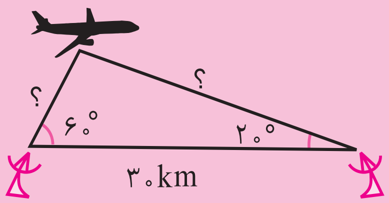
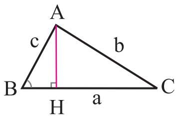
فصل ۳: روابط طولی در مثلث

ایستگاه‌های راداری وظیفهٔ کنترل اشیاء در حال حرکت در آسمان را بر عهده دارند. دو ایستگاه راداری در فاصلهٔ ۳۰ کیلومتری از یکدیگر قرار دارند. ایستگاه اوّل، هواپیمایی را که در حال عبور از ارتفاع هزار متری سطح زمین است، با زاویهٔ ۲۰° رصد می‌کند. ایستگاه دوم نیز هواپیمای در حال عبور را با زاویهٔ ۶۰° رصد می‌کند. به نظر شما هریک از ایستگاه‌های راداری فاصلهٔ هواپیما را از خودشان برحسب کیلومتر، چه‌قدر گزارش می‌دهند؟



درس اوّل: قضیهٔ سینوس‌ها

مثلث ABC را در نظر بگیرید:



$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}AH\times BC$$

از طرفی: $\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}\Rightarrow AH=AB\times\sin\hat{B}$

حال: $S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}(AB\sin\hat{B})\times BC\Rightarrow \boxed{S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}AB\times BC\times\sin\hat{B}}$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که:

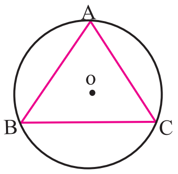
$$S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times\sin\hat{A}\quad,\quad S_{\underset{ABC}{\Delta}}=\frac{۱}{۲}CA\times CB\times\sin\hat{C}$$

از ۳ رابطهٔ بالا به راحتی داریم:

$$\left.\begin{array}{l}S=\frac{۱}{۲}c\times a\times\sin\hat{B}\\ S=\frac{۱}{۲}c\times b\times\sin\hat{A}\\ S=\frac{۱}{۲}\times b\times a\times\sin\hat{C}\end{array}\right]\begin{array}{l}\Rightarrow\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}\\ \Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=\frac{a}{\sin\hat{A}}\end{array}\Bigg\}\Rightarrow\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}}$$

به این رابطه، قضیهٔ سینوس‌ها گفته می‌شود و بسیار کاربردی است.

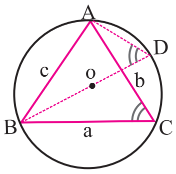
در ادامه با استفاده از دایرهٔ محیطی، این قضیهٔ مهم را اثبات می‌کنیم. توجه کنید:



مثلث دلخواه ABC $(\hat{A}<۹۰^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن را به مرکز O و شعاع R، در نظر می‌گیریم.

۱. قطر BD را رسم کرده و از نقطهٔ D به A وصل می‌کنیم.

۲.



$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ (\text{زاویهٔ محاطی})\\ \hat{C}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\ (\text{زاویهٔ محاطی})\end{array}\right\}\Rightarrow\hat{C}=\hat{D}$$

از طرفی زاویهٔ $B\hat{A}D$ در مثلث ABC روبه‌رو به قطر می‌باشد، بنابراین ۹۰° خواهد بود، پس با مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{ABD}$ روبه‌رو هستیم.

۳.

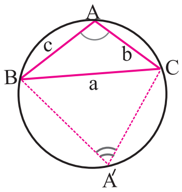
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABD}:\sin\hat{D}=\frac{AB}{BD}=\frac{c}{۲R}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{D}}=۲R\\ \text{از طرفی}:\hat{C}=\hat{D}\Rightarrow\sin\hat{C}=\sin\hat{D}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲R\quad,\quad\frac{b}{\sin\hat{B}}=۲R$$

بنابراین در مثلث ABC با اضلاع $BC=a$ و $AC=b$ و $AB=c$ داریم: $\boxed{\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R\ (\text{شعاع دایرهٔ محیطی مثلث } R)}$

سؤال: اگر زاویهٔ $\hat{A}$ منفرجه باشد، قضیهٔ سینوس‌ها را ثابت کنید.



مثلث ABC $(\hat{A}>۹۰^\circ)$ را در نظر بگیرید و از نقطهٔ دلخواه A' روی کمان BC به نقاط B و C وصل کنید.

۱. چهارضلعی $ABA'C$ محاطی است، پس: $\hat{A}+\hat{A}'=۱۸۰^\circ$.

۲.

$$\hat{A}+\hat{A}'=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{A}=۱۸۰^\circ-\hat{A}'\Rightarrow\sin\hat{A}=\sin(۱۸۰^\circ-\hat{A}')\Rightarrow\sin\hat{A}=\sin\hat{A}'$$

۳. طبق قسمت قبل در مثلث $A'BC$ ($\hat{A}'$ حاده است) داریم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}'}=۲R\xrightarrow{\sin\hat{A}=\sin\hat{A}'}\frac{a}{\sin\hat{A}}=۲R$$

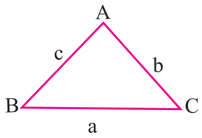
۴. پس به راحتی خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=۲R$$

درس دوم: قضیهٔ کسینوس‌ها

قضیهٔ مهم و کاربردی که به وسیلهٔ قضیهٔ فیثاغورس ثابت می‌شود، قضیهٔ کسینوس‌ها بوده و به صورت زیر بیان می‌شود:

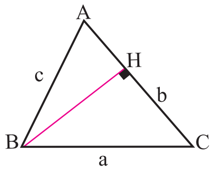
در هر مثلث دلخواه، مربع اندازهٔ هر ضلع برابر است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ آن دو ضلع در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها. به زبان ریاضی یعنی:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

در ادامه به اثبات این قضیهٔ بسیار کاربردی می‌پردازیم.

در مثلث $ABC\ (\hat{A} < 90^\circ)$، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ABH و BCH داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABH}: AB^2 = BH^2 + AH^2 \Rightarrow c^2 = BH^2 + AH^2 \\ \overset{\Delta}{BHC}: BC^2 = BH^2 + HC^2 \Rightarrow a^2 = BH^2 + HC^2\end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} a^2 - c^2 = HC^2 - AH^2$$

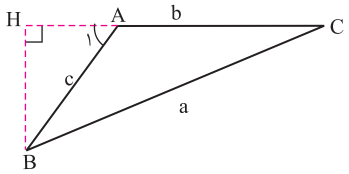
$$\Rightarrow a^2 - c^2 = (b - AH)^2 - AH^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2 - 2b.AH + \cancel{AH^2} - \cancel{AH^2}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2b.AH \xrightarrow{(1)} \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\hat{A}}$$

$$\overset{\Delta}{ABH} \text{ از طرفی در } : \cos\hat{A} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c.\cos\hat{A} \quad (1)$$

سؤال: قضیهٔ بالا را در حالتی که $\hat{A} > 90^\circ$ باشد، ثابت کنید.

ارتفاع BH را رسم کرده، داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: \cos\hat{A}_1 = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{c} \Rightarrow AH = c\cos\hat{A}_1$$

$$\overset{\Delta}{ABH}: \sin\hat{A}_1 = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{c} \Rightarrow BH = c\sin\hat{A}_1$$

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \cos\hat{A}_1 = \cos(180^\circ - \hat{A}) \Rightarrow \cos\hat{A}_1 = -\cos\hat{A}$$

$$CH = AC + AH \Rightarrow CH = b + AH$$

$$\overset{\Delta}{BHC}: BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = (c\sin\hat{A}_1)^2 + (b + AH)^2$$

$$\Rightarrow a^2 = (c\sin\hat{A}_1)^2 + (b + c\cos\hat{A}_1)^2 = \underbrace{c^2\sin^2\hat{A}_1} + b^2 + 2b.c\cos\hat{A}_1 + \underbrace{c^2\cos^2\hat{A}_1}$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2\underbrace{(\sin^2\hat{A}_1 + \cos^2\hat{A}_1)}_{1} + b^2 + 2b.c\cos\hat{A}_1$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 + b^2 + 2b.c \times (-\cos\hat{A}) \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2b.c\cos A}$$

توجه کنید که اگر $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، در این صورت $\cos\hat{A} = 0$ خواهد بود و از قضیهٔ کسینوس‌ها به راحتی به رابطهٔ فیثاغورس می‌رسیم.

مثال:

۱. اگر در مثلث ABC، طول اضلاع a، b و c باشند، ثابت کنید:

الف. اگر $\hat{A} > 90^\circ$، آن‌گاه $a^2 > b^2 + c^2$ و بالعکس.

ب. اگر $\hat{A} < 90^\circ$، آن‌گاه $a^2 < b^2 + c^2$ و بالعکس.

پاسخ: الف.

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

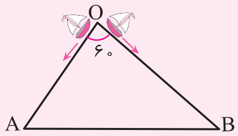
$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} > b^2 + c^2 \Leftrightarrow \cos\hat{A} < 0 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

ب.

$$\hat{A} < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \cos\hat{A} > 0 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$$

۲. دو قایق از یک نقطه در دریاچه‌ای با سرعت‌های $۲۰\ {}^{km}/_{h}$ و $۳۰\ {}^{km}/_{h}$ و تحت زاویهٔ ۶۰ درجه از هم دور می‌شوند. ۱ ساعت بعد دو قایق در چه فاصله‌ای از یکدیگر قرار دارند؟



پاسخ: همان‌طور که در شکل می‌بینیم، طول ضلع AB مورد سؤال است، بنابراین:

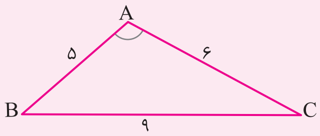
$$\underset{\text{مسافت طی شده}}{\underset{\downarrow}{OA}} = \underset{\text{سرعت}}{\underset{\downarrow}{۲۰}} \times \underset{\text{زمان}}{\underset{\downarrow}{۱}} = ۲۰km \ , \ OB = ۳۰ \times ۱ = ۳۰km$$

طبق قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$AB^{۲} = OA^{۲} + OB^{۲} - ۲OA.OB.\cos ۶۰^{\circ}$$

$$AB^{۲} = (۲۰)^{۲} + (۳۰)^{۲} - ۲ \times ۲۰ \times ۳۰ \times \frac{۱}{۲} = ۴۰۰ + ۹۰۰ - ۶۰۰ = ۷۰۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۷۰۰} = ۱۰\sqrt{۷}\ km$$

۳. مساحت مثلثی به اضلاع ۵، ۶ و ۹ را به‌دست آورید.



پاسخ: بنابراین زاویه منفرجه است و شکل به این صورت است: $۹^{۲} > ۶^{۲} + ۵^{۲}$

$$S = \frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

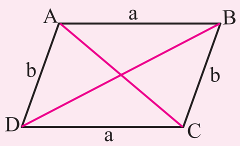
طبق قضیهٔ کسینوس‌ها داریم:

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB.AC.\cos \hat{A} \Rightarrow ۸۱ = ۲۵ + ۳۶ - ۲ \times ۵ \times ۶ \times \cos \hat{A} \Rightarrow ۶۰\cos \hat{A} = -۲۰ \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-۲۰}{۶۰} = \frac{-۱}{۳}$$

از طرفی: $\cos^{۲} \hat{A} + \sin^{۲} \hat{A} = ۱ \Rightarrow \sin \hat{A} = \sqrt{۱ - \cos^{۲} \hat{A}} = \sqrt{۱ - \frac{۱}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

$$S = \frac{۱}{\cancel{۲}} \times ۵ \times \overset{۲}{\cancel{۶}} \times \frac{\cancel{۲}\sqrt{۲}}{\cancel{۳}} = ۱۰\sqrt{۲}$$

۴. ثابت کنید مجموع مربع‌های اضلاع متوازی‌الاضلاع با مجموع مربع‌های دو قطر آن برابر است.



پاسخ:

$$\overset{\Delta}{ABC}: AC^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos \hat{B} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{BCD}: BD^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos \hat{C} \quad (۲)$$

از طرفی: $\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^{\circ} \Rightarrow \hat{B} = ۱۸۰^{\circ} - \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{B} = -\cos \hat{C}$

$$(۱) + (۲) \Rightarrow AC^{۲} + BD^{۲} = a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos \hat{B} + a^{۲} + b^{۲} - ۲ab\cos \hat{C}$$

$$AC^{۲} + BD^{۲} = a^{۲} + b^{۲} + \cancel{۲ab\cos \hat{C}} + a^{۲} + b^{۲} - \cancel{۲ab\cos \hat{C}}$$

$$AC^{۲} + BD^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} + DC^{۲} + AD^{۲}$$

تمرین‌های امتحانی

۱. طول اضلاع مثلثی ۳ عدد فرد متوالی بوده و این مثلث یک زاویهٔ ۱۲۰° دارد. محیط این مثلث را به‌دست آورید.

۲. اگر بین اضلاع مثلثی رابطهٔ $b^{۳} - c^{۳} = a^{۲}(b - c)$ برقرار باشد، یکی از زاویه‌های مثلث را به‌دست آورید.

۳. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC\ (\hat{A} = ۹۰^{\circ})$ با ارتفاع $AH = h_a$، رابطهٔ روبه‌رو برقرار است. $\frac{۱}{{h_a}^{۲}} = \frac{۱}{b^{۲}} + \frac{۱}{c^{۲}}$

۴. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۰^{\circ}$ و طول ارتفاع‌ها $h_b = ۳$ و $h_c = ۴$ می‌باشد. طول ارتفاع رسم‌شده از رأس A را به‌دست آورید.

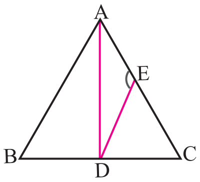
۵. در مثلث ABC، اگر $(a - b + c)(a - b - c) = -ab$، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ را به‌دست آورید.

۶. در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد، نقطهٔ D به فاصلهٔ ۷ واحد از رأس A قرار دارد.

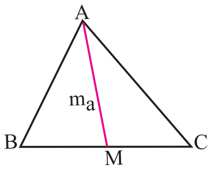
الف. طول DC و DB چه‌قدر است؟

ب. نقطهٔ E که به فاصلهٔ ۵ واحد از C قرار دارد، از D به چه فاصله‌ای است؟

پ. اندازهٔ زاویهٔ AED چند درجه است؟



۷. در مثلث ABC، اگر m_a میانهٔ نظیر رأس A باشد، ثابت کنید:



$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a{}^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

۸. در مثلث ABC به طول اضلاع a، b و c و طول میانه‌های m_a، m_b و m_c، ثابت کنید:

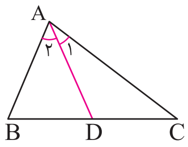
$$۳(a^۲ + b^۲ + c^۲) = ۴(m_a{}^۲ + m_b{}^۲ + m_c{}^۲)$$

۹. مساحت مثلث ABC برابر ۱۶ واحد مربع است. اگر $AC = ۸$ و $AB = ۵$، طول ضلع BC را به‌دست آورید.

درس سوم: قضیهٔ نیم‌سازهای زوایای داخلی و محاسبهٔ طول نیم‌سازها

قضیه نیم‌سازهای زوایای داخلی مثلث

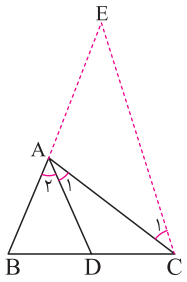
در هر مثلث، نیم‌ساز هر زاویهٔ داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت اندازه ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

اثبات:

از رأس C، خطی به موازات نیم‌ساز AD رسم کرده تا امتداد BA را در نقطهٔ E قطع کند.



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r} AD \parallel CE \\ (\text{مورب})AC \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \\ \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{C}_۱ \quad (۱) \quad \text{و} \quad \left.\begin{array}{r} AD \parallel CE \\ (\text{مورب})BE \end{array}\right\} \rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{E} \quad (۲)$$

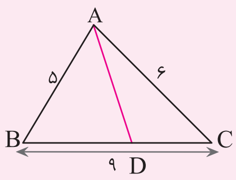
$$(۱) \text{ و } (۲) \rightarrow \hat{E} = \hat{C}_۱ \xrightarrow{\text{مثلث } \overset{\Delta}{AEC} \text{ متساوی الساقین}} AE = AC \quad (۳)$$

$$\text{طبق فرض: } AD \parallel CE \rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{(۳)} \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

مثال:

۱. سه ضلع مثلثی ۹ و ۵ و ۶ سانتی‌متراند. اندازهٔ پاره‌خط‌هایی را که نیم‌ساز درونی زاویه بزرگ‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، تعیین کنید.

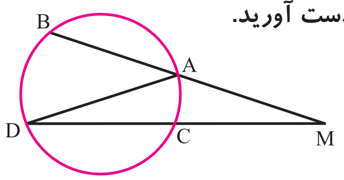
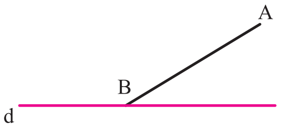
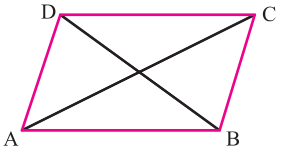
پاسخ: زاویهٔ بزرگ‌تر روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر قرار می‌گیرد و طبق قضیهٔ نیم‌ساز داریم:



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \rightarrow \frac{۵}{۶} = \frac{BD}{DC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{۵}{۵+۶} = \frac{BD}{BD+DC} \rightarrow \frac{۵}{۱۱} = \frac{BD}{۹} \rightarrow BD = \frac{۴۵}{۱۱}$$

$$DC = BC - BD = ۹ - \frac{۴۵}{۱۱} = \frac{۵۴}{۱۱}$$

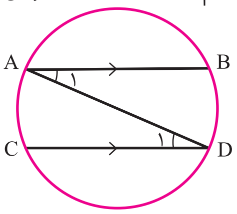
آزمون نوبت دوم (۱)

ردیف	سؤالات	بارم
۱	ثابت کنید در هر دایره کمان‌های محصور بین دو وتر موازی با هم برابرند.	۱/۵
۲	اگر $\widehat{M}=۳۰^\circ$ و مثلث $\overset{\Delta}{ADM}$ متساوی‌الساقین باشد، طول کمان BD را به‌دست آورید. 	۲
۳	نشان دهید مساحت مثلث برابر با جذر حاصل‌ضرب شعاع‌های دایره‌های محاطی است.	۲
۴	دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ سانتی‌متر مفروض‌اند. بیشترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره برابر ۱۸ می‌باشد. طول مماس مشترک داخلی چه‌قدر است؟	۲
۵	با توجه به شکل مقابل، اگر d محور بازتاب باشد، نشان دهید بازتاب طولپا است. 	۲
۶	قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف کرده‌اند. نشان دهید ABCD متوازی‌الاضلاع است. 	۲
۷	دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $B(۴,۲)$ مفروض‌اند. اگر N نقطه‌ای روی محور x و M نقطه‌ای روی محور y باشد، کم‌ترین مقدار $AM+MN+NB$ را به‌دست آورید.	۲/۵
۸	نقاط $A(۲,۰)$، $B(۲,۳)$، $C(۴,۳)$ و $D(۴,۰)$ مختصات رئوس یک مستطیل هستند. الف. مستطیل و تصویر مجانس آن را با در نظر گرفتن مبدأ مختصات به عنوان مرکز تجانس و ۳ به عنوان ضریب تجانس رسم کنید. ب. نوع این تجانس را مشخص کنید.	۲
۹	در مثلث ABC، نیمساز زاویهٔ $\widehat{A}$ ضلع مقابل را در D قطع کرده است و $DC=\frac{۳}{۲}BD$. اگر $AB=۴$ و $S_{\overset{\Delta}{ABC}}=۶$ باشند، آن‌گاه مقدار زاویهٔ A را به‌دست آورید.	۲
۱۰	الف. اضلاع مثلثی متناسب با اعداد ۱، ۲ و $\sqrt{۳}$ است. با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، نشان دهید این مثلث قائم‌الزاویه است. ب. محیط و مساحت مثلث ABC را که در آن $\widehat{B}=۶۰^\circ$ و $\widehat{C}=۳۰^\circ$ و اندازهٔ ضلع b برابر ۶ می‌باشد، به‌دست آورید.	۲
	جمع نمره	۲۰

پاسخ آزمون نوبت دوم (۱)

۱

فرض: $AB \parallel CD$ حکم: $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$

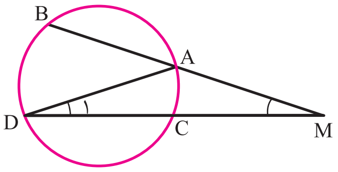


کافی‌است از نقطهٔ A به D وصل کنیم، داریم:

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ (\text{مورب})AD \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{D}_1 \xrightarrow{\text{زاویهٔ محاطی}} \frac{\overset{\frown}{BD}}{2}=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$$

۲



$$\overset{\triangle}{ADM}\ \text{متساوی‌الساقین} \Rightarrow \hat{M}=\hat{D}_1 \Rightarrow \hat{D}_1=30^\circ$$

$$(\text{محاطی})\ \hat{D}_1=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow 30^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=60^\circ$$

$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{2} \Rightarrow 30^\circ=\frac{\overset{\frown}{BD}-60^\circ}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=120^\circ$$

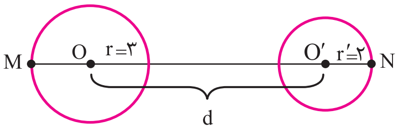
۳

$$r=\frac{S}{P}\ ,\quad r_a=\frac{S}{P-a}\ ,\quad r_b=\frac{S}{P-b}\ ,\quad r_c=\frac{S}{P-c}$$

$$r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c=S^4\times\frac{1}{P(P-a)(P-b)(P-c)}=S^4\times\frac{1}{S^2}=S^2$$

$$\Rightarrow S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$$

۴



$$\text{بیشترین فاصلهٔ بین نقاط دو دایره}=MN=d+r+r'$$

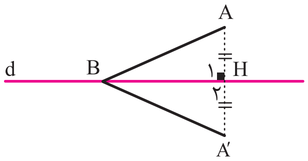
$$\Rightarrow 18=d+3+2 \Rightarrow d=13$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی}=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$$

$$=\sqrt{(13)^2-(2+3)^2}=\sqrt{169-25}=12$$

۵

تصویر نقطهٔ A نسبت به خط d، نقطهٔ A' و تصویر B همان نقطهٔ B خواهد بود.



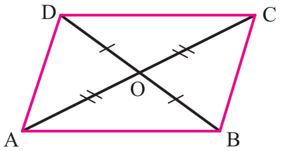
می‌دانیم BH نقش عمودمنصف AA' را دارد، پس مثلث BAA' متساوی‌الساقین است، بنابراین $AB=A'B$.

البته می‌توان گفت:

$$\begin{cases} AH=A'H \\ (\text{مشترک})BH \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABH} \underset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\triangle}{A'BH} \Rightarrow AB=A'B$$

۶

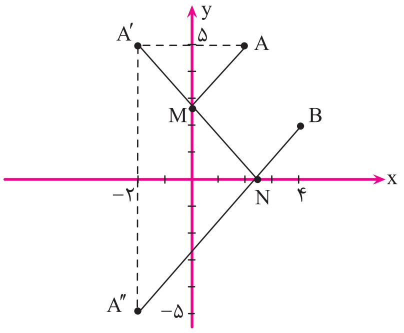
فرض می‌کنیم محل برخورد قطرهای چهارضلعی، مرکز دوران باشد و زاویهٔ دوران را 180° در نظر می‌گیریم، داریم:



$$\begin{cases} A\hat{O}C=180^\circ \Rightarrow T(A)=C \\ D\hat{O}B=180^\circ \Rightarrow T(B)=D \end{cases} \Rightarrow T(AB)=CD$$

بنابراین رأس C دوران‌یافتهٔ A و رأس D دوران‌یافتهٔ B است و از آن‌جایی‌که دوران طولپا است، پس $AB=CD$. به روش مشابه می‌توان نشان داد $AD=BC$، پس چهار ضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.

۷



نقطهٔ A را نسبت به محور y قرینه کرده و آن را A' می‌نامیم. سپس نقطهٔ A' را نسبت به محور x قرینه کرده و آن را A'' می‌نامیم. حال از نقطهٔ A'' به B وصل کرده و محل تقاطع $A''B$ با محور x را N می‌نامیم و بعد از نقطهٔ A' به N وصل کرده و محل تقاطع $A'N$ با محور y را M می‌نامیم. همان‌طورکه می‌دانیم، کم‌ترین مقدار $AM+MN+NB$ برابر با طول $A''B$ است،

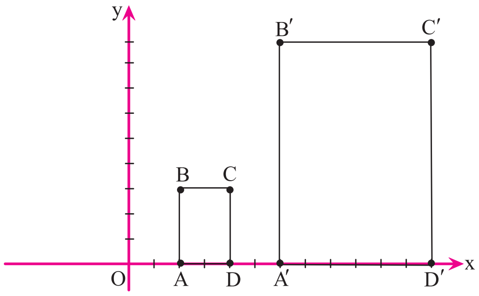
پس:

$$\min(AM+MN+NB)=A'M+(A'N-A'M)+NB$$
$$=A'N+NB=A''N+NB=A''B$$
$$\begin{cases}A''=(-۲,-۵)\\ B=(۴,۲)\end{cases}\Rightarrow$$
$$\min(AM+MN+NB)=A''B=\sqrt{(-۲-۴)^{۲}+(-۵-۲)^{۲}}$$
$$=\sqrt{۳۶+۴۹}=\sqrt{۸۵}$$

---

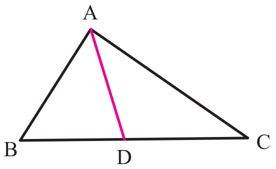
۸ الف. همان‌طور که در شکل می‌بینیم مستطیل $A'B'C'D'$ مجانس $ABCD$ به مرکز تجانس مبدأ مختصات و با نسبت تجانس ۳ می‌باشد به‌طوری که داریم:

$$\frac{OA'}{OA}=\frac{OB'}{OB}=\frac{OC'}{OC}=\frac{OD'}{OD}=۳$$



ب. این تجانس از نوع انبساط است، زیرا مجانس شکل بزرگ‌تر از خود شکل است.

۹

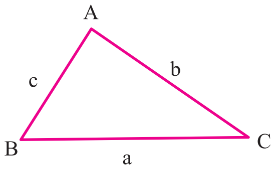


$$AD\text{ نیمساز}: \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{۲}{۳}$$
$$\xrightarrow{AB=۴}\frac{۴}{AC}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow AC=۶$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{A}\Rightarrow ۶=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\sin\widehat{A}$$
$$\Rightarrow\sin\widehat{A}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\widehat{A}=۳۰^\circ$$

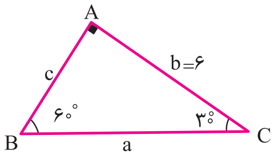
---

۱۰ الف.



$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\widehat{A}$$
$$(۲)^{۲}=(۱)^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}-۲(۱)(\sqrt{۳})\cos\widehat{A}$$
$$\Rightarrow ۴=۱+۳-۲\sqrt{۳}\cos\widehat{A}\Rightarrow\cos\widehat{A}=۰\Rightarrow\widehat{A}=۹۰^\circ$$

ب.



$$\begin{cases}\dfrac{b}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{c}{\sin\widehat{C}}\Rightarrow\dfrac{۶}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\dfrac{c}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow c=۲\sqrt{۳}\\[2ex] \dfrac{c}{\sin\widehat{C}}=\dfrac{a}{\sin\widehat{A}}\Rightarrow\dfrac{۲\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}}=\dfrac{a}{۱}\Rightarrow a=۴\sqrt{۳}\end{cases}$$

$$\text{محیط}=a+b+c=۴\sqrt{۳}+۶+۲\sqrt{۳}=۶(\sqrt{۳}+۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times۶\times۲\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$$