

فصل «

استدلال و اثبات در هندسه

در این فصل می‌خوانیم:

۱۴ درس اول: استدلال

۱۴ درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

۱۴ درس سوم: همنهشتی مثلث‌ها

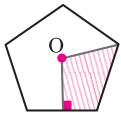
۱۴ درس چهارم: حل مسئله در هندسه

۱۴ درس پنجم: شکل‌های متشابه



دورسی ۱ استدلال

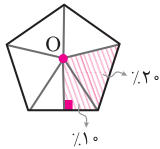
گاهی در امور زندگی یا در حل مسائل برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است از دانسته‌های قبلی خود استفاده می‌کنیم و دلیل می‌آوریم که به آن «استدلال» گفته می‌شود. برای استدلال کردن، راه‌های متفاوتی وجود دارد، اما همه این راه‌ها معتبر و قابل اعتماد نیستند. به تفاوت و اعتبار استدلال‌ها در مسئله زیر توجه کنید. معلم در کلاس یک مسئله از مسابقات کانگورو ۲۰۰۶ مطرح نمود:



مسئله: نقطه O مرکز پنج ضلعی منتظم است. ناحیه هاشور خورده چند درصد از مساحت کل پنج ضلعی است؟



استدلال رضا: در شکل مقابل چون ناحیه هاشور خورده تقریباً از $\frac{1}{3}$ کل شکل کم‌تر است، پس مساحت آن کم‌تر از ۳۳٪ است.



استدلال حسین: از O به همه رئوس وصل می‌کنیم؛ هر ناحیه $\frac{1}{5}$ سطح کل می‌شود. حال اگر عمودی از O به ضلع رسم کنیم هر ناحیه به دو قسمت ده درصدی تقسیم می‌شود. پس مساحت قسمت هاشور خورده دقیقاً $20\% + 10\% = 30\%$ است.

در استدلال‌های رضا و حسین، استدلال حسین معتبرتر و قابل اعتمادتر است. در استدلال رضا، هر چند ترسیم و استفاده از شهود در ارائه راه‌حل مؤثر بوده است، ولی نمی‌توانیم به طور کامل به این راه‌حل اطمینان کنیم.

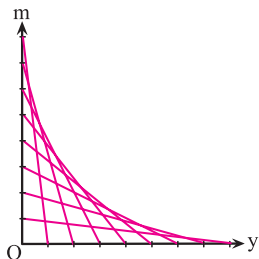
مثال

۱. معلم دو خط موازی x و y روی تخته رسم کرده، سپس خط‌های موربی به صورت زیر روی آن‌ها رسم می‌کند و از دانش‌آموزان سؤال می‌کند آیا $x \parallel y$ است؟



پاسخ: با توجه به درک شهودی و استفاده از حواس، دانش‌آموزان خطوط را موازی تصور نمی‌کنند.

۲. در شکل مقابل خطوطی که دو ضلع $m\hat{O}y$ را به هم وصل می‌کنند، چه نوعی از خطوط هستند؟



پاسخ: درک ما، این خط‌ها را خمیده تصور می‌کند.



۳. امیر و نیما در مسابقهٔ خوشنویسی مدرسه شرکت کرده‌اند. هر دو ادعا دارند که برندهٔ مسابقه می‌باشند و استدلال‌های زیر را بیان می‌کنند. استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟

امیر: چون نمرهٔ خوشنویسی من در کلاس ۲۰ شده است.

نیما: من ۴ ترم زیر نظر استاد خوشنویسی تمرین داشته‌ام.

پاسخ: کسب نمرهٔ ۲۰ در خوشنویسی کلاس نمی‌تواند استدلال قابل اعتمادی برای برنده شدن در مسابقه باشد. اما حضور ۴ ترم در دورهٔ خوشنویسی زیر نظر استاد استدلال قابل اعتمادتری برای برنده شدن در مسابقه است.

۴. دانش‌آموزی در حل مسئله‌ای از کتاب درسی که به صورت زیر بوده است، استدلالی را ارائه می‌دهد.

مسئله: آیا توان دوم یک عدد همیشه از خود عدد بزرگ‌تر است؟

استدلال دانش‌آموز: بله، زیرا با بررسی چند مثال معلوم می‌شود توان دوم هر عدد از آن عدد بزرگ‌تر است.

$$3 \rightarrow 9 > 3$$

$$(-2) \rightarrow 4 > -2$$

$$5 \rightarrow 25 > 5$$

$$7 \rightarrow 49 > 7$$

آیا استدلال این دانش‌آموز درست است؟

پاسخ: خیر، زیرا $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

تمرینات

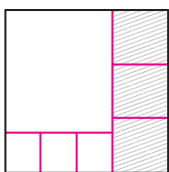


۱. حسن برای بررسی درستی رابطه $3^n < n^3$ به ازای $n \in \mathbb{N}$ این گونه استدلال می‌کند:

$$\left. \begin{array}{l} \text{استدلال حسن:} \\ \text{اگر } n=1 : 1 < 3 \\ \text{اگر } n=2 : 8 < 9 \end{array} \right\}$$

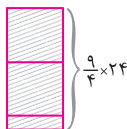
پس این رابطه همیشه به ازای $n \in \mathbb{N}$ برقرار است. آیا استدلال حسن درست و معتبر است؟ چرا؟

۲. محدثه و مهناز در حل مسئلهٔ زیر دو استدلال بیان می‌کنند. کدام استدلال معتبرتر و قابل اعتمادتر است؟



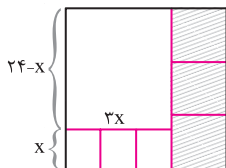
مسئله: مستطیل در تصویر به ۷ مربع تقسیم شده است. ضلع مربع‌های رنگی هر کدام ۸ واحد طول است. طول ضلع مربع سفید بزرگ چقدر است؟

استدلال محدثه: با توجه به شکل ۲ مربع کامل و $\frac{1}{4}$ از مربع سوم رنگی شده است، پس ضلع مربع سفید بزرگ



$$\frac{9}{4} \times 24 = 54 \text{ واحد طول است، یعنی: واحد طول } 24 \text{ از } 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

استدلال مهناز: طول ضلع مربع کوچک را x فرض می‌کنیم.



$$3x = 24 - x$$

$$4x = 24$$

$$x = 6 \rightarrow 3 \times 6 = 18 \text{ طول ضلع مربع بزرگ}$$

پس:

۳. بیشتر اوقاتی که فشار خون مادر بزرگ مریم بالا می‌رود، دید او تار می‌شود. امروز مادر بزرگ مریم تار می‌بیند، پس فشار خون او بالا رفته است. آیا استدلال بالا درست و قابل اعتماد است؟ چرا؟

۴. در المپیاد دانشجویی دانشجویان دانشگاه امیر کبیر بوده‌اند. سعید رتبه اول المپیاد دانشجویی را کسب کرده است، پس سعید دانشجوی دانشگاه امیر کبیر است، آیا این استدلال درست است؟ چرا؟

پاسخ تمرینات



۳

بله، زیرا بیشتر وقت‌هایی که فشار خون مادر بزرگ مریم بالا می‌رود، دیدش تار می‌شود.

۴

بله، زیرا دانشجویان دانشگاه امیر کبیر موفق به کسب رتبه اول شده‌اند.

۱

اگر $n = 3$ در نظر گرفته شود آن‌گاه $3^3 < 3^3$. پس استدلال حسن معتبر نیست.

۲

محدثه در استدلالش از شهود و ترسیم هندسی کمک می‌گیرد که باعث خطا در استدلال او شده است. اما استدلال مهناز کاملاً منطقی و درست است. پس استدلال مهناز معتبر و قابل اعتمادتر از استدلال محدثه است.

آشنایی با اثبات در هندسه

۲

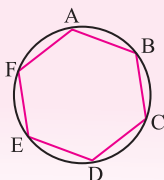
درس

همیشه برای اطمینان از درستی یک موضوع، ظاهر صورت مسئله، استفاده از حواس یا ارائه مثال‌های گوناگون کفایت نمی‌کند. باید از دلیل منطقی و درست کمک گرفت و با استدلال کردن، درستی آن موضوع را ثابت کرد. لازم است در روند استدلال ابتدا به تشخیص صحیح فرض و حکم بپردازیم. یعنی از مفروضات و اطلاعات مسئله کمک بگیریم تا به خواسته مسئله یعنی حکم برسیم.

مثال

در مسئله زیر فرض و حکم را بنویسید.

در شکل مقابل محیط دایره به ۶ کمان مساوی تقسیم شده است. نشان دهید شش ضلعی ABCDEF منتظم است.



فرض: $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{AF} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

پاسخ:

حکم: $\begin{cases} \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{AF} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = \widehat{E} = \widehat{F} \end{cases}$

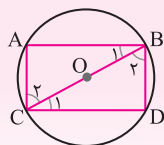
گاهی ممکن است تشخیص اشتباه مفروضات مسئله باعث خطا در روند استدلال شود. به مسئله بعد دقت کنید!



نکته

مثال

دانش آموزی برای حل این مسئله استدلال زیر را به کار برده است. آیا استدلالش درست است؟



«می‌دانیم در یک دایره وترهای نظیر کمان‌های مساوی با هم مساوی‌اند. در شکل زیر اگر O مرکز دایره و $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ و $AB \parallel CD$ باشد، نشان دهید $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ »

$$\text{فرض: } \begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{CD} \rightarrow \overline{AB} = \overline{CD} \\ AB \parallel CD \end{cases} \quad \text{حکم: } \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

چون $AB \parallel CD$ و BC مورب است، پس $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ و $\widehat{C}_2 = \widehat{B}_2$ در دو مثلث ACB و BDC ضلع مشترک است. پس دو مثلث به حالت زض زهمنهشت می‌باشند، در نتیجه اجزای متناظر آنها یعنی $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ است، بنابراین $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

پاسخ:

در روند این استدلال اشتباهی اتفاق افتاده است. از موازی بودن AB و CD نتیجه می‌گیریم فقط $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ است و نمی‌توان نتیجه گرفت $\widehat{C}_2 = \widehat{B}_2$. استدلال را به این صورت اصلاح می‌کنیم: $\widehat{C}_1 = \widehat{B}_1$ و $\overline{AB} = \overline{CD}$ و $\overline{BC} = \overline{BC}$. پس دو مثلث ACB و BDC به حالت ضض زهمنهشت‌اند و اجزای متناظر آنها یعنی $\widehat{AC} = \widehat{BD}$ است، بنابراین $\widehat{AC} = \widehat{BD}$.

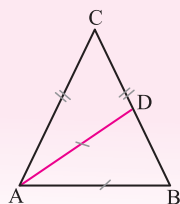
می‌توان نتیجه این مسئله را به دایره‌های دیگر با همین ویژگی‌ها تصمیم داد. یعنی کمان‌های بین دو وتر موازی در یک دایره با هم برابرند.



نکته

مثال

۱. فرض و حکم را در مورد مسئله‌های زیر بنویسید.

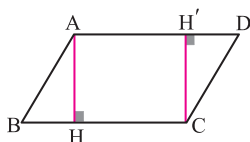


مسئله ۱: در شکل مقابل $\triangle ACB$ و $\triangle ADB$ متساوی‌الساقین هستند و AD نیمساز \widehat{BAC} است. نشان دهید $\widehat{ACB} = 36^\circ$ است.

$$\text{فرض: } \begin{cases} \overline{CA} = \overline{CB} \\ \overline{AD} = \overline{AB} \end{cases}$$

$$\text{حکم: } \widehat{ACB} = 36^\circ$$

پاسخ:



مسئله ۲: چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است. دو ارتفاع آن را رسم کرده‌ایم. نشان دهید این دو ارتفاع با هم برابرند.

$$\text{فرض: } \begin{cases} ABCD \text{ متوازی‌الاضلاع است, } AD \parallel BC, AB \parallel DC \\ \widehat{H} = \widehat{H'} = 90^\circ \end{cases}$$

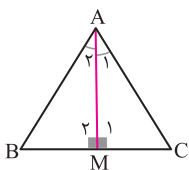
$$\text{حکم: } \overline{AH} = \overline{CH'}$$

پاسخ:

۲. الف. اشکال استدلال را در مسئله زیر اصلاح کنید.

ب. آیا نتیجه قابل تعمیم به اضلاع دیگر می‌باشد؟

مسئله: نشان دهید در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه وارد بر یک ضلع، عمودمنصف آن نیز می‌باشد.



$$\text{فرض : } \begin{cases} \triangle ABC \text{ متساوی‌الاضلاع است.} \\ \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} \\ \overline{BM} = \overline{MC} \end{cases}$$

$$\text{حکم : } \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$$

استدلال: در دو مثلث $\triangle AMB$ و $\triangle AMC$ ؛ $\overline{BM} = \overline{MC}$ و $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ و $\overline{AM} = \overline{AM}$. پس دو مثلث به حالت

ض‌ض ض‌ض هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا نتیجه می‌شود $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ و چون $\widehat{M} = 180^\circ$ بنابراین $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = 90^\circ$ است.

پاسخ: الف. در روند استدلال $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ، جزء مفروضات مسئله نمی‌باشد. می‌توان به جای آن از تساوی $\overline{AB} = \overline{AC}$

استفاده کرد تا دو مثلث $\triangle AMB$ و $\triangle AMC$ به حالت ض‌ض ض‌ض هم‌نهشت باشند.

ب. نتیجه قابل تعمیم به اضلاع دیگر $\triangle ABC$ است. زیرا دارای همان ویژگی‌ها هستند.

۳. آیا استدلال زیر درست است؟ چرا؟

مدیر مدرسه، فقط دانش‌آموزان ممتاز را به اردوی زیارتی برد. مریم را در اردو شرکت دادند. \Leftarrow مریم ممتاز بوده است.

پاسخ: استدلال درست است.

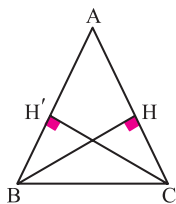
تمرینات



۱. فرض و حکم را برای مسئله زیر مشخص کنید.

مسئله: در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های AB و AC را رسم

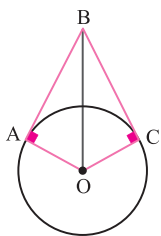
کرده‌ایم. نشان دهید طول این ارتفاع‌ها با هم برابر است.



۲. الف. در روند استدلال مسئله زیر، کدام استدلال معتبر است؟ چرا؟

ب. آیا نتیجه قابل تعمیم است؟

مسئله: از نقطه B خارج دایره دو مماس بر آن رسم کرده‌ایم نشان دهید طول مماس‌ها، مساوی‌اند.



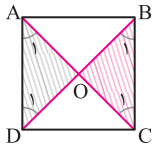
استدلال مهشید: می‌دانیم شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس عمود است. پس در دو مثلث OAB و OCB ، چون

$\widehat{A} = \widehat{C} = 90^\circ$ و $\overline{OB} = \overline{OB}$ (شعاع دایره) پس دو مثلث به حالت (و ز) هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا نتیجه

می‌شود $\overline{AB} = \overline{BC}$.



استدلال حمیده: با استفاده از تبدیل تقارن محوری OAB بر OCB منطبق می‌شود، پس با هم هم‌نهشت هستند، لذا $\overline{AB} = \overline{BC}$.



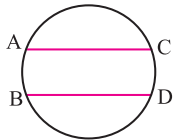
۳. آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ چرا؟

مسئله: نشان دهید در هر متوازی‌الاضلاع قطرهای یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

اثبات: یک مربع رسم می‌کنیم. با کشیدن قطرهای آن نشان می‌دهیم $\overline{OA} = \overline{OC}$ و $\overline{OB} = \overline{OD}$.

چون $AD \parallel BC$ پس $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ و همچنین $\overline{AD} = \overline{BC}$ (ضلع مربع) است، پس دو مثلث OAD و OCB به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا $\overline{OA} = \overline{OC}$ و $\overline{OB} = \overline{OD}$ است.

۴. با توجه به تصویر، آیا استدلال زیر درست است؟ چرا؟



در دایره کمان‌های بین دو وتر موازی مساوی‌اند. \Leftrightarrow کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} وترهای بین دو وتر موازی در دایره هستند.
 $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

پاسخ تمرینات

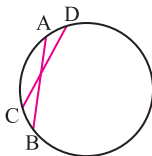


۳

خیر، زیرا مسئله در حالت خاص ثابت شده است؛ یعنی از خاصیت‌های مربع در استدلال استفاده کرده‌ایم.

۴

خیر، زیرا ممکن است کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} در یک دایره با هم مساوی باشند ولی بین دو وتر موازی واقع نباشند.



۱

فرض $\widehat{AB} = \widehat{AC}$, $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$

حکم: $\overline{BH} = \overline{CH'}$

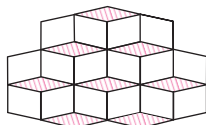
۲

الف. در مقایسه بین دو استدلال، مهشید با دلایل منطقی حکم مسئله را اثبات کرده است، ولی حمیده با توجه به ابعاد ظاهری مسئله به حکم دست یافته است. پس استدلال مهشید معتبرتر است.
 ب. نتیجه این مسئله قابل تعمیم به دایره‌های دیگر با همین ویژگی‌های مسئله می‌باشد.

تمرینات مروری



۱. در شکل مقابل شش بلوک وجود دارد یا هفت بلوک؟



۲. امیرحسین و محمد در حال تماشای مسابقه فوتبال هستند. درباره تیم برنده هر کدام استدلال‌هایی دارند، استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ چرا؟

امیرحسین: تیم مورد علاقه‌ام برنده می‌شود، زیرا تیم رقیب با اخراج یک بازیکن ۱۰ نفره بازی می‌کنند.
محمد: تیم مورد علاقه‌ام برنده می‌شود، چون تحت نظر مربی طی سال گذشته تمرینات مستمر انجام داده‌اند.

۳. دانش‌آموزی در حل مسئله زیر، استدلالی به کار برده است. آیا استدلال او درست است؟ چرا؟

مسئله: آیا حاصل جمع دو عدد اول، همیشه عددی زوج است؟

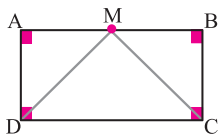
استدلال دانش‌آموز: بله، زیرا با چند مثال توانستم درستی آن را نشان دهم.

زوج $3, 5 \rightarrow 3 + 5 = 8$

زوج $17, 19 \rightarrow 17 + 19 = 36$

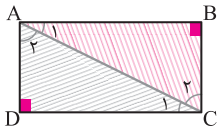
زوج $7, 11 \rightarrow 7 + 11 = 18$

زوج $61, 71 \rightarrow 61 + 71 = 132$



۴. فرض و حکم مسئله زیر را بنویسید؛ سپس آن را ثابت کنید.

مسئله: نقطه M وسط ضلع AB از مستطیل ABCD را در نظر می‌گیریم. نشان دهید $\overline{MC} = \overline{MD}$.



۵. آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ چرا؟

مسئله: در هر متوازی‌الاضلاع اضلاع روبه‌رو مساوی‌اند.

اثبات: یک مستطیل رسم می‌کنیم. با کشیدن یک قطر آن نشان می‌دهیم دو مثلث ABC و ADC همنهشت‌اند.

چون $AB \parallel DC$ و AC مورب است پس $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$.

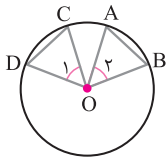
چون $AD \parallel BC$ و AC مورب است پس $\hat{A}_2 = \hat{C}_2$.

از طرفی $\overline{AC} = \overline{AC}$ پس دو مثلث ABC و ADC به حالت (ضضز) همنهشت‌اند و از آنجا $\overline{AB} = \overline{DC}$ و $\overline{AD} = \overline{BC}$.

۶. الف. فرض و حکم مسئله زیر را بنویسید، سپس آن را اثبات کنید.

ب. آیا نتیجه این مسئله قابل تعمیم است.

مسئله: در دایره مقابل کمان‌های \widehat{AB} و \widehat{CD} با هم برابرند. نشان دهید $\overline{AB} = \overline{CD}$.



پاسخ تمرینات مروری



<p>۳. خیر، زیرا حاصل جمع عدد ۲ (تنها عدد زوج اول) با هر عدد اول دیگر یک عدد فرد خواهد بود و دانش‌آموز در ارائه مثال‌ها از این مثال استفاده نکرده است. (مثال نقض)</p>	<p>۱. ۷ بلوک</p>
<p>۴. فرض : $\begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^\circ \\ AB \parallel DC, AD \parallel BC \\ AB = DC, AD = BC \\ AM = MB \end{cases}$ حکم : $\overline{MC} = \overline{MD}$</p>	<p>۲. استدلال محمد از استدلال امیرحسین قابل اعتمادتر است. زیرا تمرینات مستمر عامل مهمی در موفقیت است. اما اخراج یک بازیکن دلیلی بر باخت تیم رقیب نمی‌باشد.</p>

۶

فرض: $\begin{cases} \widehat{AB} = \widehat{DC} \\ OA = OB = OC = OD \end{cases}$ شعاع دایره

حکم: $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

الف. اثبات: از $\widehat{AB} = \widehat{DC}$ نتیجه می‌شود $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$. از طرفی $OA = OC$ و $OB = OD$. پس دو مثلث OAB و OCD به حالت ض‌ض‌ض هم‌نهشت‌اند و از آن‌جا $\widehat{AB} = \widehat{DC}$.
ب. بله، نتیجه این مسئله به سایر وترهای دایره با این ویژگی قابل تعمیم است.

استدلال:

$$\begin{array}{l} \triangle AMD \\ , \\ \triangle BMC \end{array} \begin{cases} \text{فرض: } \overline{AM} = \overline{MD} \\ \widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ \text{ (ض ز ض)} \\ \text{فرض: } \overline{AD} = \overline{BC} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle AMD \cong \triangle BMC$$

$$\Rightarrow \overline{MC} = \overline{MD}$$

۵

بله، استدلال معتبر است. با وجود این‌که دانش‌آموز برای اثبات حکم، مستطیل رسم کرده که خود نوعی متوازی‌الاضلاع است، اما از خواص مستطیل در اثبات استفاده نکرده است.

هم‌نهشتی مثلث‌ها

۳ درسی

یادآوری

مثلث‌های هم‌نهشت

دو مثلث را هم‌نهشت (مساوی) گویند، اگر یکی را با دو یا چند تبدیل هندسی (تقارن - دوران - انتقال) بر دیگری منطبق کنیم به طوری که کاملاً یک‌دیگر را پوشانند.

حالت‌های هم‌نهشتی دو مثلث

۱. حالت اول: دو ضلع و زاویه بین (ض ز ض)
۲. حالت دوم: دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز)
۳. حالت سوم: سه ضلع (ض ض ض)

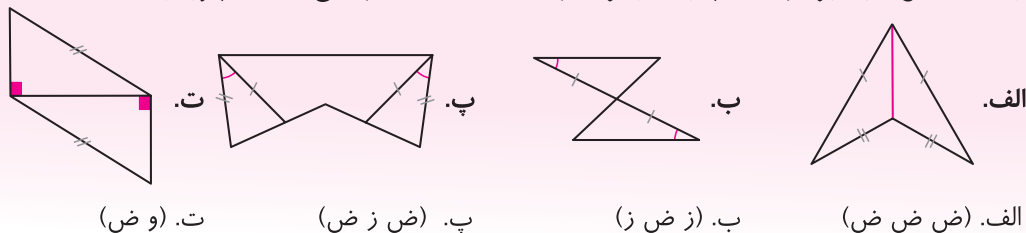
حالت‌های هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

برای نشان دادن هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه علاوه بر سه حالت فوق می‌توان از دو حالت زیر استفاده کرد.

۱. حالت اول: وتر و یک ضلع (و ض)
۲. حالت دوم: وتر و یک زاویه تند (و ز)

مثال

در هر یک از شکل‌های زیر دو مثلث با یک‌دیگر هم‌نهشت‌اند. حالت هم‌نهشتی آن‌ها را بنویسید.



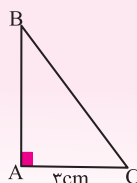
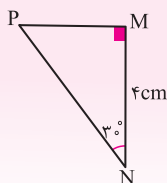
پاسخ: الف. (ض ض ض) ب. (ز ض ز) پ. (ض ز ض) ت. (و ض)

اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت

اگر دو مثلث هم‌نهشت را طوری روی هم قرار دهیم تا یک‌دیگر را به طور کامل بپوشانند، ضلع‌های روی هم قرار گرفته با هم مساوی‌اند و زاویه‌های روی هم قرار گرفته نیز با هم مساوی هستند.

مثال

۱. دو مثلث زیر هم‌نهشت هستند (دوران 180°). اندازه ضلع‌ها و زاویه‌ها را بنویسید.



پاسخ: با نوشتن اجزای متناظر دو مثلث، اندازه‌های خواسته‌شده را به دست می‌آوریم.

$$\overline{AC} = \overline{MP} = 3\text{cm}$$

$$\hat{A} = \hat{M} = 90^\circ$$

$$\overline{AB} = \overline{MN} = 4\text{cm}$$

$$\hat{B} = \hat{N} = 3^\circ$$

$$\overline{BC} = \overline{NP} = 5\text{cm} \quad (\text{به کمک رابطه فیثاغورس})$$

$$\hat{C} = \hat{P} = 60^\circ \quad (\text{به کمک مجموع زوایای هر مثلث})$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

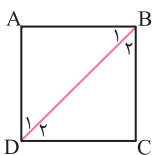
$$90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

$$x^2 = 4^2 + 3^2$$

$$180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$x^2 = 16 + 9$$

$$x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$



۲. مریم می‌خواهد به کمک هم‌نهشتی مثلث‌ها ثابت کند قطر نیمساز زاویه‌های

روبه‌رو می‌باشد. او را راهنمایی کنید.

پاسخ: ابتدا شکل را رسم می‌کنیم.

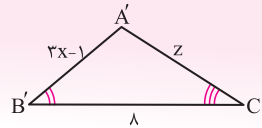
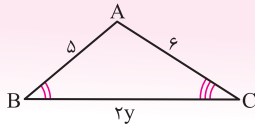
فرض مسئله: چهارضلعی ABCD مربع است.

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 \quad \text{و} \quad \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

با توجه به فرض مسئله داریم $AB = CD$ و $AD = CB$ چون اضلاع مربع می‌باشند و $BD = BD$ ضلع مشترک می‌باشد. بنابراین دو مثلث CBD و ABD بنا به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ AD = CB \\ BD = BD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \Delta ABD \cong \Delta CBD \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \end{array} \right. \rightarrow \text{BD نیمساز زاویه‌های B و D می‌باشد.}$$

۳. دو مثلث زیر هم‌نهشت هستند (انتقال). اندازه ضلع‌ها را به دست آورید.



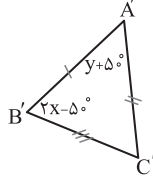
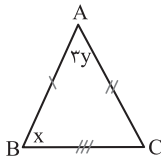
$$\begin{aligned} AB &= A'B' \\ 5 &= 3x - 1 \\ 3x &= 5 + 1 \\ x &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= A'C' \\ 6 &= z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= B'C' \\ 2y &= \lambda \\ y &= \frac{\lambda}{2} = 4 \end{aligned}$$

پاسخ:

۴. دو مثلث زیر هم‌نهشت‌اند (دوران). اندازه هر زاویه را به دست آورید.



$$\begin{aligned} \hat{A} &= \hat{A}' \\ 3y &= y + 50^\circ \\ 3y - y &= 50^\circ \\ 2y &= 50^\circ \\ y &= \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ \\ \hat{A} &= \hat{A}' = 3 \times 25^\circ = 75^\circ \end{aligned}$$

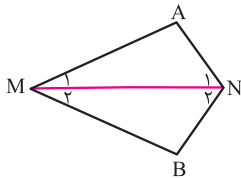
$$\begin{aligned} \hat{B} &= \hat{B}' \\ x &= 2x - 50^\circ \\ 2x - x &= 50^\circ \\ x &= 50^\circ \\ \hat{B} &= \hat{B}' = 50^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{C}' \\ 180 - (75 + 50) &= 55^\circ \\ C &= C' = 55^\circ \end{aligned}$$

پاسخ: زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی با هم مساوی‌اند.

۵. در شکل روبه‌رو MN نیمساز زاویه‌های M و N می‌باشد. چرا مثلث AMN

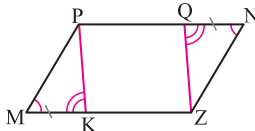
و BMN هم‌نهشت هستند؟ سپس اجزای متناظر آن‌ها را بنویسید.



پاسخ: فرض مسئله: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و $\hat{N}_1 = \hat{N}_2$ زیرا MN نیمساز زاویه‌های M و N می‌باشد و $MN = MN$.

$$\left. \begin{aligned} \hat{N}_1 &= \hat{N}_2 \\ MN &= MN \\ \hat{M}_1 &= \hat{M}_2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{aligned} \Delta AMN &\cong \Delta BMN \\ \Delta AMN &\cong \Delta BMN \end{aligned} \xrightarrow{\text{حکم}} \begin{aligned} AM &= BM \\ \hat{A} &= \hat{B} \\ AN &= BN \end{aligned}$$

۶. در شکل زیر $\hat{M} = \hat{N}$ و $\hat{MKP} = \hat{NQZ}$ و $MK = NQ$. ثابت کنید $PK = ZQ$ می‌باشد.



پاسخ: فرض مسئله: $\hat{M} = \hat{N}$ و $\hat{MKP} = \hat{NQZ}$ و $MK = NQ$

$$\left. \begin{aligned} \hat{M} &= \hat{N} \\ MK &= NQ \\ \hat{MKP} &= \hat{NQZ} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{aligned} \Delta MKP &\cong \Delta NQZ \\ PK &= ZQ \end{aligned} \quad \text{حکم: } PK = ZQ$$

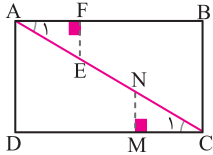
تمرینات



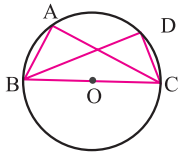
۱. دو مثلث زیر همنهشت هستند. مقدار مجهول‌ها را محاسبه و اندازه هر زاویه را به دست آورید.



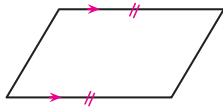
۲. در مستطیل مقابل $\overline{NC} = \overline{EA}$ است. ثابت کنید که $\triangle AEF \cong \triangle CNM$. سپس اجزای متناظر آنها را بنویسید.



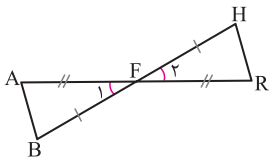
۳. در شکل مقابل O مرکز دایره است. اگر $AB = DC$ باشد، ثابت کنید $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.



۴. ثابت کنید: اگر در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل متوازی و متساوی باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



۵. نشان دهید اگر دو پاره خط یک‌دیگر را نصف کنند، دو پاره خطی که انتهای آنها را به هم وصل می‌کند با هم برابرند.



پاسخ تمرینات



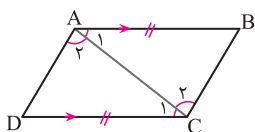
1

زاویه‌های روبه‌رو به ضلع‌های مساوی با هم مساوی‌اند.

$$\begin{aligned}\widehat{B} &= \widehat{D} = 60^\circ \\ 60^\circ &= 50^\circ + y \\ 60^\circ - 50^\circ &= y \\ y &= 10^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \widehat{E} = 90^\circ \\ x + 40^\circ &= 90^\circ \\ x &= 90^\circ - 40^\circ \\ x &= 50^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widehat{C} &= \widehat{F} \\ \widehat{C} &= \widehat{A} - \widehat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \\ 30^\circ &= 3z \\ z &= \frac{30^\circ}{3} = 10^\circ \\ \widehat{F} &= 3 \times 10^\circ = 30^\circ \\ \widehat{C} &= \widehat{F} = 30^\circ\end{aligned}$$



فرض	$AB \parallel CD$ و $AB = CD$
حکم	$AD \parallel BC$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = CD \\ (AB \parallel CD \text{ و } AC \text{ مورب و } AC) \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ \text{ضلع مشترک } AC = AC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضض)}} \Delta ABC \cong \Delta ADC$$

اجزای متناظر
 $\longrightarrow \hat{C}_2 = \hat{A}_2 \rightarrow AD \parallel BC$

۵

ابتدا شکل را رسم می‌کنیم.
 فرض مسئله: AR و BH یک‌دیگر را در نقطه F نصف کرده‌اند.

حکم: $AB = RH$

با توجه به فرض مسئله داریم $AF = RF$ و $FB = FH$ می‌باشد و $F_1 = F_2$ ، زیرا متقابل به رأس می‌باشند. بنابراین دو مثلث بنا به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت هستند.

$$\left. \begin{array}{l} AF = RF \\ \hat{F}_1 = \hat{F}_2 \\ BF = HF \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضض)}} \Delta AFB \cong \Delta RFH \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AB = RH$$

استدلال

فرض	$\overline{NC} = \overline{AE}$ و مستطیل ABCD
حکم	$\Delta AEF \cong \Delta CNM$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } EA = NC \\ (AB \parallel DC \text{ و } AC \text{ مورب و } AC) \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \Delta AEF \cong \Delta CNM$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AF = CM \\ \hat{E} = \hat{N} \\ EF = NM \end{array} \right. \rightarrow \text{اجزای متناظر:}$$

۳

فرض	AB = DC و O مرکز دایره
حکم	$\Delta ABC \cong \Delta DCB$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \text{ زوایای محاطی مقابل به قطر} \\ BC = BC \\ \text{فرض } AB = DC \end{array} \right\} \rightarrow \Delta ABC \cong \Delta DCB$$

۴

برای اثبات موازی بودن دو ضلع دیگر چهارضلعی، با رسم یکی از قطرهای می‌توانیم دو مثلث هم‌نهشت بیابیم و با اثبات هم‌نهشتی آن‌ها به موازی بودن دو ضلع دیگر برسیم. پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

حل مسئله در هندسه

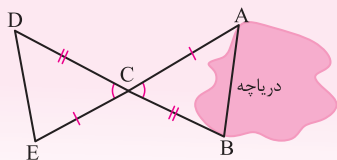
برای حل مسائل هندسی، راه‌حل کلی وجود ندارد، اما می‌توان مراحل را مشخص کرد که برای هر مسئله هندسی، آن‌ها را توصیه می‌کنند.

قدم‌های حل مسئله

۱. فهمیدن مسئله یعنی صورت مسئله را به دقت بخوانید و مفاهیم تشکیل‌دهنده آن را بشناسید.
۲. اگر مسئله فاقد شکل است با توجه به صورت مسئله، یک شکل مناسب برای آن رسم کنید.
۳. داده‌های مسئله (فرض) و خواسته‌های آن (حکم) را تشخیص داده و در یک جدول بنویسید.
۴. برای رسیدن از فرض به حکم راه‌حلی پیدا کنید؛ بحث کنید؛ نقشه بریزید.

مثال

۱. نقشه برداری می‌خواهد بدون آن که پاهای خود را خیس کند فاصله نقطه A تا B را از دریاچه اندازه بگیرد.



پاسخ: گام اول و دوم: او ابتدا دو نقطه A و B را در دو طرف متقابل این دریاچه اختیار می‌کند و می‌خواهد فاصله بین A و B را اندازه بگیرد. نقطه C را در یک طرف این دریاچه چنان انتخاب می‌کند که مانند شکل مسیر C به A و C به B از روی آب نگذرد. در این صورت می‌توان CA و CB را اندازه گرفت. نقشه بردار در امتداد پاره خط BC تا نقطه D به طوری که $CB = CD$ باشد جلو می‌رود، سپس در امتداد پاره خط AC تا نقطه E جلو می‌رود، به طوری که $CE = CA$ باشد. برای اندازه‌گیری عرض دریاچه، او باید ثابت کند که $AB = DE$ می‌باشد.

گام سوم: مشخص کردن فرض و حکم مسئله:

فرض مسئله: $AC = EC$ و $BC = CD$ و حکم مسئله: $AB = DE$.

گام چهارم: با استفاده از مثلث‌های هم‌نهشت مسئله را حل می‌کند.

با توجه به فرض و حکم مسئله، اثبات را با نمادهای ریاضی می‌نویسیم.

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض: } AC = EC \\ \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \text{ : متقابل به رأس هستند} \\ \text{فرض: } DC = BC \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{اجزای متناظر} \\ \Delta ABC \cong \Delta DEC \text{ (ض.ض.ض)} \\ \longrightarrow AB = DE \end{array}$$

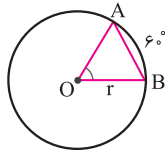
نقشه بردار به این صورت توانست عرض دریاچه را اندازه بگیرد.

۲. نشان دهید وتر نظیر کمان 60° در دایره، با شعاع دایره برابر است.

پاسخ: گام اول: فهمیدن مسئله یعنی اگر $\widehat{AB} = 60^\circ$ باشد آن‌گاه (شعاع) $AB = r$ می‌شود.

گام دوم: با توجه به صورت مسئله شکل مقابل را رسم می‌کنیم.

گام سوم: مشخص کردن فرض و حکم



فرض شعاع $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $\overline{AB} = r$

حکم شعاع $\overline{AB} = r$

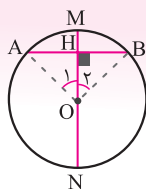
گام چهارم: حل مسئله

$$\widehat{AB} = 60^\circ \rightarrow \widehat{O} = 60^\circ \rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} = r \rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} \\ \widehat{A} + \widehat{B} = 120^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{O} \xrightarrow{\Delta OAB \text{ متساوی الاضلاع است.}} \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = r$$

۳. ثابت کنید در هر دایره، قطری که بر وتر دایره عمود شود، وتر و کمان نظیرش را نصف می‌کند.



پاسخ: گام اول: اگر $MN \perp AB$ آن گاه $\widehat{AM} = \widehat{BM}$ و $AH = BH$

گام دوم: رسم شکل

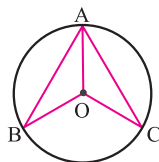
گام سوم: مشخص کردن فرض و حکم

فرض	$MN \perp AB$
حکم	$AH = BH$ و $\widehat{AM} = \widehat{BM}$

گام چهارم: حل مسئله: از O به A و B وصل می‌کنیم. مثلث OAB متساوی‌الساقین می‌شود. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع، میانه و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند. پس OH که ارتفاع نظیر قاعده می‌باشد، میانه و نیمساز نیز است. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{شعاع } OA = OB \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta OAH \cong \Delta OBH \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} AH = BH \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \end{array} \right. \rightarrow \widehat{AM} = \widehat{BM}$$

۴. در شکل مقابل وترهای AB و AC مساوی‌اند. ثابت کنید زاویه‌های B و C مساوی‌اند. (O مرکز دایره است).



پاسخ: گام اول: $AB = AC$ است. می‌خواهیم ثابت کنیم $\widehat{B} = \widehat{C}$.

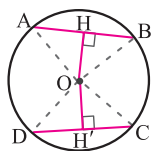
گام دوم: رسم شکل مناسب

گام سوم: مشخص کردن فرض اصلی و حکم مسئله

فرض	$AB = AC$
حکم	$\widehat{B} = \widehat{C}$

گام چهارم: حل مسئله با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = AC \\ \text{شعاع } OB = OC \\ \text{ضلع مشترک } OA = OA \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta OAB \cong \Delta OAC \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \widehat{B} = \widehat{C}$$



۵. نشان دهید در هر دایره وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله هستند.

پاسخ: گام اول: اگر $AB = CD$ باشد، آن گاه $OH = OH'$.

گام دوم: رسم شکل مناسب

گام سوم: مشخص کردن فرض مسئله و حکم مسئله

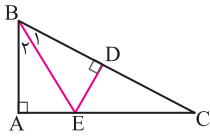
فرض	$AB = CD$
حکم	$OH = OH'$

گام چهارم: حل مسئله با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها

$$\left. \begin{array}{l} OA = OC \\ \text{شعاع } OB = OD \\ \text{فرض } AB = CD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضضض)}} \Delta OAB \cong \Delta OCD$$

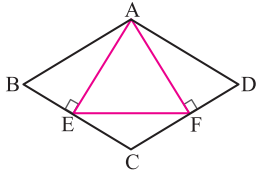
چون دو مثلث همنهشت‌اند، پس تمام اجزای نظیرشان از جمله ارتفاع‌های وارد بر قاعده‌ها نیز با هم برابرند.

تمرینات



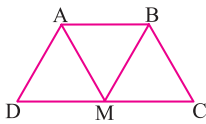
۱. در شکل مقابل \overline{BE} نیمساز زاویه B است. ثابت کنید $AB = BD$ است.

۲. چهارضلعی $ABCD$ لوزی است. با استفاده از همنهشتی مثلث‌ها ثابت کنید چرا مثلث AEF متساوی‌الساقین است؟

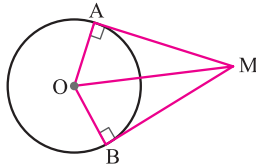


۳. ثابت کنید اگر از یک نقطه دو مماس بر دایره رسم کنیم، طول دو مماس برابر خواهد بود.

۴. می‌دانیم در ذوزنقه متساوی‌الساقین زوایای مجاور ساق‌ها با هم برابرند. اگر M وسط قاعده ذوزنقه متساوی‌الساقین مقابل باشد نشان دهید مثلث AMB متساوی‌الساقین است.



پاسخ تمرینات



اثبات: از مرکز دایره به نقاط A ، B و M وصل می‌کنیم تا دو مثلث قائم‌الزاویه OAM و OBM به وجود آید. (زیرا شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.)

$$\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{شعاع } OA = OB \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OAM \cong \triangle OBM$$

اجزای متناظر $\rightarrow MA = MB$

فرض	$AD = BC$ ، $\hat{D} = \hat{C}$ ، $DM = MC$
حکم	$AM = BM$

اثبات:

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AD = BC \\ \text{فرض } \hat{D} = \hat{C} \\ \text{فرض } DM = MC \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle ADM \cong \triangle BCM$$

$\rightarrow AM = BM$

۱

فرض	$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ BE نیمساز زاویه B
حکم	$AB = BD$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \text{فرض } \hat{B}_1 = \hat{B}_2 \\ \text{ضلع مشترک } BE = BE \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \triangle ABE \cong \triangle DBE$$

اجزای متناظر $\rightarrow AB = BD$

۲

فرض	لوزی ABCD
حکم	مثلث متساوی‌الساقین AEF

$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \text{ اضلاع لوزی‌اند} \\ \hat{B} = \hat{D} = 90^\circ \\ \text{زوایای مقابل لوزی } \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه تند}} \triangle ABE \cong \triangle ADF$$

اجزای متناظر $\rightarrow AE = AF \rightarrow \triangle AEF$ متساوی‌الساقین است.

۳

فرض	مماس هستند. MA و MB
حکم	$MA = MB$



مفهوم تشابه

اگر نقشهٔ یک ساختمان را با خود ساختمان مقایسه کنید خواهید دید که اضلاع به یک نسبت در نقشه کوچک تر شده ولی اندازهٔ زاویه‌ها حفظ گردیده است. در واقع ساختمان با نقشه‌اش متشابه است. اگر شکل A با B متشابه باشند این گونه نشان می‌دهیم $A \sim B$.

مثال

چرا به عکس خود شبیه هستید؟

پاسخ: طول بینی، ابروها، از گوش تا چانه و ... خود را با خط‌کش به طور دقیق اندازه بگیرید و سپس همین کار را در عکس خود انجام دهید. خواهید دید که تمام اندازه‌های شما به یک نسبت کوچک شده است.

همچنین اگر زاویه‌های صورت مثلاً بین ابرو و بینی و یا چانه و ... را اندازه بگیرید درست باید مساوی اندازه همین زاویه‌ها در عکس باشد.

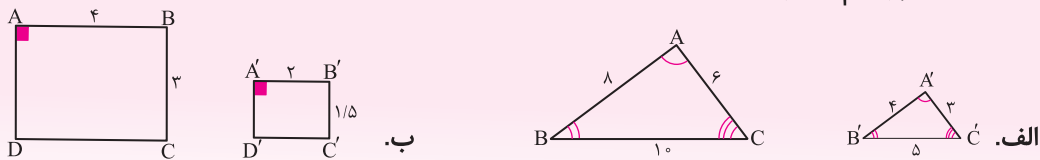


تشابه در چندضلعی‌ها

دو چندضلعی در صورتی متشابه‌اند که تعداد اضلاع آن‌ها مساوی، ضلع‌های متناظر آن‌ها متناسب (به یک نسبت کوچک، بزرگ یا بدون تغییر می‌باشد) و زاویه‌های متناظر آن‌ها متساوی باشد. برای وجود تشابه، همهٔ این شرط‌ها لازم است.

مثال

۱. آیا اشکال زیر با هم متشابه‌اند؟



پاسخ: بله، زیرا:

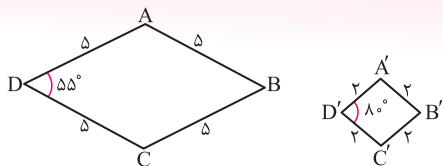
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = 2 \quad \text{الف.}$$

$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \hat{D} = \hat{D}' \end{cases} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \rightarrow \frac{4}{2} = \frac{3}{1.5} = 2 \quad \text{ب.}$$

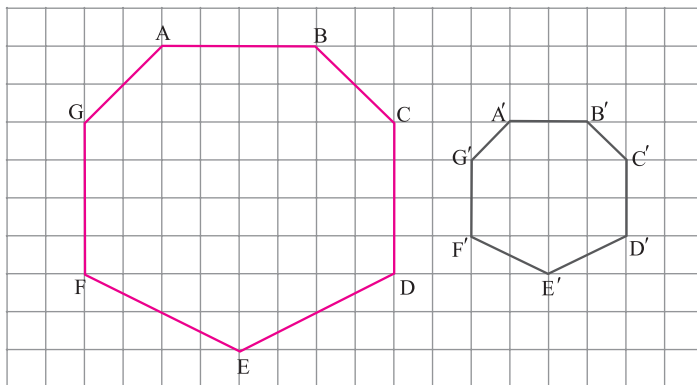
به عدد ۲ نسبت تشابه می‌گوییم.

۲. آیا دو لوزی زیر متشابه‌اند؟

پاسخ: در شکل زیر ضلع‌های متناظر با هم متناسب‌اند، اما زاویه‌های متناظر متساوی نیستند، پس این دو لوزی متشابه نمی‌باشند.



۳. در شکل‌های زیر، همه زاویه‌ها و ضلع‌ها را اندازه بگیرید.



الف. آیا تساوی بین زاویه‌های متناظر برقرار است؟

ب. آیا تناسب بین ضلع‌های متناظر برقرار است؟

پ. آیا عبارت $ABCDEF \sim A'B'C'D'E'F'G'$ درست است؟

پاسخ: الف. بله $\hat{A} = \hat{A}' = 135^\circ$ $\hat{B} = \hat{B}' = 135^\circ$ و $\hat{C} = \hat{C}' = 135^\circ$ و $\hat{D} = \hat{D}' = 115^\circ$

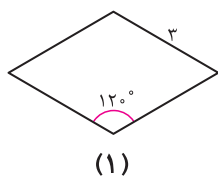
و $\hat{E} = \hat{E}' = 130^\circ$ و $\hat{F} = \hat{F}' = 115^\circ$ و $G = G' = 135^\circ$

ب. بله $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EF}{E'F'} = \frac{FG}{F'G'} = \frac{GA}{G'A'}$

$\rightarrow \frac{20}{10} = \frac{14}{7} = \frac{20}{10} = \frac{22}{11} = \frac{22}{11} = \frac{20}{10} = \frac{14}{7} = 2$ (واحدها برحسب میلی‌متر)

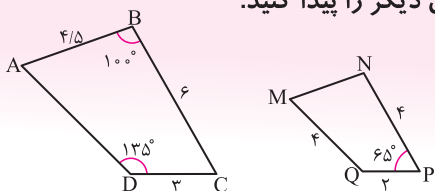
پ. بله

۴. از بین لوزی‌های زیر، کدام‌ها با هم متشابه‌اند؟



پاسخ: (۱) و (۳). چون زاویه‌های آن‌ها 60° و 120° است، اما زاویه‌های لوزی ۲، 80° و 100° است.

۵. چهارضلعی‌های زیر با هم متشابه‌اند. اندازه زاویه‌ها و ضلع‌های دیگر را پیدا کنید.



پاسخ:

$$\hat{B} = \hat{N} = 100^\circ$$

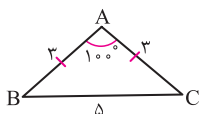
$$\hat{C} = \hat{P} = 65^\circ$$

$$\hat{D} = \hat{Q} = 135^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{M} = 360 - (135 + 100 + 65) = 60^\circ$$

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DA}{QM} \rightarrow \frac{4/5}{MN} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = \frac{DA}{4} = 1/5 \text{ نسبت تشابه}$$

$$MN = \frac{4/5}{1/5} = 4 \times 1/5 = 6$$



۶. الف. آیا دو مثلث متساوی‌الساقین در هر صورت با هم متشابه‌اند؟ چرا؟

ب. یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که با مثلث ABC متشابه باشد

و قاعده آن ۱/۵ برابر BC باشد. زاویه‌های مجاور ساق‌ها در این مثلث

چند درجه است؟

پاسخ: خیر، زیرا بین اندازه اضلاع همیشه تناسب برقرار نیست و زوایا همواره مساوی نیستند.

$$AB = 3 \rightarrow A'B' = 3 \times 1/5 = 4/5$$

$$AC = 3 \rightarrow A'C' = 3 \times 1/5 = 4/5$$

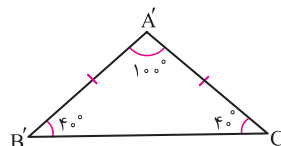
$$BC = 5 \rightarrow B'C' = 5 \times 1/5 = 1$$

$$\hat{A} = 100^\circ \text{ و } \hat{B} = \hat{C}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

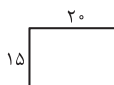
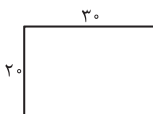
$$\hat{B} = \hat{C} \rightarrow 80^\circ \div 2 = 40^\circ$$

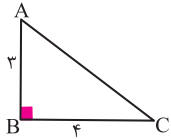


تمرینات



۱. یک عکس ۳ × ۴ سانتی‌متر مربع را روی کدام اندازه کاغذ می‌توان بزرگ کرد، بدون این که نسبت آن به هم بخورد؟ چرا؟





۲. اضلاع زاویه‌های قائمه را در مثلثی به دست آورید که با $\triangle ABC$ متشابه و وتر آن $12/5$ سانتی‌متر باشد.

۳. در صفحه مختصات، نقاط زیر را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و } C = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} \text{ و } B' = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ و } C' = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

طول ضلع‌های دو مثلث را بنویسید و تشابه آن‌ها را بررسی کنید، در صورت متشابه بودن، نسبت تشابه را پیدا کنید.

۴. کدام یک از شکل‌های زیر را می‌توانیم در جای خالی عبارت زیر قرار دهیم تا عبارت درستی حاصل شود:
همه ها با هم متشابه هستند.

متوازی‌الاضلاع	مستطیل	مربع	لوزی
مثلث قائم‌الزاویه	مثلث متساوی‌الساقین	مثلث متساوی‌الاضلاع	دایره
پنج ضلعی منتظم	شش ضلعی منتظم	n ضلعی منتظم	مثلث

پاسخ تمرینات



۱

روی کاغذ ۱۵ در ۲۰ می‌توان کپی کرد:

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$$

$$\frac{3}{4} \neq \frac{20}{30}$$

۲

$$3^2 + 4^2 = x^2$$

$$9 + 16 = x^2$$

$$25 = x^2$$

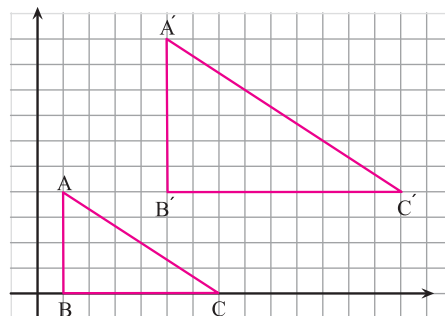
$$x = \sqrt{25} = 5 \text{ اندازه وتر}$$

$$\frac{5}{12/5} = \frac{4}{x} = \frac{3}{y}$$

$$x = \frac{4 \times 12/5}{5} = 10$$

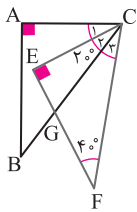
$$y = \frac{3 \times 12/5}{5} = 7/5$$

۳



۴

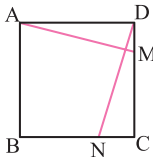
مربع، دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع، ۵ و ۶ ضلعی منتظم و n ضلعی منتظم را می‌توان در جای خالی قرار داد.



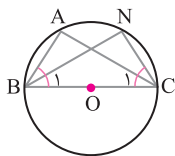
۱. مثلث‌های قائم‌الزاویه ABC و FEC همنهشت‌اند. اندازه زاویه FGC چند درجه است؟

۲. ثابت کنید در هر مستطیل، قطر‌ها با یک‌دیگر برابرند.

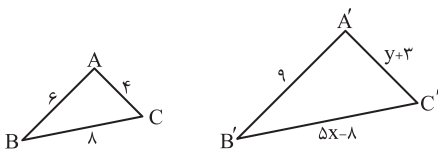
۳. چهارضلعی $ABCD$ یک مربع است. اگر بدانیم $BN = CM$ ثابت کنید $AM = DN$.



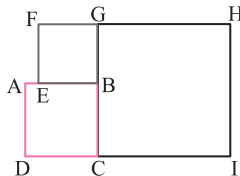
۴. در شکل مقابل $\widehat{AB} = \widehat{NC}$. چرا دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle BNC$ همنهشت‌اند؟ تساوی بین اجزای متناظر را بنویسید.



۵. دو مثلث زیر با هم متشابه‌اند. مقدار x و y را پیدا کنید.



۶. نسبت مساحت مربع $ABCD$ به مساحت مربع $EFGB$ برابر $\frac{25}{16}$ است. نسبت مساحت مربع $CGHI$ به مساحت $EFGB$ چقدر است؟



۷. هر 1 cm روی نقشه‌ای برابر 10 km روی زمین است. فاصله دو نقطه روی نقشه $6/5$ سانتی‌متر است. فاصله این دو نقطه در اندازه واقعی چقدر است؟



۲

فرض	مستطیل $ABCD$
حکم	$AC = BD$

اثبات: ابتدا یک مستطیل رسم می‌کنیم سپس قطرهای AC و BD را می‌کشیم. همنهشتی دو مثلث ABD و ADC را ثابت کنید.

۱

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} = \widehat{E} = 90^\circ \\ \widehat{B} = \widehat{F} = 40^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ECF} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 50^\circ \\ \widehat{C}_3 + \widehat{C}_2 = 50^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_3 = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

$$\widehat{FGC} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$$

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{y+3} = \frac{8}{5x-8}$$

$$\frac{6}{9} = \frac{4}{y+3}$$

$$6(y+3) = 36$$

$$6y + 18 = 36$$

$$6y = 36 - 18$$

$$6y = 18$$

$$y = \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{5x-8}$$

$$6(5x-8) = 72$$

$$30x - 48 = 72$$

$$30x = 72 + 48$$

$$30x = 120$$

$$x = \frac{120}{30} = 4$$

۶

نکته: نسبت اضلاع تناسب در دو شکل متشابه برابر جذر نسبت مساحت آنها است.

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = \frac{25}{16} \xrightarrow{\text{اندازه ضلع هر یک از مربعها}} \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$CGHI \text{ ضلع } = 5 + 4 = 9 \xrightarrow{\text{مساحت}} 9 \times 9 = 81$$

$$\frac{S_{CGHI}}{S_{EFGH}} = \frac{81}{16}$$

۷

$$6 / 5 \times 10 = 65 \text{ km}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{طولهای مستطیل } AB = DC \\ \widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } AD = AD \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضض)}} \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} AC = BD$$

۳

فرض	ABCD مربع BN = CM
-----	-------------------

حکم	AM = DN
-----	---------

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } BN = CM \rightarrow NC = MD \\ \widehat{C} = \widehat{D} = 90^\circ \\ \text{اضلاع مربع } DC = DA \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ضض)}} \triangle ADM \cong \triangle DCN$$

$$\rightarrow AM = DN$$

۴

فرض	$\widehat{AB} = \widehat{NC}$
-----	-------------------------------

حکم	$\triangle ABC \cong \triangle BNC$
-----	-------------------------------------

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{AB} = \widehat{NC} \rightarrow \text{فرض } AB = NC \\ \widehat{A} = \widehat{N} = 90^\circ \text{ هر دو روبه‌رو به کمان } BC \text{ که } 180^\circ \text{ است.} \\ BC = BC \text{ ضلع مشترک} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle ABC \cong \triangle NCB$$

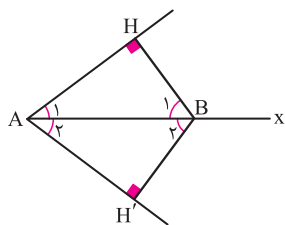
$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{C} \\ \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \\ AC = NB \end{array} \right.$$

۵

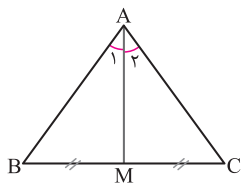
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

تمرین‌های دوره‌ای فصل سوم

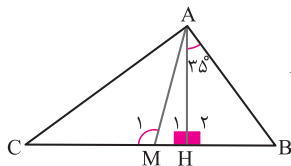
۱. رضا و حسین بازی فوتبال دو تیم A و B را تماشا می‌کردند، آن‌ها هر دو عقیده داشتند که تیم A می‌بازد و برای خود استدلال‌های متفاوتی داشتند. به نظر شما استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟
رضا: چون بازی فوتبال در کشور تیم B انجام می‌شود، پس تیم A می‌بازد.
حسین: چون یکی از بازیکن‌های تیم A اخراج شد، پس این تیم می‌بازد.
۲. قرار است هفته آینده مسابقات علمی برگزار شود. مریم و مینا اعتقاد دارند هر دو در این آزمون موفق می‌شوند و برای ادعای خود استدلال زیر را بیان می‌کنند. کدام استدلال قابل اعتمادتر است؟
مینا: من روزانه ۶ ساعت مطالعه درسی داشته‌ام، پس در مسابقات علمی موفق می‌شوم.
مریم: چون در آزمون آزمایشی سال گذشته موفق بوده‌ام، در مسابقات علمی امسال نیز موفق خواهم بود.
۳. دانش‌آموزی ارتفاع‌های یک مثلث با زوایای تند را رسم کرد و چنین استدلال کرد که «محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد». آیا استدلال او درست است؟ چرا؟
۴. آیا استدلال نوشته شده در مسئله زیر درست است؟ چرا؟



مسئله: در شکل مقابل Ax نیمساز \hat{A} می‌باشد. نشان دهید $AH = AH'$.
استدلال: چون Ax نیمساز \hat{A} است، پس $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و ضلع AB در دو مثلث AHB و $AH'B$ مشترک است، پس دو مثلث به حالت (ز ض ز) هم‌نهشت‌اند. بنابراین اجزای متناظر آن‌ها نیز با هم برابر است. در نتیجه $AH = AH'$.



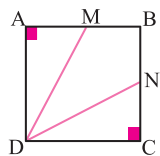
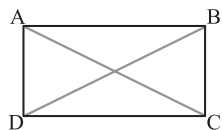
۵. در مسئله زیر آیا نتیجه به دست آمده را می‌توان به مثلث‌های دیگر تعمیم داد؟ چرا؟
 «در مثلث ABC که متساوی‌الاضلاع می‌باشد، میانه وارد بر ضلع BC را رسم کرده‌ایم نشان دهید این میانه نیمساز زاویه رأس نیز می‌باشد.»



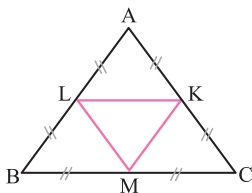
۶. برای مسئله‌های زیر فقط فرض و حکم را بنویسید.
 الف. مثلث ABC در شکل مقابل در زاویه \hat{A} قائمه است. اگر ارتفاع AH و AM میانه ضلع مقابل باشد، ثابت کنید $\hat{M}_1 = 110^\circ$ است.

ب. نشان دهید در هر دو مثلث محل برخورد عمودمنصف‌ها از سه رأس به یک فاصله است؟

۷. ثابت کنید در مستطیل زیر، قطر‌ها با هم مساوی هستند. آیا این حکم قابل تعمیم به هر مستطیل دیگر می‌باشد؟

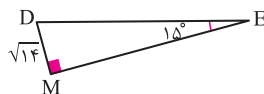
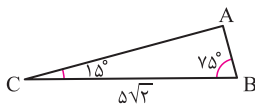


۸. در مربع $ABCD$ نقاط M و N وسط اضلاع مربع هستند. ثابت کنید $DM = DN$.



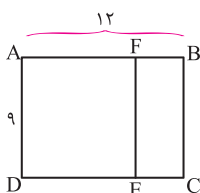
۹. در شکل مقابل، اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد و نقاط M و L و K وسط اضلاع ABC باشند، ثابت کنید $\triangle KLM$ متساوی‌الاضلاع است.

۱۰. مثلث‌های زیر هم‌نهشت‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌ها و زاویه‌های مجهول را مشخص کنید.



$\widehat{D} =$ $\widehat{A} =$ $AC =$

۱۱. دو مثلث متشابه‌اند و نسبت محیط اولی به دومی مثل ۲ به ۳ است. اگر اضلاع مثلث اولی ۶ و ۹ و ۱۲ باشد، اندازهٔ اضلاع مثلث دوم را به دست آورید. (می‌دانیم نسبت محیط دو مثلث با نسبت تشابه آن‌ها برابر است.)

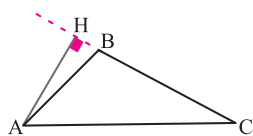


۱۲. دو مستطیل $ABCD$ و $FBCE$ متشابه‌اند. طول FB را پیدا کنید.

۱۳. نسبت تشابه دو مربع $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. اگر مساحت مربع بزرگ‌تر ۹۶ باشد، قطر مربع کوچک‌تر را به دست آورید.

۱۴. آیا هر دو لوزی دلخواه متشابه‌اند؟ چرا؟

پاسخ تمرین‌های دوره‌ای فصل سوم



(AH ارتفاع وارد بر BC)

۱. استدلال حسین قابل اعتمادتر است. چون یک بازیکن نسبت به تیم B کم‌تر دارد و این ممکن است در برد و باخت تیم A مؤثر باشد.

۲. موفقیت در آزمون آزمایشی سال گذشته دلیل قابل اعتمادتری برای موفقیت در مسابقات علمی نیست. لذا استدلال مینا با مطالعهٔ روزانه ۶ ساعت برای موفقیت قابل اعتمادتر است.

۳. خیر، این استدلال وقتی درست است که در مثلث با زاویه‌های باز یا زاویه قائمه نیز معتبر باشد.

۴. خیر، زیرا Ax نیمساز \widehat{A} است و نمی‌توان از آن $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ را نتیجه گرفت. از یک نقطه دلخواه روی نیمساز مانند B بر اضلاع زاویه عمود می‌کنیم. دو مثلث به حالت وتر و یک زاویه تند هم‌نهشت خواهند بود و $AH = AH'$ است.

۵. خیر، زیرا در اثبات درستی این حکم از هم‌نهشتی دو مثلث AMB و AMC استفاده می‌کنیم که با توجه به ویژگی‌های مثلث متساوی‌الاضلاع نتیجه می‌شود، لذا چون هر مثلث دیگری این ویژگی‌ها را ندارد در نتیجه این حکم قابل تعمیم نیست.

استدلال:

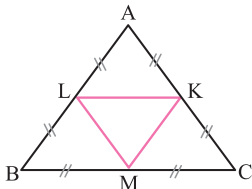
$$\begin{cases} \Delta DNC, \Delta DMA \\ \text{طبق فرض } AM = CN \\ \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \\ \text{ضلع مربع } AD = DC \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{ضرض}} \Delta DNC \cong \Delta DMA$$

از همنهستی مثلث‌ها نتیجه می‌شود $DM = DN$.

فرض	$AK = KC = MC = BM = BL = AL$, $AB = BC = AC$, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$
حکم	مثلث KLM متساوی‌الاضلاع است.

استدلال: با بررسی همنهستی مثلث‌های ΔALK و ΔBLM و ΔKMC به صورت دو به دو، به حالت (ضرض) نتیجه می‌شود $LK = KM = LM$ پس ΔLMK متساوی‌الاضلاع می‌باشد.



۱۰

از همنهستی مثلث‌ها نتیجه می‌شود:

$$\hat{A} = \hat{M} = 90^\circ \quad \hat{D} = \hat{B} = 75^\circ$$

از رابطه فیثاغورس در ΔABC داریم:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$(\sqrt{14})^2 + AC^2 = (5\sqrt{2})^2$$

$$AC^2 = (25 \times 2) - 14 = 36$$

$$AC = \sqrt{36} = 6$$

۱۱

نسبت محیط در دو شکل متشابه با نسبت تشابه برابر است.

$$\frac{6}{x} = \frac{9}{y} = \frac{12}{z} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{3} \rightarrow x = 9$$

$$\frac{9}{y} = \frac{2}{3} \rightarrow y = 13.5$$

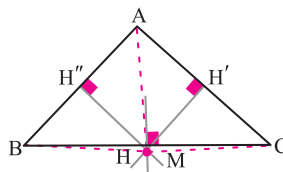
$$\frac{12}{z} = \frac{2}{3} \rightarrow z = 18$$

الف.

فرض	$\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$, $BM = MC$
حکم	$\hat{M}_1 = 110^\circ$

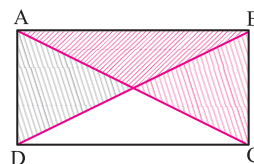
ب.

فرض	$MH' \perp AC$, $AH' = H'C$ $MH'' \perp AB$, $AH'' = H''B$ $MH \perp BC$, $BH = HC$
حکم	$AM = BM = CM$



۷

فرض	ABCD مستطیل است.
حکم	$AC = BD$



استدلال:

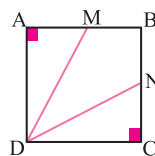
$$\begin{cases} \Delta ABD, \Delta ABC \\ AB = AB \\ AD = BC \text{ عرض مستطیل} \\ \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \end{cases}$$

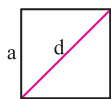
$$\xrightarrow{\text{ضرض}} \Delta ABD \cong \Delta ABC$$

از همنهستی مثلث‌ها نتیجه می‌گیریم $AC = BC$ بله، این حکم قابل تعمیم به هر مستطیل دیگر می‌باشد.

۸

فرض	AB وسط M , BC وسط N , $AM = CN$ مربع ABCD
حکم	$DM = DN$





$$S_1 = a^2 = 32 \rightarrow a = \sqrt{32}$$

$$d^2 = (\sqrt{32})^2 + (\sqrt{32})^2$$

$$d^2 = 64$$

$$d = 8$$

۱۴

خیر، ممکن است زوایای متناظر در دو لوزی با هم برابر نباشند.

نسبت عرض‌ها = نسبت طول‌ها

$$\frac{AB}{FE} = \frac{AD}{FB} \rightarrow \frac{12}{9} = \frac{9}{FB} \rightarrow FB = \frac{9 \times 9}{12} = \frac{81}{4} = 20.25$$

۱۳

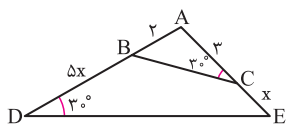
نسبت مساحت دو شکل با مجذور نسبت تشابه برابر است.

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\frac{S_1}{96} = \frac{3}{9} \rightarrow \frac{S_1}{96} = \frac{1}{3} \rightarrow S_1 = \frac{96}{3} = 32$$

سؤال‌های چهارگزینه‌ای فصل سوم

۱. در شکل مقابل دو مثلث ABC و ADE با هم متشابه‌اند، مقدار x با توجه به اندازه‌های داده شده برابر است با:

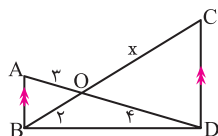


- (۱) $\frac{7}{6}$
 (۲) $\frac{5}{7}$
 (۳) ۲
 (۴) ۱

۲. اگر نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{16}{25}$ باشد، نسبت تشابه آن‌ها چند است؟

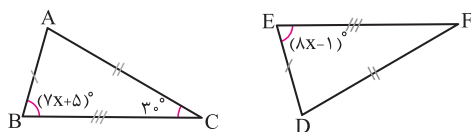
- (۱) $\frac{16}{25}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{256}{625}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۳. در شکل مقابل $\triangle AOB$ و $\triangle DOC$ متشابه‌اند. x چقدر است؟



- (۱) ۵ (۲) $\frac{11}{2}$ (۳) $\frac{8}{3}$ (۴) ۶

۴. دو مثلث مقابل همنهشت هستند. \hat{D} چند درجه است؟



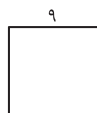
- (۱) 103°
 (۲) 105°
 (۳) 85°
 (۴) 95°

۵. دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{3}{5}$ است. اگر اندازه وتر در مثلث بزرگ‌تر

$5\sqrt{2}$ باشد، محیط مثلث کوچک‌تر کدام است؟

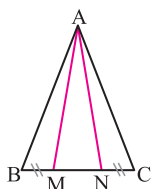
- (۱) $3\sqrt{2}$ (۲) $6 + \sqrt{2}$ (۳) $3 + \sqrt{2}$ (۴) $6 + 3\sqrt{2}$

۶. مربع زیر را با دستگاه کپی کوچک کرده‌ایم. عدد روی دستگاه ۳۰٪ را نشان می‌دهد. ابعاد تصویر مربع



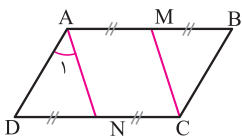
- خروجی کدام است؟ (۱) $\frac{6}{3}$ (۲) $\frac{0}{27}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{56}{7}$

۷. در شکل مقابل $\triangle ABC$ متساوی‌الساقین است و M و N روی قاعده BC طوری قرار دارند که $BM = NC$.



در مورد $\triangle AMN$ کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\triangle AMN$ متساوی‌الاضلاع است.
 (۲) $\triangle AMN$ یا $\triangle ABM$ متشابه است.
 (۳) $\triangle AMN$ یا $\triangle ANC$ همنهشت است.
 (۴) $\triangle AMN$ متساوی‌الساقین است.



$\hat{A}_1 = \hat{B}$ (۴)

$AB \parallel DC$ (۳)

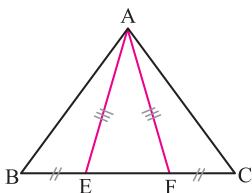
$\hat{B} = \hat{D}$ (۲)

$DN = MB$ (۱)

۸. در مسئله زیر کدام گزینه جزء فرض مسئله نیست؟

«چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع و M و N وسط اضلاع می باشند. ثابت کنید دو مثلث AND و BMC همنهشت اند.»

۹. در شکل زیر دقیقاً چند جفت مثلث همنهشت وجود دارد؟



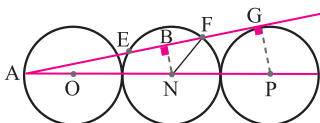
(۱) ۲ جفت

(۲) یک جفت

(۳) سه جفت

(۴) وجود ندارد.

۱۰. در شکل مقابل دو مثلث $\triangle ANB$ و $\triangle APG$ متشابه اند و اندازه شعاع هر دایره برابر ۱۵ است. طول پاره خط



EF چقدر است؟

(۲) ۲۴

(۱) ۱۲

(۴) ۹

(۳) ۱۴۴

پاسخ چهارگزینه‌ای (فصل سوم)



۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴	۱	۲	۳	۴
۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۳	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۵	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۷	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۹	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۴	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۶	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۸	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱۰	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>