آموزش مفهومی هندسه ۲

سال یازدهم

رشتهٔ ریاضی- فیزیک

۱. آمــوزش کامل مفاهیم درس با رویکرد آمــوزش به روش حل مســأله و فعالیت محور.

۲. بررسی مفاهیم چالش برانگیز.

۳. تعریف‌های دقیق و اثبات کامل قضیه‌ها به روش فعالیت.

۴. مثال‌های موضوعی و کاربردی.

۵. پرسش‌های مفهومی.

۶. مسایل موضوعی و تکمیلی در هر فصل.

محمود نصیری

به نام هستی‌بخش

مقدمه

کتاب حاضر در راستای کتاب هندسه سال یازدهم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی فیزیک تألیف شده است.
هندسه به دلیل سابقه تاریخی آن، که بیش از دو هزار سال می‌باشد یکی از مباحث ریاضی است که در طول تاریخ با تحول‌های زیادی روبه‌رو بوده است. طغیان سالیانه رود نیل و محو شدن مرزهای کشاورزی باعث شده بود تا مصریان نقشه‌برداران و مهندسان ماهری شوند، ساختن اهرام مصر و ساختمان‌های چند طبقه، و تقسیم زمین‌های کشاورزی از شواهد این امر است.
در حالی که مصریان و بابلیان دانش گسترده‌ای از مفاهیم ریاضی داشته‌اند (برخی درست و برخی نادرست) در یونان برای نخستین بار فرمول‌ها و مفاهیم هندسه براساس استدلال و نه بر اساس مقایسه و شهود پایه‌گذاری شد.
اقلیدس در کتاب معروف خود به نام کتاب اصول اقلیدس موفق شد که متون قبل از خود را تا حدودی جمع‌آوری کند. دوران فیثاغورث و اقلیدس را دوران طلایی هندسه می‌نامند. اقلیدس یکی از مشهورترین ریاضی‌دان‌های یونان و شاید موفق‌ترین نویسنده علمی است، که کتاب اصول سیزده جلدی او در باب هندسه و نظریه اعداد است. برای بیش از ۲۰۰۰ سال هر دانش‌آموخته ریاضی هندسه را از کتاب اقلیدس یاد گرفته است. در هر دوره از تاریخ که ریاضی‌دان‌ها به بررسی هندسه اقلیدسی پرداخته‌اند، همواره چهار اصل اول اقلیدس به سادگی مورد پذیرش آن‌ها قرار گرفته است، اما اصل پنجم تا قرن نوزدهم همواره مورد شک و تردید ریاضی‌دان‌ها بوده است. همین شک و تردیدها بود که منجربه کشف هندسه‌های نا اقلیدسی گردید. صورت معادل اصل پنجم این است که از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، یک و فقط یک خط می‌توان به موازات خط مفروضی رسم کرد.
در ۲۰۰ سال قبل که هندسه‌های نااقلیدسی کشف گردید، در واقع انقلابی در هندسه رخ داد، این کشف‌ها باعث شد تا هندسه اقلیدسی به‌طور دقیق مورد بررسی و اصلاح واقع شود. یکی از پیشگامان این دقیق‌سازی و اصلاحات هیلبرت ریاضی‌دان بزرگ است (۱۹۴۳ ـ ۱۸۶۲).
امروزه روش‌های مختلف در ارایه هندسه در مدارس بیان می‌شود که مهم‌ترین و مرسوم‌ترین آن‌ها روش متریک در هندسه است. یعنی استفاده از مفهوم اعداد حقیقی، در هندسه است. برای بحث در این مورد و ارایه روش‌های هندسه می‌توانید به کتاب مبانی و مفاهیم هندسه متوسطه مراجعه کنید.
از این مقدمه تاریخی که بگذریم به اهداف کتاب حاضر می‌رسیم. امروزه یکی از مهم‌ترین هدف‌های آموزش ریاضی، پرورش تفکر، خلاقیت و استدلال است و در این راستا هندسه از مهم‌ترین مفاهیم ریاضی است که از هر مفهوم دیگر ریاضی، می‌تواند این نقش را ایفا کند.
فرآیندهایی مانند، استدلال کردن، حل مسأله‌های هدف‌دار و تعمیم آن‌ها و طرح مسأله‌های جدید از موضوع‌هایی هستند که می‌توانند نقش مهمی را در پرورش تفکر و ایجاد خلاقیت چه در ریاضی و چه در زندگی روزمره داشته باشند.
علاوه بر همه موردهای فوق، هندسه می‌تواند در زندگی روزمره، از ساده‌ترین وسایل مورد استفاده بشر و ساده‌ترین شغل‌ها و از طراحی‌های ساده، تا پیشرفته‌ترین طراحی‌ها و معماری‌ها کاربرد داشته باشد.
با تغییر کتاب درسی هندسه و با هدف تعمیم بیش‌تر در بررسی دقیق‌تر مطالب، که در کتاب درسی فرصت چنین کاری وجود ندارد، کتاب حاضر تألیف شده است. در ارایه مطالب و مفاهیم کتاب سعی شده است که روش‌های جدید آموزشی که براساس فعالیت محور بودن و روش حل مسأله می‌باشد مورد توجه قرار گیرد.
بیان تعریف‌های دقیق، اثبات تمام قضیه‌ها و مسأله‌ها و مثال‌های کاربردی و هم‌چنین بررسی مفاهیم چالش‌برانگیز کتاب درسی از هدف‌های اصلی این کتاب است. در همین راستا علاوه بر مثال‌های حل شده در انتهای هر فصل و مباحث آن سه نوع تمرین در کتاب آورده شده است.

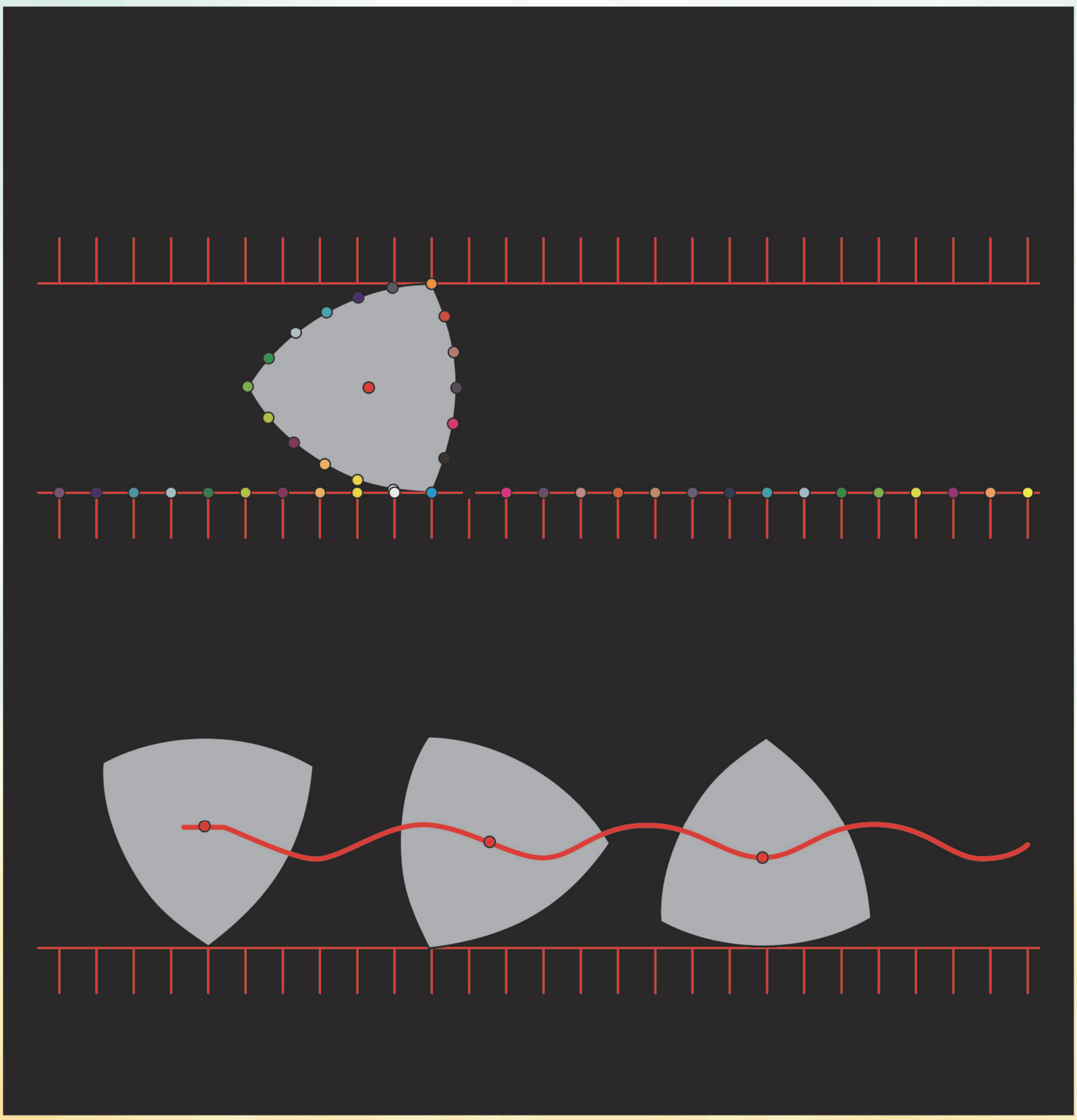
اولین نوع این تمرین‌ها، تمرین‌های معمولی هستند که از ساده‌ترین تمرین‌ها شروع می‌شوند و به شما در تثبیت قضیه‌ها و مفاهیم درسی کمک می‌کنند.
سعی شده است این تمرین‌ها از سطح متوسط فراتر نباشد.
دوم، تمرین‌هایی با عنوان پرسش‌های مفهومی هستند، که اغلب با پاسخ‌های کوتاه می‌باشند و کم‌تر در آن‌ها محاسبه به کار رفته است. این بخش از تمرین‌ها، مهم‌ترین بخش تمرین‌های کتاب می‌باشند که می‌توانند در یادگیری مفاهیم و دورهٔ مطالب کمک زیادی به دانش‌آموزان بکنند.
سومین بخش تمرین‌ها، شامل تمرین‌های تکمیلی و دوره‌ای فصل است، که از سطح نسبتاً دشوارتری برخوردار هستند و بیش‌تر مورد توجه علاقه‌مندان می‌باشند. در این نوع تمرین‌ها با مسأله‌هایی که بالاتر از سطح معمول کتاب درسی هستند روبه‌رو خواهید شد.
این کتاب در کل دارای سه فصل می‌باشد؛
فصل اول، دایره و ویژگی‌های آن می‌باشد، که از مهم‌ترین بخش‌های هندسه است. در این فصل تمام قضیه‌ها به‌طور کامل و دقیق اثبات شده‌اند و اگر در بعضی قضیه‌های کتاب درسی توضیح کم‌تری داده شده باشد در این جا به‌طور کامل آن‌ها را بررسی می‌کنیم. چهار ضلعی‌های محاطی و محیطی و هم‌چنین چندضلعی‌های منتظم نیز از بحث‌های مهم این فصل می‌باشند.
از ویژگی‌های مهم این فصل آن است که، چون مطالب آن در سال‌های قبل نیز تا حدودی بررسی شده‌اند، حدس زده می‌شود که درک آن‌ها برای دانش‌آموزان به جز در مواردی اندک، کم‌تر چالش‌برانگیز باشد.
فصل دوم، تا حدودی در ارایه روش مفاهیم، جدید است زیرا در این فصل یکی از مهم‌ترین مفاهیم هندسه که تبدیلات هندسی می‌باشند مطرح شده است. امروزه تبدیلات هندسی در اکثر مدارس دنیا به خوبی تدریس می‌شود.
روشی را که در این‌فصل انتخاب کرده‌ایم، یک روشی صرفاً هندسی است و نه تحلیلی. به همین دلیل یکی از اساسی‌ترین مفهوم‌های تبدیلات که طولپاها می‌باشند، بخش اصلی این فصل را تشکیل می‌دهند. به دلیل کم‌تر آشنا بودن با این مفاهیم شاید بیان روش‌های جدید کمی با مقاومت روبه‌رو شود، اما باید سعی کنیم تا حد امکان، در ارایه روش بهتر و دقیق‌تر در این فصل بکوشیم. در هر صورت مطالب این فصل علاوه بر آن‌که به خوبی، مفاهیم و مطالب بیان شده در کتاب درسی را پوشش می‌دهند، در گسترش و تعمیم آن‌ها کمک زیادی به مدرسان و دانش‌آموزان خواهد کرد. از همکاران گرامی تقاضا دارم این فصل را با دقت هر چه بیش‌تر بررسی و مورد توجه قرار دهند.
فصل سوم، شامل رابطه‌های طولی در مثلث است. این بخش بیش‌تر محاسباتی است. در این فصل سه قضیه مهم، یعنی قضیه سینوس‌ها، قضیه کسینوس‌ها و قضیه هرون، از کاربردی‌ترین بخش‌های هندسه و حتی ریاضی می‌باشند. به همین دلیل علاوه بر کتاب‌های هندسه، در کتاب‌های جبر و حساب، دیفرانسیل و انتگرال و حتی هندسه تحلیلی نیز مطرح می‌شوند.
در این فصل با مسأله‌های محاسباتی مختلف و هم‌چنین کاربردهای زیادی از سه قضیه فوق و قضیه‌های مهم دیگری روبه‌رو خواهید شد.
لازم می‌دانم از همه همکاران گرامی که با حوصله و دقت مطالب این کتاب و سایر کتاب‌های این جانب را پیگیری می‌کنند تشکر کنم. این پیگیری و همراهی همکاران عزیز مایه دلگرمی ما در تألیف است. آن هم در زمانه‌ای که متأسفانه در کشور ما آموزش درست مفاهیم تقریباً رنگ باخته است.
در پایان از جناب آقای یحیی دهقانی مدیر انتشارات مبتکران همواره پشتیبان کتاب‌های علمی و مفید می‌باشند، تشکر می‌کنم و از جناب آقای مبین که همکاری کامل را برای آماده‌سازی کتاب برای چاپ انجام داده‌اند تشکر می‌شود.
از سرکار خانم فیروزه مرادی که با زحمات فراوان حروفچینی کتاب را انجام داده و خانم مینا غلام‌احمدی که زحمت کشیده و نمودارهای کتاب را رسم کرده‌اند و سرکار خانم سمانه ایمان‌فرد طراح جلد تشکر می‌کنم

محمود نصیری

فهرست

فصل اول

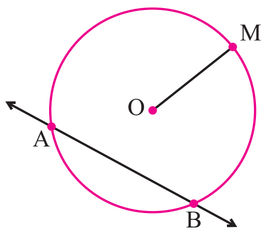
دایره



دایره Circle

دایره یکی از مهم‌ترین شکل‌های هندسی است که بشر از ابتدا با آن آشنا بوده است. زیرا همواره قرص کامل ماه را در آسمان مشاهده کرده است. در زندگی روزمره با اشیاء فراوانی که دایره‌ای شکل هستند سروکار داریم کاربردی‌ترین آن‌ها اختراع چرخ است.
در سال‌های قبل با تعریف دایره و ویژگی‌هایی از آن آشنا شده‌اید. ابتدا این ویژگی‌ها را یادآوری کرده و سپس مفاهیم بیش‌تری را در دایره بررسی می‌کنیم.

تعریف. نقطه O در صفحه P و عدد حقیقی مثبت R مفروض‌اند. مجموعه تمام نقطه‌های صفحه P که از O به فاصله R باشند دایره‌ای به مرکز O و شعاع R نامیده می‌شود.



شعاع در دایره به دو معنی به کار می‌رود؛

۱ عدد حقیقی مثبت R است.

۲ پاره خطی که یک سر آن روی مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای از دایره است.

وقتی می‌گوییم شعاع دایره منظور R است و هرگاه گفته می‌شود یک شعاع دایره منظور یک پاره‌خط است. $\overline{OM}$ یک شعاع دایره و $R = OM$ شعاع دایره است.

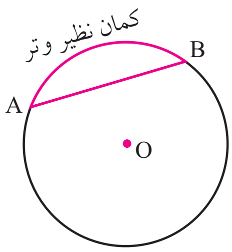
تمام نقاطی از صفحه دایره، که فاصله آن‌ها تا مرکز دایره کوچک‌تر از شعاع دایره باشد، درون دایره نامیده می‌شوند و هر نقطه که فاصله‌اش تا مرکز دایره، بزرگ‌تر از شعاع دایره باشد، برون دایره است.

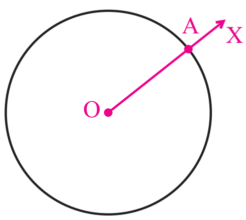
مجموعه نقاط درون و روی یک دایره را دیسک نیز می‌نامند.

هر پاره‌خط را که دو سر آن دو نقطه متمایز دایره باشد یک وتر دایره می‌نامند.

هر وتر شامل مرکز دایره، قطر نامیده می‌شود.

خط شامل هر وتر یک قاطع نامیده می‌شود، بنابراین هر خط قاطع دقیقاً دو نقطه مشترک با دایره دارد، اگر A و B دو نقطه متمایز دایره باشند پاره‌خط AB، یک وتر و خط AB یک قاطع دایره است.





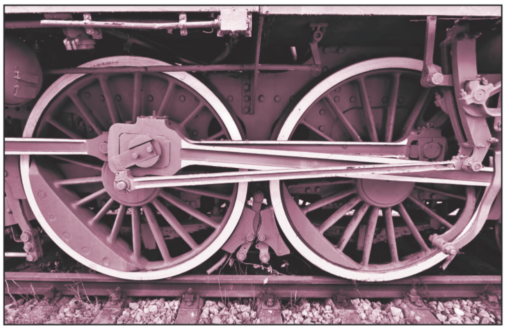
اگر وتر AB قطر نباشد، کمان AB را که تمام نقاط آن به جز A و B در طرفی از خط AB باشند که شامل مرکز دایره نمی‌باشد، کمان نظیر یا مقابل وتر AB می‌نامیم.

دو دایره را که شعاع‌های مساوی داشته باشند، هم‌نهشت می‌نامند.

دایره به مرکز O و شعاع R را به $C(O,R)$ نشان می‌دهند، اگر نیم‌خط OX در صفحه دایره چنان باشد کـه O ابتـدای نـیم‌خـط روی مرکز دایره $C(O,R)$ باشد، روی $\overrightarrow{OX}$ (نیم‌خط OX) یک و فقط یک نقطه مانـنـد A وجـود دارد کـه $OA = R$ (قضـیه نقطـه‌یـابی) در نتیجه A روی دایره است. بنابراین،

> **هر نیم‌خط واقع در صفحه دایره که ابتدای آن روی مرکز دایره باشد دایره را در یک و فقط یک نقطه قطع می‌کند یا می‌برد.**

مماس و قاطع Tangent and Secant



فاصله نقطه از خط، نیم‌خط و پاره‌خط

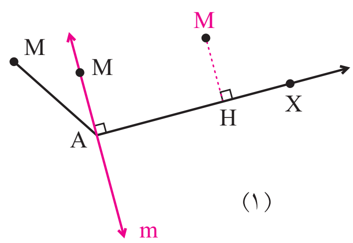
قبلاً با ویژگی زیر در هر مثلث آشنا شده‌اید؛

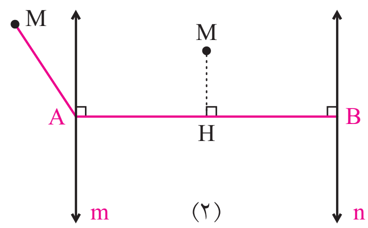
در هر مثلث اگر یک زاویه از زاویه دیگر بزرگ‌تر باشد، اندازه ضلع مقابل آن نیز از اندازه ضلع مقابـل بـه زاویـه دیگـر بـزرگ‌تـر اسـت. بنابراین در هر مثلث قائم‌الزاویه اندازه وتر از اندازه هر ضلع نظیر زاویه قائمه بزرگ‌تر است چرا؟ بنابراین؛

اگر از نقطه‌ای مانند O غیر واقع بر خط m عمود OH را بر آن رسم کنیم (H پای عمود است)؛

طول این عمود یعنی OH، از طول هر پاره‌خط OM که M روی خط m واقع است و $M \neq H$ کوچک‌تـر اسـت. طبـق تعریـف OH را فاصله نقطه O از خط m می‌نامیم، که کوتاه‌ترین فاصله نقاط خط m از نقطه O است.

اما اگر با نیم‌خط یا پاره‌خط روبه‌رو باشیم، کوتاه‌ترین فاصله یک نقطه از پاره‌خط یا نیم‌خط چگونه تعریف می‌شود؟



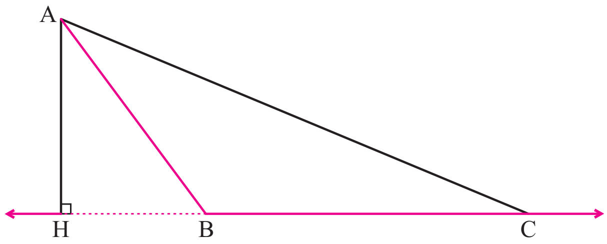


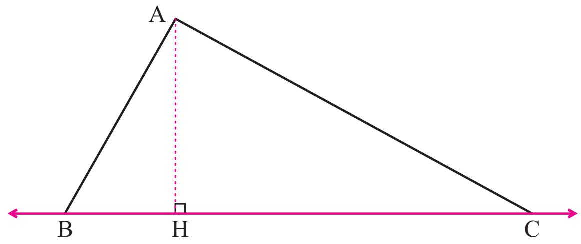
اگر به شکل‌ها دقت کنید، پاره‌خط AB و نیم‌خط AX را در نظر می‌گیریم، خط m را در A نقطه ابتدای نیم‌خط بر آن عمود می‌کنیم، هم‌چنین در نقطه‌های A و B، دو انتهای پاره‌خط، دو خط m و n را بر آن عمود می‌کنیم، مشاهده می‌کنیم که در شکل (۱) اگـر M هر نقطه‌ای در صفحه نیم‌خط AX باشد که در طرفی از خط m باشد که شامل X است یا روی خـط m باشـد کوتـاه‌تـرین فاصـله M از $\overrightarrow{AX}$ همان طول عمود MH است.

اما اگر M در طرفی از خط m باشد که شامل X نمی‌باشد،

کوتاه‌ترین فاصله M از نقاط نیم‌خط AX برابر MA است که A ابتدای نیم‌خط است. به همین ترتیـب در مـورد پـاره‌خـط AB برقـرار است. فاصله هر نقطه بین و روی دو خط m و n همان طول عمود MH است، که همان کوتاه‌ترین فاصله M از پاره‌خط AB است، اما کوتاه‌ترین فاصله هر نقطه M در صفحه شامل $\overline{AB}$ که بین یا روی خط‌های m و n نباشد، از نقاط پـاره‌خـط AB، برابـر MA یـا MB است که A و B دو سر پاره‌خط‌اند. مطابق شکل، چون M در طرفی از m است که شامل $\overline{AB}$ نمی‌باشد، پس کوتـاه‌تـرین فاصـله M از نقاط پاره‌خط AB برابر MA است.

اما اگر در مسایلی ذکر شود کوتاه‌ترین فاصله یک نقطه از خط شامل پاره‌خط یا نیم‌خط، از همان فاصله نقطه از خط یعنی رسم عمـود استفاده می‌کنیم. مثلاً در تعریف ارتفاع مثلث باید ذکر کنیم، عمودی که از رأس مثلث بر خط شامل ضلع مثلث رسم می‌شـود، و پـای عمود را روی این خط در نظر می‌گیریم.

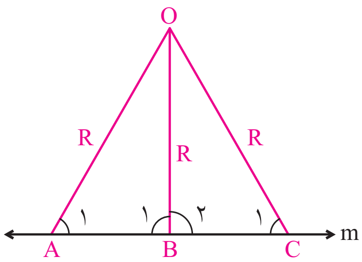




خط قاطع و مماس

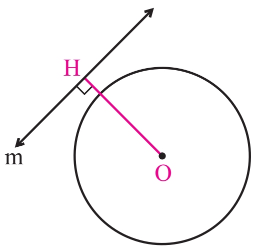
به طور شهودی می‌توانید به سادگی به این پرسش پاسخ دهید که، اگر خط m و دایره $C(O,R)$ در یک صفحه مفروض باشند، و OH فاصله مرکز دایره تا خط d باشد، در صورتی که $OH < R$ دایره و خط در دو نقطه مشترک‌اند و اگر $OH = R$ خط و دایره یک نقطه مشترک دارند و اگر $OH > R$، خط و دایره هیچ نقطه مشترک ندارند.
اما با استفاده از قضیه‌ای که بیان می‌کنیم می‌توانیم به‌طور دقیق به این پرسش پاسخ دهیم.

یک خط و یک دایره در صفحه حداکثر دو نقطه مشترک دارند.



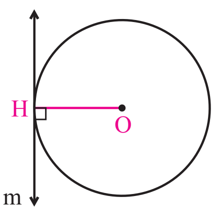
فرض کنیم خط m و دایره $C(O,R)$، در سه نقطه A، B و C مشترک باشند و B بین A و C باشد، $OA = OB = OC = R$، در نتیجه هر سه مثلث OAB، OBC و OAC متساوی‌الساقین می‌باشند، در نتیجه، $\angle A_1 \cong \angle B_1$، $\angle A_1 \cong \angle C_1$، $\angle B_2 \cong \angle C_1$، هم‌چنین $\angle A_1 \cong \angle C_1$. پس نتیجه می‌گیریم که، $\angle B_2 \cong \angle A_1$، اما این امکان ندارد، زیرا $\angle B_2$ زاویه خارجی ΔOAB است. بنابراین یک خط و دایره حداکثر دو نقطه مشترک دارند.
قضیه فوق این امکان را می‌دهد که بتوانیم وضعیت یک خط و دایره را به صورت زیر دسته‌بندی کنیم و برای هر کدام نامی را انتخاب کنیم.
فرض کنیم دایره $C(O,R)$ و خط m در یک صفحه مفروض باشند و OH فاصله مرکز دایره تا خط m باشد.

۱ اگر $OH > R$، گوییم خط و دایره هیچ نقطه مشترک ندارد.



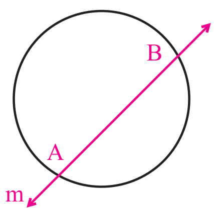
$$OH > R\ ,\ C \cap m = \varnothing$$

۲ اگر $OH = R$، آن‌گاه گوییم خط و دایره فقط یک نقطه مشترک دارند. در این صورت خط را بر دایره مماس می‌نامیم.



$$OH = R, C \cap m = \{H\}$$

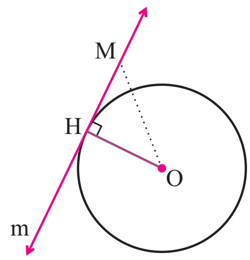
۳ اگر $OH < R$ در این حالت خط و دایره دقیقا دو نقطه مشترک دارند. (برای اثبات می‌توانید به تمرین‌های دوره‌ای مراجعه کنید.)
در این حالت خط را، خط قاطع بر دایره می‌نامند.



$$OH < R, C \cap m = \{A, B\}$$

اکنون بعد از تعریف خط مماس قضیه‌هایی را در این مورد بیان می‌کنیم.

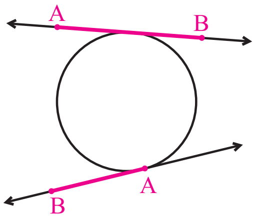
مماس بر دایره



⊡ ***تعریف.*** **خط m و دایره C در یک صفحه مفروض‌اند. هرگاه خط و دایره یک و فقط یک نقطه مشترک داشته باشند، خط را بر دایره مماس گوییم. نقطه مشترک را، نقطه تماس خط با دایره می‌نامیم.**

شعاعی از دایره را که، یک انتهای آن نقطه تماس خط با دایره است، شعاع نقطه تماس می‌نامیم. می‌توانیم پاره خط و نیم‌خط مماس بر دایره را نیز تعریف کنیم.

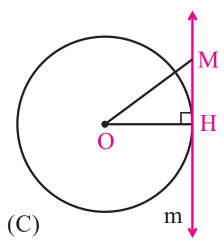
⊡ ***تعریف.*** **پاره‌خط AB را مماس بر دایره C می‌نامیم، هرگاه خط شامل آن بر دایره مماس باشد و نقطه تماس نقطه‌ای از پاره‌خط AB باشد.**



دقیقاً مشابه آن می‌توانیم نیم‌خط مماس بر دایره را نیز تعریف کنیم.
تعریف فوق از خط مماس صرفاً یک تعریف دقیق و ساده است، که فقط ویژه دایره است. اما این تعریف کاربردی نمی‌باشد. بنابراین صورت معادلی از آن وجود دارد که عملاً در حل مسایل کاربرد دارد. اگر شعاع نقطه تماس را در نظر گرفته و در نقطه تماس خطی را بر آن عمود رسم کنیم، خواهیم دید که این خط بر دایره مماس است و بر عکس اگر خطی بر دایره مماس باشد بر شعاع نقطه تماس عمود است
در فعالیت زیر معادل بودن این دو ویژگی را ثابت می‌کنیم.

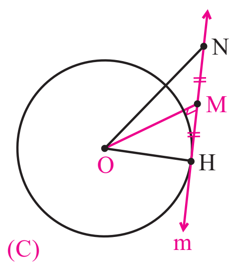
فعالیت ۱

۱ قضیه فرض کنیم خط m در نقطه H، بر شعاع $\overline{OH}$، از دایره C عمود باشد.



باید ثابت کنیم بر دایره مماس است.
اگر M هر نقطه‌ای روی m به غیر از H باشد، چون $OM > OH = R$، در نتیجه M بیرون دایره C واقع است، بنابراین خط m و دایره C فقط یک نقطه مشترک دارند، در نتیجه بنابر تعریف، خط m بر دایره مماس است.

۲ قضیه. عکس، فرض کنیم خط m در نقطه H از دایره C، بر آن مماس باشد، باید ثابت کنیم، $\overline{OH}$، شعاع نقطه تماس، بر خط مماس m در H عمود است.



اثبات. اثبات به برهان خلف است. فرض کنیم خط m در نقطه H بر $\overline{OH}$ عمود نباشد، پس از O، بر m عمود رسم کرده و پای عمود را M می‌نامیم. اکنون روی نیم‌خط HM نقطه N را چنان در نظر می‌گیریم که $MN = MH$ و M بین H و N باشد، در این‌صورت $\Delta OMH \cong \Delta OMN$ چرا؟ از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
بنابراین، $ON = OH = R$، یعنی N نیز روی دایره است، اما این متناقض با تعریف مماس بر دایره است. در نتیجه خط m در نقطه H بر شعاع OH عمود است.

در فعالیت بالا دو قضیه زیر را ثابت کردیم.

اگر خطی در یک انتهای شعاعی از دایره که روی دایره است بر آن شعاع عمود باشد، آن‌گاه این خط بر دایره مماس است. بر عکس؛

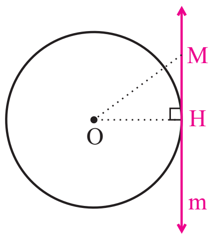
اگر خطی بر یک دایره مماس باشد، آن‌گاه این خط بر شعاع نقطه تماس، عمود است، که پای عمود روی دایره است.

دو قضیه فوق، عکس یکدیگر می‌باشند. هر کدام را به عنوان تعریف مماس بپذیریم، می‌توانیم دیگری را ثابت کنیم. می‌توانیم این دو قضیه را به صورت قضیه دو شرطی نیز بیان کنیم.

قضیه: یک خط و دایره بر هم مماس‌اند، اگر و فقط اگر، آن خط در انتهای شعاعی از دایره، که روی دایره است، بر آن شعاع عمود باشد.

بلافاصله از قضیه بالا نتیجه زیر گرفته می‌شود؛

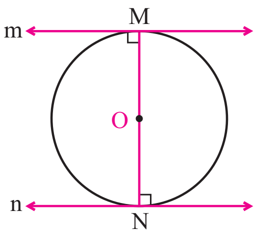
نتیجه. اگر m مماس بر دایره $C(O,R)$ در نقطه H باشد تمام نقاط خط مماس به جز نقطه تماس در برون دایره C واقع‌اند.



اگر M هر نقطه روی مماس m به جز H باشد، چون $\overline{OH}$ بر m عمود است پس، $OM > OH = R$، در نتیجه M برون دایره است.

نتیجه. اگر m و n دو مماس موازی بر دایره $C(O,R)$ در نقاط M و N باشند، آن‌گاه، $\overline{MN}$ از مرکز دایره می‌گذرد.

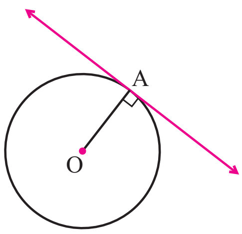
یعنی پاره‌خطی که دو نقطه تماس را به هم وصل می‌کند از مرکز دایره می‌گذرد.



خط‌های OM و ON هر دو بر دو خط موازی عمودانـد، پس بـر هـم منطبق‌اند. O مرکز دایره است پس خط MN از مرکز دایره می‌گذرد.

از این ویژگی در ذوزنقه‌هایی که دو قاعده آن‌ها بر یک دایره مماس‌انـد می‌توان استفاده کرد.

رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای واقع بر آن



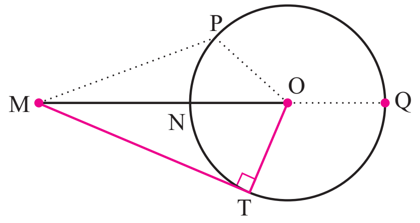
با استفاده از قضیه قبل، روشی در رسم مماس بر دایره در نقطه‌ای روی آن به‌دست می‌آید.

فرض کنیم نقطه A روی دایره $C(O,R)$ واقع باشد، شعاع OA از دایره را رسم می‌کنیم، اکنون اگر خطی را در A بر خط OA عمود کنیم، خط مماس بر دایره است، چرا؟

نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره نسبت به یک نقطه و پاره‌خط مماس

فعالیت ۲. **دایره به مرکز O و شعاع ۶ مفروض است. نقطه M در برون دایره واقع است، به‌طوری که، کم‌ترین فاصله نقاط دایره از M برابر ۴ واحد است. اگر از M مماس بر دایره رسم کنیم و T نقطه تماس باشد. اندازه مماس MT یعنی MT را محاسبه کنید.**

اگر M برون دایره باشد و از M به مرکز دایره متصل کنیم، نیم‌خط OM، دایره را در یک و فقط یک نقطه N قطع می‌کند، چرا؟



اکنون اگر P هر نقطه‌ای از دایره باشد، $OM \le MP + OP$، که از آن نتیجه می‌شود، $MN \le MP$ چرا؟

بنابراین، N نزدیک‌ترین نقطه دایره به نقطه M است. به همین ترتیب اگر نیم‌خط متقابل $\overrightarrow{OM}$ را در نظر بگیریم دایره را در نقطه‌ای مانند Q قطع می‌کند، که Q دورترین نقطه دایره به M است چرا؟

اگر M درون دایره باشد آن را بررسی کنید.

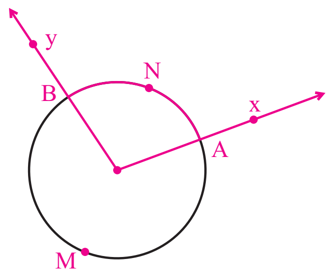
همچنین نشان دهید، $MN = |OM - R|$ و $MQ = OM + R$.

اکنون از ویژگی مماس، که بر شعاع نقطه تماس عمود است، ΔOMT قائم‌الزاویه است و $MT = \sqrt{OM^۲ - R^۲}$ چرا؟ اما $OM = ۱۰$، در نتیجه، $MT = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$.

کمان دایره، اندازه درجه کمان، طول کمان

برای تعریف کمان و اندازه درجه کمان ابتدا زاویه مرکزی را تعریف می‌کنیم.

⊡ ***تعریف.*** **در صفحه شامل دایره، هر زاویه را که رأس آن مرکز دایره باشد، یک زاویه مرکزی می‌نامند.**



دو ضلع هر زاویه مرکزی شامل دو شعاع دایره است. در دایره $C(O,R)$، فرض کنیم $\angle XOY$ یک زاویه مرکزی باشد که ضلع‌های آن دایره C را در نقاط A و B بریده‌اند، آن‌گاه،

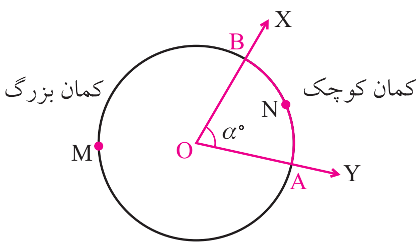
کمان کوچک AB، که آن را به‌صورت $\overset{\frown}{AB}$ نشان می‌دهیم، عبارت است از مجموعه نقاط A و B و همه نقاط دایره C که درون $\angle AOB$ واقع‌اند.

کمان بزرگ AB که آن را به‌صورت $\overset{\frown}{AMB}$ نشان می‌دهیم، عبارت است از مجموعه نقاط A و B و همه نقاط دایره C که در خارج $\angle AOB$ واقع‌اند. نقاط A و B را نقاط انتهایی یا دو سر کمان می‌نامیم.

اگر A و B دو سر یک قطر باشند، A و B و همه نقاطی از دایره را که در یک طرف خط AB می‌باشند، یک نیم‌دایره می‌نامیم.

چون به ازای هر دو نقطه از دایره دو کمان به‌دست می‌آید، برای آن که ابهامی رخ ندهد، کمان را با دو انتهای آن و یک نقطه از آن یعنی با سه حرف نشان می‌دهیم. مانند کمان‌های $\overset{\frown}{ANB}$ و $\overset{\frown}{AMB}$.

اندازه درجه کمان



اندازه درجه کمان ANB که آن را به $m\overset{\frown}{ANB}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود؛

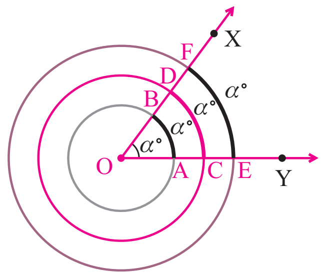
۱ اگر $\overset{\frown}{ANB}$ کمان کوچک‌تر باشد، آن‌گاه $m\overset{\frown}{ANB}$ را برابر اندازه زاویه مرکزی $\angle AOB$ تعریف می‌کنیم، یعنی $m\overset{\frown}{ANB} = m\angle AOB$.

۲ اگر $\overset{\frown}{AMB}$ کمان بزرگ‌تر باشد آن‌گاه، $m\overset{\frown}{AMB} = ۳۶۰° - m\angle AOB$.

۳ اگر A و B دو سر یک قطر باشند، آن‌گاه $m\overset{\frown}{AB} = ۱۸۰°$

اگر $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{BC}$، کمان‌هایی از یک دایره باشند که B، تنها نقطه مشترک آن‌ها باشد و اجتماع آن‌ها کمان $\overset{\frown}{ABC}$ باشد، آن‌گاه،

$m(\overset{\frown}{ABC}) = m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC})$



تذکر: اندازه درجه یک کمان، به بزرگی یا کوچکی شعاع دایره بستگی ندارد. در این دایره‌های هم مرکز، کمان‌های نظیر زاویه مرکزی $\angle XOY$ در همه دایره‌ها اندازه‌های برابر دارند، در صورتی که طول کمان‌ها متفاوت‌اند.

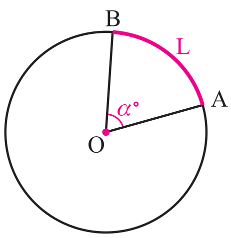
$$m\widehat{AB} = m\widehat{CD} = m\widehat{EF} = m\angle XOY = \alpha°$$

با تعریف طول کمان این تفاوت آشکارتر خواهد شد.

در یک دایره دو کمان هم‌نهشت‌اند، اگر و فقط اگر دارای یک اندازه درجه باشند.

طول کمان دایره، قطاع دایره

اگر شعاع دایره‌ای برابر R باشد، محیط آن برابر، $P = ۲\pi R$ است. بنابراین طول کمانی از این دایره که اندازه درجه آن، برابر یک درجه باشد، برابر $\frac{۲\pi R}{۳۶۰}$ است. چرا؟ پس اگر اندازه درجه کمانی برابر α درجه باشد آن‌گاه طول این کمان $L = \frac{۲\pi R}{۳۶۰} \times \alpha$ است. بنابراین،



اگر اندازه درجه کمانی برابر α بر حسب درجه و طول این کمان برابر L باشد آن‌گاه، $L = \frac{\pi R}{۱۸۰} \times \alpha$.

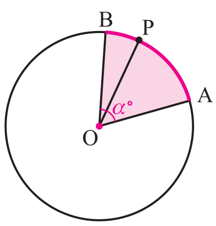
از $L = \frac{۲\pi R}{۳۶۰} \times \alpha$ نتیجه می‌شود؛ $\boxed{\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi R}}$

توجه داشته باشید که در این فرمول حتماً باید α بر حسب درجه باشد، اگر با واحد دیگر اندازه‌گیری زاویه، که رادیان نام دارد آشنا باشید، این فرمول به صورت ساده‌تر نوشته می‌شود. اگر اندازه زاویه‌ای بر حسب درجه عدد α و بر حسب رادیان عدد β باشد آن‌گاه، $\frac{\beta}{\pi} = \frac{\alpha}{۱۸۰}$ پس $\alpha = \frac{۱۸۰}{\pi}\beta$. با جای‌گذاری در رابطه بالا، $L = \frac{\pi R}{۱۸۰} \times \frac{۱۸۰}{\pi}\beta = R\beta$. بنابراین،

اگر اندازه رادیان کمانی برابر β باشد، آن‌گاه، طول کمان $L = R\beta$ است.

قطاع دایره

⊡ *تعریف.* **ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است، یک قطاع دایره می‌نامند.**



به‌طور دقیق‌تر، اگر $\widehat{AB}$، کمانی از دایره $C(O,R)$ باشد، اجتماع همه پاره‌خط‌های OP را که P روی $\widehat{AB}$ است، یک قطاع می‌نامیم.

$\widehat{AB}$ را کمان قطاع و اندازه زاویه مرکزی $\angle AOB$ را زاویه قطاع می‌نامیم.

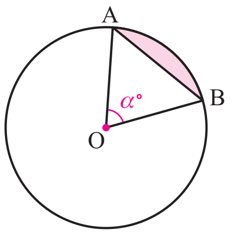
ناحیه درون و روی دایره را می‌توان قطاعی با زاویه به اندازه $۳۶۰°$ یا ۲π رادیان در نظر گرفت، که مساحت آن $S = \pi R^۲$ است، در نتیجه مساحت قطاع یک درجه $\frac{\pi R^۲}{۳۶۰}$ است، که از آن مساحت قطاع α درجه برابر، $A = \frac{\pi R^۲}{۳۶۰}\alpha$ به‌دست می‌آید. اگر زاویه قطاع بر حسب رادیان β باشد، $A = \frac{\pi R^۲}{۲\pi} \times \beta = \frac{۱}{۲}R^۲\beta$ چرا؟

اگر اندازه زاویه قطاع دایره به شعاع R بر حسب درجه α یا بر حسب رادیان β باشد، A مساحت آن برابر است با؛ $A=\frac{\pi}{360}R^2\alpha=\frac{1}{2}R^2\beta$.

در هندسه معمولاً با واحد اندازه‌گیری درجه سروکار داریم و رادیان به کار نمی‌رود، در این‌جا فقط به دلیل یادآوری و هماهنگی با مثلثات رادیان را هم نوشته‌ایم، می‌توانید تا قبل از آشنایی دقیق با رادیان آن را نادیده بگیرید.

فعالیت ۳. قطاع AOB با زاویه به اندازه α مفروض است، وتر AB را رسم می‌کنیم قسمتی از قطاع را که محدود به وتر AB و کمان AB است قطعه دایره می‌نامیم.

برای محاسبه مساحت قطعه، باید مساحت ΔOAB را از مساحت قطاع کم کنیم. مثلاً اگر $\alpha=60°$ و شعاع دایره ۱۰ باشد، ΔOAB متساوی‌الاضلاع و در نتیجه مساحت آن $25\sqrt{3}=\frac{100\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است و مساحت قطاع OAB، برابر، $S=\frac{\pi}{360}\times100\times60=\frac{100\pi}{6}$ است، پس مساحت قطعه، $\frac{100\pi}{6}-25\sqrt{3}$ است.



به‌طور کلی، اگر از فرمول مساحت مثلث، یعنی $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ استفاده کنیم، مساحت قطاع به شعاع R و زاویه α برابر $S=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$ است.

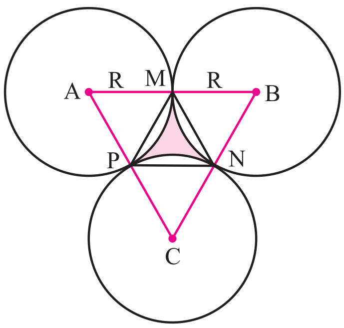
پس مساحت قطعه برابر است با؛

$$K=\frac{\pi}{360}R^2\alpha-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha$$

اگر α بر حسب رادیان باشد این فرمول ساده‌تر است.

$$K=\frac{1}{2}R^2\alpha-\frac{1}{2}R^2\sin\alpha=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$$

مثال ۱. در شکل سه دایره به شعاع‌های R، دوبه‌دو بر هم مماس‌اند، مساحت ناحیه محدود به سه دایره یعنی مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید.



پاسخ. ΔABC متساوی‌الاضلاع به ضلع 2R است چرا؟

بنابراین مساحت آن $R^2\sqrt{3}$ است، چگونه آن را محاسبه می‌کنید؟ پس برای محاسبه مساحت ناحیه بین سه دایره باید مجموع مساحت‌های سه قطاع را پیدا کرده از مساحت ΔABC کم کنیم. اندازه زاویه هر قطاع $60°$ است چرا؟ پس، مساحت هر قطاع $\frac{\pi R^2}{6}$ است در نتیجه،

$$S=R^2\sqrt{3}-3\times\frac{\pi R^2}{6}=R^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})$$

مجموع مساحت قطعه‌ها را، علاوه بر روش معمول فرمول آن، به روش دیگر نیز می‌توانید محاسبه کنید.

$$S(MNP)=\frac{1}{4}S(ABC)=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}.$$

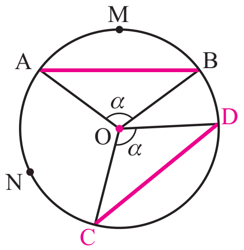
چرا؟

اکنون مساحت محدود به سه دایره را که محاسبه کرده‌اید از آن کم کنید.

$$S_{\text{قطعه‌ها}}=\frac{R^2\sqrt{3}}{4}-R^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2})=R^2(\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}).$$

ویژگی‌هایی از وتر و کمان در دایره

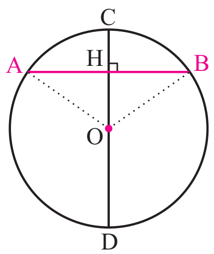
فعالیت ۴. اگر $\overline{AB}$ وتری از دایره باشد دو کمان $\overset{\frown}{AMB}$ و $\overset{\frown}{ANB}$ را داریم. در صورتی که $\overline{AB}$ قطر باشد این دو کمان هم‌اندازه‌اند. اما اگر AB قطر نباشد یکی کمان کوچک AMB و دیگری کمان بزرگ‌تر ANB را داریم. حال اگر $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ دو وتر هم‌نهشت یا هم اندازه از دایره $C(O,R)$ باشند که قطر نباشند؛ آن‌گاه کمان‌های کوچک نظیر آن‌ها نیز هم اندازه‌اند، و برعکس، اگر $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ آن‌گاه، $AB = CD$.



اگر $AB = CD$ آن‌گاه، $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ چرا؟ پس، $m\angle AOB = m\angle COD$. در نتیجه، $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ و برعکس؛ اگر $m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ آن‌گاه، $m\angle AOB = m\angle COD$ پس $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ چرا؟ در نتیجه $AB = CD$ بنابراین،

> در هر دایره اگر دو وتر که از مرکز دایره نمی‌گذرند هم‌اندازه باشند، آن‌گاه کمان‌های نظیر آن دو نیز هم اندازه‌اند و برعکس.

فعالیت ۵. در یک دایره وتر AB و قطر CD را که در H بر آن عمود است در نظر می‌گیریم،

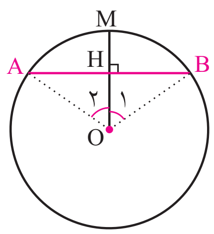


اگر A و B دو سر قطر باشند، قطر CD، وتر AB و کمان‌های نیم‌دایره‌ها را نصف می‌کند. چرا؟ در غیر این‌صورت از O به A و B متصل می‌کنیم. ΔOAB متساوی‌الساقین است، در نتیجه، خط OH، شامل میانه و نیمساز از ΔOAB است، بنابراین H وسط وتر AB و C و D وسط‌های کمان‌های کوچک و بزرگ AB می‌باشند چرا؟ بنابراین؛

> در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان مقابل آن را نصف می‌کند.

> **نتیجه.** اگر قطری از دایره، که از وسط وتری از دایره که قطر نباشد، بگذرد بر آن وتر عمود است.

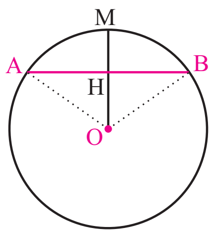
چرا؟ چگونه از دو مثلث OHB و OHA استفاده می‌کنید؟



> **نتیجه.** اگر قطری از دایره از وسط کمان نظیر یک وتر بگذرد بر آن وتر عمود است و از وسط آن وتر می گذرد، یعنی عمودمنصف آن وتر است.

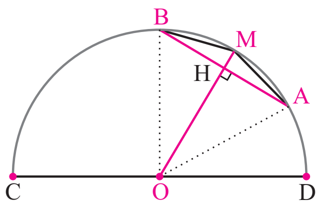
در شکل ΔOAB چه نوع مثلثی است؟

$m\angle O_1 = m\angle O_2$، خط OM، عمودمنصف AB است چرا؟



> **نتیجه.** خطی که از وسط یک وتر و وسط کمان نظیر آن وتر می گذرد، از مرکز دایره می گذرد و در نتیجه بر آن وتر عمود است.

از O، مرکز دایره به H وسط وتر AB وصل می‌کنیم پس خط OH بر وتر AB عمود است، چرا؟ اکنون این خط از وسط کمان AB نیز می‌گذرد، چرا؟



مثال ۲. **در نیم‌دایره به قطر CD، اندازهٔ وتر AB، با شعاع دایره برابر است، یعنی مطابق شکل $AB = OM$ و $m\widehat{AM} = ۳۰^\circ$. ثابت کنید؛ $\Delta AMH \cong \Delta BMH$. اگر شعاع دایره برابر ۱۰ واحد باشد، آیا می‌توانید OH و AM را محاسبه کنید؟**

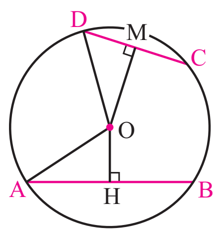
پاسخ. از O به A و B وصل کنید، ΔOAB چه نوع مثلثی است؟ بنابراین $\overrightarrow{OM}$ نیمساز $\angle AOB$ است چرا؟ چگونه از $m\widehat{AM} = ۳۰^\circ$ استفاده می‌کنید؟

پس $\overrightarrow{OM}$ عمودمنصف $\overline{AB}$ است، در نتیجه، $MB = AM$ و $\Delta AMH \cong \Delta BMH$.

محاسبه OH ساده است. با توجه به قسمت قبلی ΔOHB قائم‌الزاویه است و $AH = BH = ۵$ چرا؟ در نتیجه، $OH = \sqrt{۱۰۰ - ۲۵} = ۵\sqrt{۳}$، یا از ویژگی زاویه ۳۰° و ۶۰° در مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنید، که اندازه ضلع مقابل به زاویه ۶۰° برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازه وتر است. اکنون، $HM = ۱۰ - ۵\sqrt{۳}$ و $HA = ۵$ در نتیجه،

$$AM = \sqrt{AH^۲ + HM^۲} = \sqrt{۲۵ + (۱۰ - ۵\sqrt{۳})^۲} = ۱۰\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

فعالیت ۶. مقایسه وترها و فاصله تا مرکز دایره



دو وتر AB و CD از یک دایره مفروض‌اند. OH و OM، به ترتیب فاصله‌های مرکز دایره از این دو وتر هستند. اگر $AB = CD$، آن‌گاه $OH = OM$ چرا؟ اگر $OH = OM$، چگونه نشان می‌دهید $AB = CD$؟

قضیه فیثاغورث را در دو مثلث OAH و ODM بنویسید، چگونه نتیجه می‌گیرید،

$$(۱)\quad OM^۲ - OH^۲ = AH^۲ - MD^۲ \;?$$

اکنون اگر $AB > CD$، چرا $AH^۲ > MD^۲$، $AH^۲ - MD^۲ > ۰$ پس، $OM^۲ > OH^۲$ یعنی، $OM > OH$.

به عکس اگر $OM > OH$ چگونه از رابطه (۱) نتیجه می‌گیرید $AB > CD$. با انجام فعالیت بالا ویژگی مهم زیر را ثابت کرده‌اید؛

> **هرگاه دو وتر از یک دایره اندازه‌های مساوی داشته باشند، فاصله‌های مرکز دایره از این دو وتر برابر است و برعکس.**
>
> **از دو وتر نامساوی در دایره، وتری که اندازه‌اش بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بر عکس.**

مکان هندسی

اگر به تعریف دایره برگردید، مشاهده می‌کنید که هر نقطه از صفحه که از یک نقطه ثابت O به فاصله معلوم R باشد، روی یک دایره به شعاع R است و برعکس، هر نقطه روی دایره $C(O,R)$ از نقطه O به فاصله R است. در این‌صورت گوییم دایره یک مکان هندسی است. بنابراین؛

> **دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت به فاصله معلومی باشند.**

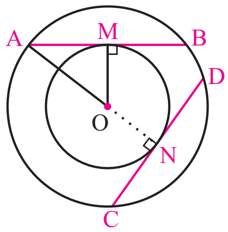
⊡ ***تعریف.*** **مجموعه نقاطی را که همه دارای یک ویژگی باشند، یک مکان هندسی می‌نامیم. هر نقطه که این ویژگی را داشته باشد، متعلق به مکان است و هر نقطه که متعلق به این مکان باشد، دارای این ویژگی است.**

ویژگی مکان دایره در صفحه، به یک فاصله معلوم بودن از یک نقطه است.
عمود منصف یک پاره‌خط، یک مکان هندسی است، ویژگی این مکان به یک فاصله بودن از دو سر پاره خط است.

عمودمنصف هر پاره‌خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله‌اند.

نیمساز هر زاویه یک مکان هندسی است. ویژگی آن به یک فاصله بودن نقاط روی نیمساز از دو ضلع زاویه است.

مثال ۳. **مکان هندسی وسط‌های وترهایی از یک دایره را پیدا کنید که همه این وترها هم‌اندازه‌اند.**

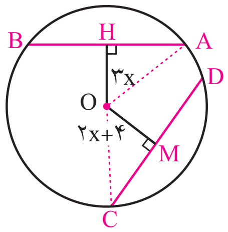


پاسخ. فرض کنیم در دایره $C(O,R)$ وترهایی به طول a مفروض باشند $۰ < a < ۲R$، $AB = ۲a$. اگر از O به نقطه M وسط $\overline{AB}$ متصل کنیم، ΔOAM قائم‌الزاویه و $AM = \frac{a}{۲}$، در نتیجه، $OM = \sqrt{R^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$. چون a و R ثابت‌اند پس OM ثابت است.

بنابراین نقطه M از نقطه O به فاصله ثابتی است، در نتیجه M روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OM = \sqrt{R^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$ است. **یعنی مکان وسط‌های وترهای هم اندازه در دایره، یک دایره است.**

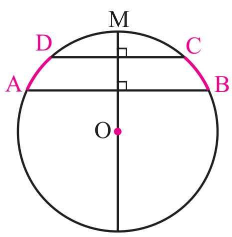
نتیجه. **همه وترهای به طول ثابت a در دایره $C(O,R)$ که $۰ < a < ۲R$، بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{R^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$ مماس‌اند.**

مثال ۴. **در شکل مقابل، اگر $AB = CD$**، فاصله مرکز دایره از وترها چقدر است؟ اگر $AB = ۱۰$ و $CD = ۱۲$ فاصله مرکز دایره از هر یک از وترها را محاسبه کنید.



پاسخ. اندازه دو وتر برابرند، پس از مرکز به یک فاصله‌اند، در نتیجه، $۳x = ۲x + ۴$ که از آن $x = ۴$. اگر $AB = ۱۰$ و $CD = ۱۲$ آن‌گاه $AH = ۵$ و $MC = ۶$، $OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ = OM^۲ + MC^۲$. در نتیجه، $۹x^۲ + ۲۵ = (۲x+۴)^۲ + ۳۶$ که از آن $۵x^۲ - ۱۶x - ۲۷ = ۰$ و $x = \frac{۸ + \sqrt{۱۹۹}}{۵} \approx ۴/۴۲$.

فعالیت ۷. کمان‌های بین دو وتر موازی



دو وتر AB و CD در یک دایره موازی‌اند، نشان دهید دو کمان BC و AD اندازه‌های مساوی دارند. یعنی کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره اندازه‌های مساوی دارند؛ قطر عمود بر یکی از وترها بر دیگری نیز عمود است چرا؟

اکنون از ویژگی‌های قبلی استفاده کنید.

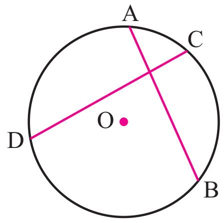
آیا عکس آن نیز درست است؟ در چه صورت عکس آن درست است؟

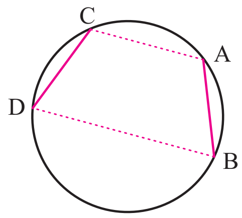
در شکل، اگر دو کمان AD و BC هم اندازه باشند، آیا وترهای AB و CD موازی‌اند؟ اگر M وسط کمان DC باشد آیا وسط کمان AMB نیز می‌باشد؟ چرا؟ اکنون از مرکز دایره به M وصل کنید، بر هر دو وترهای AB و CD عمود است، در نتیجه موازی‌اند. بنابراین؛

در هر دایره کمان‌های محصور به دو وتر موازی هم اندازه‌اند و بر عکس، اگر دو کمان محصور به دو وتر که متقاطع نیستند هم‌اندازه باشند، خط‌های شامل آن دو وتر موازی‌اند یعنی آن دووتر موازی‌اند.

تذکر۱. در عکس این ویژگی، بیان متقاطع نبودن دو وتر لازم است، در غیر این صورت نادرست است. زیرا باید محصور بودن به دو وتر کاملاً مشخص شود.

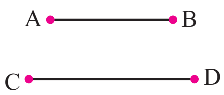
مثلاً در شکل‌های زیر، فرض کنیم $AB = CD$ ، و $m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$، اما دو وتر موازی نیستند، آیا در این شکل‌ها می‌توان گفت AC و BD موازی‌اند چرا؟



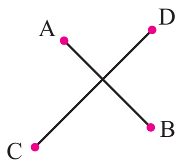


تذکر ۲. دو پاره‌خط را موازی گوییم هرگاه، خط‌های شامل آن دو موازی باشند، به همین ترتیب دو نیم‌خط موازی و یک پاره‌خط و نیم‌خط موازی نیز تعریف می‌شوند.

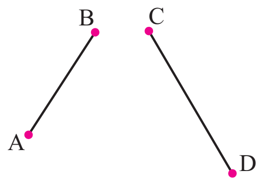
دو پاره‌خط می‌توانند نقطه مشترکی نداشته باشند و موازی نیز نباشند.



$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$



$\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$
و متقاطع‌اند



$\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$
و متقاطع نمی‌باشند

انواع زاویه‌ها در رابطه با دایره

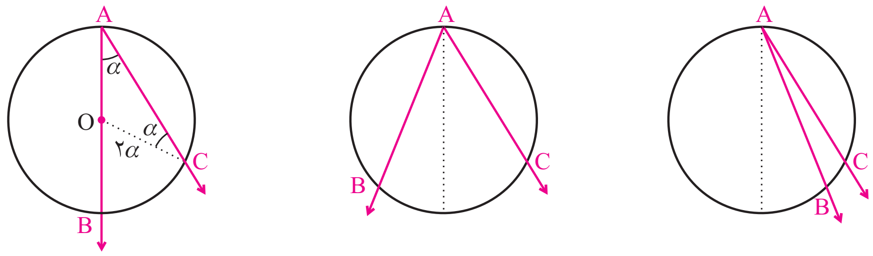
زاویه محاطی

زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره و هر ضلع آن شامل یک وتر دایره باشد زاویه محاطی می‌نامند.

در تمام شکل‌ها $\angle BAC$ زاویه محاطی است در شکل (۱) یک ضلع زاویه از مرکز گذشته است و در شکل (۲) مرکز دایره درون آن و در شکل (۳) مرکز دایره برون آن است.

کمانی از دایره را که نقاط آن درون و روی زاویه محاطی است، کمان مقابل به آن زاویه محاطی می‌نامند.

⊡ ***تعریف.*** **درون $\angle ABC$، اشتراک طرفی از خط AB است که شامل C باشد و طرفی از خط AC که شامل B باشد.**



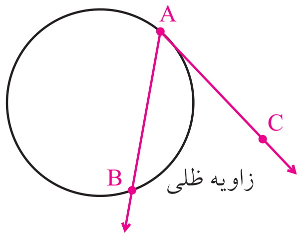
(۱) (۲) (۳)

با توجه به شکل‌ها ابتدا در شکل (۱) و سپس با استفاده از آن در شکل‌های (۲) و (۳) قضیه زیر را ثابت کنید.

قضیه. **اندازه هر زاویه محاطی نصف اندازه کمان مقابل آن است.**

اگر دو ضلع یک زاویه محاطی از دو سر یک قطر بگذرند اندازه آن چقدر است؟

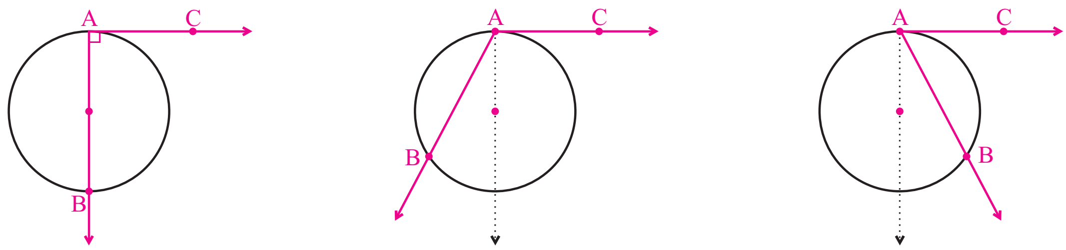
زاویه ظلی



زاویه‌ای را که رأس آن روی دایره و یک ضلع آن شامل یک وتر دایره و ضلع دیگر آن روی یک خط مماس بر دایره باشد زاویه ظلی می‌نامند.

کمانی از دایره را که نقاط آن روی و درون زاویه ظلی باشند کمان مقابل زاویه ظلی می‌نامند.

در شکل‌ها کمان AB مقابل زاویه ظلی است و اندازه زاویه ظلی نصف اندازه کمان مقابل آن است.

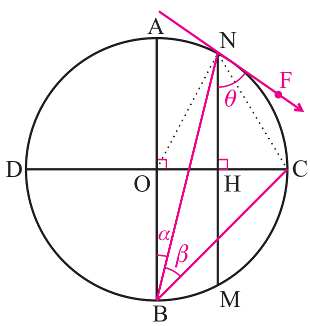


(۱) (۲) (۳)

در شکل (۱) یک ضلع زاویه ظلی از مرکز گذشته است. چگونه از ویژگی مماس و شعاع نقطه تماس استفاده می‌کنید؟ بنابراین، اندازه $\angle BAC$ برابر ۹۰° است؟

در دو حالت دیگر با رسم نیم‌خطی که از رأس زاویه و مرکز دایره می‌گذرد آن را ثابت کنید.

کافی است اندازه‌ها را جمع یا از هم کم کنید.



مثال ۵. **در دایره به مرکز O دو قطر AB و CD بر هم عموداند.**

خط MN عمودمنصف پاره‌خط OC است.

اندازه‌های زاویه‌های محاطی ABN و NBC و اندازه زاویه ظلی MNF را پیدا کنید.

پاسخ. اندازه‌های این زاویه‌ها را به ترتیب مطابق شکل به α، β، θ نشان داده‌ایم، $\alpha+\beta=۴۵^\circ$ چرا؟

$OC=ON=NC$ چرا؟ (ویژگی عمودمنصف را در نظر داشته باشید)

بنابراین اندازه $\angle NOC$ برابر ۶۰° است چرا؟ پس $m\widehat{NC}=۶۰^\circ$. در نتیجه، $\beta=۳۰^\circ$، اکنون $\alpha=۱۵^\circ$.

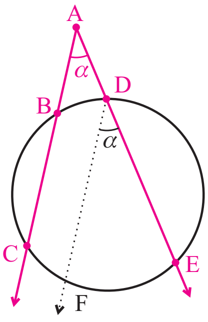
$m\widehat{CM}=۶۰^\circ$ چرا؟ بنابراین، $\theta=۳۰^\circ$.

زاویه‌های برونی و درونی

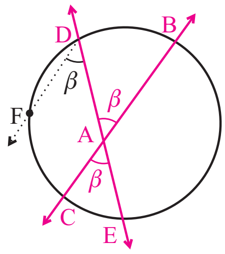
در دو شکل رسم شده، خط‌های شامل دو وتر در برون یا درون دایره یکدیگر را قطع کرده‌اند، نشان دهید؛

$\alpha = \frac{۱}{۲}|m\overset{\frown}{CE} - m\overset{\frown}{BD}|$

$\beta = \frac{۱}{۲}(m\overset{\frown}{CE} + m\overset{\frown}{DB})$



(۱)



(۲)

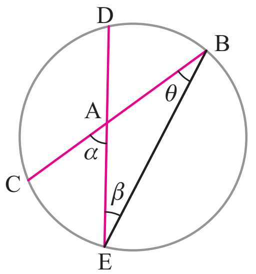
کافی است از D خطی موازی خط BC رسم کنید و از ویژگی کمان‌های محصور بین دو وتر موازی استفاده کنید. نقطه تلاقی دیگر این خط با دایره را نقطه F می‌نامیم. در هر دو شکل $m\angle CAE = m\angle FDE$ و $m\overset{\frown}{BD} = m\overset{\frown}{CF}$ چرا؟

در شکل (۱)، $\alpha = \frac{m\overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{m\overset{\frown}{EC} - m\overset{\frown}{CF}}{۲} = \frac{m\overset{\frown}{EC} - m\overset{\frown}{BD}}{۲}$

در شکل (۲)، $\beta = \frac{m\overset{\frown}{EF}}{۲} = \frac{m\overset{\frown}{FC} + m\overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{m\overset{\frown}{CE} + m\overset{\frown}{DB}}{۲}$

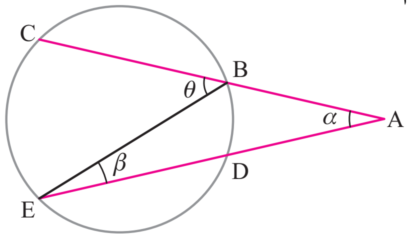
وقتی نقطه تلاقی خط‌های شامل دو وتر برون دایره باشد، زاویه CAB، زاویه خارجی و وقتی این نقطه تلاقی درون دایره باشد، این زاویه‌ها را داخلی نیز می‌نامند.

با استفاده از اندازه زاویه خارجی در مثلث نیز می‌توان آن‌ها را ثابت کرد. از B به E وصل می‌کنیم و از اندازه زاویه خارجی در ΔABE استفاده می‌کنیم.



(۱)

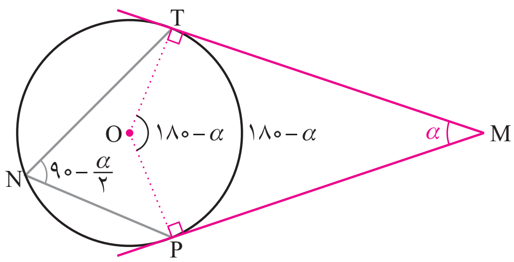
$\alpha = \theta + \beta = \frac{m\overset{\frown}{CE} + m\overset{\frown}{BD}}{۲}$



(۲)

$\alpha = \theta - \beta = \frac{m\overset{\frown}{CE} - m\overset{\frown}{BD}}{۲}$

نتیجه. اگر از نقطه M برون دایره $C(O,R)$ دو مماس $\overrightarrow{MT}$ و $\overrightarrow{MP}$ را بر دایره رسم کنیم، T و P نقاط تماس‌اند، اگر اندازه زاویه بین این دو مماس برابر α باشد، یعنی $m\angle TMP = \alpha$، آن‌گاه همواره اندازه کمان کوچک TP برابر $۱۸۰ - \alpha$ و اندازه کمان بزرگ TP برابر $۱۸۰ + \alpha$ است.



در چهار ضلعی OPMT دو زاویه P و T هر یک قائمه‌اند چرا؟ بنابراین دو زاویه $\angle M$ و $\angle TOP$ مکمل‌اند چرا؟

در نتیجه، $m\angle TOP = ۱۸۰ - \alpha = m\overset{\frown}{PT}$.

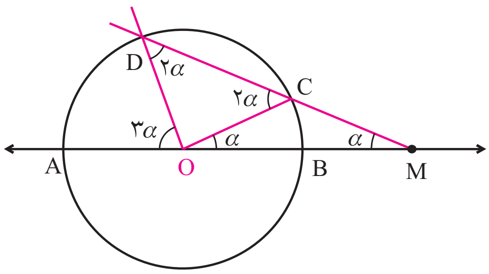
اگر N هر نقطه روی کمان بزرگ TNP باشد، آن‌گاه، $m\angle TNP = ۹۰ - \frac{\alpha}{۲}$ چرا؟

این ویژگی‌ها در حل مسأله‌ها کاربردهای زیادی دارند.

کاربردها

روشی در تقسیم یک زاویه به سه زاویه با اندازه‌های مساوی (تثلیث زاویه)

یکی از قدیمی‌ترین مسایل هندسه، که از دیر باز مورد توجه ریاضی‌دان‌ها بوده است تقسیم یک زاویه به سه زاویه با اندازه‌های برابر است. البته این بستگی به ابزاری دارد که ما در اختیار داریم. خط‌کشی را که اقلیدس به کار برده است، بدون هیچ نشانه و علامتی است، فقط به کمک آن می‌توان خط گذرنده از دو نقطه را رسم کرد. پرگار هم از نظر اقلیدس فوریختنی است، به این معنی که فقط به کمک آن می‌توانیم دایره‌ای به مرکز نقطه مفروضی رسم کنیم که از نقطه مفروض دیگری بگذرد، اگر حتی دهانه این پرکار را تغییر نداده و دایره‌ای به مرکز نقطه‌ای دیگر رسم کنیم نمی‌توان گفت این دایره با دایره قبلی هم‌نهشت است. بنابراین با این دو ابزار که در بالا توصیف کردیم ثابت می‌شود که تثلیث زاویه امکان ندارد.



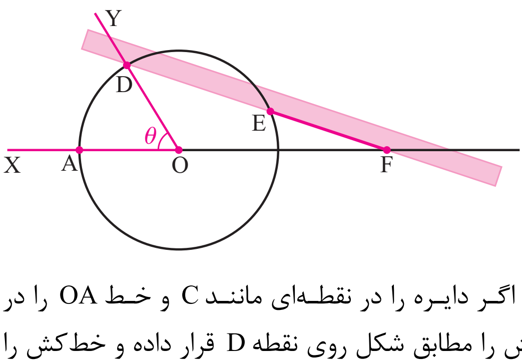
اما امروزه این نوع مسایل، فقط از نظر تاریخی بررسی می‌شوند، با توجه به اصول و ویژگی‌هایی که امروزه در هندسه وجود دارند روش‌های مختلفی برای حل چنین مسایلی ارایه می‌شود.

اکنون مسأله‌ای را مطرح می‌کنیم که به کمک آن و با ابزاری که تعریف می‌کنیم تثلیث یک زاویه امکان‌پذیر است.

نقطه M را در برون دایره $C(O,R)$ چنان در نظر می‌گیریم، که اگر قاطعی را از M رسم کنیم تا دایره را در دو نقطه C و D قطع کند، مطابق شکل، $MC = R$، یعنی برابر شعاع دایره باشد. از O مرکز دایره به C و D وصل می‌کنیم، اگر $m\angle OMD = \alpha$، $m\angle OCD = ۲\alpha$ چرا؟ در نتیجه، $m\angle ODC = ۲\alpha$ بنابراین، $m\angle AOD = ۳\alpha$ چرا؟ از ویژگی زاویه خارجی استفاده کنید.

پس $\angle OMD$ زاویه ای است که اندازه‌اش $\frac{۱}{۳}$ اندازه $\angle AOD$ است.

اکنون فرض کنید $\angle XOY$ مفروض است، می‌خواهیم به کمک پرگار و خط‌کشی که فقط دو نشانه دارد، زاویه‌ای رسم کنیم که اندازه‌اش $\frac{۱}{۳}$ اندازه $\angle XOY$ باشد.



سعی می‌کنیم تا حدودی بر عکس عملیات قبلی را انجام دهیم.

ابتدا به مرکز O رأس زاویه، دایره‌ای به شعاع فاصله دو نشانه خط‌کش رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع این دایره را با ضلع‌های زاویه A و D می‌نامیم. اکنون نوبت استفاده از خط‌کش مورد نظر است!

فکر می‌کنید چگونه از آن استفاده می‌کنید؟

آن‌چه از مسأله قبل یاد گرفته‌اید آن است که باید خطی از D چنان بگذرد که اگر دایره را در نقطه‌ای مانند C و خط OA را در نقطه‌ای مانند M قطع کند، MC برابر شعاع دایره باشد. بنابراین، یک لبه خط‌کش را مطابق شکل روی نقطه D قرار داده و خط‌کش را چنان جابه‌جا می‌کنیم که یک نشانه آن مثلاً E روی دایره و نشانه دیگر F روی خط OA واقع شود.

بنابراین $OE = EF$. اکنون $m\angle DFA = \frac{۱}{۳} m\angle XOY$. چرا؟