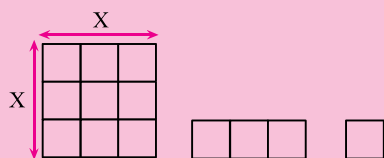


فصل ۲: معادله درجه دوم

- ↔ معادله درجه اول
- ↔ معادله درجه ۲
- ↔ حل معادله درجه ۲ به روش تجزیه عبارت‌های جبری
- ↔ حل معادله درجه ۲ به روش مربع کامل
- ↔ روش کلی حل معادله درجه ۲
- ↔ کاربردهای معادله درجه ۲ در حل مسائل
- ↔ معادلات شامل عبارت‌های گویا و کاربردهای آن

مجموع مقادیر محیط و مساحت اشکال زیر ۳۶ است. مقدار x را حساب کنید.



درس اول: معادله درجه اول

معادله

معادله یک تساوی است که دارای یک یا چند متغیر (مجهول) مانند x یا y است و به ازای بعضی از مقادیر متغیر، این تساوی برقرار می‌شود. مجموعه مقادیری را که به ازای آن‌ها تساوی برقرار می‌شود، «مجموعه جواب معادله» یا «ریشه‌های معادله» می‌نامیم.

اگر درجه متغیر (مجهول) پس از ساده شدن، یک شود، معادله را درجه اول می‌گوییم. هر معادله درجه اول پس از ساده شدن، به صورت

$$ax = b \quad a \neq 0 \text{ اگر } a \neq 0 \text{ باشد، یک ریشه به صورت } x = \frac{b}{a} \text{ دارد.}$$

مثال:

۱. هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $3x - 3 = x + 3$

ب) $7(x + 3) = 3 + 8(x - 1)$

پاسخ: الف. برای ساده کردن، همه جملات شامل x را به یک طرف و اعداد معلوم را به طرف دیگر می‌بریم. سپس برای پیدا کردن x ،

عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم:

$$3x - 3 = x + 3 \Rightarrow 3x - x = 3 + 3 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

$$7(x + 3) = 3 + 8(x - 1)$$

ب. ابتدا اعداد را در پراترها ضرب می‌کنیم، سپس مانند (الف) عمل می‌کنیم:

$$7x + 21 = 3 + 8x - 8$$

$$7x - 8x = 3 - 8 - 21$$

$$-1x = -26$$

$$x = \frac{-26}{-1} = 26 \Rightarrow \boxed{x = 26}$$

۲. اگر سه برابر عددی را با ۵ جمع کنیم، برابر همان عدد منهای یک می‌شود. آن عدد را بیابید.

پاسخ: اگر آن عدد را برابر با متغیر x در نظر بگیریم، معادله موردنظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$3x + 5 = \text{همان عدد} - 1$$

$$3x + 5 = x - 1$$

$$\Rightarrow 3x + 5 = x - 1$$

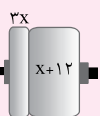
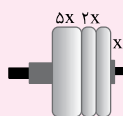
$$3x - x = -1 - 5$$

$$2x = -6$$

$$x = \frac{-6}{2} = -3 \Rightarrow \boxed{x = -3}$$

۳. با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشه آن را بیابید.

پاسخ: هدف آن است که وزنه دو طرف میله وزنه‌برداری یکسان باشند تا وزنه‌بردار تعادل داشته باشد.



$$5x + 2x + x = 3x + x + 12$$

$$\Rightarrow 8x = 4x + 12$$

$$\Rightarrow 8x - 4x = 12$$

$$\Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

پس می‌توان چنین سوالی را مطرح کرد.

مقدار x چقدر باشد تا تعادل بین دو طرف

برقرار شود؟

بحث در تعداد جواب‌های معادله درجه اول

هر معادله درجه اولی پس از ساده شدن به صورت $ax = b$ درمی‌آید، که برای حل آن سه حالت زیر وجود دارد:

حالت (۱): اگر $a \neq 0$ باشد، معادله یک جواب دارد:

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

مثال:

$$7x = -21 \Rightarrow x = \frac{-21}{7} = -3$$

حالت (۲): اگر $a = 0$ و $b \neq 0$ باشد، معادله جواب ندارد. در این صورت معادله را ممتنع (غیرممکن یا نشدنی) می‌نامند. یعنی در این صورت داریم:

$ax = b \Rightarrow 0 \times x = b \Rightarrow 0 = b$

که غیرممکن است، زیرا گفتیم $b \neq 0$ است.

حالت (۳): اگر $a = 0$ و $b = 0$ باشد، معادله بی‌شمار جواب دارد. در این صورت معادله را مبهم می‌نامیم. یعنی داریم:

$$ax = b \Rightarrow 0 \times x = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

سؤال: منظور از بی‌شمار جواب چیست؟

پاسخ: وقتی معادله به صورت $0 \times x = 0$ درمی‌آید، اگر به جای x هر عدد دلخواهی را قرار دهیم، معادله به تساوی $0 = 0$ تبدیل شود. پس می‌گوییم بی‌شمار جواب دارد.

مثال: به ازای چه مقدار m ، معادله $mx - 4x = -2$ جواب ندارد؟

پاسخ:

$$mx - 4x = -2 \Rightarrow \underbrace{(m-4)}_a x = \underbrace{-2}_b$$

می‌دانیم شرط نداشتن جواب $a = 0$ و $b \neq 0$ است، پس داریم:

$$m - 4 = 0 \Rightarrow \boxed{m = 4}, \quad b = -2 \neq 0$$

مثال: $a - 2$ و b را چنان بیابید که معادله $ax + bx - 1 = a$ مبهم باشد.

پاسخ:

$$ax + bx = a + 1 \Rightarrow \underbrace{(a+b)}_{a'} x = \underbrace{a+1}_{b'}$$

می‌دانیم شرط مبهم بودن جواب $a' = 0$ و $b' = 0$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} a + b = 0 \Rightarrow b = -a \Rightarrow b = -(-1) = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1} \\ a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -1} \end{cases}$$

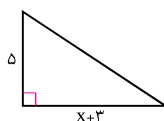
تمرین‌های امتحانی

۱. جواب معادلات زیر را بیابید.

الف) $\frac{5x}{3} + 2x = \frac{11}{3}$

ب) $(x+2)^2 - (x+2)(x+3) = 7$

۲. کلاغی به دسته کبوتری که در حال پرواز بودند رسید و از پیشرو (سردسته) آن‌ها پرسید: «شما چند تا هستید؟» کبوتر گفت: «ما و ما و نصف ما و نیمه‌ای از نصف ما، اگر تو هم با ما شوی، جملگی ۱۰۰ می‌شویم». تعداد کبوترها را به دست آورید.



۳. در شکل روبه‌رو اگر مساحت مثلث ۲۰ سانتی‌متر مربع باشد، مقدار x را بیابید.

۴. یک آشپز برای تهیه هر کیلو مربای آلبالو، دو برابر مربای هویج و $\frac{2}{3}$ برابر مربای توت‌فرنگی، شکر مصرف می‌کند. اگر او ۱۰ کیلو مربای آلبالو و ۵ کیلو مربای هویج و ۶ کیلو مربای توت‌فرنگی تهیه کرده باشد و در مجموع ۸۶ کیلو شکر مصرف کرده باشد، میزان شکر لازم برای تهیه هر یک کیلو مربای هویج را به دست آورید.

۵. مجموع سه عدد زوج متوالی ۴۲ است. این اعداد را به دست آورید.

پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱ الف. ابتدا معادله را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم تا مخرج ۳ از بین برود. سپس معادله را حل می‌کنیم.

$$\left(\frac{5x}{3} + 2x = \frac{11}{3}\right) \times 3 \Rightarrow 5x + 6x = 11 \Rightarrow 11x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{11} = 1 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

ب. ابتدا جواب اتحادها را می‌نویسیم، سپس معادله را ساده کرده و حل می‌کنیم:

$$\underbrace{(x+2)^2 - (x-2)(x+3)}_{\text{اتحاد جمله مشترک اتحاد مربع دو جمله‌ای}} = 7$$

$$x^2 + 4x + 4 - (x^2 + x - 6) = 7 \Rightarrow \cancel{x^2} + 4x + 4 - \cancel{x^2} - x + 6 = 7 \Rightarrow 3x + 10 = 7$$

منفی را در پرانتز اثر می‌دهیم.

$$3x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

۲ اگر تعداد کبوترها را x بگیریم، معادله آن به صورت زیر درمی‌آید:

۱۰۰ = (کلاغ) و نیمه‌ای از نصف ما و نصف ما و ما و ما

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \swarrow$$

$$x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 = 100$$

$$x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100$$

ابتدا معادله را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم تا مخرج‌ها از بین بروند:

$$(x + x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 10) \times 4$$

$$4x + 4x + 2x + x + 4 = 40$$

$$11x + 4 = 40$$

$$11x = 40 - 4 = 36$$

$$x = \frac{36}{11} = 3\frac{3}{11} \Rightarrow \boxed{x = 3\frac{3}{11}}$$

قاعده \times ارتفاع $\times \frac{1}{2} =$ مساحت مثلث

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 5 \times (x + 3) = 2$$

$$\frac{5 \times (x + 3)}{2} = 2$$

$$5 \times (x + 3) = 4 \Rightarrow 5x + 15 = 4$$

$$\Rightarrow 5x = 4 - 15 = -11 \Rightarrow x = \frac{-11}{5} = -2\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{x = -2\frac{1}{5}}$$

معادله را در ۲ ضرب می‌کنیم:

۳

فصل ۲: معادله درجه دوم

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{میزان شکر لازم برای تهیه هر کیلو مربای هویج} \\ y = \text{میزان شکر لازم برای تهیه هر کیلو مربای آلبالو} \\ z = \text{میزان شکر لازم برای تهیه هر کیلو مربای توت فرنگی} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{طبق فرض}} \boxed{y = 2x}, \boxed{y = \frac{2}{3}z}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}z = 2x \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{z = 3x}$$

$$10y + 5x + 6z = 86$$

$$10(2x) + 5x + 6(3x) = 86$$

$$20x + 5x + 18x = 86$$

$$\Rightarrow 43x = 86 \Rightarrow x = \frac{86}{43} = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

از طرفی طبق فرض داریم:

با جایگذاری داریم:

بنابراین برای تهیه هر کیلو مربای هویج ۲ کیلو شکر مصرف کرده است.

۵ می‌دانیم اختلاف هر دو عدد زوج متوالی ۲ واحد است.

$$\underbrace{x}_{\text{عدد زوج اول}} + \underbrace{x+2}_{\text{عدد زوج دوم}} + \underbrace{x+4}_{\text{عدد زوج سوم}} = 42 \Rightarrow 3x + 6 = 42 \Rightarrow 3x = 42 - 6 = 36 \Rightarrow x = 12$$

$$\Rightarrow 12, 14, 16: \text{سه عدد زوج متوالی}$$

درس دوم: معادله درجه ۲

هر معادله درجه دوم به فرم کلی $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a \neq 0$ است که در آن a را ضریب x^2 ، b را ضریب x و c را مقدار ثابت معادله می‌نامند.

سؤال: آیا در معادله درجه دوم، ضریب a می‌تواند صفر باشد؟

پاسخ: خیر، زیرا در این صورت جمله ax^2 برابر صفر می‌شود و معادله به صورت $bx + c = 0$ درمی‌آید که یک معادله درجه اول است.

مثال:

۱. مقدارهای c ، b و a را در هر یک از معادلات زیر بنویسید.

(الف) $5x^2 - 3x + 7 = 0$ (ب) $-3x^2 + 7x = 0$ (پ) $x^2 - \frac{7}{9} = 0$ (ت) $2x^2 = 0$

پاسخ:

(الف) $a = 5$ ، $b = -3$ ، $c = 7$

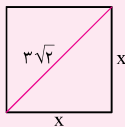
(ب) $a = -3$ ، $b = 7$ ، $c = 0$

(پ) $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -\frac{7}{9}$

(ت) $a = 2$ ، $b = 0$ ، $c = 0$

۲. محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $3\sqrt{2}$ باشد.

پاسخ: اندازه هر ضلع را x در نظر می‌گیریم و طبق رابطه فیثاغورث داریم:



$$x^2 + x^2 = (3\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2x^2 = 9 \times 2 = 18 \Rightarrow x^2 = \frac{18}{2} = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

پس اندازه هر ضلع $+3$ است. عدد -3 را نمی‌پذیریم زیرا اندازه ضلع مقداری مثبت است. در نتیجه محیط مربع برابر است با:

$$(P) \text{ محیط مربع} = 4 \times x = 4 \times 3 = 12 \Rightarrow \boxed{P=12}$$

تمرین‌های امتحانی

- هر یک از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.
الف. اگر از مربع عددی ۹ واحد کم کنیم، برابر با ۱۰ برابر همان عدد می‌شود.
ب. عددی طبیعی است که مربع آن ۳۴۲ واحد بیشتر از خود آن عدد است.
- معادله‌ای بسازید که با کمک آن بتوان طول و عرض مستطیلی را که محیط آن ۱ متر و مساحت آن ۶۰۰ سانتی‌متر مربع است، به دست آورد.
این معادله از درجه چند است؟
- طول ضلع مربعی را بیابید که محیط و مساحت آن با هم برابر باشند.

پاسخ تمرین‌های امتحانی

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad x^2 - 9 &= 10x & \text{یا} & \quad x^2 - 10x - 9 = 0 \\ \text{ب)} \quad x^2 &= x + 342 & \text{یا} & \quad x^2 - x - 342 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{عرض} &= y & \text{طول} &= x & 2 \times (\text{عرض} + \text{طول}) &= \text{محیط مستطیل} \\ (1) \quad (x+y) \times 2 &= 10 & \text{محیط مستطیل} &= (x+y) \times 2 & & \\ (2) \quad x \times y &= 600 & \text{مساحت مستطیل} &= \text{طول} \times \text{عرض} & & \end{aligned}$$

باید (y) را از رابطه (۱) به دست آوریم و در رابطه (۲) قرار دهیم تا معادله یک متغیره شود.

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 10 \Rightarrow 2y = 10 - 2x \xrightarrow{+2} y = 5 - x \\ \Rightarrow 600 &= x(5 - x) \Rightarrow -x^2 + 5x - 600 = 0 \end{aligned}$$

معادله مورد نظر $-x^2 + 5x - 600 = 0$ می‌باشد و از درجه ۲ است.

$$\left. \begin{aligned} 4 \times (\text{یک ضلع مربع}) &= \text{محیط مربع} \\ (\text{یک ضلع})^2 &= (\text{یک ضلع}) \times 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

اگر اندازه هر ضلع را x فرض کنیم، داریم:

فقط $x = 4$ قابل قبول است زیرا اندازه ضلع مربع نمی‌تواند صفر باشد.

درس سوم: حل معادله درجه ۲ به روش تجزیه عبارتهای جبری

منظور از حل معادله درجه دوم پیدا کردن عدد یا اعدادی است که در صورت وجود اگر به جای x (مجهول) قرار بگیرند، معادله برقرار خواهد شد.

مثال: عدد ۲ یک جواب برای معادله $x^2 - 5x + 6 = 0$ است زیرا: $(2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

ولی عدد ۱ جواب این معادله نیست. زیرا: $(1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0$

برای حل معادله درجه ۲ از سه روش تجزیه عبارت جبری، مربع کامل کردن و روش کلی (Δ) استفاده می‌کنیم. در این درس به توضیح روش اول می‌پردازیم و دو روش دیگر در درس‌های بعدی می‌آیند.

در حل معادله درجه دو به روش تجزیه عبارتهای جبری ابتدا در صورت نامرتب بودن معادله، تمام جملات را به یک سمت تساوی منتقل می‌کنیم تا سمت دیگر صفر شود. سپس با کمک اتحادهای جبری مانند اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله، اتحاد جمله مشترک، اتحاد مزدوج و یا روش‌هایی مانند فاکتورگیری، عبارت را به حاصلضرب دو عامل تجزیه می‌کنیم. سپس هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم و جواب‌ها را می‌یابیم. در روش تجزیه، معادلات درجه دوم را به ۴ دسته، که در زیر آورده‌ایم، دسته‌بندی می‌کنیم.

الف. حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$)

اگر در معادله درجه دوم $c = 0$ باشد. برای تجزیه معادله بهتر است از روش فاکتورگیری استفاده کنیم.

مثال:

معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 - 6x = 0$

ب) $4x^2 + 24x = 0$

پاسخ:

الف) $x(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \end{cases}$

ب) $4x(x + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$

ب. حل معادله درجه دوم $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$)

اگر در معادله درجه دوم $b = 0$ باشد، معادله به صورت $ax^2 + c = 0$ درمی‌آید. این معادله در صورتی که a و c مختلف‌العلامت باشند، دارای دو ریشه است. برای حل معادله به روش تجزیه، بهتر است از اتحاد مزدوج استفاده کنیم. همچنین می‌توان معادله را به روش ریشه‌گیری نیز

حل کرد، یعنی: $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$

مثال:

معادلات زیر را به دو روش تجزیه و ریشه‌گیری حل کنید.

الف) $x^2 - 81 = 0$

ب) $(x - 1)^2 - 9 = 0$

پاسخ: الف. روش تجزیه:

$x^2 - 81 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - 9)(x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \\ x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9 \end{cases}$

$x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{81} \Rightarrow x = \pm 9$

روش ریشه‌گیری:

ب. روش تجزیه:

$(x - 1)^2 - 9 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x - 1 - 3)(x - 1 + 3) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

$(x - 1)^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 3 \Rightarrow x = 3 + 1 = 4 \\ x - 1 = -3 \Rightarrow x = -3 + 1 = -2 \end{cases}$

روش ریشه‌گیری:

پ. حل معادله درجه دوم $a(x-b)^2 = 0$ حل معادله درجه دوم $a(x-b)^2 = 0$ به صورت زیر است:

$$a(x-b)^2 = a(x-b)(x-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-b=0 \Rightarrow x=b \\ x-b=0 \Rightarrow x=b \end{cases}$$

چون دو ریشه برابرند، می‌گوییم معادله دارای ریشه مضاعف $x=b$ است.

مثال:

معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $5x^2 = 0$

ب) $(2x-3)^2 = 0$

پاسخ:

الف) $5x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x \times x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ ریشه مضاعف است.

ب) $(2x-3)^2 = 0 \Rightarrow (2x-3)(2x-3) = 0 \Rightarrow 2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ ریشه مضاعف است.

ت. حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ($a, b, c \neq 0$)

در حل به روش تجزیه معادلات درجه دوم به این فرم، اتحاد مربع مجموع یا تفاضل دو جمله یا اتحاد جمله مشترک را به کار می‌بریم و پس از تجزیه و مساوی صفر قرار دادن عامل‌ها، جواب‌ها را به دست می‌آوریم.

مثال:

۱. هر یک از معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^2 - x - 12 = 0$ ب) $9x^2 - 21x + 12 = 0$ پ) $x^2 + 10x + 25 = 0$ ت) $5x^2 - 20x + 20 = 0$

پاسخ:

الف) $x^2 - x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-4)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$

ب) $9x^2 - 21x + 12 = 0 \Rightarrow (3x)^2 - 7 \times (3x) + 12 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (3x-4)(3x-3) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-3=0 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} = 1 \\ 3x-4=0 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

پ) $x^2 + 10x + 25 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع مجموع دو جمله}} (x+5)^2 = 0 \Rightarrow (x+5)(x+5) = 0 \Rightarrow x+5=0 \Rightarrow x = -5$

ریشه مضاعف است.

ت) $5x^2 - 20x + 20 = 0 \Rightarrow 5(x^2 - 4x + 4) = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع تفاضل دو جمله}} 5(x-2)^2 = 0$

$$\Rightarrow 5(x-2)(x-2) = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x = 2$$
 ریشه مضاعف است.

۲. مجموع دو برابر یک عدد طبیعی با عدد ۸ برابر با مربع همان عدد است. آن عدد را بیابید.

پاسخ: عدد طبیعی موردنظر را x می‌نامیم، پس داریم:

$$(2 \times x) + 8 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4=0 \Rightarrow x=4 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

عدد (-2) قابل قبول نیست. (چرا؟)(پاسخ: زیرا x یک عدد طبیعی است، پس نمی‌تواند منفی باشد.)

تمرین‌های امتحانی

۱. معادلات درجه دوم زیر را به روش فاکتورگیری (تجزیه) یا اتحاد مربع دوجمله‌ای حل کنید.

الف) $x^2 + 12x + 36 = 0$

ب) $x^2 = 14x - 49$

پ) $6x^2 - 2x = 0$

ت) $(x-1)(x+2) = (x+2)$

ث) $2x^2 + 5x = 0$

ج) $4x^2 + 4x = -1$

۲. معادلات زیر را به کمک اتحاد جمله مشترک یا اتحاد مزدوج حل کنید.

الف) $x^2 + 4x - 5 = 0$

ب) $4x = \frac{25}{x}$

پ) $9x^2 + 6x - 3 = 0$

ت) $(x-2)^2 = 16$

ث) $\frac{x+1}{3} = \frac{3}{x+1}$

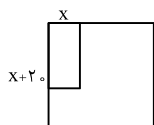
ج) $25x^2 - 15x - 1 = 0$

ج) $(1-4x)^2 - \frac{1}{9} = 0$

ح) $a^2 + a - 12 = 0$

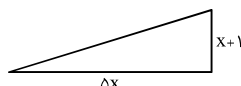
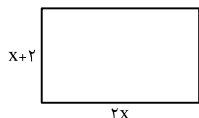
۳. محیط مربعی به قطر $4\sqrt{5}$ را حساب کنید.

۴. در شکل روبه‌رو، در زمینی مربع شکل به طول ۸۰ متر، باغچه‌ای به ابعاد x و $x+20$ ساخته‌ایم. اگر باقی‌مانده مساحت زمین ۴۹۰۰ مترمربع باشد، مقدار x و سپس محیط باغچه را بیابید.



۵. معادله درجه دومی بنویسید که $x=3$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۶. مساحت مثلث و مستطیل رسم شده در زیر، مساوی هستند. مقدار x و مساحت هر کدام را حساب کنید.



۷. معادله درجه دومی بنویسید که $x=3$ و $x=-1$ جواب‌های آن باشند. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

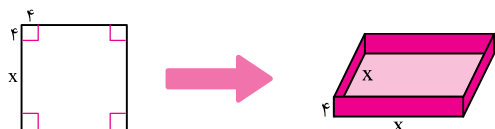
۸. در معادله $(x-a)^2 = k$:

الف. به ازای چه مقادیری از k ، معادله ریشه مضاعف دارد؟

ب. به ازای چه مقادیری از k ، معادله دو ریشه حقیقی دارد؟

پ. به ازای چه مقادیری از k ، معادله ریشه حقیقی ندارد؟

۹. یک دستگاه برش از صفحات مقوایی به شکل مربع، چهار مربع کوچک در گوشه‌های آن را برش زده و با تا زدن لبه‌ها، یک مکعب ایجاد می‌کند. اگر مربع‌های برش خورده در کنج‌ها به ضلع ۴ سانتی‌متر باشد و بخواهیم حجم مکعب ایجاد شده ۴۰۰ سانتی‌مترمکعب باشد، طول اضلاع کاغذهایی که باید برای این کار انتخاب شوند را به دست آورید.



پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱

الف) $x^2 + 12x + 36 = 0$ — اتحاد مربع دو جمله‌ای $\rightarrow (x+6)^2 = 0 \Rightarrow (x+6)(x+6) = 0 \Rightarrow x+6 = 0 \Rightarrow x = -6$

ب) $x^2 = 14x - 49 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0$

— اتحاد تفاضل مربع دو جمله‌ای $\rightarrow (x-7)^2 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-7) = 0 \Rightarrow x-7 = 0 \Rightarrow x = 7$

پ) $6x^2 - 2x = 0$ — فاکتورگیری (تجزیه) از $2x$ می‌گیریم $\rightarrow 2x(3x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{2} = 0 \\ 3x-1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$

ت) $(x-1)(x+2) = (x+2) \Rightarrow x^2 + x - 2 = x + 2 \Rightarrow x^2 + \cancel{x} - 2 - \cancel{x} - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$

— اتحاد مزدوج $\rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

ث) $2x^2 + 5x = 0$ — فاکتورگیری $\rightarrow x(2x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x+5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \end{cases}$

ج) $4x^2 + 4x = -1 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$ — اتحاد مربع دو جمله‌ای $\rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$

۲

الف) $x^2 + 4x - 5 = 0$ — اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (x+5)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+5 = 0 \Rightarrow x = -5 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

ب) $4x = \frac{25}{x} \Rightarrow (4x)(x) = 25 \Rightarrow 4x^2 = 25 \Rightarrow 4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x-5)(2x+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ 2x+5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{2} \end{cases}$

پ) $9x^2 + 6x - 3 = 0 \Rightarrow (3x)^2 + 2(3x) - 3 = 0$ — اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (3x+3)(3x-1) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x+3 = 0 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{3} \Rightarrow x = -1 \\ 3x-1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$

ت) $(x-2)^2 = 16 \Rightarrow (x-2)^2 - 16 = 0$ — اتحاد مزدوج $\rightarrow ((x-2)-4)((x-2)+4) = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-6 = 0 \Rightarrow x = 6 \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$

ث) $\frac{x+1}{3} = \frac{3}{x+1} \Rightarrow (x+1)(x+1) = 3 \times 3 \Rightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow (x+1)^2 - 9 = 0 \Rightarrow ((x+1)-3)((x+1)+3) = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x+4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$

ج) $25x^2 - 15x - 1 = 0 \Rightarrow (\Delta x)^2 - 3(\Delta x) - 1 = 0$ اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (\Delta x - 5)(\Delta x + 2) = 0$.

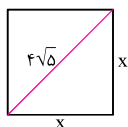
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x - 5 = 0 \Rightarrow \Delta x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{5} = 1 \\ \Delta x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

ج) $(1-4x)^2 - \frac{1}{9} = 0$ اتحاد مزدوج $\rightarrow ((1-4x) - \frac{1}{3})((1-4x) + \frac{1}{3}) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-4x - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow -4x = \frac{1}{3} - 1 \Rightarrow -4x = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{-2}{-4} = \frac{-2}{-12} = \frac{+1}{6} \\ 1-4x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow -4x = -1 - \frac{1}{3} \Rightarrow 4x = \frac{-4}{3} \Rightarrow x = \frac{-4}{4} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

ح) $a^2 + a - 12 = 0$ اتحاد جمله مشترک $\rightarrow (a+4)(a-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a+4 = 0 \Rightarrow a = -4 \\ a-3 = 0 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$

فصل ۲: معادله درجه دوم



رابطه فیثاغورس: $x^2 + x^2 = 4\sqrt{5} \Rightarrow 2x^2 = 4\sqrt{5}$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{2\sqrt{5}} \Rightarrow \text{ضلع مربع} = +\sqrt{2\sqrt{5}}$$
 قابل قبول، زیرا طول ضلع است.

محیط مربع = $4 \times \text{ضلع} = 4 \times \sqrt{2\sqrt{5}}$

۳

مساحت مربع = $80 \times 80 = 6400$.

مساحت باغچه = $6400 - 4900 = 1500$.

مساحت باغچه: $x(x+20) = 1500 \Rightarrow x^2 + 20x - 1500 = 0 \Rightarrow (x-30)(x+50) = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x-30 = 0 \Rightarrow x = 30 \text{ قابل قبول} \\ x+50 = 0 \Rightarrow x = -50 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

۴

$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0$ طرفین به توان ۲ می‌رسند $\rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$.

خیر، منحصر به فرد نیست. زیرا تمام معادلاتی که ریشه مضاعف $x = 3$ دارند، به شکل کلی $k(x-3)^2 = 0$ هستند.

۵

مساحت مستطیل = عرض \times طول

مساحت مثلث = $\frac{1}{2} \times$ ارتفاع \times قاعده

$$\Rightarrow 2x(x+2) = \frac{1}{2}(x+1)\Delta x \Rightarrow 2(2x(x+2)) = (x+1)\Delta x \Rightarrow 4x^2 + 8x = \Delta x^2 + \Delta x \Rightarrow 4x^2 + 8x - \Delta x^2 - \Delta x = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(-x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -x+3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

مساحت = $2x \times (x+2) = 2(3) \times (3+2) = 6 \times 5 = 30$.

۶

$$x = 3 \Rightarrow x - 3 = 0, \quad x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0.$$

۷

در نتیجه چنین معادله‌ای به صورت $(x - 3)(x + 1) = 0$ در می‌آید و داریم:

$$(x - 3)(x + 1) = x^2 + x - 3x - 3 = x^2 - 2x - 3 = 0.$$

$$(x - a)^2 = 0 \Rightarrow (x - a)(x - a) = 0 \Rightarrow x = a, \quad x = a$$

۸ الف. باید $k = 0$ باشد و در این صورت داریم:

$x = a$ ریشه مضاعف است.

ب. باید $k > 0$ یعنی مثبت باشد و در این صورت داریم:

$$(x - a)^2 = k \Rightarrow x - a = \pm \sqrt{k} \Rightarrow \begin{cases} x - a = \sqrt{k} \Rightarrow x = \sqrt{k} + a \\ x - a = -\sqrt{k} \Rightarrow x = -\sqrt{k} + a \end{cases}$$

$$(x - a)^2 = k < 0.$$

پ. باید $k < 0$ یعنی منفی باشد و در این صورت داریم:

که معادله‌ای غیرممکن است، زیرا توان دوم هر عبارتی مثبت است نه منفی. پس جواب نداریم.

$$\text{حجم مکعب} = x \times x \times 4 = 4x^2$$

۹

از آن‌جا که حجم مکعب، $4x^2 = 400$ ، بنابراین $x^2 = \frac{400}{4} = 100$ و با محاسبه ریشه‌های دوم این

معادله $x = 10$ ، $x = -10$ به دست می‌آید که فقط $x = 10$ قابل قبول است. چون طول نمی‌تواند منفی باشد. پس طول ضلع مربع اولیه برابر

$$x + 4 + 4 = 10 + 8 = 18 \text{ cm}$$

است با:

درس چهارم: حل معادله درجه ۲ به روش مربع کامل

نوشتن معادله درجه دوم به شکل $(x+h)^2 = k$ که در آن h و k اعداد حقیقی هستند را مربع کامل کردن می‌گوییم. برای حل یک معادله درجه دوم به روش مربع کامل کردن، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱. اگر لازم باشد معادله را بر ضریب x^2 تقسیم می‌کنیم تا ضریب x^2 برابر ۱ شود.
۲. معادله را به صورت $x^2 + bx = k$ می‌نویسیم و $(\frac{b}{2})^2$ را به طرفین تساوی اضافه می‌کنیم.
۳. سمت چپ معادله را به صورت مربع مجموع یا مربع تفاضل دو جمله می‌نویسیم.
۴. در آخر معادله را با استفاده از روش ریشه‌گیری حل می‌کنیم.

مثال:

هر یک از معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 + 2x - 5 = 0$ ب) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$ پ) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ ت) $x^2 - 4x + 4 = 0$

پاسخ: الف. از مرحله (۲) شروع به حل می‌کنیم، زیرا ضریب x^2 برابر ۱ است.

مرحله ۲: $x^2 + 2x = 5$ ، $(\frac{b}{2})^2 = (\frac{2}{2})^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 5 + 1$

مرحله ۳: $(x+1)^2 = 6$

مرحله ۴: $\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{6} \Rightarrow x+1 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = \sqrt{6} \Rightarrow x = \sqrt{6}-1 \\ x+1 = -\sqrt{6} \Rightarrow x = -\sqrt{6}-1 \end{cases}$

ب. از مرحله ۲ شروع می‌کنیم: $x^2 + x = -\frac{1}{4}$ ، $(\frac{b}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

مرحله ۳: $(x + \frac{1}{2})^2 = 0$

مرحله ۴: $\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2} = \sqrt{0} \Rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ ریشه مضاعف است.

پ. از مرحله (۱) شروع می‌کنیم، زیرا ضریب x^2 برابر ۱ نیست.

مرحله ۱: $\frac{2x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$

مرحله ۲: $x^2 + \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2}$ ، $(\frac{b}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{4}$

مرحله ۳: $(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{1}{4}$

مرحله ۴: $\sqrt{(x + \frac{3}{4})^2} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = +\frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} \\ x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{4}{4} = -1 \end{cases}$

ت. اگر خوب دقت کنیم، این معادله خودش مربع کامل است. پس داریم:

ریشه مضاعف است. $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

تمرین‌های امتحانی

۱. هر یک از معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 8x + 12 = 0$.

ب) $x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$

پ) $x^2 + 3x = 0$.

ت) $x^2 - 20x + 30 = 0$.

ث) $t^2 + 3t = 3$

ج) $2r^2 + r - 2 = 0$.

۲. در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید تا دو طرف تساوی مربع کامل گردد.

الف) $x^2 + ax + \dots = (x + \dots)^2$

ب) $x^2 - 6x + \dots = (x - \dots)^2$

پ) $3x^2 - 12x + \dots = 3(x - \dots)^2$

ت) $n^2 + 4n + \dots = (n + \dots)^2$

۳. پوریا معادله $x^2 + 2x - 24 = 0$ را به روش مربع کامل به صورت زیر حل کرده است. اشتباه او را پیدا کنید و جواب صحیح را بنویسید.

$$x^2 + 2x = 24 \quad , \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 24 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 25 \Rightarrow x + 1 = 5 \Rightarrow x = 5 + 1 \Rightarrow x = 6$$

پاسخ تمرین‌های امتحانی

الف) $x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x = -12 \quad , \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = -12 + 16$

$$\Rightarrow (x - 4)^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{(x - 4)^2} = \sqrt{4} \Rightarrow x - 4 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 4 = 2 \Rightarrow x = 2 + 4 \Rightarrow x = 6 \\ x - 4 = -2 \Rightarrow x = -2 + 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

ب) $x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5} \quad , \quad b = \frac{-1}{5} \Rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-1}{2 \cdot 5}\right)^2 = \left(\frac{-1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} \Rightarrow x^2 - \frac{x}{5} + \frac{1}{100} = \frac{6}{5} + \frac{1}{100}$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{10}\right)^2 = \frac{121}{100} \Rightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{121}{100}}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{10} = \pm \frac{11}{10} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{10} = \frac{11}{10} \Rightarrow x = \frac{11}{10} + \frac{1}{10} = \frac{12}{10} \\ x - \frac{1}{10} = -\frac{11}{10} \Rightarrow x = -\frac{11}{10} + \frac{1}{10} = \frac{-10}{10} = -1 \end{cases}$$

پ) $x^2 + 3x = 0 \quad , \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \\ x + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

ت) $x^2 - 2 \cdot x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x = -3$, $(\frac{b}{a})^2 = (\frac{-2}{1})^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 = -3 + 1$

$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{0} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{0} \Rightarrow x = 1 + \sqrt{0} \\ x-1 = -\sqrt{0} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{0} \end{cases}$

ت) $t^2 + 3t = 3$, $(\frac{b}{a})^2 = (\frac{3}{1})^2 = 9 \Rightarrow t^2 + 3t + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4}$

$(t + \frac{3}{2})^2 = \frac{12+9}{4} = \frac{21}{4} \Rightarrow t + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{21}{4}} \Rightarrow \begin{cases} t + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{21}-3}{2} \\ t + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{21}}{2} \Rightarrow t = \frac{-\sqrt{21}-3}{2} \end{cases}$

ج) $2r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow 2r^2 + r = 2 \Rightarrow \frac{2r^2}{2} + \frac{r}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r = 1$, $(\frac{b}{a})^2 = (\frac{1/2}{1})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r + \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{16}$

$(r + \frac{1}{4})^2 = \frac{17}{16} \Rightarrow \begin{cases} r + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{17}-1}{4} \\ r + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow r = \frac{-\sqrt{17}-1}{4} \end{cases}$

فصل ۲: معادله درجه دوم

الف) $x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = (x + \frac{a}{2})^2$, $(\frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$

ب) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, $(\frac{-6}{2})^2 = (-3)^2 = 9$

پ) $3x^2 - 12x + 12 = 3(x - 2)^2$, $(\frac{-12}{2 \cdot 3})^2 = (-2)^2 = 4$

ت) $n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$, $(\frac{4}{2})^2 = 2^2 = 4$

۳ در محاسبه $(x+1)^2 = 25$ اشتباه رخ داده است:

$(x+1) = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} x+1=5 \Rightarrow x=4 \\ x+1=-5 \Rightarrow x=-6 \end{cases}$

۲

۳

درس پنجم: روش کلی حل معادله درجه ۲

در این روش از دستور Δ (دلته) با استفاده از روابط زیر، جواب‌ها را می‌یابیم:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

مثال:

هر یک از معادلات زیر را به روش کلی (Δ) حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$

ب) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

پاسخ:

الف) $a=1, b=-5, c=6$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 25 - 24 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(1)} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2} \end{cases}$$

ب) $a=3, b=-7, c=+4$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(3)(4) = 49 - 48 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{1}}{2(3)} = \frac{+7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{4}{3}} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{1}}{2(3)} = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1} \end{cases}$$

بحث در تعداد ریشه‌های معادله درجه ۲:

با استفاده از Δ می‌توانیم بدون حل معادله درجه ۲، تعداد ریشه‌های آن را مشخص کنیم:

۱. اگر $\Delta > 0$ باشد؛ یعنی مقدار $b^2 - 4ac$ مثبت باشد، آن‌گاه معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

۲. اگر $\Delta = 0$ باشد؛ یعنی مقدار $b^2 - 4ac$ برابر صفر شود، آن‌گاه معادله دارای یک ریشه مضاعف است.

۳. اگر $\Delta < 0$ باشد؛ یعنی مقدار $b^2 - 4ac$ منفی باشد، آن‌گاه معادله دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال:

۱. تعداد ریشه‌های هر معادله را مشخص کنید.

الف) $4x^2 + 4x + 1 = 0$ ب) $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$
 پ) $5x^2 + x + 1 = 0$ ت) $3x^2 - 9 = 0$

پاسخ:

الف) $a=4, b=4, c=1$
 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$

$\Delta = 0$ ، بنابراین معادله دارای یک ریشه مضاعف است.

ب) $a=1, b=-\sqrt{2}, c=-1$
 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(-1) = 2 + 4 = 6 > 0$

$\Delta > 0$ ، بنابراین معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

پ) $a=5, b=1, c=1$
 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (1)^2 - 4(5)(1) = 1 - 20 = -19 < 0$

$\Delta < 0$ ، بنابراین معادله دارای ریشه حقیقی نیست.

ت) $a=3, b=0, c=-9$
 $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(3)(-9) = 108 > 0$

$\Delta > 0$ ، بنابراین معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز است.

۲. به ازای چه مقادیری از m معادله $x^2 + 4mx + 4 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف است؟

پاسخ: شرط داشتن ریشه مضاعف $\Delta = 0$ است، بنابراین داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (4m)^2 - 4(1)(4) = 0 \Rightarrow 16m^2 - 16 = 0 \Rightarrow 16m^2 = 16 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$$

۳. معادله $h = -14t^2 + 12t + 2$ ارتفاع یک توپ تنیس را که یک تنیس باز پرتاب می‌کند، برحسب متر از سطح زمین در ثانیه t نشان می‌دهد. چقدر طول می‌کشد تا پس از پرتاب، توپ به سطح زمین برخورد کند؟

پاسخ: در لحظه برخورد به زمین، فاصله توپ با زمین صفر است، بنابراین در معادله پرتاب قرار می‌دهیم $h = 0$ ، پس:

$$-14t^2 + 12t + 2 = 0$$

اگر طرفین معادله را در عدد $\frac{1}{14}$ ضرب کنیم، معادله به صورت $-t^2 + 6t + 1 = 0$ که ساده‌تر است تبدیل می‌شود. در این معادله $a = -1, b = 6, c = 1$ است و داریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1)(1) = 36 + 4 = 40$$

بنابراین $\Delta > 0$ و معادله دارای دو ریشه حقیقی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-6 + \sqrt{40}}{2(-1)} = \frac{-6 + \sqrt{40}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{10}}{1} \\ t_2 = \frac{-6 - \sqrt{40}}{2(-1)} = \frac{-6 - \sqrt{40}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{10}}{1} \end{cases}$$

و چون زمان منفی نیست، فقط $t = 1$ قابل قبول است. بنابراین ۱ ثانیه پس از پرتاب، توپ با زمین برخورد می‌کند.

روابط بین ضرایب معادله درجه ۲ و ریشه‌های آن

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، در این صورت مجموع $x_1 + x_2$ را با S نشان می‌دهیم و حاصل آن را از رابطه $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ به دست می‌آوریم. همچنین حاصل ضرب $x_1 \cdot x_2$ را با P نشان می‌دهیم و حاصل آن را از رابطه $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ به دست می‌آوریم.

مثال: مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های هر یک از معادلات زیر را بدون حل معادله را به دست آورید.

الف) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

ب) $2x^2 - 3x + 1 = 0$

پاسخ:

الف) $a = 3, b = 4, c = 1$

$\Rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{3}, P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$

ب) $a = 2, b = -3, c = 1$

$\Rightarrow S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}, P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

تشکیل معادله درجه دوم با معلوم بودن ریشه‌های آن

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، می‌توان S و P را با کمک آن‌ها به دست آورد و در نتیجه معادله درجه دوم آن را به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ تشکیل داد.

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

الف. ۳ و ۴ باشند.

ب. ۳ و -۷ باشند.

پ. $2 + \sqrt{3}$ و $2 - \sqrt{3}$ باشند.

پاسخ:

الف) $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 4 + (-3) = 1 \\ P = x_1 \cdot x_2 = 4 \times (-3) = -12 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

ب) $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -7 + 3 = -4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -7 \times 3 = -21 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$

پ) $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \\ P = x_1 \cdot x_2 = \underbrace{(2 + \sqrt{3}) \times (2 - \sqrt{3})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$

تمرین‌های امتحانی

۱. معادلات زیر را به روش کلی (Δ) حل کنید.

الف) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ب) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ پ) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ت) $x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$

ث) $x^2 - \sqrt{5}x - 3 = 0$ ج) $5x^2 - 2x + 1 = 0$ چ) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$ ح) $r - r^2 = 3$

۲. جاهای خالی را با عبارت‌های صحیح پر کنید.

الف. ضریب جملهٔ درجهٔ ۲ در معادلهٔ $3x - 4x^2 = 7$ برابر است.

ب. یک معادلهٔ درجهٔ دوم ریشهٔ حقیقی ندارد هرگاه (Δ) باشد.

پ. اگر در یک معادلهٔ درجهٔ دوم مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد، ریشه‌های آن و هستند.

ت. در روش مربع کامل در معادلهٔ $5x^2 - x = 2$ ، مقدار عدد اضافه‌شده به دو طرف تساوی برابر است.

۳. مقدار a را طوری بیابید که معادلهٔ $x^2 + ax + 1 = 0$ دارای دو ریشهٔ مساوی باشد.

۴. طول مستطیلی دو برابر عرض آن است. اگر مساحت آن 20° سانتی‌متر مربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟

۵. کیوان می‌خواهد برای یکی از عکس‌های خانوادگی خود که 15cm طول و 10cm عرض دارد، یک قاب عکس تهیه کند. عکس باید از

کناره‌های قاب فاصله‌های مساوی داشته باشد. می‌خواهیم نسبت مساحت قاب عکس به مساحت عکس $\frac{5}{4}$ باشد. طول و عرض این قاب

چقدر باید باشد؟

۶. مجموع مربعات دو عدد طبیعی فرد متوالی 394 است. این دو عدد را پیدا کنید.

۷. اگر یکی از جواب‌های معادله $4x^2 - ax + 2 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۸. عدد $\frac{2}{3}$ یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + bx - 4 = 0$ است. ریشهٔ دیگر را بیابید.

۹. اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $kx^2 + (k-1)x = 0$ برابر 2 باشد، ریشهٔ دیگر و مقدار k را بیابید.

۱۰. اگر $x = 3$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2 + 2x - a = 0$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

۱۱. معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن:

الف. 3 و -3 باشند. ب. $2 - \sqrt{5}$ و $2 + \sqrt{5}$ باشند.

۱۲. در هر یک از معادلات درجهٔ دوم زیر، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را بیابید.

الف) $-2x^2 - 4x + 8 = 0$ ب) $2x^2 - 5x = 0$ پ) $3x^2 = -x + 5$ ت) $3x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = 0$

۱۳. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 5x + 4 = 0$ باشند، مقدار $(x_1 + x_2) - (x_1 \cdot x_2)$ را بیابید.

۱۴. ریشه‌های هر یک از معادلات زیر را به دست آورید.

الف) $98x^2 + 2x - 100 = 0$ ب) $(a+1)x^2 + (5-a)x - 6 = 0$

پ) $100x^2 + 100x + 1 = 0$ ت) $ax^2 + 3x + (3-a) = 0$

پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱

الف) $a=3$, $b=-5$, $c=2$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2(3)} = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2(3)} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

ب) $a=3$, $b=4$, $c=1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2(3)} = \frac{-4+2}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2(3)} = \frac{-4-2}{6} = \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

پ) $a=2$, $b=-7$, $c=3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) + \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) - \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ت) $a=1$, $b=-\sqrt{2}$, $c=-1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4(1)(-1) = 2 + 4 = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{2}) + \sqrt{6}}{2(1)} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{2}) - \sqrt{6}}{2(1)} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

ث) $a=1$, $b=-\sqrt{5}$, $c=-3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{5})^2 - 4(1)(-3) = 5 + 12 = 17$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{5}) + \sqrt{17}}{2(1)} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-\sqrt{5}) - \sqrt{17}}{2(1)} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

ج) $a=5$, $b=-2$, $c=1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(5)(1) = 4 - 20 = -16 < 0$$

$\Delta < 0$ ، پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

ج) $a^2 + 2\sqrt{3} = 9$

$a^2 + 2\sqrt{3} - 9 = 0$

$a = 1, b = 2\sqrt{3}, c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9) = (4 \times 3) + 36 = 48$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{48}}{2(1)} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2^4 \times 3}}{2} = \frac{-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} - \sqrt{48}}{2(1)} = \frac{-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{-6\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

ح) $r - r^2 = 3$

$-r^2 + r - 3 = 0$

$a = -1, b = 1, c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(-3) = 1 - 12 = -11 < 0$

$\Delta < 0$ ، پس معادله ریشه حقیقی ندارد.

فصل ۲: معادله درجه دوم

۲ الف. ۴-

ب. کوچکتر از صفر یا منفی

پ. ۱ و $\frac{c}{a}$

ت. $\frac{1}{100}$ ، زیرا:

$$\Delta x^2 - x = 2 \rightarrow x^2 - \frac{1}{5}x = 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

۳ شرط داشتن ریشه مضاعف یا همان دو ریشه مساوی، $\Delta = 0$ است:

$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 4(1)(1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm\sqrt{4} \Rightarrow a = \pm 2$

۴ اگر طول را با x و عرض را با y نشان دهیم، طبق فرض داریم:

$x = 2y$ (۱)

$x \cdot y = 200$ (۲)

از طرفی طبق فرض داریم:

بنابراین با جایگذاری رابطه (۱) در رابطه (۲) داریم:

$2y \cdot y = 200 \Rightarrow 2y^2 = 200 \Rightarrow y^2 = \frac{200}{2} = 100 \Rightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{100} \Rightarrow y = \pm 10$

اما چون طول همواره مثبت است و نمی تواند منفی باشد پس فقط جواب $y = 10$ به عنوان عرض قابل قبول است و از آن جا:

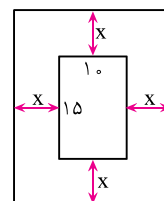
$x = 2(10) = 20$

مساحت عکس: $10 \times 15 = 150$

مساحت قاب: $(10 + 2x)(15 + 2x) = 150 + 20x + 30x + 4x^2 = 4x^2 + 50x + 150$

$\frac{\text{مساحت قاب عکس}}{\text{مساحت عکس}} = \frac{5}{4}$ طرفین $\rightarrow 4$ (مساحت قاب) = ۵ (مساحت عکس) $\rightarrow 4(4x^2 + 50x + 150) = 5(150)$

$\Rightarrow 4(4x^2 + 50x + 150) = 5(150) \Rightarrow 16x^2 + 200x + 600 = 750$



۵

$$\Rightarrow 16x^2 + 20x + 60 - 75 = 0 \Rightarrow 16x^2 + 20x - 15 = 0 \Rightarrow 8x^2 + 10x - 75 = 0$$

$$\Delta = (10)^2 - 4(8)(-75) = 12400 \Rightarrow \sqrt{12400} \approx 112$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2(a)} = \frac{-10 + 112}{2(8)} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75 \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - 112}{16} = \frac{-122}{16} = -13,25 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{طول قاب} = (15 + 2x) = (15 + 2(0,75)) = 16,5$$

$$\text{عرض قاب} = (10 + 2x) = (10 + 2(0,75)) = 11,5$$

$$\text{عدد فرد اول} = x \quad \text{و} \quad \text{عدد فرد بعدی} = x + 2 \Rightarrow x^2 + (x + 2)^2 = 394$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 4x + 4 = 394$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 - 394 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 390 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 195 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 13)(x + 15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 13 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 13} \\ x + 15 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -15} \end{cases}$$

چون اعداد طبیعی هستند، پس فقط $x = 13$ قابل قبول است و عدد فرد بعدی یعنی $x + 2$ برابر با $15 = 13 + 2$ است.

۷ از رابطه $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ استفاده می‌کنیم:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow (-4) \times x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

پس ریشه دیگر $\frac{5}{4}$ است.

۸ مانند تمرین قبل داریم:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2}{3} \times x_2 = \frac{(-4)}{1} = -4 \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{\frac{2}{3}} = \frac{-12}{2} = -6$$

پس ریشه دیگر -6 است.

۹ برای محاسبه k باید عدد 2 را در معادله به جای x قرار دهیم:

$$kx^2 + (k - 1)x = 0 \Rightarrow k(2)^2 + (k - 1) \times 2 = 0 \Rightarrow 4k + 2k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6k - 2 = 0 \Rightarrow 6k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

حال k را در معادله قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{3}x^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)x = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x = 0$$

$$\xrightarrow{\text{فکتورگیری}} \frac{1}{3}x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

پس ریشه دیگر آن $x = 0$ است.

$$x^2 + 2x - a = 0 \Rightarrow (3)^2 + 2(3) - a = 0 \Rightarrow 9 + 6 - a = 0 \Rightarrow a = 15$$

۱۰ باید $x = 3$ را در معادله قرار دهیم:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 \Rightarrow S = 3 + (-3) = 0 \\ P = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow P = 3 \times (-3) = -9 \end{cases} \text{ (الف)}$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \xrightarrow{\substack{S=0 \\ P=-9}} x^2 - (0)x - 9 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - 9 = 0}$$

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 \Rightarrow S = 2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 4 \\ P = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow P = \underbrace{(2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})}_{\text{اتحاد مزدوج}} = 4 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1 \Rightarrow \boxed{x^2 - 4x - 1 = 0} \end{cases}$$

الف) $a = -2, b = -4, c = 8$

۱۲

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-4)}{-2} = \frac{4}{-2} = -2, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{-2} = -4$$

ب) $a = 2, b = -5, c = 0$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{0}{2} = 0$$

پ) $3x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow a = 3, b = 1, c = -5$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{3}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3}$$

ت) $a = 3, b = \frac{3}{5}, c = -\frac{1}{2}$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-\frac{3}{5}}{3} = -\frac{1}{5}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-\frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$$

$a = 1, b = -5, c = 4$

۱۳

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4, \quad S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5$$

$$\underbrace{(x_1 \cdot x_2)}_P - \underbrace{(x_1 + x_2)}_S = P - S = 4 - 5 = -1$$

۱۴ **بیشتر بدانیم:** اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a + b + c = 0$ باشد، در این صورت یکی از ریشه‌ها عدد ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است. و اگر در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، $a + c = b$ باشد، در این صورت یکی از ریشه‌ها عدد -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

الف) $a = 98, b = 2, c = -100 \Rightarrow a + b + c = 98 + 2 - 100 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-100}{98} \end{cases}$

ب) $x^2 + 1 + 5 - x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-6}{a+1} \end{cases}$

پ) $a = 100, b = 101, c = 1 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow 100 + 1 = 101 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-c}{a} = \frac{-1}{100} \end{cases}$

ت) $x^2 + 3 - a = 0$ ضریب $x = 3$ و عدد ثابت $= 3 - a$

$$x^2 + 3 - a = 0 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{-(3-a)}{a} \end{cases}$$

نمونه سؤالات امتحانی فصل ۲

ردیف	سؤالات	بارم
الف	<p>جاهای خالی را با عبارت‌های درست کامل کنید.</p> <p>۱. معادله $-7x + 5 = -16$ به ازای $x = 3$ به تبدیل می‌شود.</p> <p>۲. در معادله $3x^2 + 12x = 0$ راه حل مناسب‌تر برای پیدا کردن جواب، روش می‌باشد.</p> <p>۳. ریشه‌های معادله $-2x^2 + 6x = 0$، عدد ۳ و است.</p> <p>۴. در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، وقتی ریشه‌ها ۱ و $\frac{c}{a}$ است که مجموع ضرایب معادله، برابر است.</p>	۱
ب	<p>عبارت درست را با \checkmark و نادرست را با x مشخص کنید.</p> <p>۵. جواب معادله $ax + b = 0$، $-\frac{b}{a}$ است. ($a \neq 0$) <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>۶. در معادله درجه دوم، حالت $\Delta < 0$ وقتی رخ می‌دهد که معادله دو ریشه حقیقی داشته باشد. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>۷. در معادله $ax^2 + bx + c = 0$، اگر $a + c = b$ باشد، ریشه‌ها -1 و $-\frac{b}{a}$ است. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p> <p>۸. معادله $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$، به شرط $P(x) \neq 0$ جواب دارد. <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست</p>	۱
پ	<p>گزینهٔ درست را انتخاب کنید.</p> <p>۹. معادلهٔ $4x^2 - x + 2 = 0$:</p> <p>(۱) دو ریشه حقیقی دارد. <input type="checkbox"/></p> <p>(۲) ریشه ندارد. <input type="checkbox"/></p> <p>(۳) ریشه مضاعف دارد. <input type="checkbox"/></p> <p>(۴) یک ریشه حقیقی و ریشه مضاعف دارد. <input type="checkbox"/></p> <p>۱۰. یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$، بین کدام دو عدد داده شده قرار دارد؟</p> <p>(۱) $\sqrt{2} + 1$ و $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ و $1 + \sqrt{3}$ (۳) $-\sqrt{6} - 2$ و $-\sqrt{6}$ (۴) $-\sqrt{3} - 1$ و $\sqrt{6}$</p> <p>۱۱. در حل معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ به روش مربع کامل از چه عددی جذر گرفته می‌شود؟</p> <p>(۱) ۹ (۲) $\frac{17}{4}$ (۳) $\frac{9}{4}$ (۴) ۱۱</p> <p>۱۲. روش مناسب حل معادله $x^2 - 14x + 49 = 0$ کدام است؟</p> <p>(۱) اتحاد مزدوج <input type="checkbox"/></p> <p>(۲) ریشه‌گیری <input type="checkbox"/></p> <p>(۳) اتحاد مزدوج ریشه‌گیری <input type="checkbox"/></p> <p>(۴) اتحاد مربع تفاضل دو جمله‌ای <input type="checkbox"/></p>	۲

فصل ۲: معادله درجه دوم

بارم	سوالات	ردیف
	به پرسش‌های زیر پاسخی تشریحی دهید.	ت
۱/۵	۱۳. پدری ۳۸ سال و پسرش ۸ سال دارد. پس از چند سال سن پدر سه برابر سن پسر می‌شود؟	
۱/۵	۱۴. مساحت مربعی به قطر $2\sqrt{3}$ را به دست آورید.	
۳	۱۵. معادله‌های زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید. (دلخواه) $2x^4 - 13x^2 - 45 = 0$ (الف) (مربع کامل) $3x^2 - 5x + 1 = 0$ (ب)	
۱/۵	۱۶. معادله درجه دومی بنویسید که $x = 5$ و $x = -1$ جواب‌های آن باشد.	
۲	۱۷. در معادله زیر بزرگ‌ترین جواب x کدام است؟ $(x-1)^2 + 2\sqrt{3}(x-1) = 6$	
۱/۵	۱۸. اگر به سه برابر عددی ده واحد اضافه کنیم، برابر با مربع همان عدد می‌شود. آن عدد چند است؟ (باراه حل کامل)	
۲	۱۹. مساحت یک مستطیل ۵۱ مترمربع و محیط آن ۴۰ متر است. درازا و پهنای آن را حساب کنید.	
۳	۲۰. معادله زیر را حل کنید. $\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{x^2-75}{x^2+5x+6}$	
۲۰	جمع نمره	

پاسخنامه نمونه سؤالات امتحانی

۱ تساوی عددی

$$2x^2 - 13x^2 - 45 = 0 \rightarrow x^2 = y$$

$$\rightarrow 2y^2 - 13y - 45 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow 13^2 - 4(2)(-45) = 529$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13) \pm \sqrt{529}}{2(2)}$$

$$= \frac{13 \pm 23}{4} \rightarrow \frac{10}{4} = \frac{-5}{2}$$

$$x^2 = 9 \rightarrow x = 3, -3$$

$$x^2 = -\frac{5}{2} \text{ غیر قابل قبول}$$

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36} = \frac{13}{36}$$

$$(x - \frac{5}{6})^2 = \sqrt{\frac{13}{36}}$$

$$x - \frac{5}{6} = \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

$$x_1 = \frac{+5 + \sqrt{13}}{6}, x_2 = \frac{+5 - \sqrt{13}}{6}$$

۱۵ الف.

ب.

$$x = 5 \rightarrow x - 5 = 0 \rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$$

$$x = -1 \rightarrow x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

۱۶

$$x - 1 = y \rightarrow y^2 + 2\sqrt{3}y - 6 = 0 \rightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-6) =$$

$$12 + 24 = 36$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2\sqrt{3} \pm 6}{2(1)} = -\sqrt{3} \pm 3$$

$$x - 1 = -\sqrt{3} + 3 \rightarrow x = -\sqrt{3} + 4 \checkmark$$

$$x - 1 = -\sqrt{3} - 3 \rightarrow x = -\sqrt{3} - 2$$

۱۷

۲ عامل یابی (فاکتورگیری)

۳ صفر

۴ صفر

۵ درست

۶ نادرست

۷ نادرست

۸ درست

۹ گزینه «۲»

۱۰ گزینه «۲»

۱۱ گزینه «۲»

۱۲ گزینه «۴»

۱۳ پس از x سال، سن پدر x + 38 و سن پسر x + 8 می‌شود.

$$38 + x = 3(8 + x) \rightarrow 38 + x = 24 + 3x$$

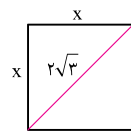
$$\rightarrow -2x = -14 \rightarrow x = 7$$

۱۴ ابتدا اندازه ضلع را به دست می‌آوریم.

$$x^2 + x^2 = (2\sqrt{3})^2 \rightarrow 2x^2 = 12$$

$$\rightarrow x^2 = 6 \rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$S = \sqrt{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{36} = 6$$



$$x^2 - 2 \cdot x + 51 = 0.$$

$$(x - 17)(x - 3) = 0.$$

غیر قابل قبول $x = 17 \rightarrow y = 3$

$$\rightarrow x = 3 \rightarrow y = 17$$

$$\frac{(x+3)(x+3)}{(x+2)(x+3)} - \frac{(x+2)(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$

$$= \frac{x^2 - 75}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\frac{x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 4x + 4)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 - 75}{x^2 + 5x + 6}$$

$$\rightarrow \frac{1 \cdot x + 5}{(x+2)(x+3)} - \frac{x^2 - 75}{(x+2)(x+3)} = 0.$$

$$\frac{-x^2 + 1 \cdot x + 8}{(x+2)(x+3)} = 0.$$

$$-x^2 + 1 \cdot x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{42}}{-2}$$

$$x^2 = \text{مربع عدد}$$

$$3x = \text{سه برابر عددی}$$

$$\text{عدد} = x$$

$$x^2 = 3x + 1.$$

$$x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0 \rightarrow x = 5, x = -2$$

$$xy = 51$$

$$2(x + y) = 4 \rightarrow x + y = 2.$$

حاصل طرفین این معادله را در x ضرب می‌کنیم داریم:

$$x(x + y) = 2 \cdot x$$

$$x^2 + xy = 2 \cdot x$$

$$x^2 + 51 = 2 \cdot x$$

۱۸

۲۰

۱۹

آزمون غنی‌سازی

فصل ۲: معادله درجه دوم

۱. به ازای چه مقدار m ، معادله $mx^2 - (m+1)x - 2x^2 - 4 = 0$ یک معادله درجه دوم خواهد بود؟

- (۱) $m \neq 1$ (۲) $m \neq 2$ (۳) $m \neq 1, -2$ (۴) $m \neq 0$

(سراسری ۹۵)

۲. ریشه‌های معادله $2x + \frac{x^2 - 4x}{x-2} - \frac{x-6}{x-2}$ کدام است؟

- (۱) یک جواب مورد قبول (۲) دو جواب مساوی (۳) دو جواب قرینه (۴) دو جواب وارون

(سراسری ۹۴)

۳. در معادله درجه دوم $6x^2 + (k+1)x + k = 0$ ، اگر مجموع دو ریشه حقیقی برابر $\frac{1}{6}$ باشد، ریشه مثبت آن کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۴. در معادله $(m-3)x^2 + (m-2)x + m - 1 = 0$ ، مقدار m چقدر باشد تا دو ریشه معادله قرینه هم گردند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۲ و ۳

۵. اگر هر دو ریشه معادله $x^2 + nx + m - 1 = 0$ برابر صفر باشد، $m + n$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۵

۶. مجموع ریشه‌های معادله $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) -۳

(سراسری ۹۶)

۷. در معادله $2x = \frac{x^2}{x-4} - \frac{2x+8}{x-4}$ ، تفاضل معکوس جواب از خود جواب کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{9}{4}$

۸. اگر معادله $x^2 + 2mx + m^2 + n = 0$ دارای دو ریشه مساوی باشد، آن‌گاه:

- (۱) $m - n = 0$ (۲) $m + n = 0$ (۳) $m = 0$ (۴) $n = 0$

(سراسری ۸۴)

۹. در معادله درجه دوم $x^2 - (b-2)x + 2b = 0$ ، مجموع ریشه‌ها برابر ۱۰ است. ریشه بزرگ‌تر کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۱۰. ریشه‌های معادله درجه دومی $\sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{2}}$ و $\sqrt{3} - \sqrt{3-\sqrt{2}}$ می‌باشد. معادله آن کدام است؟

(۱) $x^2 - 2\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ (۲) $x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

(۳) $x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$ (۴) $x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$

پاسخنامه آزمون غنی سازی

۱ گزینه «۲»

یادآوری: برای آن که معادله، درجه دوم باشد، باید ضریب x^2 عددی مخالف صفر باشد.

$$mx^2 - 2x^2 - (m+1)x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)x^2 - (m+1)x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow m-2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$$

۵ گزینه «۲»

یادآوری: برای آن که هر دو ریشه معادله برابر صفر باشند باید در

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \quad b = 0, \quad c = 0 \text{ باشند.}$$

$$\Rightarrow n = 0, \quad m-1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow m+n = 1+0 = 1$$

۲ گزینه «۱» مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x(x-2) + x^2 - 4x - x + 6}{x-2} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 4x + x^2 - 4x - x + 16}{x-2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{3x^2 - 9x + 16}{x-2} = 0$$

$$\rightarrow 3(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \\ x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$x = 2$ غیر قابل قبول است زیرا مخرج را صفر می‌کند. پس

$x = 1$ تنها جواب است.

۶ گزینه «۱» توجه کنید که این معادله یک معادله درجه ۴ است

و می‌توان آن را با کمک اتحاد جمله مشترک تجزیه کرد.

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases}$$

پس ۴ ریشه داریم و جمع ریشه‌ها برابر است با:

$$1 + (-1) + \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x - 8 - 2x(x-4)}{x-4} = 0 \quad \text{گزینه «۲» ۷}$$

$$\frac{x^2 - 2x - 8 - 2x^2 + 8x}{x-4} = 0 \rightarrow \frac{-x^2 + 6x - 8}{x-4} = 0$$

$$\rightarrow -(x^2 - 6x + 8) = 0 \rightarrow (x-2)(x-4) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \rightarrow x = 2 \quad \checkmark \\ x-4 = 0 \rightarrow x = 4 \quad \times \end{cases} \rightarrow 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۸ گزینه «۴»

یادآوری: دو ریشه مساوی همان ریشه مضاعف است. یعنی:

$$\Delta = 0$$

$$x^2 + 2mx + m^2 + n = 0 \Rightarrow a = 1, b = 2m, c = m^2 + n$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (2m)^2 - 4(1)(m^2 + n) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m^2 - 4n = 0 \Rightarrow -4n = 0 \Rightarrow n = 0$$

۳ گزینه «۲»

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(k+1)}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow -k-1 = 1 \rightarrow k = -2$$

$$\xrightarrow{k=-2} 6x - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 1 - 4(6)(-2) = 49$$

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2(6)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2(6)} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$$

۴ گزینه «۲»

یادآوری: برای آن که معادله دو ریشه قرینه داشته باشد،

باید در معادله کلی $ax^2 + bx + c = 0$ ، $b = 0$ و a و c

مختلف علامت باشند. $b = 0 \Rightarrow m-2 = 0 \Rightarrow m = 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-3 = 2-3 = -1 \\ m-1 = 2-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a \text{ و } c \text{ با هم مختلف علامت‌اند.}$$

گزینه «۲» ۱۰

یادآوری: می‌دانیم معادله درجه دومی که ریشه‌های آن معلوم می‌باشد، با کمک S و P به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته

می‌شود.

$$S = x_1 + x_2$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{2}} + \sqrt{3} - \sqrt{3-\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = (\sqrt{3} + \sqrt{3-\sqrt{2}})(\sqrt{3} - \sqrt{3-\sqrt{2}})$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3-\sqrt{2}})^2$$

$$= 3 - 3 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$$

گزینه «۲» ۹ $S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ (مجموع ریشه‌ها) و با توجه

به فرض $x_1 + x_2 = 10$ داریم:

$$\frac{-b}{a} = 10 \Rightarrow \frac{-(-(b-2))}{1} = 10 \Rightarrow b-2=10 \Rightarrow \boxed{b=12}$$

حال $b=12$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم.

$$x^2 - (12-2)x + 2(12) = 0$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} (x-6)(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-6=0 \Rightarrow x=6 \\ x-4=0 \Rightarrow x=4 \end{cases}$$

ریشه بزرگ‌تر $x=6$ می‌باشد.