



آموزش و آزمون ریاضی و آمار (۱) پایه دهم

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی

مؤلف: مرضیه لطفی

مدیر گروه و ناظر علوم انسانی: اصغر حجازیان

به نام خدا

مقدمه مؤلف

با لطف و عنایت خداوند متعال و الطاف ائمه اطهار علیهم السلام، بسیار خرسندم کتاب آموزش و آزمون ریاضی و آمار (۱) را به شما بزرگواران تقدیم می‌نمایم.

کتاب پیش رو براساس کتاب درسی ریاضی و آمار (۱) پایه دهم متوسطه در رشته‌های ادبیات و علوم انسانی و معارف اسلامی تألیف شده است. ساختار اصلی این کتاب شامل موارد ذیل است:

◀ درسنامه کامل و جامع که علاوه بر توضیح مباحث، نکات و مطالب کلیدی را بیان می‌کند. برای درک و تفهیم بهتر مطالب، مثال‌ها و تمرین‌هایی نیز در هر درسنامه گنجانده شده است.

◀ پرسش‌های چهارگزینه‌ای طبقه‌بندی شده که شامل پرسش‌های تألیفی و کنکور سراسری است و به تدریج به سمت پرسش‌های ترکیبی و عمیق‌تر می‌رود.

◀ پاسخنامه تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای که در آن فرآیند پاسخ‌دهی به هر پرسش، مرحله به مرحله شرح داده شده و نکته مبهمی را باقی نگذاشته است.

◀ آزمون جامع هر فصل که شامل پرسش‌های اصلی هر فصل است و با پاسخ‌دهی به آن‌ها، کل مطالب فصل مرور می‌شود. برای آزمون‌های جامع نیز، پاسخ تشریحی در نظر گرفته شده است.

به طور کلی، درسنامه و پرسش‌های تألیفی به گونه‌ای طراحی شده‌اند که همه مطالب کتاب درسی و انواع تمرین‌های بیان شده در آن را کاملاً پوشش دهند. از این نظر، این کتاب می‌تواند منبع مناسبی برای مطالعه و تمرین دانش‌آموزان باشد.

بر خود لازم می‌دانم از پدر، مادر و خواهر عزیزم صمیمانه قدردانی و تشکر نمایم که اگر همراهی، همفکری و همکاری این عزیزان نبود تألیف حتی یک سطر از این کتاب میسر نمی‌شد.

در پایان وظیفه خود می‌دانم از راهنمایی‌ها و مشورت‌های استاد گرامی جناب آقای حجازیان و نیز از مدیریت محترم انتشارات مبتکران، جناب آقای دهقانی که امکان چاپ این اثر را فراهم نمودند، قدردانی نمایم.

همچنین از خانم‌ها عاطفه لطفی (ویراستار علمی)، عطیه حاجی‌آقامحسینی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، رضیه صفریان (گرافیک و رسم)، نرگس سربندی (رسم) و سمانه ایمانی‌فرد (طراح جلد) سپاسگزارم.

از استادان محترم و دانش‌آموزان عزیز خواهشمندم نظرهای ارزشمند خود را از طریق آدرس الکترونیک marzie.lotfi.riazi@gmail.com با اینجانب در میان بگذارند.

در پایان امیدوارم این کتاب، مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گرفته و موجب فراگیری بهتر و موفقیت‌های بیش‌تر آن‌ها شود.

مرضیه لطفی

۴	مقدمه
۷	فصل اول عبارت‌های جبری
۸	درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها
۲۳	پاسخنامهٔ درس ۱
۳۴	درس ۲ عبارت‌های گویا
۴۴	پاسخنامهٔ درس ۲
۵۷	آزمون جامع فصل ۱
۶۳	فصل دوم معادلهٔ درجهٔ دوم
۶۴	درس ۱ معادله و مسائل توصیفی
۷۲	پاسخنامهٔ درس ۱
۸۰	درس ۲ حل معادلهٔ درجهٔ ۲ و کاربردها
۹۶	پاسخنامهٔ درس ۲
۱۱۴	درس ۳ معادله‌های شامل عبارت‌های گویا
۱۲۳	پاسخنامهٔ درس ۳
۱۳۶	آزمون جامع فصل ۲
۱۴۱	فصل سوم تابع
۱۴۲	درس ۱ مفهوم تابع
۱۶۵	پاسخنامهٔ درس ۱
۱۷۹	درس ۲ ضابطهٔ جبری تابع
۱۹۶	پاسخنامهٔ درس ۲

۲۱۲	نمودار تابع خطی	درس ۳
۲۳۲	پاسخنامه درس ۳	
۲۵۲	نمودار تابع درجه ۲	درس ۴
۲۷۶	پاسخنامه درس ۴	
۲۹۶	آزمون جامع فصل ۳	

آمار

فهرست

۳۰۱	کار با داده‌های آماری	فصل چهارم
۳۰۲	گردآوری داده‌ها	درس ۱
۳۱۳	پاسخنامه درس ۱	
۳۲۰	معیارهای گرایش به مرکز	درس ۲
۳۳۴	پاسخنامه درس ۲	
۳۴۶	معیارهای پراکندگی	درس ۳
۳۶۲	پاسخنامه درس ۳	
۳۷۳	آزمون جامع فصل ۴	

۳۷۷	نمایش داده‌ها	فصل پنجم
۳۷۸	نمودارهای یک متغیره	درس ۱
۳۹۴	پاسخنامه درس ۱	
۴۰۴	نمودارهای چند متغیره	درس ۲
۴۱۵	پاسخنامه درس ۲	
۴۱۹	آزمون جامع فصل ۵	

چند اتحاد جبری و کاربردها

اتحادهای جبری

اتحاد مربع دو جمله‌ای

اتحاد مزدوج

اتحاد جمله مشترک

اتحاد مکعب دو جمله‌ای

اتحاد تفاضل یا مجموع مکعب دو جمله‌ای

کاربردهای اتحادهای جبری

تجزیه عبارت‌های جبری

محاسبات عددی

مثلث خیام

مثلث خیام و بسط دو جمله‌ای‌ها



اتحادهای جبری

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را **اتحاد جبری** می‌نامیم.

(۱) اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(۱-۱) مربع مجموع دو جمله

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(۱-۲) مربع تفاضل دو جمله

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

(۲) اتحاد مزدوج

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

(۳) اتحاد جمله مشترک

(۴) اتحاد مکعب دو جمله‌ای:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

(۴-۱) مکعب مجموع دو جمله

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

(۴-۲) مکعب تفاضل دو جمله

(۵) اتحاد تفاضل یا مجموع مکعب دو جمله‌ای:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

(۵-۱) تفاضل مکعب دو جمله‌ای

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

(۵-۲) مجموع مکعب دو جمله‌ای

درک اتحادها با روش‌های کلامی، جبری، هندسی

اتحاد مربع مجموع دو جمله

بیان کلامی:

مربع جمله دوم + دو برابر حاصل ضرب دو جمله + مربع جمله اول = (جمله دوم + جمله اول)

روش جبری:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

دیدگاه هندسی:

	a	b
a	S_1	S_2
b	S_3	S_4



$$S = (a + b)^2 = \text{مساحت مربع} \quad (1)$$

$$S_1 = a^2 \quad S_2 = ab \quad S_3 = ab \quad S_4 = b^2$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله

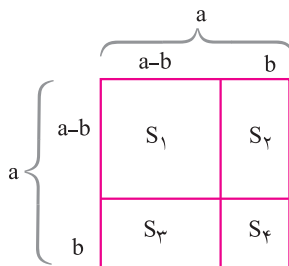
بیان کلامی:

مربع جمله دوم + دو برابر حاصل ضرب دو جمله - مربع جمله اول = (جمله دوم - جمله اول)

روش جبری:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

دیدگاه هندسی:



$$S = a^2 = \text{مساحت مربع}$$

$$S_1 = (a - b)^2 \quad (1) \quad S_2 = b(a - b)$$

$$S_3 = b(a - b) \quad S_4 = b^2$$

$$S_1 = S - S_2 - S_3 - S_4 = a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{cases} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای

اتحاد مزدوج

بیان کلامی:

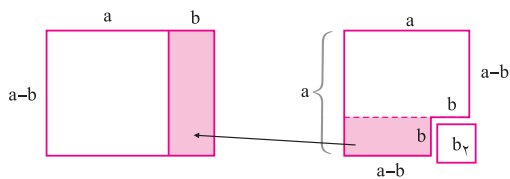
مربع جمله دوم - مربع جمله اول = (جمله دوم - جمله اول) (جمله دوم + جمله اول)

روش جبری:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$



دیدگاه هندسی:



$$S_2 = (a - b)(a + b) \quad S_1 = a^2 - b^2$$

$$S_1 = S_2 \Rightarrow a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

اتحاد جمله مشترک

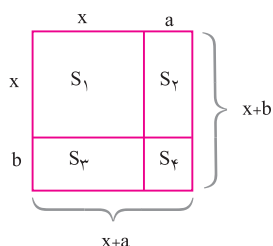
بیان کلامی:

حاصل ضرب جمله اول و دوم + (مجموع جمله اول و دوم) \times (جمله اول) = $x^2 + (a + b)x + ab$

روش جبری:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + xb + ax + ab = x^2 + (a + b)x + ab$$

دیدگاه هندسی:



$$S = (x + a)(x + b) = \text{مساحت مربع} \quad (1)$$

$$S_1 = x^2 \quad S_2 = ax$$

$$S_3 = bx \quad S_4 = ab$$

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow (x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک

اتحاد مکعب مجموع دو جمله

بیان کلامی:

سه برابر حاصل ضرب مربع جمله اول در جمله دوم + مکعب جمله اول = $(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول})^3$
مکعب جمله دوم + سه برابر حاصل ضرب جمله اول در مربع جمله دوم +

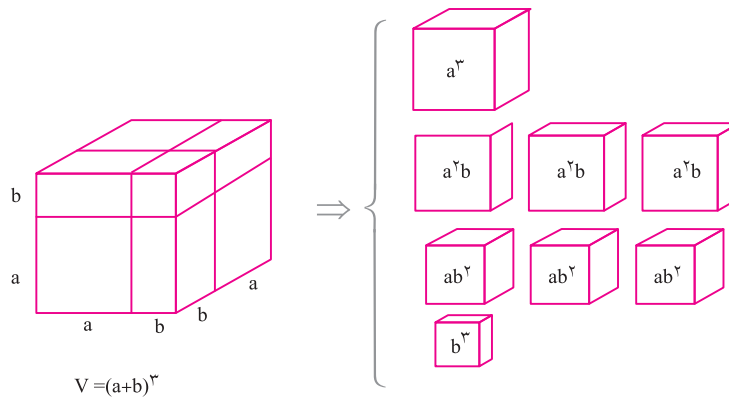


روش جبری:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

دیدگاه هندسی:



$$\Rightarrow (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

بیان کلامی:

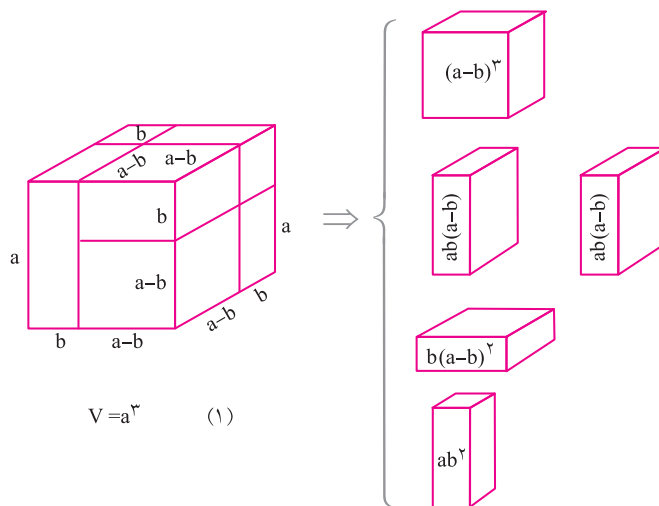
سه برابر حاصل ضرب مربع جمله اول در جمله دوم - مکعب جمله اول = (جمله دوم - جمله اول) مکعب جمله دوم - سه برابر حاصل ضرب جمله اول در مربع جمله دوم +

روش جبری:

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

دیدگاه هندسی:



$$v = (a-b)^3 + 2ab(a-b) + b(a-b)^2 + ab^2 \quad (2)$$



$$(۱), (۲) \Rightarrow a^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) + b(a-b)^2 + ab^2 \Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b(a-b)^2 - ab^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - ab^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\begin{cases} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{cases}$$

اتحاد مکعب دو جمله‌ای:



اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

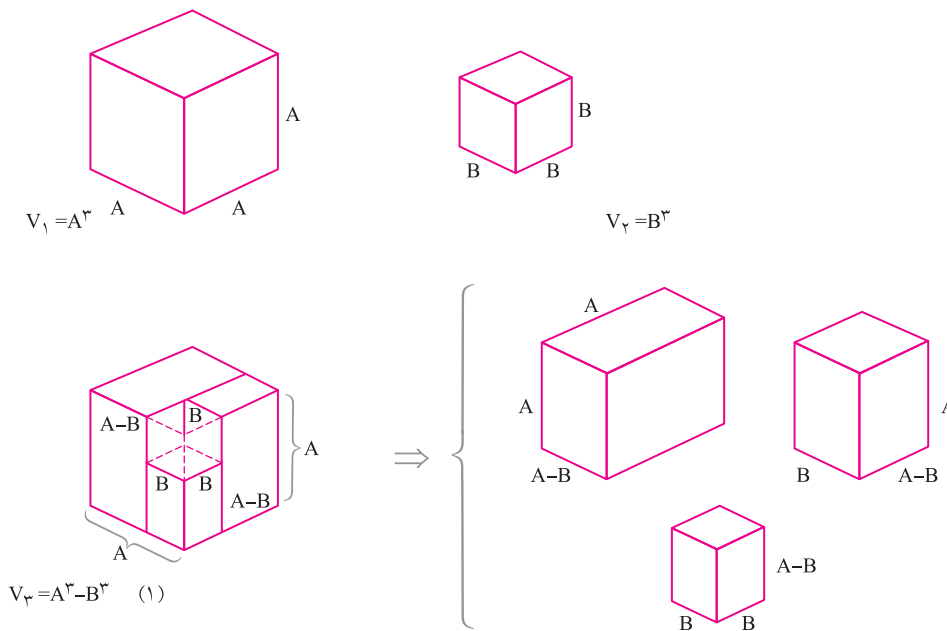
بیان کلامی:

مکعب جمله دوم - مکعب جمله اول = (مربع جمله دوم + حاصل ضرب دو جمله + مربع جمله اول) (مربع جمله اول - جمله دوم - جمله اول)

روش جبری:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

دیدگاه هندسی:



$$V_f = A^3(A-B) + AB(A-B) + B^3(A-B)$$

$$= (A-B)(A^3 + AB + B^3) \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow A^3 - B^3 = (A-B)(A^3 + AB + B^3)$$

اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

بیان کلامی:

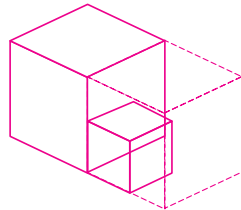
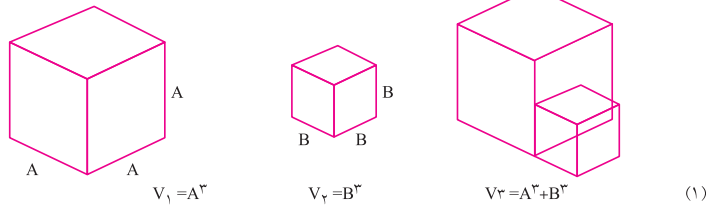
مکعب جمله دوم + مکعب جمله اول = (مربع جمله دوم + حاصل ضرب دو جمله - مربع جمله اول) (مربع جمله دوم + جمله اول)



روش جبری:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

دیدگاه هندسی:



$$V_3 = A^3 - [A^2(A-B) + AB(A-B) + B^2(A-B)] \\ = A^3 - A^3 - A^2B - AB^2 + BA^2 + AB^2 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$\begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \end{cases}$$

اتحاد تفاضل یا مجموع مکعب دو جمله‌ای



تمرین به کمک اتحادها، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

ب) $(x-7)^2 = x^2 - \dots + \dots$

ت) $(x+3)(x+2) = x^2 + \dots + \dots$

ج) $(x-2)^3 = x^3 - \dots + 12x - \dots$

ح) $(\dots - \dots)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$

الف) $(x + \sqrt{3})^2 = \dots + \dots + 3$

پ) $(x - \dots)(x + \dots) = x^2 - 4$

ث) $(x+2)^3 = \dots + 6x^2 + \dots + 8$

ج) $(x + \dots)(x^2 - \frac{x}{2} + \dots) = \dots + \frac{1}{8}$

پاسخ

الف) اتحاد مربع مجموع دو جمله

ب) اتحاد مربع تفاضل دو جمله

پ) اتحاد مزدوج

ت) اتحاد جمله مشترک

ث) اتحاد مکعب مجموع دو جمله

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x + \sqrt{3})^2 = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(x-7)^2 = x^2 - 14x + 49$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

$$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$



$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(x + \frac{1}{y})(x^2 - \frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}) = x^3 + \frac{1}{y^3}$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

ج) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله

ج) اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای

ح) اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- حاصل $(3x + y)^2$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 9x^2 + 6xy^2 + y^4 & (2) \\ 3x^2 + 6xy^2 + y^2 & (1) \\ 9x^2 + 6xy + y^4 & (3) \\ 3x^2 + 3xy^2 + y^2 & (4) \end{array}$$

۲- حاصل $(2\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}x)^2$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 100 + 4x + \frac{x^2}{25} & (2) \\ 100 - 4x + \frac{x^2}{25} & (1) \\ 20 + 4x + \frac{x^2}{5} & (4) \\ 20 - 4x + \frac{x^2}{5} & (3) \end{array}$$

۳- حاصل $(2y + 3x)(2y - 3x)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 4y^2 + 9x^2 & (4) \\ 9x^2 - 4y^2 & (3) \\ 3x^2 + 2y^2 & (2) \\ 4y^2 - 9x^2 & (1) \end{array}$$

۴- حاصل عبارت $(3x+1)(3x-4)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 9x^2 - 9x - 4 & (2) \\ 9x^2 - 3x - 4 & (1) \\ 9x^2 + 9x - 4 & (4) \\ 9x^2 + 3x - 4 & (3) \end{array}$$

۵- حاصل عبارت $(x-7)(x-8)$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} x^2 - 15x - 56 & (2) \\ x^2 - 56x - 15 & (1) \\ x^2 - 56x + 15 & (4) \\ x^2 - 15x + 56 & (3) \end{array}$$

۶- حاصل $(4x + 3)^3$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 64x^3 + 144x^2 + 36x + 9 & (2) \\ 64x^3 + 144x^2 + 108x + 27 & (4) \\ 48x^3 + 144x^2 + 108x + 9 & (1) \\ 64x^3 + 36x^2 + 36x + 27 & (3) \end{array}$$

۷- حاصل $(x - 2t)^3$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} x^3 + 6x^2t^2 - 12xt^4 - 8t^6 & (1) \\ x^3 - 6x^2t^2 - 12xt^4 - 8t^6 & (3) \\ x^3 + 6x^2t^2 + 12xt^4 + 8t^6 & (2) \\ x^3 - 6x^2t^2 + 12xt^4 - 8t^6 & (4) \end{array}$$

۸- حاصل $(2a - \frac{1}{y})^3$ کدام است؟

$$\begin{array}{ll} 8a^3 - 6a^2 + \frac{3}{y}a - \frac{1}{y^3} & (2) \\ 8a^3 - 6a^2 + \frac{3}{y}a - \frac{1}{y} & (3) \\ 8a^3 + 6a^2 - \frac{3}{y}a - \frac{1}{y} & (4) \\ 8a^3 + 6a^2 - \frac{3}{y}a - \frac{1}{y^3} & (1) \end{array}$$



۹- حاصل $(\frac{a^2}{4} + 3)^3$ کدام است؟

$$\frac{a^6}{8} + \frac{3a^4}{4} + \frac{27a^2}{2} + 27 \quad (2)$$

$$\frac{a^6}{8} + \frac{9a^4}{4} + \frac{9a^2}{2} + 27 \quad (4)$$

$$\frac{a^6}{8} + \frac{3a^4}{4} + \frac{9a^2}{2} + 27 \quad (1)$$

$$\frac{a^6}{8} + \frac{9a^4}{4} + \frac{27a^2}{2} + 27 \quad (3)$$

۱۰- حاصل عبارت $(t + \sqrt{2})(t^2 - \sqrt{2}t + 2)$ کدام است؟

$$t^3 - 2 \quad (4)$$

$$t^3 + 2 \quad (3)$$

$$t^3 - 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$t^3 + 2\sqrt{2} \quad (1)$$

۱۱- حاصل عبارت $(x^2 + x^2 + 1)(x^2 - 1)$ کدام است؟

$$x^6 + 1 \quad (4)$$

$$x^6 - 1 \quad (3)$$

$$x^3 + 1 \quad (2)$$

$$x^3 - 1 \quad (1)$$

۱۲- حاصل $(5x + y)(25x^2 - 5xy + y^2)$ کدام است؟

$$125x^3 - y^3 \quad (4)$$

$$125x^3 + y^3 \quad (3)$$

$$25x^2 - y^2 \quad (2)$$

$$25x^2 + y^2 \quad (1)$$

۱۳- حاصل $(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$ کدام است؟

$$a^3 - 8b^3 \quad (4)$$

$$a^3 + 8b^3 \quad (3)$$

$$a^2 - 4b^2 \quad (2)$$

$$a^2 + 4b^2 \quad (1)$$

۱۴- اگر $(x^2 - 3)^2 = a - b + x^4$ باشد، a و b کدام است؟

$$a = x^2, b = 3x^2 \quad (4)$$

$$a = 3x, b = 6 \quad (3)$$

$$a = 9, b = 6x^2 \quad (2)$$

$$a = 9, b = 6x \quad (1)$$

۱۵- اگر $(x + 3)^3 = a + 27x + b + 27$ باشد، a و b کدام است؟

$$a = 3x^2, b = 9x \quad (4)$$

$$a = 9x^2, b = 3x \quad (3)$$

$$a = x^3, b = 27x \quad (2)$$

$$a = x^3, b = 9x^2 \quad (1)$$

۱۶- اگر $(x - t)(x^2 + 4x + u) = z - 64$ باشد، t و u و z کدام است؟

$$t = 2, u = 4, z = x^2 \quad (2)$$

$$t = 8, u = 4, z = x^2 \quad (1)$$

$$t = 2, u = 4, z = x^3 \quad (4)$$

$$t = 4, u = 16, z = x^3 \quad (3)$$

۱۷- اگر $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = x^2 - a$ و $(x - 3)(x - 4) = x^2 - b + c$ باشد، مقدار $a + c$ کدام است؟

$$15 \quad (4)$$

$$12 \quad (3)$$

$$10 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۱۸- اگر $(2x + 1)(2x + 3) = 4x^2 + a + 8x$ و $(b + y)^2 = 9 + 6y + y^2$ باشد، مقدار $b - a$ کدام است؟

$$9 \quad (4)$$

$$6 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

۱۹- اگر $a^2 - b^2 = 36$ و $a + b = 12$ باشد، مقدار $2(a - b) + 5$ کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$11 \quad (3)$$

$$4 \quad (2)$$

$$3 \quad (1)$$

۲۰- اگر $a + 4b = 7$ و $a - 4b = -9$ باشد، مقدار $a^2 + 20 - 16b^2$ کدام است؟

$$-43 \quad (4)$$

$$43 \quad (3)$$

$$-18 \quad (2)$$

$$18 \quad (1)$$

۲۱- اگر $(a - b)^3 = 27$ و $a^3 - b^3 = 657$ باشد، مقدار $a^2b - ab^2$ کدام است؟

$$630 \quad (4)$$

$$-630 \quad (3)$$

$$210 \quad (2)$$

$$-210 \quad (1)$$

۲۲- اگر $x + \frac{1}{x} = 2$ باشد، مقدار $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$



۲۳- اگر $a^2 + b^2 = 81$ و $a - b = 5$ باشد، مقدار $a^3 - b^3$ کدام است؟

- ۱۰۹ (۱) ۱۳۷ (۲) ۲۶۵ (۳) ۵۴۵ (۴)

۲۴- کدام گزینه نادرست است؟

- (۱) $(x+7)(x+9) = x^2 + 16x + 63$ (۲) $(\sqrt{5} + 2x)^2 = 5 + 4\sqrt{5}x + 4x^2$
 (۳) $(5 + \frac{x}{2})(25 - \frac{5}{2}x + \frac{x^2}{4}) = 125 - \frac{x^3}{8}$ (۴) $(2x - \sqrt{5})^2 = 4x^2 - 4\sqrt{5}x + 5$

۲۵- اگر $3t + z = 2$ و $3t - z = 7$ باشد، مقدار $9t^2 + 10 - z^2$ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۴ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴)

۲۶- حاصل $(b^2 - 2x)(b^2 + 2x)(b^4 + 4x^2)$ کدام است؟

- (۱) $16x^4 - b^8$ (۲) $b^8 - 16x^4$ (۳) $4x^4 - b^8$ (۴) $b^8 - 4x^4$

۲۷- حاصل $(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{4})(x^2 + \frac{x}{4} + \frac{1}{16})$ کدام است؟

- (۱) $x^6 - \frac{1}{64}$ (۲) $x^6 + \frac{1}{64}$ (۳) $x^6 - \frac{1}{48}$ (۴) $x^6 + \frac{1}{48}$

۲۸- اگر $4 = (5x - \frac{3}{2x}) =$ حاصل $(25x^2 + \frac{9}{4x^2})$ کدام است؟

- ۲۴ (۱) ۲۹ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴)

۲۹- اگر $5 = (3x + \frac{1}{2x}) =$ حاصل $(9x^2 + \frac{1}{4x^2})$ کدام است؟

- ۱۸ (۱) ۲۰ (۲) ۲۱ (۳) ۲۲ (۴)

تجزیه عبارت‌های جبری

تجزیه عبارت‌های جبری یعنی یک عبارت جبری را به صورت حاصل ضرب چند عامل بنویسیم. برای این کار از اتحادها استفاده می‌کنیم. در برخی مواقع نیز فاکتورگیری می‌کنیم، یعنی از عامل مشترک فاکتور گرفته و هر جمله را بر آن تقسیم کرده و می‌نویسیم. در تجزیه برخی عبارت‌های جبری که هم به فاکتورگیری و هم به اتحادها نیاز است، ابتدا فاکتورگیری کرده و سپس از اتحادها استفاده می‌کنیم.

نکته

عامل فاکتور می‌تواند یک عبارت و یا متی یک عبارت توان‌دار باشد.

تله‌بین عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

- الف) $9x^2 + 6x + 1$ ب) $16x^2 - 9$
 پ) $x^2 + 6x - 91$ ت) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$
 ث) $1 - x^3$ ج) $16x - 4$
 ج) $3x^2 + 33x$ ح) $5(x+1) - x(x+1)$
 خ) $4x^3 - 9x$



پاسخ الف) برای تجزیه عبارت‌های جبری سه جمله‌ای که دو جمله مربع کامل دارند و جمله دیگر آن‌ها دو برابر حاصل ضرب جذر جمله‌های مربع کامل است، از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{9x^2}_{\text{مربع کامل}} + 6x + \underbrace{1}_{\text{مربع کامل}} & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (3x)^2 & 2 \times 3x \times 1 & (1)^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} = (3x + 1)^2$$

ب) برای تجزیه عبارت‌های جبری که به صورت تفاضل دو مربع کامل هستند، از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{16x^2}_{\text{مربع کامل}} - \underbrace{9}_{\text{مربع کامل}} & & \\ \downarrow & \downarrow & \\ (4x)^2 & (3)^2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 9 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} = (4x - 3)(4x + 3)$$

پ) برای تجزیه آن دسته از عبارت‌های جبری سه جمله‌ای که نمی‌توان از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده نمود، از اتحاد جمله مشترک استفاده می‌کنیم.

$$x^2 + \underbrace{(a+b)x}_{\text{حاصل جمع}} + \underbrace{ab}_{\text{حاصل ضرب}} = (x+a)(x+b)$$

برای یافتن مقادیر a و b ، ابتدا اعدادی که حاصل ضربشان برابر با ab باشد را می‌نویسیم، سپس از بین آن‌ها دو عددی را انتخاب می‌کنیم که حاصل جمعشان برابر با $a + b$ شود.

$$x^2 + \underbrace{6x}_{\text{حاصل جمع}} - \underbrace{91}_{\text{حاصل ضرب}} = (x+a)(x+b)$$

$\begin{cases} a = 1, b = -91 \\ ab = -91 \\ a + b = -90 \quad \times \end{cases}$	$\begin{cases} a = -1, b = 91 \\ ab = -91 \\ a + b = 90 \quad \times \end{cases}$
$\begin{cases} a = 7, b = -13 \\ ab = -91 \\ a + b = -6 \quad \times \end{cases}$	$\begin{cases} a = -7, b = 13 \\ ab = -91 \\ a + b = 6 \quad \checkmark \end{cases}$

بنابراین a و b به گونه‌ای تعیین شدند که ضربشان -91 و جمعشان 6 شود. پس این عبارت جبری به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 91 \xrightarrow{\text{اتحاد جمله مشترک}} = (x - 7)(x + 13)$$

ت) با توجه به جملات این عبارت جبری، برای تجزیه آن از اتحاد مکعب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccc} \underbrace{8x^3}_{\text{مکعب کامل}} + 12x^2 + 6x + \underbrace{1}_{\text{مکعب کامل}} & & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (2x)^3 & 3 \times (2x)^2 \times 1 & 3 \times 2x \times (1)^2 & (1)^3 \end{array}$$

$$\Rightarrow 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دو جمله ای}} = (2x + 1)^3$$



ث) برای تجزیه عبارت‌های جبری که به صورت تفاضل دو مکعب کامل هستند، از اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای و برای تجزیه عبارت‌های جبری که به صورت مجموع دو مکعب کامل هستند، از اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم.

$$\begin{array}{ccc} 1 & - & x^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{مکعب کامل} & & \text{مکعب کامل} \\ (1)^3 & & (x)^3 \end{array}$$

$$\Rightarrow 1 - x^3 \xrightarrow{\text{اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای}} = (1-x)(1+x+x^2)$$

ج) برای تجزیه این عبارت، از عدد ۴ فاکتور می‌گیریم:

$$16x - 4 = 4(4x - 1)$$

چ) برای تجزیه این عبارت، از $3x$ فاکتور می‌گیریم:

$$3x^2 + 33x = 3x(x + 11)$$

ح) برای تجزیه این عبارت، از $(x+1)$ فاکتور می‌گیریم:

$$5(x+1) - x(x+1) = (x+1)(5-x)$$

خ) برای تجزیه این عبارت، ابتدا از x فاکتور گرفته و سپس از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$4x^3 - 9x = x(4x^2 - 9) = x(2x-3)(2x+3)$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۰- تجزیه شده عبارت $4x^2 + 12x + 9$ کدام است؟

(۱) $(x+3)^2$ (۲) $(x-3)^2$ (۳) $(2x+3)^2$ (۴) $(2x-3)^2$

۳۱- تجزیه شده عبارت $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$ کدام است؟

(۱) $(2x-3)^3$ (۲) $(2x+3)^3$

(۳) $(x-3)(x^2+3x+9)$ (۴) $(x+3)(x^2-3x+9)$

۳۲- تجزیه شده عبارت $64 + t^3$ کدام است؟

(۱) $(t^2 - 4t + 16)(t + 4)$ (۲) $(t^2 - 8t + 16)(t + 8)$

(۳) $(t^2 - 2t + 4)(t + 2)$ (۴) $(t^2 - 8t + 4)(t + 4)$

۳۳- تجزیه عبارت $64x^3 - 27y^3$ کدام است؟

(۱) $(4x+3y)(16x^2+24xy+9y^2)$ (۲) $(4x-3y)(16x^2+12xy+9y^2)$

(۳) $(4x+3y)(16x^2-24xy+9y^2)$ (۴) $(4x-3y)(16x^2-12xy+9y^2)$



۳۴- تجزیه عبارت $5x^2 - 125x$ کدام است؟

$5x(x-25)$ (۴) $5x(x-5)^2$ (۳) $25x(x-5)$ (۲) $5x(x-5)$ (۱)

۳۵- کدام عامل در تجزیه عبارت $x^4 - 81x^2$ وجود ندارد؟

$x^2 + 9$ (۴) $(x-3)^2$ (۳) $x+3$ (۲) $x-3$ (۱)

۳۶- در تجزیه $x^3 + 5x^2 + 4x + 20$ کدام عامل وجود دارد؟

$x+5$ (۴) $x-5$ (۳) $x+2$ (۲) $x-2$ (۱)

۳۷- در تجزیه $8x^4 - 16x^3 + 27x - 54$ کدام عامل وجود دارد؟

$3x+2$ (۴) $2x+3$ (۳) $x+3$ (۲) $x+2$ (۱)

۳۸- تجزیه شده عبارت $5x^3(x^2+1)^4 - 10x^5(x^2+1)^3$ کدام است؟

$5x^3(x^2+1)(x-1)(x+1)$ (۱) $5x^3(x^2+1)(x-1)(x+1)$ (۲)

$5x^3(x^2+1)(x-1)(x+1)$ (۳) $5x^3(x^2+1)^3(x-1)(x+1)$ (۴)

۳۹- کدام عامل در تجزیه عبارت $4x^4(x^2+4)^2 - 2x^2(x^2+4)^3$ وجود ندارد؟

$x+4$ (۱) x^2 (۲) $(x^2+4)^2$ (۳) $x+2$ (۴)

۴۰- تجزیه عبارت $6x^3(x^2+1)^2 - 2x(x^2+1)^3$ کدام است؟

$2x(x^2+1)^2(2x-1)(2x+1)$ (۱) $2x(x^2+1)^2(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)$ (۲)

$2x(x^2+1)^2(2x^2+1)$ (۳) $2x(x^2+1)(4x^2+1)$ (۴)

۴۱- اگر $(x+a)(x+b) = x^2 + 12x + 20$ باشد، مقدار a و b کدام است؟

$a=4, b=5$ (۱) $a=2, b=10$ (۲) $a=2, b=6$ (۳) $a=3, b=4$ (۴)

(سراسری انسانی ۹۳ داخل کشور)

۴۲- در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

$x-4$ (۱) $x-2$ (۲) $x+2$ (۳) $x+3$ (۴)

(سراسری انسانی ۹۳ خارج کشور)

۴۳- در تجزیه عبارت $4x^3 - 6x^2 + 2x$ کدام عامل ضرب وجود دارد؟

$2x+1$ (۱) $2x-1$ (۲) $x+1$ (۳) $x+2$ (۴)

(سراسری انسانی ۹۰ داخل کشور)

۴۴- در تجزیه عبارت $a(a-3)(a-4) - 12a + 36$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$a-6$ (۱) $a-3$ (۲) $a-2$ (۳) $a+2$ (۴)

(سراسری انسانی ۹۰ خارج کشور)

۴۵- در تجزیه عبارت $(x^2 - 6x - 4)^2 - 144$ کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$x-8$ (۱) $x-4$ (۲) $x+2$ (۳) $x+4$ (۴)

اتحاد و محاسبات عددی

برخی از محاسبات عددی را می‌توان به کمک اتحادها انجام داد. برای این کار باید عبارت عددی داده شده را به یکی از اتحادها تبدیل کنیم.



به طور مثال، برای محاسبه مقدار $(102)^2$ از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده کرده و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(102)^2 = (100+2)^2 = (100)^2 + 2(100)(2) + 2^2 = 10000 + 400 + 4 = 10404$$

تمرین با استفاده از اتحادها، مقدار $(99)^3$ را به دست آورید.

♦ **پاسخ** از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله استفاده می‌کنیم:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(99)^3 = (100-1)^3 \xrightarrow{\substack{a=100 \\ b=1}} = (100)^3 - 3(100)^2(1) + 3(100)(1)^2 - (1)^3 = 1000000 - 300000 + 300 - 1 = 970299$$

توجه کنید در این جا از اتحاد $(a-b)^3$ استفاده می‌کنیم، یعنی بین a و b علامت تفریق وجود دارد. بنابراین هنگامی که $(99)^3$ را به صورت $(100-1)^3$ می‌نویسیم، داریم:

$$(a-b)^3 = (100-1)^3$$

پس $a=100$ و $b=1$ است و اگر، هم علامت تفریق را به کار برده و هم b را برابر (-1) در نظر بگیریم، اشتباه کرده‌ایم.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۴۶- مقدار $(999)^3$ کدام است؟

- (۱) ۹۹۷۰۰۳۰۰۰ (۲) ۹۹۷۰۰۲۹۹۹ (۳) ۷۰۰۳۰۰۰ (۴) ۷۰۰۲۹۹۹

۴۷- مقدار 404×396 کدام است؟

- (۱) ۱۵۹۹۸۴ (۲) ۱۶۰۰۰۰ (۳) ۱۶۰۰۱۶ (۴) ۱۶۰۰۰۴

۴۸- مقدار 107×93 کدام است؟

- (۱) ۹۵۱ (۲) ۹۹۹۳ (۳) ۹۹۸۶ (۴) ۹۹۵۱

۴۹- حاصل $\sqrt{(3250)^2 - (3150)^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰۰ (۲) ۶۰۰ (۳) ۸۰۰ (۴) ۱۵۰۰

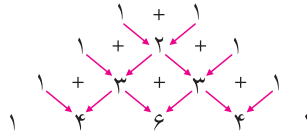
مثلث خیام

سطر اول		۱				$(a+b)^0 = 1$
سطر دوم		۱	۱			$(a+b)^1 = 1a + 1b$
سطر سوم		۱	۲	۱		$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
سطر چهارم		۱	۳	۳	۱	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
سطر پنجم	۱	۴	۶	۴	۱	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
سطر ششم	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
			⋮			⋮



مثلث خیام، ضرایب بسط دو جمله‌ای‌ها را در مثلث عددی نشان می‌دهد. با استفاده از این مثلث می‌توان توان‌های طبیعی دو جمله‌ای‌ها را بدون محاسبه به دست آورد.

یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مثلث خیام، ارتباط سطرهای آن با یکدیگر است. هر عدد در سطر سوم و سطرهای بعد از آن، از مجموع دو عدد اطرافش در سطر قبل به دست می‌آید. برای مثال:



بنابراین با داشتن هر سطر از این مثلث، می‌توان سطر بعدی آن را نوشت.

در مثلث خیام، هر عدد در هر سطر برابر است با مجموع دو عدد اطرافش در سطر قبل.



تمرین سطر هفتم مثلث خیام به صورت زیر است. سطر هشتم آن را بنویسید.

۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱

هر یک از اعداد سطر هشتم از مجموع دو عدد بالای سر خود در سطر هفتم به دست می‌آیند.

۱ ۷ ۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱ ۷ ۱

سطر هشتم

پاسخ

مثلث خیام و بسط دو جمله‌ای‌ها

بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ دارای $n+1$ جمله است. این بسط متناظر با سطر $n+1$ مثلث خیام است. به عنوان مثال، $(a+b)^2$ دارای سه جمله است. همچنین این بسط متناظر با سطر سوم مثلث خیام است.

بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ دارای $n+1$ جمله بوده و متناظر با سطر $n+1$ مثلث خیام است.



ویژگی دیگر مثلث خیام، ارتباط بین اعداد واقع در هر سطر از مثلث با ضرایب بسط دو جمله‌ای است. ضرایب هر بسط دو جمله‌ای، همان اعداد واقع در سطر متناظر آن بسط است. بنابراین ضرایب بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ ، همان اعداد واقع در سطر $n+1$ مثلث خیام است. برای مثال:

۱ ۲ ۱

سطر سوم

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

اعداد واقع در سطر $n+1$ مثلث خیام، به ترتیب ضرایب جملات بسط دو جمله‌ای $(a+b)^n$ هستند.



تمرین ضرایب بسط زیر را به کمک مثلث خیام بنویسید.

$$(a+b)^4 = \square a^4 + \square a^3b + \square a^2b^2 + \square ab^3 + \square b^4$$

پاسخ ضرایب بسط $(a+b)^4$ ، اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام هستند. پس:

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

سطر پنجم

$$\Rightarrow (a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

بسط $(a+b)^n$ با جمله a^n شروع می‌شود و در هر جمله، از توان‌های a یک واحد کم می‌شود و به توان‌های b یک واحد اضافه می‌شود و با جمله b^n پایان می‌پذیرد.



$$(a+b)^n = \square a^n b^0 + \square a^{n-1} b^1 + \square a^{n-2} b^2 + \dots + \square a^2 b^{n-2} + \square a^1 b^{n-1} + \square a^0 b^n$$

به عنوان مثال، بسط $(a+b)^3$ را در نظر می‌گیریم. جملات این بسط با a^3 شروع شده و در جمله بعدی، یک واحد از توان a کم شده و یک واحد به توان b اضافه می‌شود (a^2b). در جمله بعدی نیز همین اتفاق رخ می‌دهد تا به جمله آخر یعنی b^3 برسیم.

نکته

بسط $(a+b)^n$ با جمله a^n شروع شده و در هر یک از جملات بعدی، یک واحد از توان a کم شده و یک واحد به توان b اضافه می‌شود و با جمله b^n پایان می‌پذیرد.

تقریب توان‌های بسط زیر را به کمک مثلث خیام کامل کنید.

$$(a+b)^4 = a \square + 4a \square b + 6a \square b \square + 4a \square b^3 + b \square$$

♦ **پاسخ** بسط $(a+b)^4$ با جمله a^4 شروع می‌شود و در هر جمله، یک واحد از توان a کم شده و به توان‌های b اضافه می‌شود و با جمله b^4 تمام می‌شود. پس:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

نکته

مجموع توان‌های a و b در هر جمله از بسط $(a+b)^n$ برابر با n (مرتبه بسط) است.

برای نوشتن بسط $(a-b)^n$ باید در بسط $(a+b)^n$ به جای b ، عبارت $(-b)$ را قرار دهیم.

$$(a-b)^n = \square a^n + \square a^{n-1}(-b)^1 + \square a^{n-2}(-b)^2 + \square a^{n-3}(-b)^3 + \dots$$

$$= \square a^n - \square a^{n-1}b + \square a^{n-2}b^2 - \square a^{n-3}b^3 + \dots$$

نکته

جملات بسط $(a-b)^n$ یکی در میان مثبت و منفی است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۵۰- بسط $(a+b)^2$ متناظر با سطر چندم مثلث خیام است؟

- (۱) سطر بیستم (۲) سطر بیست و یکم (۳) سطر نوزدهم (۴) سطر دهم

۵۱- اختلاف تعداد جملات بسط $(a+b)^1$ و $(a+b)^4$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) تعداد جملات با هم برابر است.

۵۲- ضریب پنجمین جمله بسط $(a+b)^5$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۱۰

۵۳- یکی از جملات بسط $(a+b)^n$ به صورت xa^2b^2 است. جمله بعدی کدام است؟

- (۱) ya^2b^3 (۲) ya^6b^4 (۳) ya^9b^2 (۴) ya^7b

۵۴- سومین جمله از بسط $(a+b)^4$ برابر با $6a^2b^2$ است. حاصل $x+y$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

۵۵- بسط $(a-b)^{15}$ چند جمله دارد؟

- (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۶ (۴) ۳۰

۵۶- ضریب جمله a^3b^3 در بسط $(a-b)^6$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰