گرفت. (چرا؟)

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$f(x)=۲^{-x}$	$۲^{-(-۲)}=۴$	$۲^{-(-۱)}=۲$	۱	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$

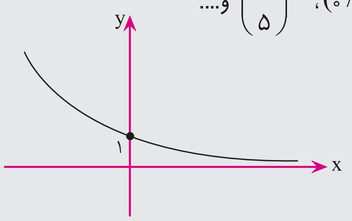


بنابراین نمودارهای توابع نمایی $f(x)=a^x$ را می‌توان به دو حالت کلی زیر دسته‌بندی کرد.

۱) $a>۱$: مثلاً ۲^x، $\left(\frac{۳}{۲}\right)^x$، ۵^x و ....



۲) $۰<a<۱$: مثلاً $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$، $(۰/۱)^x$، $\left(\frac{۳}{۵}\right)^x$ و ....



ویژگی نمودارهای توابع نمایی $f(x)=a^x$:

طبق دو نمودار صفحهٔ قبل می‌توان گفت:

۱) همهٔ نمودارها از نقطهٔ $(0,1)$ عبور می‌کنند.

۲) دامنهٔ توابع، $\mathbb{R}$ و برد آن‌ها، $(0,+\infty)$ است. (چرا؟)

۳) نمودار همهٔ توابع همواره در ناحیه‌های اوّل و دوم دستگاه مختصات قرار دارند.

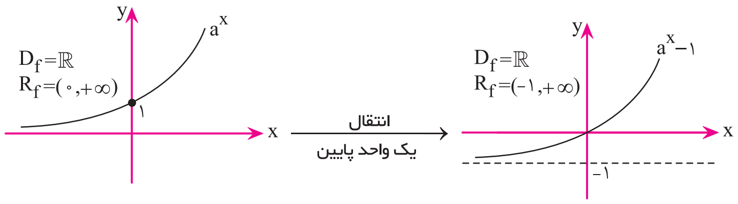
۴) نمودارها، با افزایش x، به ازای $a>1$ روند افزایشی و به ازای $0<a<1$ روند کاهشی دارند.

۵) همهٔ نمودارهای توابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیرند. (چرا؟)

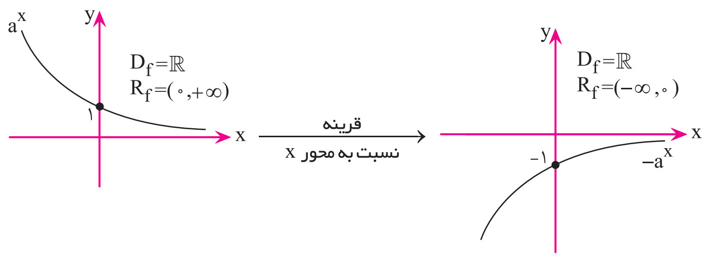
۶) نمودارهای a^x و $\left(\frac{1}{a}\right)^x$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند.

نکته: همان‌طور که به آن اشاره کردیم، نمودار توابع نمایی به دو صورت کلی است، اما می‌توان از روی آنها با توجه به قوانین انتقال و غیره نمودارهای دیگری نیز ترسیم کرد که خود یک تابع نمایی‌اند. به مثال‌های زیر توجه کنید.

$a>1$:

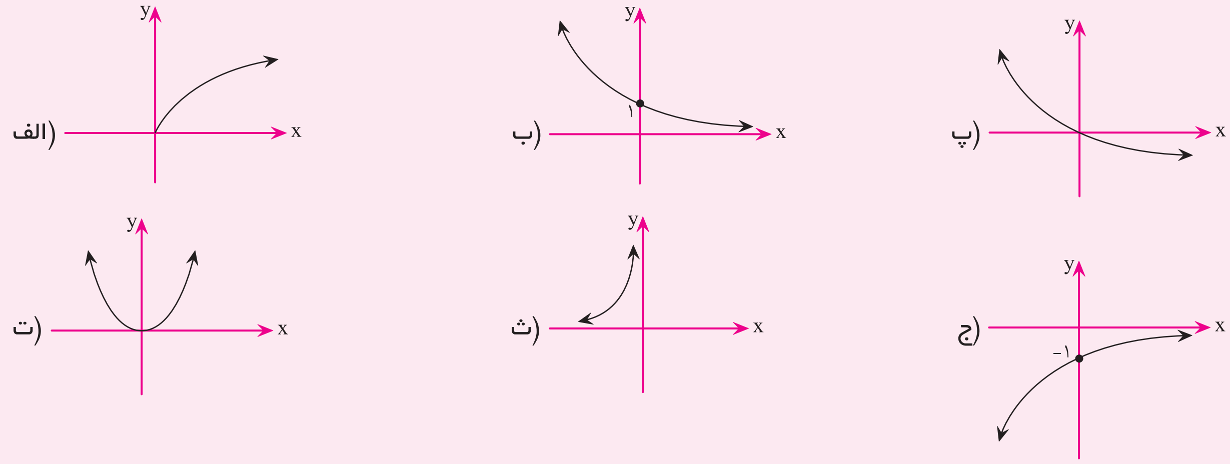


$0<a<1$:



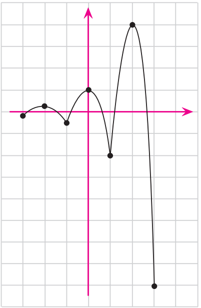
مثال:

کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به یک تابع نمایی هستند؟



پاسخ: نمودارهای (ب)، (پ) و (ج) مربوط به توابع نمایی‌اند.

نکته ۱: توابع به شکل $f_1(x)=ka^x$، $f_2(x)=a^x\pm k$ و $f_3(x)=a^{x\pm k}$ $(k>0)$ نیز نمایی هستند.



نکته ۲: همان‌طور که در شرط تابع نمایی $f(x)=a^x$ ذکر کردیم، $a>0$ و $a\neq 1$. از این‌رو تابعی مثل $f(x)=(-2)^x$ نمایی نیست. دلیل این مطلب را با رسم تابع f بررسی می‌کنیم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(-2)^x$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	4	-8

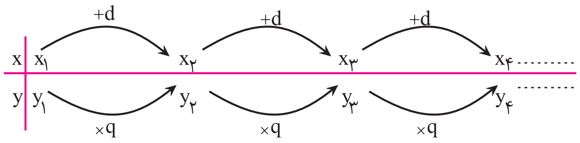
مثال:

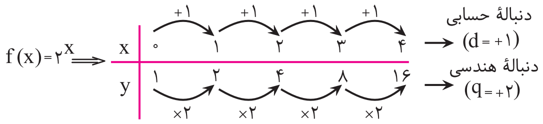
کدام‌یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=2^x-1$ ب) $y=x^2-\frac{3}{2}$ پ) $y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$ ت) $y=2(-2)^x$

پاسخ: موارد (الف) و (پ) مربوط به ضابطهٔ توابع نمایی هستند.

نکته ۱: در توابع نمایی هرگاه مقدارهای x تشکیل یک دنبالهٔ حسابی دهند، آن‌گاه مقدارهای y تشکیل دنبالهٔ هندسی (با قدرنسبت مثبت و مخالف یک) می‌دهند.





نکته ۲: ضابطهٔ تابع نمایی با توجه به جدول به صورت $f(x)=k(q)^x$ است که در آن k با جایگذاری نقطهٔ (x_1,y_1) به‌دست می‌آید. (این رابطه هنگامی برقرار است که مقدارهای x دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۱ تشکیل دهند.)

نکته ۳: فرض کنید مقدارهای x در جدول داده‌ها تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت $d=+1$ ندهند. از این رو ضابطهٔ تابع نمایی را به صورت زیر به‌دست می‌آوریم.

x	0	5	10	15	$\cdots$
y	10	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{10}{27}$	$\cdots$

تعیین k: $f(x)=ka^x \xrightarrow{(0,10)} 10=ka^0 \to k=10$

تعیین a: $f(x)=10a^x \xrightarrow[\text{نقطهٔ دلخواه}]{\left(5,\frac{10}{3}\right)} \frac{10}{3}=10a^5 \to a^5=\frac{1}{3} \to a=\sqrt[5]{\frac{1}{3}}$

$$\to f(x)=10\left(\sqrt[5]{\frac{1}{3}}\right)^x$$

مثال:

داده‌های کدام جدول بیانگر یک تابع نمایی است؟

الف)

x	5	10	15	20
y	50	25	$12/5$	$6/25$

ب)

x	-2	0	2	4
y	$0/12$	$-0/24$	$0/48$	$-0/96$

پاسخ: الف. x ها یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۵ و y ها یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=+\frac{1}{2}$ هستند. پس داده‌های این جدول اعداد مربوط به یک تابع نمایی‌اند.

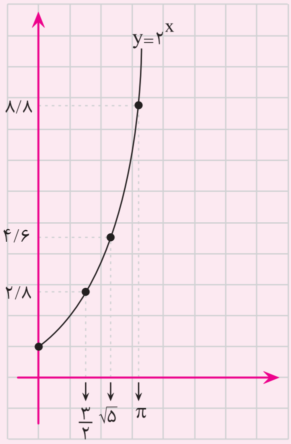
ب. x ها یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۲+ و y ها یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $q=-2$ هستند. پس داده‌های این جدول مربوط به یک تابع نمایی نیستند.

محاسبهٔ مقدار a^b به ازای b غیرصحیح

در این حالت کافی است نمودار a^x را رسم کنیم. سپس مقدار y نظیر $x=b$ را از روی نمودار مشخص کنیم.

مثال:

با توجه به نمودار داده‌شده مقدارهای تقریبی $۲^{۱/۵}$، $۲^{\sqrt{۵}}$ و ۲^{π} را تعیین کنید.



پاسخ: با توجه به نمودار مقابل می‌توان گفت:

$$f(۱/۵)\simeq ۲/۸$$

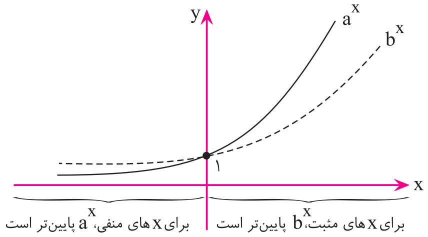
$$f\left(\sqrt{۵}\right)\simeq ۴/۶$$

$$f(\pi)\simeq ۸/۸$$

مقایسه نمودارهای توابع نمایی

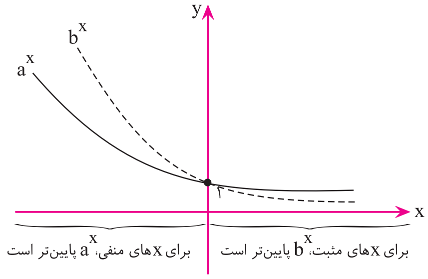
در این حالت دو تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=b^x$ را با فرض $a>b$ در دو حالت کلی بررسی می‌کنیم.

الف. پایه‌ها بزرگ‌تر از یک باشند:



تفسیر نمودار $\Rightarrow \begin{cases} x>۰: a^x>b^x \\ x<۰: a^x<b^x \end{cases}$

ب. پایه‌ها بین صفر و یک باشند:



تفسیر نمودار $\Rightarrow \begin{cases} x>۰: a^x>b^x \\ x<۰: a^x<b^x \end{cases}$

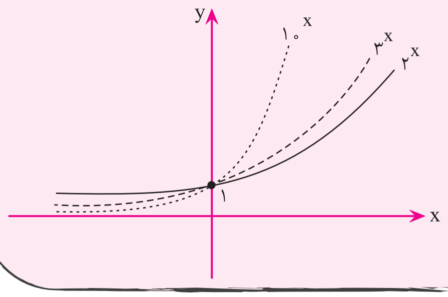
پس به عنوان نتیجه می‌توان گفت به ازای هر $a,b>۰$ و $a,b\neq ۱$، همواره داریم:

$$a>b\Rightarrow \begin{cases} x>۰\Rightarrow a^x>b^x \\ x<۰\Rightarrow a^x<b^x \end{cases}$$

مثال:

نمودارهای سه تابع $f(x)=۲^x$، $g(x)=۳^x$ و $h(x)=۱۰^x$ را به‌طور کیفی در یک دستگاه رسم کنید.

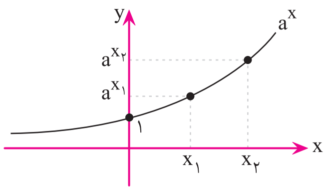
پاسخ: چون $۲<۳<۱۰$ است، پس به ازای x های مثبت $۲^x<۳^x<۱۰^x$ و به ازای x های منفی $۲^x>۳^x>۱۰^x$.



نامساوی‌های نمایی

با فرض برابربودن پایه‌ها، نامساوی‌ها را در دو حالت کلی زیر در نظر می‌گیریم.

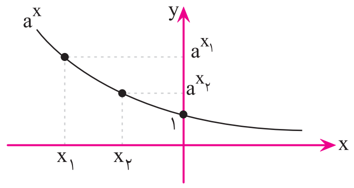
$a>۱$:



$a^{x_۲}>a^{x_۱}\Leftrightarrow x_۲>x_۱$

(جهت نامساوی عوض نمی‌شود.)

$۰<a<۱$:



$a^{x_۲}<a^{x_۱}\Leftrightarrow x_۲>x_۱$

(جهت نامساوی عوض می‌شود.)

مثال:

۱. الف. اگر $x>y$، چه رابطه‌ای بین ۳^x و ۳^y برقرار است؟

ب. اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(۰/۱)^x$ و $(۰/۱)^y$ برقرار است؟

پ. اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری‌که $۵^x>۵^y>۵^z$، چه رابطه‌ای بین x، y و z برقرار است؟

پاسخ:

الف) $x>y\Leftrightarrow ۳^x>۳^y$

ب) $x<y\Leftrightarrow (۰/۱)^x>(۰/۱)^y$

پ) $۵^x>۵^y>۵^z\Leftrightarrow x>y>z$

۲. در جای خالی علامت $<=>$ قرار دهید

الف) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰/۵}$ ⬤ $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱/۵}$

ب) $۴^{\sqrt{۷}}$ ⬤ $۴^{\sqrt{۵}}$

پ) $(۱/۵)^{-۳}$ ⬤ $(۱/۵)^{۴}$

پاسخ:

الف) $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۰/۵}>\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۱/۵}$

ب) $۴^{\sqrt{۷}}>۴^{\sqrt{۵}}$

پ) $(۱/۵)^{-۳}<(۱/۵)^{۴}$

تمرین‌های امتحانی

۱. **گزینهٔ درست را انتخاب کنید.**

الف. نمودار دو تابع $f(x)=۲^x$ و $g(x)=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ در نقطهٔ .... متقاطع‌اند.
☐ $(۰,۱)$ ☐ $(۱,۰)$

ب. برد دو تابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=۲^x$ یکسان است.
☐ درست ☐ نادرست

پ. محل تقاطع نمودار تابع $f(x)=۱۰^x$ با محور xها نقطهٔ $(۶,۰)$ است.
☐ درست ☐ نادرست

ت. اگر $x<y$، آن‌گاه می‌توان گفت: ....
☐ $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x<\left(\frac{۱}{۲}\right)^y$ ☐ $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x>\left(\frac{۱}{۲}\right)^y$

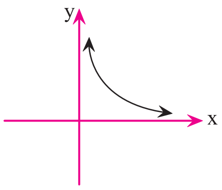
۲. **نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^x$ و $g(x)=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ را در بازهٔ $[-۲,۲]$ در یک دستگاه مختصات رسم کرده و تفاوت‌ها و شباهت‌های آنها را بیان کنید.**

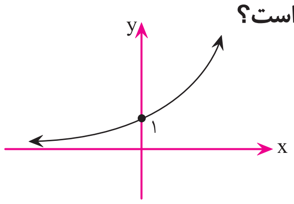
۳. در کشت یک نوع باکتری، تعداد باکتری‌ها در هر ساعت دوبرابر می‌شود. اگر در ابتدا ۵۰ باکتری وجود داشته باشد،

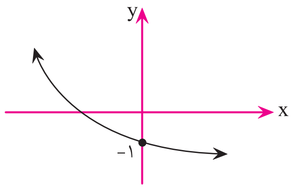
الف. پس از ۲ ساعت چه تعداد باکتری وجود دارد؟

ب. پس از ۴ ساعت چه تعداد باکتری وجود دارد؟

۴. کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف)


ب)


پ)


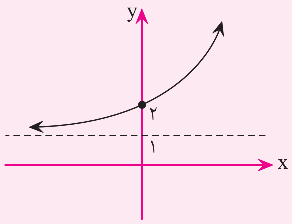
۵. کدام‌یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

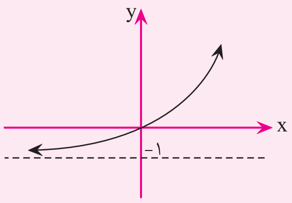
الف) $f(x)=۲\left(-\frac{۱}{۳}\right)^{x}$

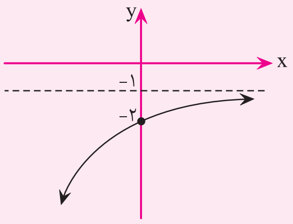
ب) $f(x)=\frac{۱}{۳}(۲)^{-x}$

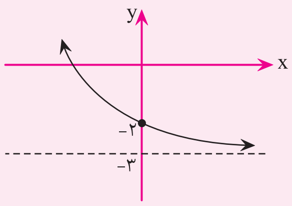
پ) $f(x)=\frac{۱}{۲}(۳)^{۱-۲x}$

۶. هر یک از نمودارهای ستون سمت راست را به ضابطهٔ آن در ستون سمت چپ وصل کنید. دامنه و بُرد هر یک را مشخص کنید.

الف.


ب.


پ.


ت.


$-\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}-۱$

$۲^{x}+۱$

$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}-۳$

$۲^{x}-۱$

۷. داده‌های کدام جدول بیانگر تابع نمایی است؟ ضابطهٔ تابع نمایی را به‌دست آورید.

الف)

x	۰/۵	۱	۱/۵	...
y	۳	۶	۹	...

ب)

x	۰	۱	۲	...
y	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	...

فصل ۲: توابع نمایی و لگاریتمی

۸. مقدار تقریبی $2^{\sqrt{2}} - \sqrt{2}^{2}$ را محاسبه کنید.

۹. نمودارهای سه تابع $f(x)=2^{-x}$، $g(x)=3^{-x}$ و $h(x)=10^{-x}$ را به‌طور کیفی در یک دستگاه رسم کنید.

۱۰. در جاهای خالی علامت $<=>$ قرار دهید.

الف) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}$ ▢ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1.5}$

ب) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0.5}$ ▢ $\left(\frac{1}{3}\right)^{0.5}$

۱۱. بین 2^{10} و $2^{\sqrt{10}}$ سه عدد بنویسید.

۱۲. اگر $f(x)=\left(\frac{2-a}{a+1}\right)^{x}$ ضابطهٔ مربوط به یک تابع نمایی باشد، حدود a را به‌دست آورید.

۱۳. اگر با افزایش مقدار x، مقدارهای تابع $f(x)=\left(\frac{m+1}{m-1}\right)^{x}$ روند افزایشی داشته باشد، حدود m را بیابید.

۱۴. فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو منحنی به معادلات $y=2^{x}$ و $y=\left(\sqrt{2}\right)^{x+1}+4$ از نقطهٔ $(0,12)$ چقدر است؟

درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع $f(x)=a^{x}$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که در درس قبل به آن اشاره کردیم، چنین توابعی یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند. وارون تابع $y=a^{x}$ به صورت $x=a^{y}$ است (چرا؟). اما از آن‌جاکه دوست داریم توابع ما به صورت $y=f(x)$ باشند و این برای $x=a^{y}$ غیرممکن است، بنابراین تابع جدیدی با خاصیتی مشخص به صورت $y=\log_a^{x}$ تعریف می‌کنیم. در حقیقت $\log_a^{x}$ توانی است که a باید به آن برسد تا x به‌دست آید.

جواب توان‌رسانی

$y=\log_a^{x} \Leftrightarrow x=a^{y}$

a به توان y (یا $\log_a^{x}$) می‌رسد.

تابع $y=\log_a^{x}$ را به این صورت می‌خوانیم: «لگاریتم متغیر x در پایهٔ a.»

به عنوان نتیجه می‌توان گفت که $y=\log_a^{x}$، وارون تابع $y=a^{x}$ است.

مثال:

مقدارهای تابع $y=\log_a^{x}$ را به ازای $a=10$ در هر یک از حالت‌های زیر به‌دست آورید.

الف) $x=10$ ب) $x=100$ پ) $x=1000$ ت) $x=0.01$

پاسخ:

الف) $y=\log_{10}^{10} \xrightarrow{\text{۱۰ به توان y باید برابر ۱۰ شود}} 10^{y}=10 \to y=1$

ب) $y=\log_{10}^{100} \xrightarrow{\text{۱۰ به توان y باید برابر ۱۰۰ شود}} 10^{y}=100 \to 10^{y}=10^{2} \to y=2$

پ) $y=\log_{10}^{1000} \xrightarrow{\text{۱۰ به توان y باید برابر ۱۰۰۰ شود}} 10^{y}=1000 \to 10^{y}=10^{3} \to y=3$

ت) $y=\log_{10}^{0.01} \xrightarrow{\text{۱۰ به توان y باید برابر ۰/۰۱ شود}} 10^{y}=0.01 \to 10^{y}=10^{-2} \to y=-2$

توجه کنید که می‌توانستیم مثال قبل را به شیوهٔ دیگری هم بیان کنیم.

«مقدارهای $\log_{10}^{10}$، $\log_{10}^{100}$، $\log_{10}^{1000}$ و $\log_{10}^{0.01}$ را حساب کنید.»

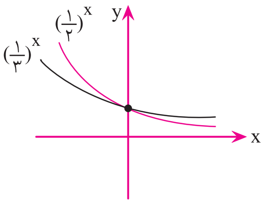
فصل ۳: توابع نمایی و لگاریتمی

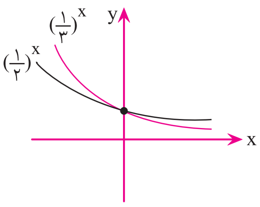
نمونه سؤال امتحانی فصل سوم

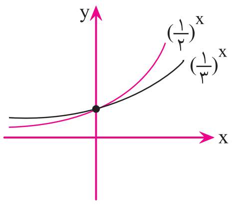
ردیف	سؤالات	بارم
۱	**تابع $f(x)=4^{x}$ را در نظر بگیرید و به موارد خواسته‌شده پاسخ دهید.** الف. نمودار تابع را در بازهٔ $[-2,2]$ رسم کنید. ب. با توجه به نمودار، مقدار تقریبی $4^{\sqrt{3}}$ را به‌دست آورید. پ. این تابع چه تفاوتی با تابع $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$ دارد؟ ت. این تابع را با تابع $y=2^{x}$ مقایسه کنید. ث. نمودار وارون تابع را رسم کرده و ضابطهٔ آن را بنویسید. نقاط روی دو نمودار چه رابطه‌ای با هم دارند؟	۴/۵
۲	**داده‌های کدام جدول زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟ ضابطهٔ تابع نمایی را تعیین کنید.** ب) $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots \\ \hline y & 3 & 3/4 & 3/8 & 4/2 & \cdots \end{array}$ الف) $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & 5 & 10 & 15 & \cdots \\ \hline y & -3 & -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & \cdots \end{array}$	۱/۵
۳	**در یک کشت باکتری، تعداد باکتری‌ها در هر ساعت ۳ برابر می‌شود. اگر در ابتدا ۳۰ باکتری وجود داشته باشد، پس از t ساعت چه تعداد باکتری وجود دارد؟**	۱
۴	**تابع $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}^{x}$ را در نظر بگیرید و به موارد خواسته‌شده پاسخ دهید.** الف. نمودار تابع را در بازهٔ $(0,+\infty)$ رسم کنید. ب. با توجه به نمودار، توابع $g(x)=\log_{\frac{1}{4}}^{x-1}$، $h(x)=-\log_{\frac{1}{4}}^{x}$ و $k(x)=\|f(x)\|$ را رسم کنید. پ. دامنهٔ هر یک از توابع g، h و k را تعیین کنید.	۴
۵	**در جاهای خالی علامت $<=>$ قرار دهید.** الف) $3^{\sqrt{11}}\ \square\ 3^{\sqrt{13}}$ ب) $0/3^{\sqrt{1/5}}\ \square\ 0/3^{\frac{3}{4}}$ پ) $\log_{0/1}^{\sqrt{5}}\ \square\ -\log_{0/1}^{\pi}$	۱/۵
۶	**با توجه به تعریف لگاریتم، حاصل $\log_{3}^{\sqrt{27}}+\log_{10}^{0/01}$ را به‌دست آورید.**	۲
۷	**حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.** الف) $\log_{2}^{\sqrt{8}}+\log_{3}^{\sqrt{243}}+3\log_{10}^{\sqrt{1000}}$ ب) $5^{\left(3\log_{\frac{1}{5}}^{3}-2\log_{25}^{2}\right)}$	۲/۵
۸	**از معادلهٔ $\log(2x-1)+\log(x+3)=\log 30-\log 2$، مقدار $\log_{8}^{x}$ را محاسبه کنید.**	۲
۹	**میزان pH مایعات از رابطهٔ $pH=-\log[H^{+}]$ به‌دست می‌آید که در آن $[H^{+}]$ غلظت یون هیدرونیوم برحسب $\frac{mol}{lit}$ است. pH آب‌پرتقالی با غلظت یون هیدرونیوم به میزان $2/9\times10^{-4}$ مول بر لیتر، چقدر است؟ $(\log^{29}=1/46)$**	۱
	جمع نمره	۲۰

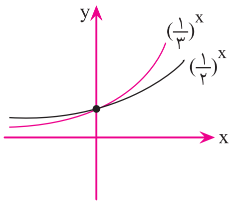
سؤالات چهارگزینه‌ای فصل سوم

۱. در کدام گزینه، مقایسهٔ درستی از دو تابع $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ و $y=\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ داده شده است؟

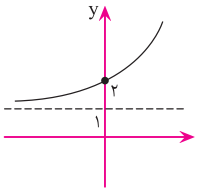
۱) 

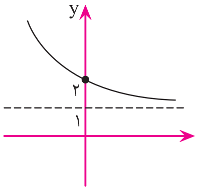
۲) 

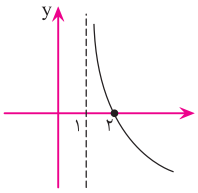
۳) 

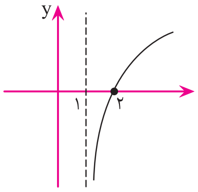
۴) 

۲. نمودار $y=۲^{-x}+۱$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

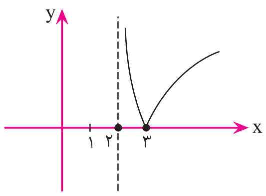
۳. فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تابع نمایی $y=۲^x$ با محور yها و نقطهٔ برخورد معکوس این تابع نمایی با محور xها کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt{۲}$

۴. کدام گزینه درست است؟

۱) $\log_{\frac{۱}{۲}}\frac{۱}{۱۰۰} > \log_{\frac{۱}{۲}}۱۰۰$ ۲) $(۷/۷)^{\frac{۳}{۲}} > (۷/۷)^{\sqrt{۳}}$ ۳) $(۰/۱)^{\sqrt{۵}} < (۰/۱)^{\sqrt{۷}}$ ۴) $\log_{\frac{۱}{۲}}۳ > \log_{\frac{۱}{۲}}۲$

۵. معادلهٔ مربوط به نمودار زیر، در کدام یک از گزینه‌ها آمده است؟



۱) $y=\left|\log_{\frac{۱}{۲}}(x-۲)\right|$ ۲) $y=-\left|\log_۲ x\right|-۲$

۳) $y=\left|\log_{\frac{۱}{۲}}x-۲\right|$ ۴) $y=\left|\log_{\frac{۱}{۲}}x\right|-۲$

۶. اگر a و b ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-۱۰x+۰/۱=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log(a+b)$ کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) ۲- ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۱

۷. اگر $۳^a=A$ باشد، $\log_۳ ۹A^۲$ کدام است؟ (سراسری ریاضی)

۱) $۲+۲a$ ۲) $۳+۲a$ ۳) $۲+a^۲$ ۴) $۳+a^۲$

۸. از معادلهٔ $\log_۳(x^۲-۱)=۱+\log_۳(x+۳)$، مقدار لگاریتم $(x-۳)$ در مبنای ۴ کدام گزینه است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۱- ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۹. معادلهٔ $\left(\frac{۱}{۳}\right)^x=\log_{\frac{۱}{۳}}x$ چند ریشه دارد؟

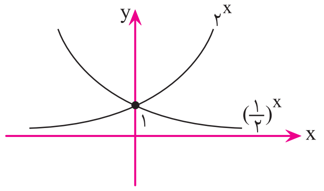
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰. از دو معادلهٔ $\log(y+۲)=۱$ و $\log(y-x)+\log(۴x+y)=۲$، مقدار x کدام گزینه است؟ (سراسری تجربی خارج از کشور)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ تمرین‌های امتحانی درس اوّل

۱ الف. $(۰,۱)$

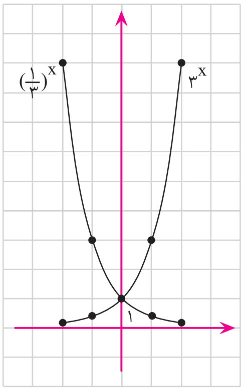


ب. نادرست، برد تابع $x^۲$ برابر $[۰,+\infty)$ و برد تابع ۲^x برابر $(۰,+\infty)$ است.

پ. نادرست، توابع نمایی به صورت $f(x)=a^x$ هرگز محور x ها را قطع نمی‌کنند.

ت) $x<y \xrightarrow{۰<a<۱} \left(\frac{۱}{۲}\right)^x > \left(\frac{۱}{۲}\right)^y$

۲



x	−۲	−۱	۰	۱	۲
۳^x	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۹

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
$\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$

همان‌طور که می‌بینیم نمودارهای ۳^x و $\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ نسبت به محور y ها قرینهٔ یکدیگرند.

شباهت‌ها: ۱) از نقطهٔ $(۰,۱)$ عبور می‌کنند.

۲) دامنهٔ آنها $[-۲,۲]$ و برد آنها $\left(\frac{۱}{۹},۹\right)$ است.

۳) در ناحیه‌های اوّل و دوم قرار دارند.

۴) یک‌به‌یک و وارون‌پذیرند.

تفاوت: با افزایش x، ۳^x روند افزایشی و $\left(\frac{۱}{۳}\right)^x$ روند کاهشی دارد.

۳ الف.

ابتدا $(۵۰) \xrightarrow[\text{یک ساعت}]{\text{پس از}} ۲\times۵۰ \xrightarrow[\text{دو ساعت}]{\text{پس از}} \underbrace{۲\times(۲\times۵۰)}_{\text{۲۰۰ باکتری}}$

ب. برای حل چنین مسئله‌هایی تابع کلی را $f(x)=ka^x$ در نظر می‌گیریم که k در آن مقدار در لحظه $x=۰$ است.

$\underset{\downarrow}{n(t)}=۵۰(۲)^t \xrightarrow{t=۴} n(t)=۵۰\times۲^۴=۸۰۰$

تعداد باکتری‌ها

تعداد باکتری‌ها پس از ۴ ساعت

۴ نمودارهای (ب) و (پ) مربوط به توابع نمایی هستند.

۵ ضابطه‌های (ب) و (پ) مربوط به توابع نمایی هستند.

در قسمت (الف) چون پایه عددی منفی است، از این‌رو ضابطهٔ مربوط به یک تابع نمایی نیست. (چرا؟)

۶

الف. $۲^x+۱$	$R_f=(۱,+\infty)$	$D_f=\mathbb{R}$,
ب. $۲^x-۱$	$R_f=(-۱,+\infty)$	$D_f=\mathbb{R}$,
پ. $-\left(\frac{۱}{۲}\right)^x-۱$	$R_f=(-\infty,-۱)$	$D_f=\mathbb{R}$,
ت. $\left(\frac{۱}{۲}\right)^x-۳$	$R_f=(-۳,+\infty)$	$D_f=\mathbb{R}$,

۷ داده‌های جدولی مربوط به یک تابع نمایی است که xها تشکیل دنبالهٔ حسابی و y ها تشکیل دنبالهٔ هندسی (با قدرنسبت مثبت و مخالف ۱) می‌دهند. داده‌های جدول (الف) (هم x و هم y) دنبالهٔ حسابی تشکیل داده‌اند. اما داده‌های جدول (ب) مربوط به یک تابع نمایی است.

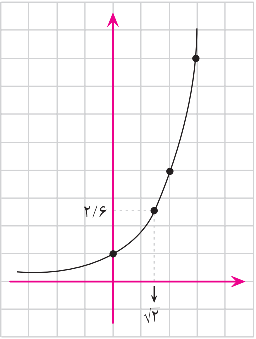
حال تعیین ضابطه: طبق نکته‌ای که در درس‌نامه به آن اشاره کردیم، ضابطهٔ تابع نمایی با توجه به داده‌های جدول به صورت زیر است: $f(x)=kq^x$

که در آن q قدرنسبت دنبالهٔ y ها است و k با جایگذاری نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ به‌دست می‌آید. می‌دانیم $q=\frac{۱}{۲}$ و برای k داریم:

$$f(x)=kq^x \xrightarrow{(x_۱,y_۱)=\left(۰,\frac{۱}{۲}\right)} \frac{۱}{۲}=kq^۰ \to k=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین: $f(x)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$

۸ ابتدا نمودار ۲^x را رسم می‌کنیم. سپس مقدار y نظیر $x=\sqrt{۲}$ را روی نمودار مشخص می‌کنیم و $۲^{\sqrt{۲}}$ به‌دست می‌آید.



طبق نمودار روبه‌رو داریم:

$f\left(\sqrt{۲}\right)=۲^{\sqrt{۲}}\simeq ۲/۶$

$۲^{\sqrt{۲}}-\sqrt{۲}^{۲}=۲/۶-۲=۰/۶$