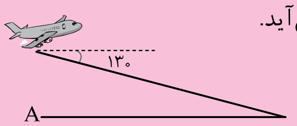
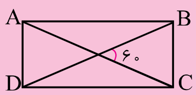
فصل ۲: مثلثات

- درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی
- درس دوم: دایره مثلثاتی
- درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۱. یک هواپیما در ارتفاع $2km$ از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می‌آید.



۲. طول قطر مستطیلی ۸ سانتی‌متر و زاویهٔ حاده بین دو قطر مستطیل 60° است. مساحت مستطیل را حساب کنید.



۳. اگر θ زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد و داشته باشیم $\sin\theta = \frac{-۲}{۳}$، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را حساب کنید.

۴. درستی رابطهٔ مقابل را ثابت کنید.
$$۱-\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin x}=\sin x$$

درس اوّل: نسبت‌های مثلثاتی

مثلثات به بررسی روابط بین زاویه‌ها و اضلاع یک مثلث می‌پردازد و کاربرد زیادی در علوم هندسی، فیزیک، نقشه‌برداری، دریانوردی، نجوم و... دارد.

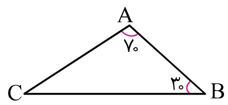
پیش‌نیاز

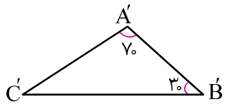
دو مثلث $A'B'C'$ و ABC را متشابه می‌گوییم، هر گاه زاویه‌ها نظیر به نظیر برابر و اضلاع نظیر به نظیر متناسب باشند یعنی داشته باشیم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \qquad \hat{A}=\hat{A}' \ , \ \hat{B}=\hat{B}' \ , \ \hat{C}=\hat{C}'$$

یکی از حالت‌های تشابه مثلث‌ها

هر گاه دو زاویه از مثلثی، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابه‌اند. به عنوان مثال:

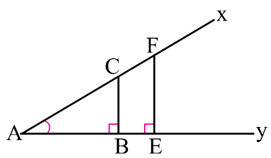




$$\hat{A}=\hat{A}'=۷۰^\circ \quad ,B=B'=۳۰^\circ \ \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

نتیجه: در دو مثلث قائم‌الزاویه، فقط کافی است یکی از زاویه‌های حاده از مثلثی با یک زاویه حاده از مثلث دیگر برابر باشد. (هر کدام یک زاویهٔ ۹۰° دارند.)

حال به شکل روبه‌رو توجه کنید:



با توجه به شکل داریم:

$$\overset{\Delta}{ABC},\ \overset{\Delta}{AEF}: \begin{cases} \hat{A}=\hat{A} \\ \hat{B}=\hat{E}=۹۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{AEF} \Rightarrow \frac{BC}{EF}=\frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{BC}{AB}=\frac{EF}{AE} \qquad (۱)$$

توجه: در تناسب می‌دانیم می‌توان جای جمله‌های میانی را عوض کرد. یعنی وقتی داریم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان نوشت: $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

همان‌طور که در تناسب (۱) متوجه شدید، نسبت طول ضلع مقابل به زاویهٔ A، به طول ضلع مجاور زاویه A ، مقداری ثابت است.

اگر روی نیم‌خط Ax نقطهٔ جدیدی در نظر بگیریم و از آن نقطه بر نیم‌خط Ay عمود کنیم، باز برای زاویهٔ A، این نسبت با نسبت‌های قبلی برابر خواهد بود.

این نسبت را تانژانت زاویهٔ A می‌نامیم و با tanA نشان می‌دهیم. در هر مثلث قائم‌الزاویه با زاویه حادهٔ A داریم:

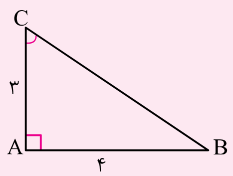
$$\mathbf{tanA}=\frac{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}$$

معکوس تانژانت زاویه A را کتانژانت A می‌نامیم و با CotA نشان می‌دهیم.

$$\mathbf{CotA}=\frac{\text{طول ضلع مجاور به زاویهٔ A}}{\text{طول ضلع مقابل به زاویهٔ A}}$$

مثال:

تانژانت و کتانژانت زاویهٔ مشخص شده در مثلث قائم‌الزاویه ABC را به دست آورید.



پاسخ: $\tan C=\frac{AB}{AC}=\frac{۴}{۳} \qquad \cot C=\frac{AC}{AB}=\frac{۳}{۴}$

نکته: تانژانت و کتانژانت هر زاویه، معکوس هم‌اند، پس حاصل‌ضرب آن‌ها برابر است با یک:

$$\boxed{\tan A . \mathrm{Cot}A=۱}$$

مثال:

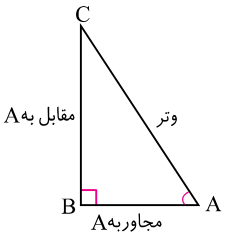
اگر $\tan\alpha=\dfrac{2m+1}{m}$ و $\cot\alpha=\dfrac{m}{m+2}$ باشد، مقدار m را حساب کنید.

پاسخ: می‌دانیم $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ بنابراین:

$$\frac{2m+1}{\cancel{m}}\times\frac{\cancel{m}}{m+2}=1\Rightarrow\frac{2m+1}{m+2}=1\Rightarrow 2m+1=m+2\Rightarrow m=1$$

سینوس و کسینوس زاویه A

در مثلث قائم‌الزاویه ABC که A زاویه‌ای حاده است نسبت طول ضلع مقابل به زاویه A به طول وتر ($\dfrac{\text{طول ضلع مقابل به زاویه A}}{\text{طول وتر}}$) و نسبت طول ضلع مجاور به زاویه A به طول وتر ($\dfrac{\text{طول ضلع مجاور به زاویه A}}{\text{طول وتر}}$) نیز مقداری ثابت است که این دو مقدار ثابت را به ترتیب سینوس و کسینوس زاویه A می‌نامیم.



$$\sin\widehat{A}=\frac{BC}{AC}$$

$$\cos\widehat{A}=\frac{AB}{AC}$$

نسبت‌های مثلثاتی

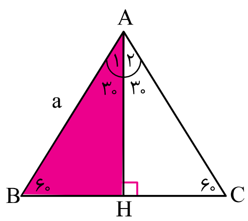
در یک مثلث قائم‌الزاویه، نسبت‌های سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت را نسبت‌های مثلثاتی می‌نامیم.

با توجه به مثلث ABC که در بالا رسم شده است داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\sin A=\dfrac{BC}{AC}\\[2mm] \cos A=\dfrac{AB}{AC}\end{array}\right\}\xrightarrow{\div}\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\dfrac{BC}{\cancel{AC}}}{\dfrac{AB}{\cancel{AC}}}=\frac{BC}{AB}$$

از طرفی می‌دانیم $\tan A=\dfrac{BC}{AB}$ پس: $\boxed{\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}}$ و از آن‌جا که کتانژانت، معکوس تانژانت است داریم: $\boxed{\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}}$

۱. می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه 30° و 60° را پیدا کنیم. برای این کار یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a ترسیم و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم می‌کنیم. می‌دانیم در این نوع مثلث، ارتفاع و میانه بر هم‌دیگر منطبق هستند پس داریم: $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=30^\circ$, $BH=HC=\dfrac{a}{2}$



$$\overset{\triangle}{ABH}:\ \sin B=\frac{AH}{AB}\ ,\ \cos B=\frac{BH}{AB}\qquad \tan B=\frac{AH}{BH}\ ,\ \cot B=\frac{BH}{AH}$$

به کمک رابطه فیثاغورس در مثلث ABH داریم:

$$BH^2+AH^2=AB^2\Rightarrow\left(\frac{a}{2}\right)^2+AH^2=a^2\Rightarrow AH^2=a^2-\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}\Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

حال با جایگذاری طول اضلاع در روابط بالا داریم:

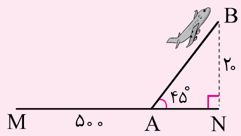
$$\sin 60^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\qquad \cos 60^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$$

(بهتر است نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۶۰° را حفظ کنید.)

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \tan ۶۰^\circ = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{\frac{a}{۲}} = \sqrt{۳}$$

مثال:

۱. هواپیمایی می‌خواهد از روی باند فرودگاه بلند شود. ابتدا ۵۰۰ متر روی باند حرکت می‌کند تا سرعت لازم را پیدا کند، سپس با زاویهٔ ۴۵° از زمین بلند می‌شود. در انتهای باند ۲۰۰ متر ارتفاع دارد. طول باند چه‌قدر است؟



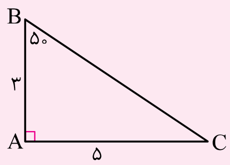
پاسخ: اگر MN را کل باند در نظر بگیریم می‌دانیم $MA = ۵۰۰$ و اگر بتوانیم طول AN را حساب کنیم، طول باند به دست می‌آید.

در $\overset{\Delta}{ABN}$ خواهیم داشت: $\tan ۴۵^\circ = \frac{BN}{AN} \Rightarrow ۱ = \frac{۲۰۰}{AN} \Rightarrow AN = ۲۰۰ m$

$$MN = ۵۰۰ + ۲۰۰ = ۷۰۰ \ m$$

می‌دانید چرا از تانژانت استفاده کردیم؟ با توجه به این‌که ضلع مقابل به زاویهٔ $A(۴۵^\circ)$ را داریم و ضلع مجاور را می‌خواهیم به دست آوریم پس نسبتی که به کار می‌آید تانژانت است.

۲. می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۵۰° را پیدا کنیم. برای این کار، ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه حاده آن ۵۰° باشد (به کمک نقاله). سپس طول اضلاع قائمه مثلث را با خطکش اندازه می‌گیریم.



$$BC^۲ = ۹ + ۲۵ = ۳۴ \Rightarrow BC = \sqrt{۳۴}$$

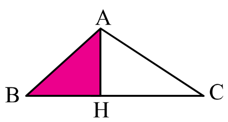
$$\sin ۵۰^\circ = \frac{۵}{\sqrt{۳۴}} \qquad \cos ۵۰^\circ = \frac{۳}{\sqrt{۳۴}}$$

$$\tan ۵۰^\circ = \frac{۵}{۳} \qquad \cot ۵۰^\circ = \frac{۳}{۵}$$

محاسبهٔ مساحت مثلث به کمک نسبت‌های مثلثاتی

می‌خواهیم فرمول جدیدی برای مساحت مثلث بدست آوریم. می‌دانیم:

$$S = \frac{۱}{۲} AH \times BC \quad (۱)$$



$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB . \sin B \quad (۲)$$

حال با جایگذاری رابطه (۲) در رابطهٔ (۱) داریم:

$$S = \frac{۱}{۲} AB \times \sin B \times BC$$

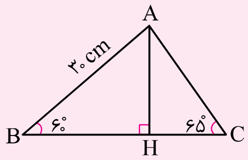
$$\Rightarrow \boxed{S = \frac{۱}{۲} AB \times BC \times \sin B}$$

مساحت مثلث برابر است با نصف حاصل‌ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن‌ها. به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$S = \frac{۱}{۲} AC \times AB \times \sin A = \frac{۱}{۲} AC \times BC \times \sin C$$

مثال:

می‌خواهیم طول ضلع AC و ارتفاع AH را در مثلث زیر به دست آوریم.



$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{۳۰} \Rightarrow AH = ۳۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}cm$$

$$\overset{\Delta}{AHC}: \sin ۶۵^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AC = \frac{AH}{\sin ۶۵^\circ}$$

حال به $\sin ۶۵^\circ$ نیاز داریم. یا به روش گفته شده مثلث قائم‌الزاویه دلخواه رسم می‌کنیم که یک زاویه آن ۶۵° باشد و به کمک خطکش و اندازه‌گیری، سینوس ۶۵° را حساب می‌کنیم. یا به کمک ماشین حساب سینوس ۶۵° را به دست می‌آوریم.

$\sin ۶۵^\circ = ۰/۹$ $\qquad$ $AC = \frac{۱۵\sqrt{۳}}{۰/۹} = \frac{۵۰}{۳}\sqrt{۳}$

تمرین‌های امتحانی

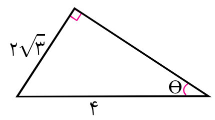
۱. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۰° را به دست آورید.

۲. با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ساق a، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۴۵° را محاسبه کنید.

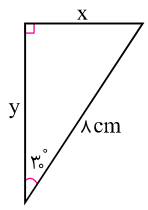
۳. یک موشک در ارتفاع ۱۵ متری از سطح زمین و با زاویهٔ ۳۰° پرتاب می‌شود. پس از طی ۲۰۰۰ متر با همین زاویه، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟

۴. در هر یک از مثلث‌های زیر صرفاً به کمک نسبت‌های مثلثاتی اندازهٔ زاویه یا اضلاع مجهول را که مشخص شده‌اند، پیدا کنید.

الف.

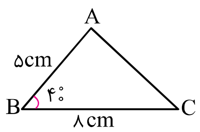


ب.

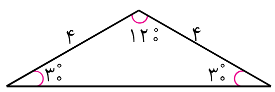


۵. نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۵° را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه و اندازه‌گیری اضلاع به دست آورید.

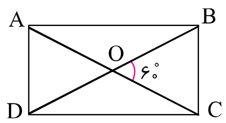
۶. اگر $\sin ۴۰^\circ \cong ۰/۶$ باشد، مساحت مثلث زیر را به دست آورید.



۷. مساحت مثلث مقابل را حساب کنید.



۸. طول قطر مستطیلی ۸ سانتی‌متر و زاویه حاده بین دو قطر آن ۶۰° است. مساحت مستطیل چند سانتی‌مترمربع است؟



پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱ با توجه به مثلث ABH در مثال ۱، داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{۲}}{a} = \frac{۱}{۲} \qquad \cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}a}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \qquad \cot ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \sqrt{۳}$$

۲ طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

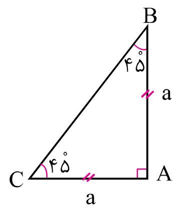
$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC = a\sqrt{۲}$$

$$\hat{B} = \hat{C} = ۴۵^\circ$$

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = ۱ \Rightarrow \cot B = ۱$$

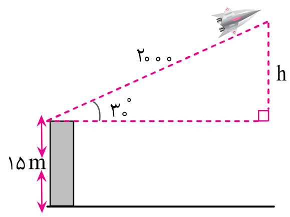


۳

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{h}{۲۰۰۰} \Rightarrow h = ۲۰۰۰ \times \sin ۳۰^\circ$$

$$h = ۲۰۰۰ \times \frac{۱}{۲} = ۱۰۰۰ \text{ m}$$

ارتفاع موشک از زمین $= ۱۰۰۰ + ۱۵ = ۱۰۱۵$ متر



۴ الف. از آن‌جا که اضلاع داده شده نسبت به زاویهٔ θ، ضلع مقابل و وتر می‌باشند پس از نسبت سینوس استفاده می‌کنیم.

$$\sin \theta = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \theta = ۶۰^\circ$$

ب.

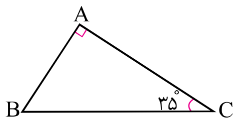
$$\sin ۳۰ = \frac{x}{۸} \Rightarrow x = ۸ \times \frac{۱}{۲} = ۴$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{y}{۸} \Rightarrow y = ۸ \times \cos ۳۰^\circ = ۸ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۴\sqrt{۳}$$

۵ طول اضلاع AB و AC و BC را با خط‌کش اندازه بگیرید سپس با استفاده از فرمول نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۳۵° را محاسبه کنید.

$$\sin ۳۵^\circ \simeq ۰/۵۷ \qquad \cos ۳۵^\circ \simeq ۰/۸۲$$

$$\tan ۳۵^\circ \simeq ۰/۷ \qquad \cot ۳۵^\circ \simeq ۱/۴۳$$



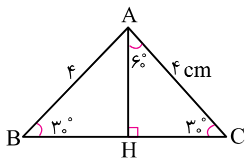
۶

$$S = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times ۵ \times \cancel{۸}^{۴} \times \sin ۴۰^\circ = ۲۰ \times ۰/۶ = ۱۲ \text{ cm}^۲$$

۷

$$\overset{\Delta}{AHC} : \sin ۳۰^\circ = \frac{AH}{AC} \Rightarrow$$

$$AH = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲ \text{ cm}$$



$$\sin ۶۰^\circ = \frac{HC}{۴} \Rightarrow HC = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳} \text{ cm}$$

ارتفاع AH در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه هم هست

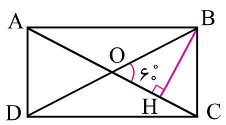
پس: $BH = HC = ۲\sqrt{۳}$ و $BC = ۲(۲\sqrt{۳}) = ۴\sqrt{۳}$.

بنابراین: $S = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۴\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳} \text{ cm}^۲$

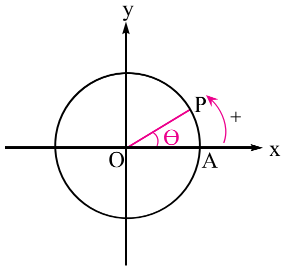
۸ از رأس B بر قطر AC عمود می‌کنیم.

می‌دانیم، $OB = \frac{\text{قطر}}{۲} = ۴$ پس: $BH = ۴ \times \sin ۶۰ = ۲\sqrt{۳}$

$$S_{ABCD} = ۲S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \cancel{۲}\left(\frac{۱}{\cancel{۲}} BH \times AC\right) = ۲\sqrt{۳} \times ۸ = ۱۶\sqrt{۳}$$

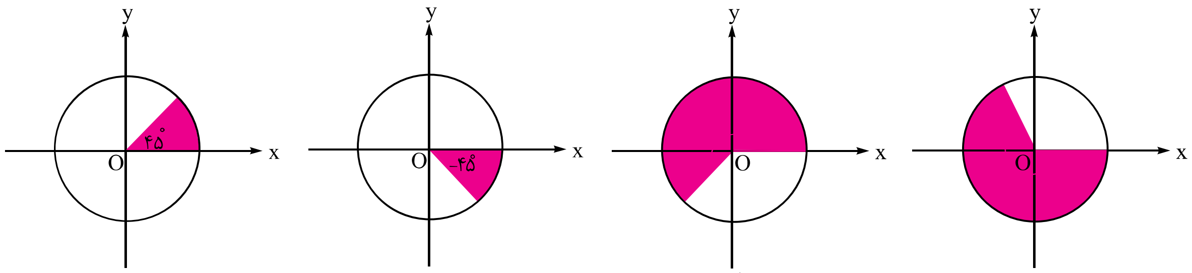


درس دوم: دایره مثلثاتی



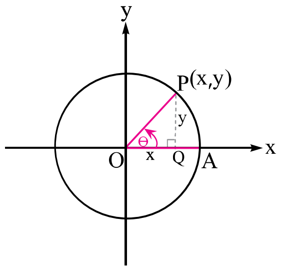
دایره مثلثاتی: دایره‌ای است که مرکز آن مبدأ دستگاه مختصات و شعاع آن ۱ است.

نقطهٔ A مبدأ حرکت برای رسم زاویه است. (OA ضلع ثابت زاویه‌هاست) اگر جهت حرکت، خلاف عقربه‌های ساعت باشد، زاویهٔ رسم شده مثبت است و اگر جهت حرکت، موافق حرکت عقربه‌های ساعت باشد، زاویه منفی است.



۴۵° $\quad$ -۴۵° $\quad$ ۲۱۰° $\quad$ -۲۴۰°

زاویه مثبت θ را رسم کرده‌ایم. حال می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی این زاویه را به دست آوریم فرض کنیم (x , y) مختصات نقطهٔ P باشد. از نقطهٔ P بر OA عمود رسم می‌کنیم.



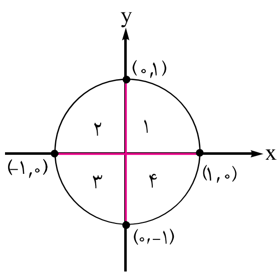
همان طور که مشخص است $PQ = y$ و $OQ = x$ بنابراین در مثلث قائم‌الزاویه OPQ داریم:

$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{y}{۱} = y \qquad \cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{x}{۱} = x \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

توجه کردید که $\sin\theta = y$ یعنی عرض نقطهٔ P همان سینوس زاویهٔ θ است و طول نقطهٔ P همان کسینوس زاویه θ است.

پس برای به دست آوردن سینوس و کسینوس زاویه θ در دایره مثلثاتی به شرط آن‌که OA قطعاً یک ضلع این زاویه و OP (P نقطه‌ای روی محیط دایره است) ضلع دیگر باشد داریم: $\cos\theta = x_P$, $\sin\theta = y_P$

محدوده سینوس و کسینوس



به دایره مثلثاتی توجه کنید. همان‌طور که گفته شد قسمتی از محور xها که درون دایره مثلثاتی است، محور کسینوس‌ها و قسمتی از محور yها که درون این دایره است، محور سینوس‌هاست. و با توجه به ۴ نقطه مشخص شده در شکل نتیجه می‌گیریم: $-۱ \le \sin\theta \le ۱ \ , \ -۱ \le \cos\theta \le ۱$

یعنی مقدار سینوس و کسینوس هر زاویه از ۱- بزرگ‌تر یا مساوی و از ۱+ کوچک‌تر یا مساوی است.

نکته دیگر این‌که دایره توسط دستگاه به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است که هر یک از آن‌ها را ربع یا ناحیه می‌نامیم. (مطابق شکل) ربع اوّل ـ ربع دوم ـ ربع سوم ـ ربع چهارم

نکته: اگر انتهای کمان رو به رو زاویه‌ای در ربع اوّل باشد همه نسبت‌های این زاویه مثبت هستند.

اگر انتهای کمان رو به رو به زاویه‌ای در ربع دوم باشد سینوس مثبت است و بقیه نسبت های مثلثاتی منفی هستند.

اگر انتهای کمان رو به رو به زاویه‌ای در ربع سوم باشد، سینوس و کسینوس منفی‌اند ولی تانژانت و کتانژانت مثبت‌اند.

اگر انتهای کمان رو به رو به زاویه‌ای در ربع چهارم باشد، کسینوس مثبت است و بقیه نسبت‌های مثلثاتی منفی‌اند.

مثال:

۱. می‌خواهیم بدانیم هر یک از زاویه‌های زیر در کدام ناحیه از دایره مثلثاتی قرار دارند؟

الف. $-۵۰^\circ \Leftarrow$ در ربع چهارم (در ربع چهارم $-۹۰^\circ<\theta<۰$)

ب. $۸۵^\circ \Leftarrow$ در ربع اول (در ربع اول $۰<\theta<۹۰^\circ$)

پ. $۱۰۰^\circ \Leftarrow$ در ربع سوم (در ربع سوم: در جهت منفی $-۱۸۰<\theta<-۹۰$ ـ در جهت مثبت $۱۸۰<\theta<۲۷۰$)

ت. $۱۱۰^\circ \Leftarrow$ در ربع دوم (در ربع دوم $۹۰^\circ<\theta<۱۸۰^\circ$)

۲. می‌خواهیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۰° و ۲۷۰° را به دست آوریم.

پاسخ: برای ساخت زاویه ۰°، OP بر OA منطبق است.

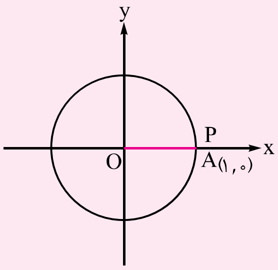
$\sin ۰^\circ = y_P = ۰$ $\quad \tan ۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{۰}{۱} = ۰$

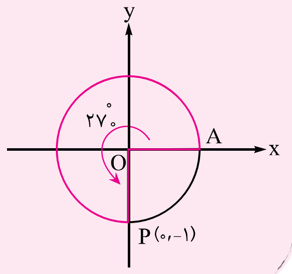
$\cos ۰^\circ = x_P = ۱$ $\quad \cot ۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{۱}{۰}$ تعریف نشده

$\sin ۲۷۰^\circ = y_P = -۱$ $\quad \cos ۲۷۰^\circ = x_P = ۰$

$\tan ۲۷۰^\circ = \frac{-۱}{۰}$ تعریف نشده

$\cot ۲۷۰^\circ = \frac{۰}{-۱} = ۰$





با توجه به مثال بالا می‌توان گفت که:

مقدار	۰°	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\sin\theta$	۰	۱	۰	-۱	۰
$\cos\theta$	۱	۰	-۱	۰	۱
$\tan\theta$	۰	ت ن	۰	ت ن	۰
$\cot\theta$	ت ن	۰	ت ن	۰	ت ن

مثال:

۱. اگر $\sin\alpha = m-۱$ باشد محدودهٔ m را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم $-۱\le \sin\alpha \le ۱$ پس $-۱\le m-۱\le ۱$ اگر طرفین نامعادله را با ۱ جمع کنیم داریم: $-۱+۱\le m-۱+۱\le ۱+۱ \Rightarrow ۰\le m\le ۲$

۲. θ زاویه‌ای است در ربع چهارم دایره مثلثاتی و $\cos\theta = \frac{۲}{۵}$ می‌باشد. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را به دست آورید.

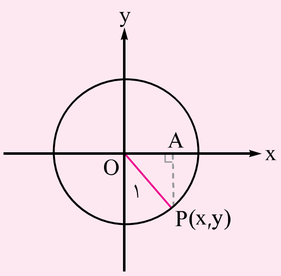
پاسخ:

$$\cos\theta = \frac{۲}{۵} \Rightarrow x_P = \frac{۲}{۵} = OA$$

از طرفی می‌دانیم $OP=۱$ (شعاع دایره مثلثاتی یک است) بنابراین:

$$x_P^۲ + y_P^۲ = ۱$$

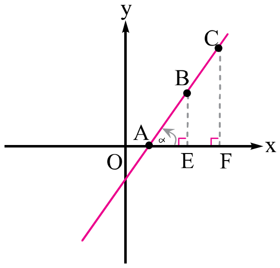
$$AP^۲ = OP^۲ - OA^۲ = ۱ - \frac{۴}{۲۵} = \frac{۲۱}{۲۵} \Rightarrow AP = \frac{\pm\sqrt{۲۱}}{۵} \xrightarrow{\theta \text{ در ربع چهارم}} AP = -\frac{\sqrt{۲۱}}{۵}$$



$$\sin\theta = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۵}, \quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{-\sqrt{۲۱}}{۵}}{\frac{۲}{۵}} = \frac{-\sqrt{۲۱}}{۲}, \quad \cot\theta = \frac{-۲}{\sqrt{۲۱}}$$

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه

خط دلخواه $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. نقاط دلخواه B و C را روی این خط اختیار کرده‌ایم و از آن‌ها عمودهای BE و CF را بر محور ox وارد نموده‌ایم. α زاویه بین این خط و محور ox است.



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{ABE}: \tan\alpha = \dfrac{BE}{AE} \\ \overset{\Delta}{ACF}: \tan\alpha = \dfrac{CF}{AF} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{BE}{AE} = \dfrac{CF}{AF}$$

از طرفی شیب خط برابر است با: $m=\dfrac{\text{میزان خیز}}{\text{میزان رفت}}=\dfrac{BE}{AE}$ بنابراین $m=\tan\alpha$ یعنی شیب خط برابر است با تانژانت زاویه α.

مثال:

می‌خواهیم بدانیم خط $y-x=۲$ با محور طول‌ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

پاسخ: ابتدا شیب این خط را به دست می‌آوریم:

$$y-x=۲ \to y=x+۲ \to m=۱$$

$$m=\tan\alpha \Rightarrow \tan\alpha=۱ \Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

نکته: در ربع اوّل دایره مثلثاتی (بین ۰° و ۹۰°) هر چه اندازه زاویه بزرگ‌تر شود مقدار سینوس و تانژانت هم بزرگ‌تر می‌شود اما مقدار کسینوس کوچک‌تر می‌شود.

تمرین‌های امتحانی

۱. زاویه‌های ۳۵°، -۱۴۰°، ۱۹۰°، -۲۰۰° را روی دایره مثلثاتی نشان دهید.

۲. نسبت‌های مثلثاتی ۹۰° و ۱۸۰° و ۳۶۰° را به دست آورید.

۳. θ زاویه‌ای در ربع سوم است. اگر $\sin\theta=\dfrac{-۲}{۳}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی θ را به دست آورید.

۴. اگر θ زاویه‌ای بین نیم خط ox و شعاع op از دایره مثلثاتی باشد و مختصات نقطه P، $\left(\dfrac{-\sqrt{۳}}{۲}, -\dfrac{۱}{۲}\right)$ باشد نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را حساب کنید.

۵. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(\sin ۴۵^\circ)^۲ - ۵\cos ۱۸۰^\circ + \sin ۳۰^\circ =$

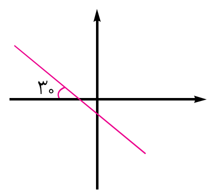
ب) $\dfrac{\cos ۶۰^\circ \sin ۳۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۵\sin ۹۰^\circ - ۴\cos ۲۷۰^\circ}$

۶. معادله خطی را بنویسید که از نقطهٔ (۳ و ۲-) بگذرد و با جهت مثبت محور x ها زاویه ۳۰° بسازد.

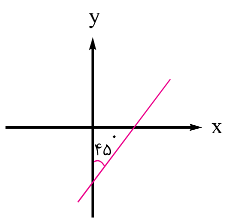
۷. شیب خط‌های زیر را بیابید.

الف. خط گذرنده از مبدأ که با محور xها زاویه ۶۰° می‌سازد.

ب.



پ.



۸. اندازه زاویه‌ای که خط‌های زیر با محور x ها می‌سازند را بیابید.

الف. خط $۳y-\sqrt{۳}x-۲\sqrt{۳}=۰$

ب. خط $۲x=۵$

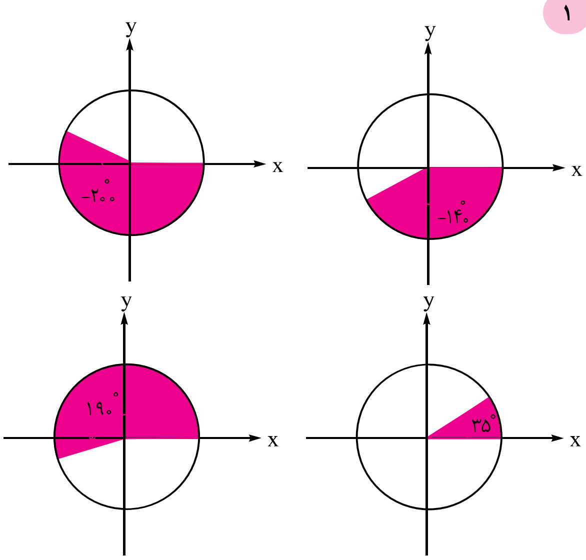
پ. خط گذرنده از نقاط $\begin{bmatrix}\sqrt{۳}\\ ۱\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}۴\sqrt{۳}\\ ۱۰\end{bmatrix}$

۹. علامت ($>=<$) قرار دهید:

$\cos ۷۰^\circ \bigcirc \cos ۸۰^\circ$ $\quad$ $\sin ۴۰^\circ \bigcirc \tan ۷۰^\circ \times \cot ۷۰^\circ$ $\quad$ $\tan ۳۵^\circ \bigcirc \tan ۱۵^\circ$

پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱



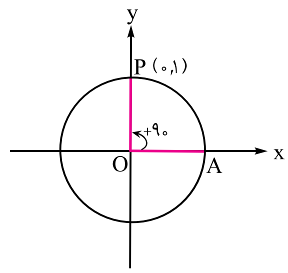
۲

$\sin 90^\circ = 1$

$\cos 90^\circ = 0$

$\tan 90^\circ = \frac{1}{0}$ ت ن

$\cot 90^\circ = \frac{0}{1} = 0$

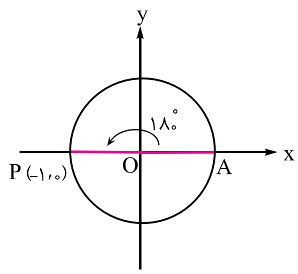


$\sin 180^\circ = 0$

$\cos 180^\circ = -1$

$\tan 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$

$\cot 180^\circ = \frac{-1}{0}$ ت ن

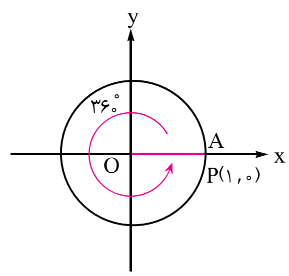


$\sin 360^\circ = 0$

$\cos 360^\circ = 1$

$\tan 360^\circ = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 360^\circ = \frac{1}{0}$ ت ن



۳

$\sin\theta = \frac{-2}{3} = y_p \Rightarrow y_p = \frac{-2}{3}$

$x_p^2 + y_p^2 = 1^2 \Rightarrow x_p^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow x_p = \frac{\pm\sqrt{5}}{3}$

چون θ در ربع سوم است پس $x_p = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ قابل قبول است.

$\cos\theta = x_p = \frac{-\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{y_p}{x_p} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

۴

$p(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \xrightarrow{r=1} \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{-1}{2}$

$\tan\theta = \sqrt{3} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۵ الف.

$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 5(-1) + \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + 5 + \frac{1}{2} = 6$

ب.

$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} - 1}{5\times 1 - 4\times 0} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{5} = \frac{-\frac{3}{4}}{5} = \frac{-3}{20}$

۶

$m = \tan\alpha \Rightarrow m = \tan 30^\circ \Rightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y - y_\circ = m(x - x_\circ)$

$y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+2) \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 3$

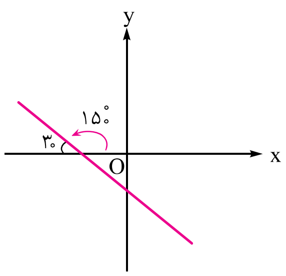
۷ الف.

$m = \tan 60^\circ \Rightarrow m = \sqrt{3}$

ب. زاویه‌ای که خط با محور ox می‌سازد، 150° است پس $m = \tan 150^\circ$ (150° و 30° مکمل هم هستند.

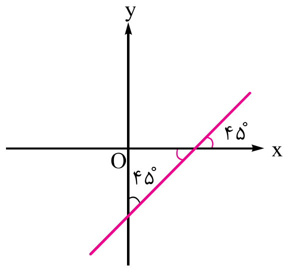
(دو زاویهٔ مکمل دارای تانژانت برابر اما قرینه هستند.)

$m = \tan 150^\circ = -\tan 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3}$



پ. زاویهٔ خط با محور ox، 45° است.

$m = \tan 45^\circ = 1$



۸ الف.

$$۳y=+\sqrt{۳}x+۲\sqrt{۳}\to y=\frac{+\sqrt{۳}}{۳}x+\frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

$$m=\frac{+\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \tan\alpha=\frac{+\sqrt{۳}}{۳}\Rightarrow \alpha=۳۰^\circ$$

ب.

زاویه ۹۰° است $\Leftarrow$ شیب تعریف نشده است $\Leftarrow$ خط $x=\frac{۵}{۲}$ است.

پ.

$$m=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{۱۰-۱}{۴\sqrt{۳}-\sqrt{۳}}$$

$$m=\frac{۹}{۳\sqrt{۳}}=\frac{۳}{\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۳}=\sqrt{۳}$$

پس:

$$\tan\alpha=\sqrt{۳}\Rightarrow \alpha=۶۰^\circ$$

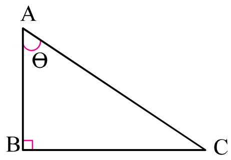
۹

$\cos ۷۰^\circ \boxed{>} \cos ۸۰^\circ$ $\qquad$ $\tan ۳۵^\circ \boxed{>} \tan ۱۵^\circ$

$\sin ۴۰^\circ \boxed{<} \overbrace{\tan ۷۰^\circ \times \cot ۷۰^\circ}^{۱}$ $\qquad$ (می‌دانیم $-۱\le \sin\theta \le ۱$)

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

در درس‌های قبل دیدیم: $\tan\theta.\cot\theta=۱$ و $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ حال با توجه به مثلث و نسبت‌های مثلثاتی می‌خواهیم به روابط بیشتری بین نسبت‌های مثلثاتی برسیم:



$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{BC}{AC} \quad ,\cos\theta=\dfrac{AB}{AC}\\ \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=\dfrac{BC^۲}{AC}+\dfrac{AB^۲}{AC^۲}=\dfrac{(BC)^۲+(AB)^۲}{(AC)^۲}=\dfrac{AC^۲}{AC^۲}=۱\end{cases}$$

بنابراین $\boxed{(۱)\quad \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱}$

گاهی در مسئله‌ای $\sin\theta$ را می‌دهند واز ما $\cos\theta$ یا سایر نسبت‌های مثلثاتی را می‌خواهند. از رابطهٔ (۱) می‌توانیم سینوس و کسینوس را تنها کنیم و بر حسب دیگری به دست آوریم:

$$\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta\Rightarrow\cos\theta=\pm\sqrt{۱-\sin^۲\theta}$$

$$\sin^۲\theta=۱-\cos^۲\theta\Rightarrow\sin\theta=\pm\sqrt{۱-\cos^۲\theta}$$

علامت + یا - بستگی به این دارد که زاویهٔ داده شده در کدام ناحیه باشد.

مثال:

اگر α زاویه‌ای در ناحیهٔ سو م مثلثاتی و $\cos\alpha=\dfrac{-۳}{۵}$ باشد، در این صورت سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

پاسخ: چون α در ناحیه سوم است پس سینوس، منفی است.

$$\sin^۲\alpha=۱-\cos^۲\alpha\Rightarrow\sin^۲\alpha=۱-\frac{۹}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-۴}{۵}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{۴}{۵}}{-\frac{۳}{۵}}=\frac{۴}{۳}\xrightarrow{\text{معکوس}}\cot\alpha=\frac{۳}{۴}$$

رابطه‌های تانژانت

می‌دانیم $\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$ حال اگر طرفین این تساوی را بر $\cos^۲\theta$ تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}+\frac{\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow\tan^۲\theta+۱=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

در نتیجه رابطه مثلثاتی جدیدی به دست می‌آید. رابطه‌ای بین $\tan\theta$ و $\cos\theta$:

$$\boxed{۱+\tan^۲\theta=\frac{۱}{\cos^۲\theta}}$$

و به همین ترتیب رابطه‌ای خواهیم داشت بین $\cot\theta$ و $\sin\theta$:

$$\boxed{۱+\cot^۲\theta=\frac{۱}{\sin^۲\theta}}$$

مثال:

اگر $\tan x=\dfrac{۲}{۳}$ و x زاویه تند باشد سایر نسبت‌ها را به دست آورید.

پاسخ: $\cot x=\dfrac{۳}{۲}$ و اما تانژانت با $\cos x$ رابطه دارد:

$$۱+\tan^۲x=\frac{۱}{\cos^۲x}$$

$$۱+(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow۱+\frac{۴}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲x}\Rightarrow\frac{۱۳}{۹}=\frac{۱}{\cos^۲x}\longrightarrow\cos^۲x=\frac{۹}{۱۳}\xrightarrow{\text{تند } x}\cos x=\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۱۳}}{\sqrt{۱۳}}}\cos x=\frac{۳\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

$$\sin^۲x=۱-\cos^۲x=۱-\frac{۹}{۱۳}=\frac{۴}{۱۳}\xrightarrow{\text{تند } x}\sin x=\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۲\sqrt{۱۳}}{۱۳}$$

اتحادهای مثلثاتی

هر یک از تساوی‌های $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ و $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$ را که به ازای هر زاویهٔ α همواره برقرار است، یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

مثال:

۱. حاصل عبارت $\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)$ را به دست آورید.

پاسخ: $\sin^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=\sin^2\alpha(\frac{1}{\cos^2\alpha})=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha$

۲. درستی تساوی‌های مقابل را ثابت کنید.

الف) $\sin^4\theta-\cos^4\theta=2\sin^2\theta-1$

ب) $\tan x+\cot x=\frac{1}{\sin x\times\cos x}$

پ) $(\frac{1}{\cos x}+\tan\theta)(1-\sin\theta)=\cos\theta$

پاسخ: برای اثبات درستی یک تساوی، یکی از طرفین را می‌نویسیم و به کمک اتحادها و روابط مثلثاتی به طرف دیگر می‌رسیم. انتخاب عبارتی که می‌خواهیم اثبات را با آن شروع کنیم بستگی به این دارد که تا چه اندازه بتوانیم روی آن عبارت کار کنیم.

برای این مثال از سمت چپ شروع می‌کنیم زیرا می‌توانیم از اتحاد مزدوج کمک بگیریم. یادتان باشد حتماً کل عبارت را در ابتدا بنویسید سپس عملیات‌ها را انجام دهید.

الف) $\sin^4\theta-\cos^4\theta=\underbrace{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}_{1}(\sin^2\theta-\cos^2\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=\sin^2\theta-1+\sin^2\theta=2\sin^2\theta-1$

ب) $\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x\times\sin x}=\frac{1}{\cos x\times\sin x}$

همان طور که مشخص شده، به‌جای tanx و cotx کسرهای $\frac{\sin x}{\cos x}$ و $\frac{\cos x}{\sin x}$ را قرار داده‌ایم سپس با مخرج مشترک گرفتن راه را ادامه داده‌ایم.

مشخص است که از سمت چپ باید شروع کنیم.

$$(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta)(1-\sin\theta)=(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta})(1-\sin\theta)=(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta})(1-\sin\theta)=\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}=\cos\theta$$

۳. اگر $A=2\sin x+5$ باشد، کم‌ترین و بیش‌ترین مقداری که A می‌تواند داشته باشد را به دست آورید.

پاسخ: می‌دانیم کم‌ترین مقداری که سینوس به خود می‌گیرد (-1) و بیش‌ترین مقدار آن $(+1)$ است پس:

$$\left.\begin{aligned}&\text{کم‌ترین مقدار A}: A_{min}=2(-1)+5=3\\&\text{بیش‌ترین مقدار A}: A_{max}=2(1)+5=7\end{aligned}\right\}\Rightarrow 3\le A\le 7$$

تمرین‌های امتحانی

۱. اگر $\sin x=a-b$ و $\cos x=a+b$ باشد چه رابطه‌ای بین a و b وجود دارد؟ (راهنمایی: از رابطه مثلثاتی (۱) استفاده کنید.)

۲. اگر $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{3}$ و β زاویه‌ای تند باشد، سایر نسبت‌ها را حساب کنید.

۳. اگر $\cot\beta=\frac{-5}{4}$ و β زاویه‌ای باز باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.

۴. اگر $\tan\alpha=\frac{12}{5}$ و α زاویه‌ای تند باشد سایر نسبت‌های مثلثاتی α را حساب کنید.

۵. درستی رابطه‌های زیر را نشان دهید.

الف) $\dfrac{1}{\sin y}\times \tan y=\dfrac{1}{\cos y}$

ب) $\dfrac{\tan x+\cot x}{\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}}=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$

پ) $1-\dfrac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\sin\alpha$

ت) $\dfrac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}-1}+\dfrac{\cos\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}+1}=\dfrac{2}{\tan^2\theta}$

ث) $\dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}=\cos x-\sin x\times\cos x$

۶. اگر $\tan x=\dfrac{3}{4}$ باشد، حاصل عبارت $\dfrac{8\sin x-4\cos x}{4\sin x-\cos x}$ را بیابید.

پاسخ تمرین‌های امتحانی

۱

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$
$$(a-b)^2+(a+b)^2=1$$
$$a^2-\cancel{2ab}+b^2+a^2+\cancel{2ab}+b^2=1$$
$$\Rightarrow 2a^2+2b^2=1\Rightarrow a^2+b^2=\frac{1}{2}$$

۲ β زاویه تند است پس همهٔ نسبت‌ها مثبت هستند.

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$$
$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=\sqrt{\frac{2}{7}}\Rightarrow \cot\alpha=\sqrt{\frac{7}{2}}$$

۳ β زاویهٔ باز است بنابراین. سینوس مثبت است و بقیهٔ نسبت‌ها منفی‌اند

$$1+\cot^2\beta=\frac{1}{\sin^2\beta}\Rightarrow 1+\frac{25}{16}=\frac{1}{\sin^2\beta}$$
$$\Rightarrow \frac{41}{16}=\frac{1}{\sin^2\beta}\Rightarrow \sin^2\beta=\frac{16}{41}$$
$$\Rightarrow \sin\beta=\frac{4}{\sqrt{41}}\,\frac{\times\sqrt{41}}{\times\sqrt{41}}=\frac{4\sqrt{41}}{41}$$

$\tan\beta=\dfrac{-4}{5}$ (معکوس کتانژانت)

$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\frac{16}{41}=\frac{25}{41}$$
$$\Rightarrow \cos\beta=\frac{-5}{\sqrt{41}}=\frac{-5\sqrt{41}}{41}$$

برای به دست آوردن $\cos\beta$ می‌توانیم از راه دیگری هم استفاده کنیم:

$$\cot\beta=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\Rightarrow \cos\beta=\cot\beta\times\sin\beta$$
$$=\frac{-5}{4}\times\frac{4\sqrt{41}}{41}=\frac{-5\sqrt{41}}{41}$$

۴ زاویه تند همه نسبت‌ها مثبت‌اند.

$$\tan\alpha=\frac{12}{5}\rightarrow \cot\alpha=\frac{5}{12}$$
$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow 1+\frac{144}{25}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{25}{169}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{5}{13}$$
$$\sin\alpha=\tan\alpha\times\cos\alpha\Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{12}{13}$$

۵ الف.

$$\frac{1}{\sin y}\times\tan y=\frac{1}{\cancel{\sin y}}\times\frac{\cancel{\sin y}}{\cos y}=\frac{1}{\cos y}$$

ب.

$$\frac{\tan x+\cot x}{\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\times\cos x}}$$
$$=\frac{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cancel{\cos x\times\sin x}}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cancel{\sin x\times\cos x}}}=\frac{\overbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}^{1}}{\cos x+\sin x}=\frac{1}{\sin x+\cos x}$$

پ.

$$1-\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1+\sin\alpha-\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha+(1-\cos^2\alpha)}{1+\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha(\cancel{1+\sin\alpha})}{\cancel{1+\sin\alpha}}=\sin\alpha$$

ت.

$$\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}-1}+\frac{\cos\theta}{\frac{1}{\cos\theta}+1}$$
$$=\frac{\cos\theta(\frac{1}{\cos\theta}+1)+\cos\theta(\frac{1}{\cos\theta}-1)}{(\frac{1}{\cos\theta}-1)(\frac{1}{\cos\theta}+1)}$$
$$=\frac{1+\cancel{\cos\theta}+1-\cancel{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\frac{2}{1+\tan^2\theta-1}=\frac{2}{\tan^2\theta}$$

ث.

$$\frac{\cos^{۳} x}{۱+\sin x}=\frac{\cos x\times\cos^{۲} x}{۱+\sin x}$$
$$=\frac{\cos x\times(۱-\sin^{۲} x)}{۱+\sin x}=\frac{\cos x(۱-\sin x)(\cancel{۱+\sin x})}{\cancel{۱+\sin x}}$$
$$=\cos x(۱-\sin x)=\cos x-\cos x\times\sin x$$

۶ دو راه برای حل این تمرین پیشنهاد می‌کنیم:

راه اوّل: تمامی جمله‌های عبارت داده شده را بر $\cos x$ تقسیم کنیم. (چرا کسینوس؟ زیرا $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ یعنی در مخرج کسینوس دارد.)

$$\frac{\frac{۸\sin x}{\cos x}-\frac{۴\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}}{\frac{۴\sin x}{\cos x}-\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}}}=\frac{۸\tan x-۴}{۴\tan x-۱}=\frac{۸\times\frac{۳}{۴}-۴}{۴\times\frac{۳}{۴}-۱}=\frac{۶-۴}{۳-۱}=۱$$

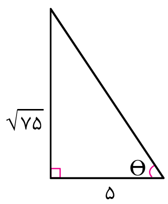
راه دوم:

$$\tan x=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۳}{۴}\Rightarrow\sin x=\frac{۳}{۴}\cos x$$

حال در عبارت داده شده به جای تمام $\sin x$ ها، $\frac{۳}{۴}\cos x$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۸\times\frac{۳}{۴}\cos x-۴\cos x}{۴\times\frac{۳}{۴}\cos x-\cos x}=\frac{۶\cos x-۴\cos x}{۳\cos x-\cos x}=\frac{۲\cos x}{۲\cos x}=۱$$

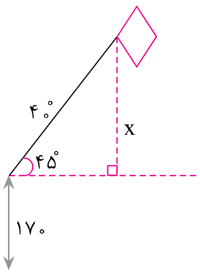
نمونه سؤال امتحانی فصل دوم

ردیف	سؤالات	بارم
۱	تانژانت زاویه‌ای که خط گذرنده از نقاط $A=\begin{bmatrix}۵\\۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱\\-۲\end{bmatrix}$ با محور x ها می‌سازد چه‌قدر است؟	۱
۲	نوید بادبادک‌ش را در پارک به آسمان فرستاده است. نخ بادبادک ۴۰ متر است و با افق زاویه ۴۵° ساخته است. اگر قد نوید ۱۷۰ سانتی‌متر باشد: الف. بادبادک تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ ب. اگر نخ بادبادک را به ۳۰ متر برساند و بادبادک را در همان ارتفاع نگه دارد، زاویه نخ با سطح افق چه تغییری می‌کند؟	۲/۲۵
۳	زاویه حاده در متوازی‌الاضلاعی ۶۰° و طول اضلاع آن ۱۰ و ۱۵ سانتی‌متر می‌باشد. مساحت متوازی‌الاضلاع را پیدا کنید.	۱/۲۵
۴	اگر $\tan x=\frac{۲}{۳}$ و x زاویه‌ای تند باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را به دست آورید.	۱/۵
۵	با توجه به مثلث مقابل اندازه زاویه θ را بیابید. 	۱
۶	حاصل عبارت روبه‌رو را به دست آورید. $۵\tan ۷۵^\circ \times \cot ۷۵^\circ - \sin^{۲} ۷۵^\circ + \cos^{۲} ۴۵^\circ - \cos^{۲} ۷۵^\circ$	۱/۵
۷	درستی رابطه مقابل را ثابت کنید: $(\sin\theta - ۲\cos\theta)^{۲} + (\cos\theta + ۲\sin\theta)^{۲} = ۵$	۱/۵
	جمع نمره	۱۰

پاسخ نمونه سؤال امتحانی

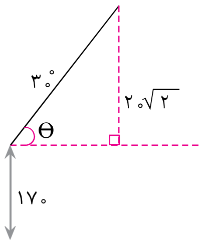
۱
$$\tan\alpha = m = \frac{۳-(-۲)}{۵-(-۱)} = \frac{۵}{۶}$$

۲ الف.



$$\sin۴۵^\circ = \frac{x}{۴۰} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۴۰ = ۲۰\sqrt{۲}m$$

ب.

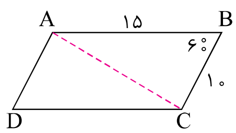


ارتفاع بادبادک $= ۱/۷۰ + ۲۰\sqrt{۲}$

$$\sin\theta = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{۳۰} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

بنابراین زاویه بزرگ‌تر شده است. $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \boxed{>} \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳



$$S_{ABCD} = ۲\times S_{ABC} = ۲\times\frac{۱}{۲}\times ۱۵\times ۱۰\times \sin۶۰^\circ$$

$$= ۱۵۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۷۵\sqrt{۳}\quad cm^۲$$

۴
$$\tan x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \cot x = \frac{۳}{۲}$$

$$۱+\tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۱+\frac{۴}{۹} = \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow \cos^۲ x$$

$$= \frac{۹}{۱۳} \Rightarrow \cos x = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\sin^۲ x = ۱-\cos^۲ x \Rightarrow ۱-\frac{۹}{۱۳} = \frac{۴}{۱۳}$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

۵
$$\tan\theta = \frac{۵}{\sqrt{۷۵}} = \frac{۵}{۵\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \Rightarrow \theta = ۳۰^\circ$$

۶
$$۵\underbrace{\tan۷۵^\circ \times \cot۷۵^\circ}_{۱} - (\underbrace{\sin^۲ ۷۵^\circ + \cos^۲ ۷۵^\circ}_{۱}) + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲$$

$$= ۵-۱+\frac{۲}{۴} = \frac{۹}{۲}$$

۷
$$(\sin\theta - ۲\cos\theta)^۲ + (\cos\theta + ۲\sin\theta)^۲ =$$

$$\sin^۲\theta + ۴\cos^۲\theta - \cancel{۴\sin\theta\cos\theta} + \cos^۲\theta$$

$$+ ۴\sin^۲\theta + \cancel{۴\cos\theta\times\sin\theta} =$$

$$۵\sin^۲\theta + ۵\cos^۲\theta = ۵(\underbrace{\sin^۲\theta + \cos^۲\theta}_{۱}) = ۵$$