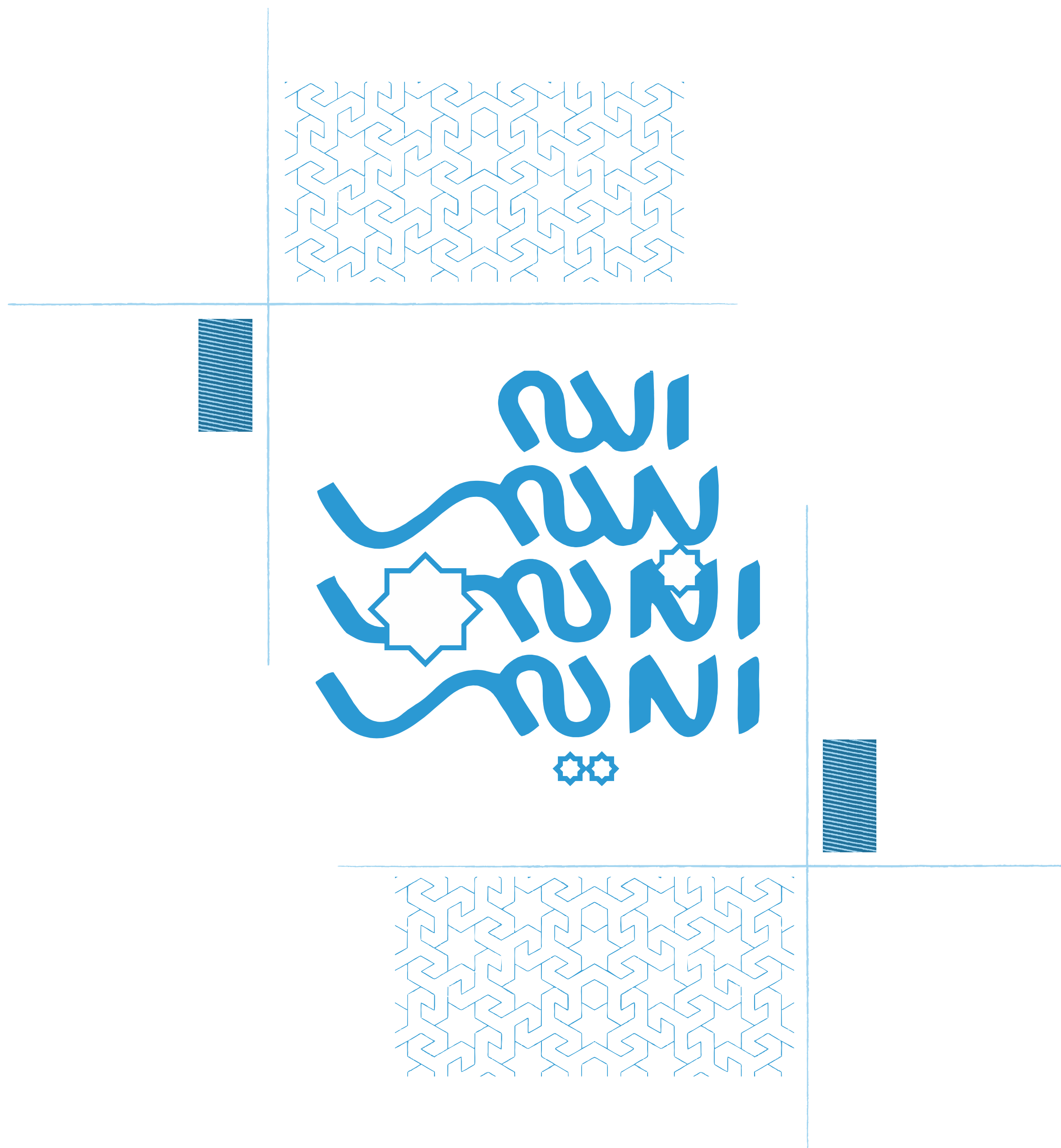
کتاب آموزش

هندسه یازدهم یکتا

از مجموعه رشادت

(ریاضی فیزیک)

علی صادقی



مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «هندسه یازدهم یکتا» از مجموعه «رشادت» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب هندسه پایهٔ یازدهم را به‌صورت مفهومی آموزش می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با مباحث هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌های فراوان بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی پرسش‌های تشریحی و چهارگزینه‌ای را پاسخ می‌دهد تا بر موضوع تسلط یابد. برخی از پرسش‌ها که با علامت * مشخص شده‌اند، کمی دشوار می‌باشند که برای به چالش کشیدن دانش‌آموزان علاقه‌مند طراحی شده است.

در ادامه سؤالات کنکورهای سراسری و یک آزمون چهارگزینه‌ای برای هر درس جهت خودآزمایی آورده شده است.

همچنین سطح‌بندی پرسش‌ها، اعم از تشریحی، چهارگزینه‌ای، آزمون و کنکورهای سراسری در بخش پاسخ‌ها، انجام گرفته است.

انتظار می‌رود کتاب حاضر، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان کلاس یازدهم را در درس هندسه که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای علی صادقی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم.

هم‌چنین از خانم‌ها محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، سمانه مسروری و سارا لطفی مقدم و بهاره خدامی (گرافیست‌ها)، زهرا گودرز و سپیده رشیدی (طرح جلد) سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم هندسه و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادها خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل ۱
دایره

فصل ۲
کاربردها و تبدیل‌های هندسی

فصل ۳
روابط طولی در مثلث

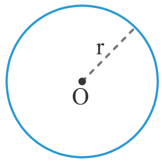
فصل ۱

دایره

درس ۱ مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره

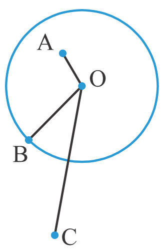
به تمام نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز O) به فاصله یکسان و ثابت (شعاع r) باشند دایره‌ای به مرکز O و شعاع r گفته می‌شود.



– در شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم شده است.

– دایره به مرکز O و شعاع r را به‌صورت $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.

اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره



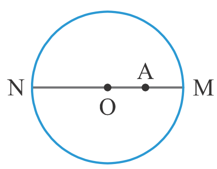
۱. نقطه درون دایره: نقطه A درون دایره است اگرو تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره کمتر از r (شعاع دایره) باشد. یعنی $OA < r$.

۲. نقطه روی دایره: نقطه B روی دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره برابر با r (شعاع دایره) باشد. یعنی $OB = r$.

۳. نقطه خارج دایره: نقطه C خارج دایره است اگر و تنها اگر فاصله آن تا مرکز دایره بزرگتر از r (شعاع دایره) باشد. یعنی $OC > r$.

بیشترین و کمترین فاصله یک نقطه از یک دایره

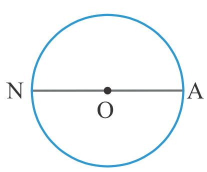
بیشترین و کمترین فاصله نقطه A از یک دایره را با توجه به اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره در ۳ حالت زیر بررسی می‌کنیم.



الف) نقطه A درون دایره باشد: در این حالت، قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایـره را درنقـاط M و N قطع کند. در این صورت M نزدیکترین نقطه از دایره به A و N دورترین نقطه از دایره به A می‌باشد ولذا

بیشترین فاصله A از دایره $= R + OA$

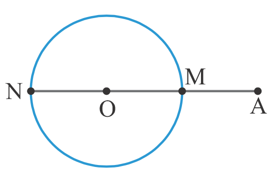
کمترین فاصله A از دایره $= R - OA$



ب) نقطه A روی دایره باشد: در این حالت، قطر گذرنده از A را رسم مـی‌کنیـم. نزدیکتـرین نقطـه از دایره به A خود A، و دورترین نقطه از دایره به A، نقطه N می‌باشد ولذا

بیشترین فاصله A از دایره $= 2R$

کمترین فاصله A از دایره $= 0$



پ) نقطه A خارج دایره باشد: در این حالت، از A به مرکز دایره (O) وصل کرده امتداد می‌دهیم تا دایره را در M و N قطع کند. M نزدیکترین نقطه از دایره به A و N دورترین نقطه از دایره به A می‌باشد ولذا

بیشترین فاصله A از دایره $= OA + R$

کمترین فاصله A از دایره $= OA - R$

تست

۱: بیشترین و کمترین فاصله نقطه A از یک دایره به‌ترتیب ۱۰ و ۶ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۲ یا ۸ ✓

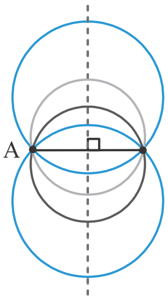
پاسخ: چون وضعیت نقطه A و دایره را نمی‌دانیم دو وضعیت درنظر می‌گیریم (نقطه A روی دایره نیست زیرا باید در ایـن صـورت کمترین فاصله صفر باشد).

درون دایره $A \Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = R - OA = 6 \\ \text{بیشترین‌فاصله} = R + OA = 10 \end{cases} \Rightarrow R = 8$

خارج دایره $A \Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین فاصله} = OA - R = 6 \\ \text{بیشترین‌فاصله} = OA + R = 10 \end{cases} \Rightarrow R = 2$

تذکر

۱. *از دو نقطه متمایز A و B (شکل مقابل) بی‌شمار دایره می‌گذرد که مرکز همه دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار می‌گیرد. با توجه به شکل مقابل، شعاع‌های این دایره‌ها همواره بزرگ‌تر یا مساوی نصف AB می‌باشد. یعنی $R \geq \frac{AB}{۲}$. بنابراین کوچک‌ترین دایره‌ای که از A و B می‌گذرد، دایره‌ای است که AB قطر آن ($R = \frac{AB}{۲}$) و وسط AB مرکز آن باشد.*



تست

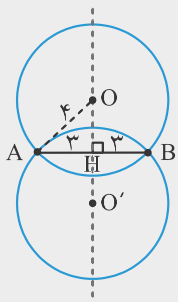
۲: پاره‌خط $AB = ۶$ مفروض است، چند دایره به شعاع ۴ از A و B می‌گذرد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ✓ ۴) بی‌شمار

پاسخ: طبق تذکر ۱ مرکز چنین دایره‌هایی باید روی عمودمنصف AB قرار داشته باشند و همچنین $OA = OB = ۴$. بنابراین:

$$OAH : \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow OH^۲ = OA^۲ - AH^۲ = ۴^۲ - ۳^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \Rightarrow OH = \sqrt{۷}$$

درنتیجه دو نقطه O و O' روی عمودمنصف AB و در طرفین AB به فاصله $\sqrt{۷}$ از آن، مرکز دایره‌های موردنظر می‌باشند و لذا ۲ دایره وجود دارد.



تست

۳: پاره‌خط AB به طول ۶ مفروض است. اگر تنها دو دایره به شعاع $۶x - ۱$ از A و B بگذرد، حدود x کدام است؟

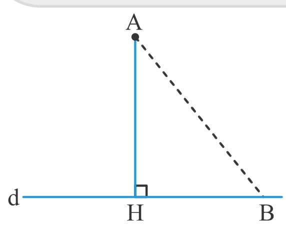
۱) $x > \frac{۱}{۶}$ ۲) $x > ۱$ ۳) $x > \frac{۲}{۳}$ ✓ ۴) $\frac{۱}{۶} < x < \frac{۲}{۳}$

پاسخ: طبق تذکر ۱ باید داشته باشیم $R > \frac{AB}{۲}$ (اگر $R = \frac{AB}{۲}$ باشد تنها یک دایره از A و B می‌گذرد). بنابراین:

$$۶x - ۱ > \frac{۶}{۲} \Rightarrow ۶x > ۴ \Rightarrow x > \frac{۲}{۳}$$

یادآوری (فاصله نقطه از خط): خط d و نقطه A مفروضند. اگر H پای عمودی باشد که از A به خط d رسم می‌شود، اندازه پاره‌خط AH را فاصله نقطه A ازخط d می‌گوییم.

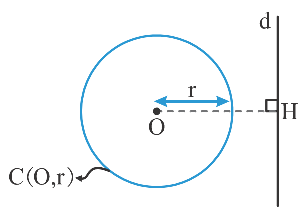
واضح است که این فاصله (AH) کوتاه‌ترین فاصله نقطه A از سایر نقاط خط d است ($AH < AB$).



اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

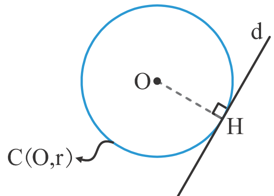
۱. **خط خارج دایره است (متخارج):** در این حالت خط و دایره، هیچ نقطه مشترکی ندارند و فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره بیشتر است.

$OH > r \Leftrightarrow$ خط d خارج دایره است



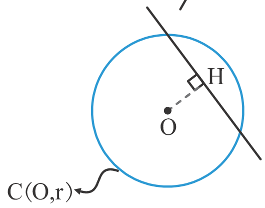
۲. **خط مماس بر دایره است:** در این حالت خط و دایره، تنها یک نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره است.

$OH = r \Leftrightarrow$ خط d بر دایره مماس است



۳. **خط و دایره متقاطع‌اند:** در این حالت خط و دایره دو نقطه مشترک دارند و فاصله مرکز دایره تا خط از شعاع دایره کمتر است.

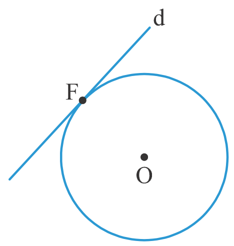
$OH < r \Leftrightarrow$ خط d و دایره متقاطع‌اند.



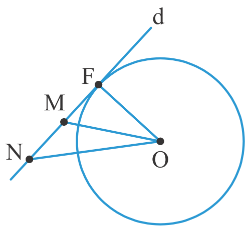
تذکر

۲. *به خطی که دایره را در دو نقطه قطع کند، خط قاطع می‌گویند.*

ویژگی خط مماس بر دایره

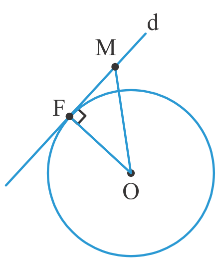


فرض کنیم خط d بر دایره C مماس است. نزدیک‌ترین نقطه خط d به نقطه O نقطه F است. زیرا می‌دانیم $OF = R$ و هر نقطه دیگر از خط d خارج دایره است و بنابراین فاصله آن‌ها از مرکز دایره بیشتر از شعاع است. اگر از O به d عمود کنیم، این خط عمود، خط d را در نقطه F قطع می‌کند. زیرا اگر فرض کنیم که در F قطع نکند، پس نقطه دیگری مانند M وجود دارد که OM بر خط d عمود است و M پای عمود می‌باشد. نقطه دیگری مانند N روی خط d هست که M بین N و F قرار دارد و $FM = MN$ درنتیجه



$$\left.\begin{array}{l} FM = MN \\ F\hat{M}O = N\hat{M}O = ۹۰^\circ \\ OM = OM \end{array}\right\} \Rightarrow OMN \cong OMF \Rightarrow ON = OF = R$$

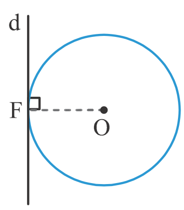
بنابراین نقطه N نیز روی دایره است و این با فرض مماس بودن خط d بر دایره، تناقض دارد. پس خط مماس، در نقطه F بر OF عمود است. بنابراین اگر F نقطه‌ای روی دایره باشد، شعاع OF و خط مماس بر دایره در نقطه F، هم عمودند.



حال فرض می‌کنیم d در نقطه F به شعاع OF عمود باشد. همچنین فرض می‌کنیم M نقطه دیگری غیر از F روی خط d باشد. چون $OM > OF$ درنتیجه نقطه M خارج دایره C است. بنابراین خط d با دایره C فقط یک نقطه مشترک دارد و در خط d بر دایره مماس است. بنابراین:

خط d در نقطه F بر دایره C مماس است اگر و تنها اگر خط d بر شعاع گذرنده از F عمود باشد.

طریقه رسم خط مماس بر دایره از یک نقطه روی دایره

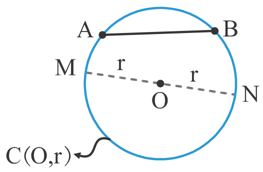


اگر F نقطه‌ای روی دایره $C(O,r)$ باشد طبق ویژگی خط مماس، برای اینکه در نقطه F مماس بر دایره رسم کنیم، کافی است ابتدا از O به F وصل کرده سپس در نقطه F عمودی بر خط OF خارج کنیم. این خط چون بر شعاع گذرنده از F عمود است، بنابراین در F بر دایره مماس خواهد بود.

تذکر

۳. *در هر نقطه از یک دایره تنها و تنها یک مماس بر آن دایره می‌توان رسم کرد. (چرا؟)*

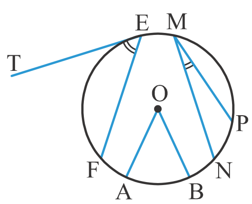
چند تعریف اولیه



۱. شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن روی دایره باشد، شعاع نامیده می‌شود.

۲. وتر دایره: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد، وتر دایره نامیده می‌شود (وتر AB در شکل مقابل).

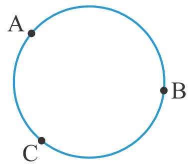
۳. قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد، قطر دایره نامیده می‌شود (قطر MN در شکل مقابل). واضح است که قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.



۴. زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاعش، شعاع‌های دایره‌اند. (زاویه $A\hat{O}B$)

۵. زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره‌اند. (زاویه $N\hat{M}P$)

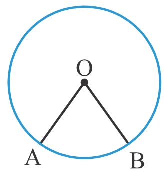
۶. زاویه ظلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. (زاویه $T\hat{E}F$)



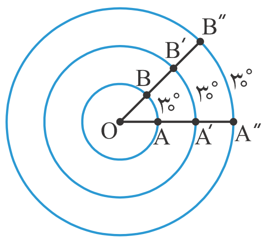
۷. کمان: دو نقطه A و B را روی دایره درنظر می‌گیریم. این دو نقطه، محیط دایـره را بـه دو بخـش تقسیم می‌کنند، که به هر یک از آن بخش‌ها، کمان یا قوس می‌گوییم.

– کمان AB را به‌صورت $\overset{\frown}{AB}$ می‌نویسیم و می‌خوانیم «کمان AB». وقتی می‌نویسیم $\overset{\frown}{AB}$ منظور کمان کوچکتر می‌باشد. برای نشان دادن کمان بزرگتر از نقطه کمکی مانند C استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $\overset{\frown}{ACB}$.

– هر قطر، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند که این دو کمان‌ها را نیم‌دایره می‌نامیم.



۸. اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی مقابل بـه آن تعریـف مـی‌شـود و واحـد آن درجـه اسـت. به‌عبارت دیگر اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابل به آن است. یعنی: $\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$



۹. با توجه به شکل مقابل، واضح است که کمان‌های دایره‌های مختلف می‌تواننـد انـدازه‌هـای برابـر و طول‌های نابرابر داشته باشند. اندازه هر سه کمان $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{A'B'}$ و $\overset{\frown}{A''B''}$ برابرند در صورتی که طول این کمان‌ها نابرابرند.

۱۰. باتوجه به اینکه محیط دایره، یک کمان به اندازه °۳۶۰ است لذا برای به‌دست آوردن طول کمانی مانند AB می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ}$$

(π برحسب رادیان یعنی $\pi \simeq ۳/۱۴$)

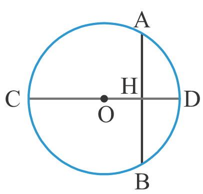
مسأله

۱: **در دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر، طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ با اندازه °۶۰ را به‌دست آورید**

پاسخ:

$$\frac{۶۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB}}{۲\pi(۴)} \Rightarrow \text{طول کمان } \overset{\frown}{AB} = \frac{۸\pi}{۶} = \frac{۴\pi}{۳} \simeq \frac{۴(۳/۱۴)}{۳} \simeq ۴/۱۸\ \text{cm}$$

ویژگی‌های مربوط به یک وتر و کمان نظیر آن



در زیر ویژگی‌های مربوط به یک وتر از دایره و کمان نظیر آن وتر را بررسی می‌کنیم.

۱. در هر دایره، قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند به عبارت دیگر

$$OD \perp AB \Rightarrow \begin{cases} AH = HB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \text{ و } \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB} \end{cases}$$

۲. در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط وتری از آن دایره وصل می‌شود، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند. به‌عبارت دیگر:

$$AH = HB \Rightarrow \begin{cases} OD \perp AB \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \end{cases}$$

۳. در هر دایره، خطی که از مرکز دایره، به وسط کمانی از آن دایره وصل می‌شود، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نصف می‌کند. به‌عبارت دیگر:

$$\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \Rightarrow \begin{cases} OD \perp AB \\ AH = HB \end{cases}$$

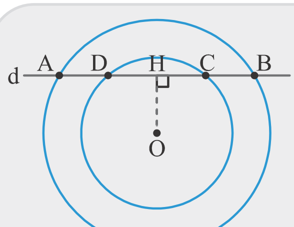
تذکر

۴. *اثبات ویژگی‌های فوق در بخش پرسش‌های تشریحی مطرح شده است (پرسش‌های ۱، ۲ و ۳ جواب: صفحه ۹۴).*

تذکر

۵. *با توجه به ویژگی‌های فوق، اگر نقاط وسط وتر AB و وسط کمان AB را به هم وصل کنیم، امتدا پاره‌خط حاصل از مرکز دایـره مـی‌گـذرد و این خط در وسط وتر AB، بر وتر AB عمود است.*

مسأله



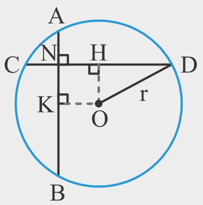
۲: **خطی مطابق شکل، دو دایره هم مرکز را قطع می‌کنـد و دو پـاره‌خـط بـین دو دایـره محصور (محدود) می‌شوند. ثابت کنید این دو پاره‌خط با هم برابرند.**

پاسخ: از O بر خط d عمود می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} OH \perp AB \Rightarrow AH = HB \\ OH \perp DC \Rightarrow DH = HC \end{array}\right\} \Rightarrow AH - DH = HB - HC \Rightarrow AD = BC$$

تست ۴: مطابق شکل مقابل دو وتر AB و CD بر هم عمودند. اندازه شعاع دایره کدام است؟ ($AN = CN = ۲$ و $ND = NB = ۶$)

۱) $\sqrt{۵}$ ✓ ۲) $۲\sqrt{۵}$ ۳) $۳\sqrt{۵}$ ۴) ۵



پاسخ:

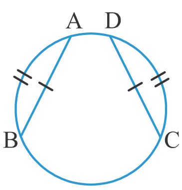
از مرکز دایره به هر یک از دو وتر عمود می‌کنیم. بنابراین $CH = HD = \frac{CD}{۲} = ۴$ و $AK = KB = \frac{AB}{۲} = ۴$.

$$NK = AK - AN = ۴ - ۲ = ۲ \Rightarrow OH = ۲$$

$$\overset{\Delta}{OHD} : \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow r^۲ = OH^۲ + HD^۲ = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow r = ۲\sqrt{۵}$$

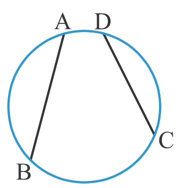
ویژگی‌های مربوط به دو وتر از یک دایره

۱. در هر دایره، اگر دو وتر با هم برابر باشند، آنگاه کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس. به‌عبارت دیگر:



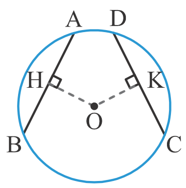
$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

۲. در هر دایره، اگر دو وتر نابرابر باشند، کمان نظیر وتر بزرگ‌تر، از کمان نظیر وتر کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و برعکس. به‌عبارت دیگر:



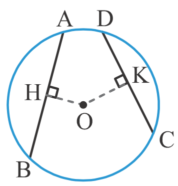
$$AB > CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$$

۳. در هر دایره، وترهای برابر، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. به‌عبارت دیگر:



$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$$

۴. در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است، به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس. به‌عبارت دیگر:



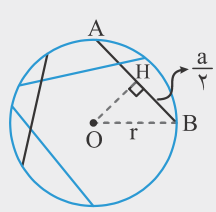
$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OK$$

تذکر ۶. *اثبات ویژگی‌های فوق در بخش پرسش‌های تشریحی مطرح شده است* (پرسش‌های ۴ تا ۷ ـ جواب: صفحات ۹۴ و ۹۵).

مسئله ۳: ثابت کنید در دایره $C(O,r)$ وسط وترهایی به طول a، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{r^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$ قرار می‌گیرند.

پاسخ:

می‌دانیم در دایره وترهای مساوی همگی از مرکز به یک فاصله‌اند و فاصله مرکز تا هر یک از وترهای مساوی، خطی است عمود در وسط این وترها. بنابراین وسط این وترها همگی از مرکز به یک فاصله‌اند. درنتیجه روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع OH قرار می‌گیرند. طول OH را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.



$$\overset{\Delta}{OHB} : \hat{H} = ۹۰^\circ \Rightarrow OH^۲ = r^۲ - \frac{a^۲}{۴} \Rightarrow OH = \sqrt{r^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$$

تست

۵: در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶، وسط وترهایی به طول ۲ روی کدام دایره قرار می‌گیرد؟

۱) $C(O,۶)$ ۲) $C(O,\sqrt{۳۳})$ ۳) $C(O,\sqrt{۳۴})$ ۴) $C(O,\sqrt{۳۵})$ ✓

پاسخ:

با توجه به مسأله قبل، وسط وترهایی به طول ۲ در دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۶، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{۶^۲-\frac{۲^۲}{۴}}=\sqrt{۳۵}$ قرار می‌گیرند. یعنی $C(O,\sqrt{۳۵})$.

تست

۶: در دایره $C(O,۶)$ دو وتر $AB=۲x-۱$ و $CD=x^۲-۴$ به‌گونه‌ای می‌باشند که وتر AB از مرکز دایره دورتر است. در این صورت چند مقدار صحیح برای x وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ:

اولاً باید طول این وترها مثبت باشد. بنابراین:

$$AB>۰\Rightarrow ۲x-۱>۰\Rightarrow x>\frac{۱}{۲}$$
$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۲$$
$$CD>۰\Rightarrow x^۲-۴>۰\Rightarrow x^۲>۴\Rightarrow x>۲ \text{ یا } x<-۲$$

ثانیاً از آنجا که وتر AB از مرکز دایره دورتر است نتیجه می‌شود که $AB<CD$. بنابراین:

$$AB<CD\Rightarrow ۲x-۱<x^۲-۴\Rightarrow x^۲-۲x-۳>۰\Rightarrow x<-۱ \text{ یا } x>۳$$

ثالثاً باید این وترها از قطر دایره کوچکتر مساوی باشند. بنابراین:

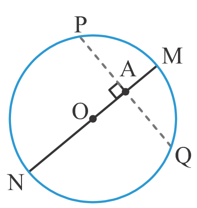
$$CD\le ۱۲\Rightarrow x^۲-۴\le ۱۲\Rightarrow x^۲\le ۱۶\Rightarrow -۴\le x\le ۴$$

بنابراین اشتراک بازه‌های $(x>۲)$ و $(x>۳ \text{ یا } x<-۱)$ و $(-۴\le x\le ۴)$ حدود تغییرات x می‌باشد که $۳<x\le ۴$ است. در این بازه هم تنها عدد $x=۴$، یک عدد صحیح است.

وتر ماکزیمم (بزرگترین) و وتر مینیمم (کوچکترین) گذرنده از یک نقطه داخل دایره

فرض می‌کنیم A نقطه دلخواه (غیر مرکز) درون دایره $C(O,r)$ باشد. می‌دانیم از نقطه A بی‌شمار وتر می‌گذرد. بزرگترین وتر گذرنده از A، قطر گذرنده از A می‌باشد و کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که در نقطه A بر قطر گذرنده (بزرگترین وتر) از A عمود باشد.

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۸» ـ جواب: صفحه ۹۵)



در شکل مقابل وتر MN بزرگترین وتر گذرنده از A و PQ کوچکترین وتر گذرنده از A می‌باشد.

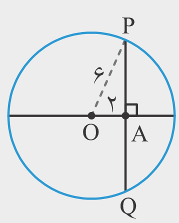
تست

۷: در دایره $C(O,۶)$، نقطه A به فاصله ۲ واحد از مرکز دایره قرار دارد. اندازه کوچکترین وتر گذرنده از A کدام است؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۶\sqrt{۲}$ ۳) $۸\sqrt{۲}$ ✓ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

پاسخ:

کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که بر قطر گذرنده از A عمود باشد. بنابراین:



$$OA\perp PQ\Rightarrow PA=AQ=\frac{۱}{۲}PQ$$

$$\overset{\Delta}{PAO}: PA^۲=OP^۲-OA^۲=۳۶-۴=۳۲\Rightarrow PA=۴\sqrt{۲}\Rightarrow PQ=۸\sqrt{۲}$$

تست

۸: در دایره $C(O,۶)$، نقطه A به فاصله ۲ واحد از مرکز دایره قرار دارد. چند وتر داخل دایره می‌توان رسم کرد که از A بگذرند و طول آن‌ها برابر با ۸ باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) صفر ✓

پاسخ:

طبق تست قبل طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A برابر با $۸\sqrt{۲}$ است و این بدین معنی است که وتری با طول کمتر از $۸\sqrt{۲}$ وجود ندارد.

تست

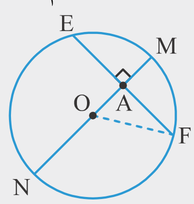
۹: نقطه A درون دایره C مفروض است. اگر طول کوچکترین و بزرگترین وتر از دایره C که از نقطه A می‌گذرند به‌ترتیب ۱۲ و ۱۵ باشد، فاصله نقطه A تا مرکز دایره چقدر است؟

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ✓ ۳) ۵ ۴) ۵/۵

پاسخ:

بزرگترین وتر گذرنده از A، قطر گذرنده از A و کوچکترین وتر گذرنده از A، وتری است که در A بر قطر عمود است.

همچنین قطر عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند. بنابراین در شکل زیر داریم: $EA = AF = ۶$ و شعاع دایره $R = \frac{۱۵}{۲}$. از O به F وصل می‌کنیم:

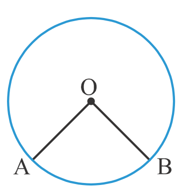


$$O\overset{\Delta}{A}F: OA^{۲} = OF^{۲} - AF^{۲}$$

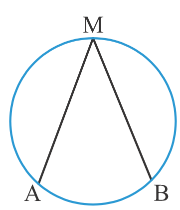
$$OA^{۲} = (\frac{۱۵}{۲})^{۲} - ۶^{۲} = \frac{۸۱}{۴} \Rightarrow OA = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

انواع زوایا در دایره

به‌طور کلی در دایره ۷ نوع زاویه به‌صورت زیر وجود دارد. برخی از این زاویه در قبل تعریف شده ولی جهت یادآوری به هر ۷ نوع زاویه اشاره کرده و اندازه هر یک را مشخص می‌کنیم.

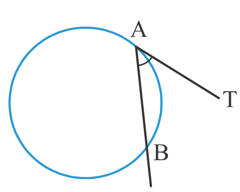


۱. زاویه مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاعش، شعاع‌های دایره‌اند.
طبق تعریف، اندازه زاویه مرکزی برابر با اندازه کمان مقابلش است. یعنی: $\hat{O} = \overset{\frown}{AB}$



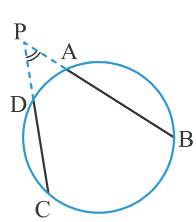
۲. زاویه محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاعش دو وتر از دایره‌اند. ثابت می‌شود اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان مقابلش است. یعنی $\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۹» ـ جواب: صفحه ۹۶)



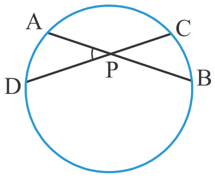
۳. زاویه ظِلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و یکی از اضلاع آن، وتر دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. ثابت می‌شود اندازه هر زاویه ظِلّی، برابر با نصف کمان مقابلش است.
یعنی $B\hat{A}T = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۰» ـ جواب: صفحه ۹۶)



۴. زاویه بین امتداد دو وتر: (زاویه بین دو قاطع یا زاویه وتری خارجی): زاویه‌ای است که از برخورد امتداد دو وتر از دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.
یعنی: $\hat{P} = \frac{|\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}|}{۲}$

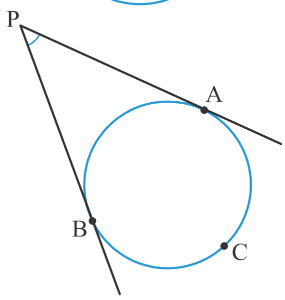
(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۱» ـ جواب: صفحه ۹۶)



۵. زاویه بین دو وتر (زاویه وتری داخلی): زاویه‌ای است که از برخورد دو وتر در داخل دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شـود انـدازه ایـن زاویـه برابـر اسـت بـا نصـف مجمـوع انـدازه کمـان‌هـای روبـرویش.

یعنی: $\hat{P} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}}{۲}$

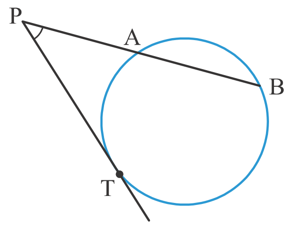
(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۲» ـ جواب: صفحه ۹۶)



۶. زاویه بین دو مماس: زاویه‌ای است که از برخورد دو مماس بر یک دایره و در خارج دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش. یعنی:

$$\hat{P} = \frac{\left|\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{AB}\right|}{۲}$$

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۳» ـ جواب صفحه ۹۶)

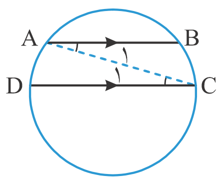


۷. زاویه بین قاطع و مماس (زاویه بین امتداد وتر و مماس): زاویه‌ای است که از برخورد امتـداد یـک وتر و یک مماس بر دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود.
ثابت می‌شود اندازه این زاویه برابر است با نصف قـدرمطلق تفاضـل انـدازه کمـان‌هـای روبـرویش.

یعنی: $\hat{P} = \dfrac{\left|\overset{\frown}{BT} - \overset{\frown}{AT}\right|}{۲}$

(اثبات در بخش پرسش‌های تشریحی بیان شده است «پرسش ۱۴» ـ جواب صفحه ۹۷)

نکته



۱. *در هر دایره، کمان‌های محصور (محدود) بین دو وتر موازی، با هم برابرند. به‌عبارت دیگر:*

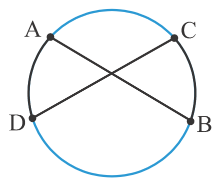
$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

اثبات

از A به C وصل می‌کنیم و از قضیه خطوط موازی و مورب، کمک می‌گیریم.

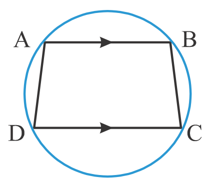
$$\begin{cases} AB \parallel DC \\ \text{مورب } AC \end{cases} \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{C}_۱ \xrightarrow{\hat{A}_۱ \text{ و } \hat{C}_۱ \text{ محاطی‌اند}} \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AD}$$

مهم تذکر



توجه شود که عکس مطلب فوق برقرار نمی‌باشد یعنی ممکن است دو کمان با هم برابر باشند ولی وترهای مربوطه با هم موازی نباشند. در شکل مقابل $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ ولی دو وتر AB و CD موازی نیستند!

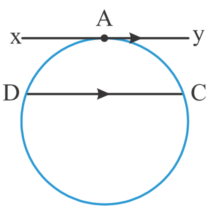
مهم نتیجه



با توجه به نکته ۱ می‌توان گفت ذوزنقه‌ای که رئوس آن بر روی یک دایره باشد، حتماً متساوی‌الساقین است.

$$AB \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC} \Rightarrow AD = BC$$

نکته

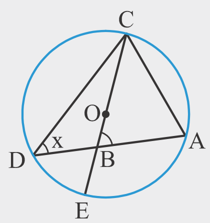


۲. *(حالت خاص نکته ۱) در هر دایره، کمان‌های محصور (محدود) بین یک وتر و مماس موازی با آن، با هم برابرند. به‌عبارت دیگر:* $xy \parallel DC \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{AC}$

اثبات: مشابه اثبات نکته ۱ عمل کنید.

تست

۱۰: در شکل زیر O مرکز دایره است. اگر $\hat{A} = ۷۵°$ و $\hat{B} = ۵۰°$ در این صورت مقدار x کدام است؟



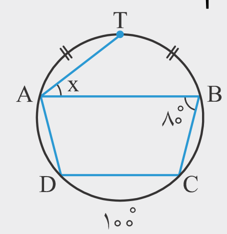
۱) ۳۰° ۲) ۳۵° ✓ ۳) ۴۰° ۴) ۴۵°

پاسخ: زوایای $\hat{D}$ و $\hat{A}$ محاطی‌اند. بنابراین: $\overset{\frown}{AC} = ۲x$ و $\overset{\frown}{DC} = ۱۵۰°$. می‌دانـیم $\overset{\frown}{CDE} = ۱۸۰°$، درنتیجه $\overset{\frown}{DE} = ۳۰°$. زاویه $\hat{B}$ زاویه بین دو وتر است، و لذا:

$$\hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{DE}}{۲} \Rightarrow ۵۰° = \frac{۲x + ۳۰°}{۲} \Rightarrow x = ۳۵°$$

تست

۱۱: در شکل زیر، وترهای AB و CD موازیند. $\overset{\frown}{CD}=۱۰۰^\circ$ و T وسط کمان AB است. زاویه x کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) ۲۵° ۳) ۳۰° ۴) ۳۵° ✓

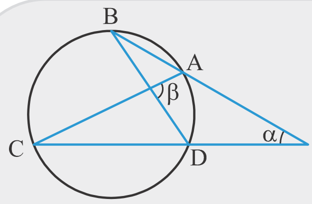
پاسخ: از آنجا که وترهای AB و CD موازیند، نتیجه می‌شود که $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$. از طرفی زاویه $\hat{B}$ محاطی است، و لذا

$$\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{ADC}}{۲}\Rightarrow ۸۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AD}+۱۰۰^\circ}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۶۰^\circ=\overset{\frown}{BC}$$

$$\overset{\frown}{ATB}=۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{AD}+۱۰۰^\circ+\overset{\frown}{BC})=۳۶۰^\circ-(۱۰۰^\circ+۱۲۰^\circ)=۱۴۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{TB}=\frac{۱۴۰^\circ}{۲}=۷۰^\circ\Rightarrow x_{\text{محاطی}}=\frac{\overset{\frown}{TB}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$

تست

۱۲: در شکل مقابل اگر $B\hat{A}C=۳A\hat{B}D$ باشد، آنگاه زاویه β چند برابر زاویه α است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۲ ✓

۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: فرض می‌کنیم $A\hat{B}D=x$. بنابراین $B\hat{A}C=۳x$. زوایای $A\hat{B}D$ و $B\hat{A}C$ محاطی‌اند ولذا نصف کمان روبرویشان می‌باشند. درنتیجه:

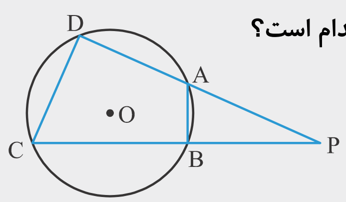
$$A\hat{B}D=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=۲x$$

$$B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۶x$$

از طرفی: $\alpha=\frac{\overset{\frown}{BC}-\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۶x-۲x}{۲}=۲x\Rightarrow \alpha=۲x$ و $\beta=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}}{۲}=\frac{۶x+۲x}{۲}=۴x$. بنابراین $\beta=۲\alpha$.

تست

۱۳: در دایره $C(O,R)$ شکل مقابل، $AB=R$ و $CD=\sqrt{۲}R$ می‌باشند. مقدار زاویه P کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) $۲۲/۵^\circ$

۳) ۱۵° ✓ ۴) ۳۰°

پاسخ: از O به A و B و C و D وصل می‌کنیم. داریم:

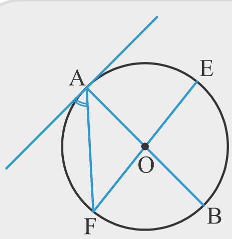
$$OA=OB=AB=R\Rightarrow OAB\ \text{متساوی الاضلاع}\Rightarrow A\hat{O}B=۶۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$$

$$OD=OC=R\ \text{و}\ CD=\sqrt{۲}R\Rightarrow DOC\ \text{قائم الزاویه}\Rightarrow D\hat{O}C=۹۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{DC}=۹۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{P}=\frac{\overset{\frown}{DC}-\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۹۰^\circ-۶۰^\circ}{۲}=۱۵^\circ$$

تست

۱۴: در شکل مقابل O مرکز دایره و $\hat{A}=۵۸^\circ$ است. اندازه کمان $\overset{\frown}{AE}$ کدام است؟



۱) ۶۴° ✓ ۲) ۶۸°

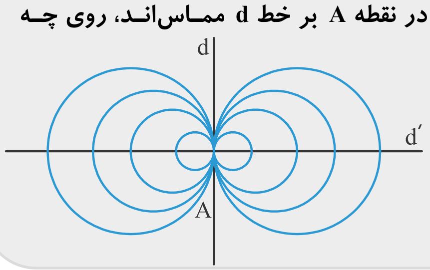
۳) ۷۲° ۴) ۷۴°

پاسخ: زاویه A ظلّی است و بنابراین $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{AF}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AF}=۱۱۶^\circ$. همچنین:

$$\overset{\frown}{AFB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AF}+\overset{\frown}{FB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow ۱۱۶^\circ+\overset{\frown}{FB}=۱۸۰^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{FB}=۶۴^\circ\Rightarrow \overset{\frown}{AE}=۶۴^\circ$$

مسأله

۴: خط d و نقطه A روی آن مفروض است. مرکزهای همه دایره‌هایی که همگی در نقطه A بر خط d مماس‌اند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعی نسبت به خط d دارد؟



پاسخ: مطابق شکل مقابل، مرکزهای همه دایره‌هایی که همگی در نقطه A بر خط d مماس‌اند، روی یک خط قرار می‌گیرند (d')، که با توجه به اینکه مماس بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود است، این خط در نقطه A بر خط d عمود می‌شود.

پرسش‌های تشریحی

۱. ثابت کنید، در هر دایره قطر عمود بر یک وتر، آن وتر و کمان نظیر آن را نصف می‌کند.

۲. ثابت کنید، در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط وتری از آن دایره وصل می‌شود، بر آن وتر عمود است و کمان نظیر آن وتر را نصف می‌کند.

۳. ثابت کنید، در هر دایره خطی که از مرکز دایره، به وسط کمانی از آن دایره وصل می‌شود، بر وتر نظیر آن کمان عمود است و آن وتر را نصف می‌کند.

۴. ثابت کنید، در هر دایره، اگر دو وتر با هم برابر باشند، آنگاه کمان‌های نظیر آن‌ها نیز با هم برابرند و برعکس.

*۵. ثابت کنید، در هر دایره، اگر دو وتر نابرابر باشند، کمان نظیر وتر بزرگتر، از کمان نظیر وتر کوچکتر، بزرگتر است و برعکس.

۶. ثابت کنید، در هر دایره، وترهای برابر، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس.

۷. ثابت کنید، در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگتر است، به مرکز دایره نزدیکتر است و برعکس.

۸. ثابت کنید، کوچکترین وتری که از نقطه A داخل دایره می‌گذرد، وتری است که در نقطه A بر قطر گذرنده از A عمود باشد.

۹. ثابت کنید، اندازه هر زاویه محاطی، برابر با نصف کمان مقابلش است.

۱۰. ثابت کنید، اندازه هر زاویه ظِلّی، برابر با نصف کمان مقابلش است.

۱۱. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.

۱۲. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو وتر داخل دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف مجموع اندازه کمان‌های روبرویش.

۱۳. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد دو مماس بر یک دایره و در خارج دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف قدر مطلق تفاضل اندازه کمان‌های روبرویش.

۱۴. ثابت کنید، اندازه زاویه‌ای که از برخورد امتداد یک وتر و یک مماس بر دایره، در خارج دایره ایجاد می‌شود برابر است با نصف قدرمطلق اندازه کمان‌های روبرویش.

۱۵. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند.

– همه زوایای مرکزی یک دایره متساویند.

– رأس هر زاویه مرکزی از یک دایره بر مرکز آن دایره واقع است.

– هر دایره فقط شامل دو نیم دایره است.

– هر نیم‌دایره، یک کمان از دایره است.

– هر دایره فقط یک قطر دارد.

– هر دایره با هر وتر آن تنها در دو نقطه مشترک است.

– هر قطر دایره، وتری از دایره است.

– هر وتر دایره، یک قطر دایره است.

– قطرهای یک دایره هم اندازه‌اند.

– بعضی از وترهای یک دایره شعاع دایره‌اند.

– بزرگترین وتری که از یک نقطه داخل دایره می‌گذرد، قطری است که بر آن نقطه مرور می‌کند.

۱۶. عبارات زیر را چنان کامل کنید که هر یک، گزاره‌ای درست باشد.

–کمان‌های مساوی یک دایره، زاویه‌های مرکزی .... دارند.

– در دو دایره نامساوی، کمان‌های .... زاویه‌های مرکزی مساوی دارند.

– هر شعاع از یک دایره، زیر مجموعه‌ای از نقاط .... است.

– نیمساز هر زاویه مرکزی از یک دایره، کمان نظیر آن زاویه را ....

۱۷. پاره‌خط $AB = ۴$ مفروض است.

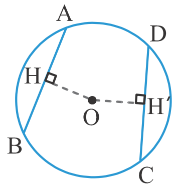
الف) چند دایره از نقاط A و B می‌گذرند؟

ب) چند دایره به قطر ۴ از A و B می‌گذرد؟

پ) چند دایره به شعاع ۴ از A و B می‌گذرد؟

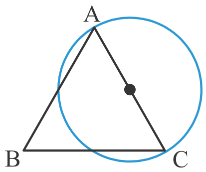
ت) چند دایره به قطر ۳ از A و B می‌گذرد؟

ث) چند دایره به شعاع ۳ از A و B می‌گذرد؟



۱۸. در شکل مقابل، O مرکز دایره است. اگر $AB = ۱۰$ و $CD = ۸$ و $OH = ۶ - x$ و $OH' = ۲x - ۳$ باشد، حدود x را تعیین کنید.

۱۹. نقطه M به فاصله ۲ از مرکز دایره $C(O,۵)$ قرار دارد. طول کوچکتری و بزرگترین وتر گذرنده از این نقطه را به‌دست آورید.



۲۰. در شکل روبرو AC قطر دایره است و $AB = AC$. ثابت کنید دایره از وسط BC می‌گذرد.

۲۱. سه نقطه A و B و C بر یک دایره به مرکز O چنان اختیار شده‌اند که $A\hat{O}B = ۷۵^\circ$ و $B\hat{O}C = ۱۳۶^\circ$ و دو زاویه در دو طرف OB هستند. اندازه کمان $\overset{\frown}{AC}$ را تعیین کنید.

۲۲. بر دایره $C(O,۴)$ نقاطی تعیین کنید که از نقطه A که به فاصله ۶ واحد از مرکز دایره واقع است، به فاصله ۴ واحد باشد.

۲۳. دو وتر مساوی از دایره $C(O,R)$ در نقطه M متقاطع‌اند. ثابت کنید پاره‌خط‌هایی که به‌وسیله نقطه تقاطع روی دو وتر پدید می‌آیند، دوبه‌دو مساوی یکدیگرند.

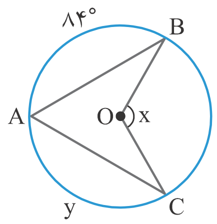
۲۴. ثابت کنید هر دو وتر موازی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند، مساوی‌اند.

۲۵. ثابت کنید هر دو وتر مساوی که بر دو انتهای یک قطر از دایره می‌گذرند و در دو طرف قطر قرار دارند، موازی‌اند.

۲۶. با توجه به شکل مقابل به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید:

الف) اگر $\overset{\frown}{y} = ۱۴۰^\circ$، آنگاه مقدار زاویه x را به‌دست آورید.

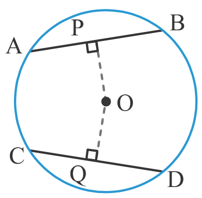
ب) اگر $\hat{x} = ۱۶۵^\circ$، آنگاه اندازه کمان $\overset{\frown}{y}$ را به‌دست آورید.



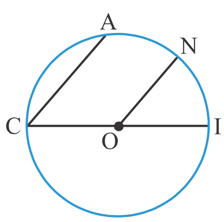
۲۷. با توجه به شکل روبرو:

الف) اگر طول شعاع ۱۰ و $PO = ۶$، آنگاه طول AP و AB را به‌دست آورید.

ب) اگر $OC = \sqrt{۲}$ و $CQ = OQ$، آنگاه طول پاره‌خط‌های CQ، DQ و CD را به‌دست آورید.



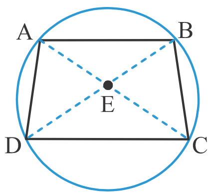
۲۸. در دایره به مرکز O و به قطر CI، داریم $CA \parallel ON$. ثابت کنید $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$.



۲۹. باتوجه به شکل مقابل ثابت کنید:

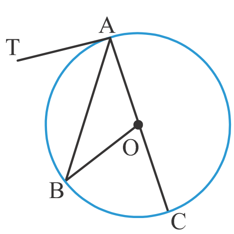
الف) اگر $AD = BC$، آنگاه $AC = BD$.

ب) اگر $AC = BD$، آنگاه $AD = BC$.

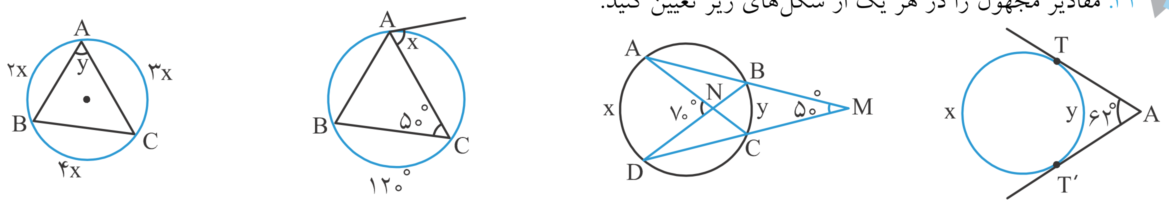


۳۰. شعاع‌های دو دایره هم مرکز ۵ و ۳ سانتی‌متر هستند. اندازه وتری از دایره بزرگتر را که بر دایره کوچکتر مماس است، به‌دست آورید.

۳۱. در شکل مقابل AC قطر دایره و $B\hat{O}C = ۷۰^\circ$ و خط AT در نقطه A بر دایره مماس است. اندازه زاویه $T\hat{A}B$ را تعیین کنید.

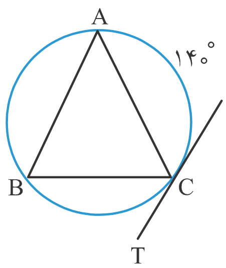


۳۲. مقادیر مجهول را در هر یک از شکل‌های زیر تعیین کنید.

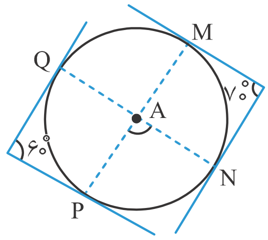


(ت) (پ) (ب) (الف)

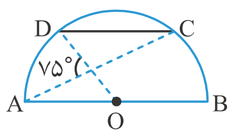
۳۳. در شکل مقابل $AB = AC$ و CT مماس بر دایره در نقطه C و $\widehat{AC} = ۱۴۰^\circ$ است. اندازه زاویه BCT را به‌دست آورید.



۳۴. در شکل مقابل اندازه زاویه A را محاسبه کنید.



۳۵. در شکل مقابل O مرکز نیم‌دایره و $AB \parallel CD$. اندازه کمان CD را به‌دست آورید.

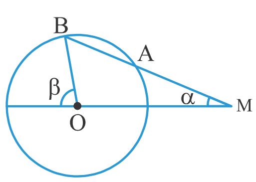


۳۶. در دایره $C(O,R)$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ و $AB = ۱۰$. فاصله O از وتر AB را به‌دست آورید.

۳۷. خط d مفروض است. مرکزهای همه دایره‌هایی که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر این خط مماس هستند، روی چه شکلی هستند؟ این شکل چه وضعی نسبت به d دارد؟

۳۸. دو خط m و n در نقطه A متقاطع‌اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی n و شعاع آن ۲ سانتی‌متر بوده و بر m مماس باشد. (از نتیجه سؤال قبل استفاده کنید)

۳۹. دایره $C(O,R)$ مفروض است. از نقطه M در خارج دایره خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است و $AM = R$. ثابت کنید: $\beta = ۳\alpha$.



۴۰. دو وتر AB و CD از دایره $C(O,R)$ در نقطه‌ای مانند P درون دایره متقاطع‌اند به‌طوری که $\hat{P} = (۷x + ۱۱)^\circ$ و کمان‌های مقابل به آن از دایره $(۲x)^\circ$ و $(x + ۸۸)^\circ$ می‌باشند. اندازه زاویه P را به‌دست آورید.

۴۱. دو وتر عمود بر هم از دایره $C(O,R)$ بر دایره چهار کمان پدید آورده‌اند. اگر اندازه‌های دو کمان از چهار کمان مزبور ۴۰° و ۶۰° باشند، اندازه‌های دو کمان دیگر را تعیین کنید.