

CHAPTER

1

آشنایی با مبانی ریاضیات

۲	درس ۱: آشنایی با منطق ریاضی	◀
۲۲	TEST	
۳۲	درس ۲: مجموعه - زیر مجموعه	◀
۴۴	TEST	
۵۰	درس ۳: قوانین اعمال بین مجموعه‌ها (جبر مجموعه‌ها)	◀
۵۹	TEST	
۶۵	پاسخ‌نامه	◀

تعریف: گزاره‌ای را ساده می‌نامیم که از یک جمله خبری تشکیل شده باشد مانند «۲ عددی زوج است». از طرف دیگر گزاره‌ای را مرکب می‌نامند که از چند گزاره ساده تشکیل شده باشد که به وسیله ادات ربط، به هم مربوط شده باشند، مانند «۲ زوج است و ۵ عددی اول است». با توجه به این تعریف‌ها و مقدمات، ریاضی‌دان‌ها گزاره‌ها را به ۴ صورت اصلی با هم ترکیب می‌کنند:

ترکیب فصلی (∨)

1 تعریف: فرض کنید p و q دو گزاره دلخواه باشند، از این دو گزاره، گزاره مرکب جدیدی به صورت «p یا q» می‌سازیم که آن را ترکیب فصلی p و q نامیده و با نماد $p \vee q$ نشان می‌دهیم. هر یک از گزاره‌های p یا q را مؤلفه‌های $p \vee q$ می‌نامیم، به علامت «∨»، فاصل گفته می‌شود. **!** در ریاضیات هر وقت کلمه «یا» را به کار می‌بریم منظور «این یا آن یا هر دو» است. مثلاً وقتی می‌گوییم در فلان مجموعه چند عدد وجود دارد که مضرب ۳ یا مضرب ۵ است، این بدان معنی است که مضرب ۳ یا مضرب ۵ یا مضرب ۱۵ است.

به‌عنوان مثال: می‌دانیم که اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ و به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

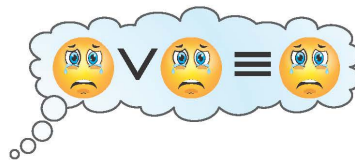
$$a, b \in \mathbb{R} \quad ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

از ویژگی فوق، برای حل معادله‌ها استفاده می‌شود:

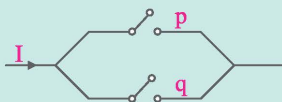
$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (x = 1) \vee (x = -1)$$

2 ارزش ترکیب فصلی: مطابق جدول زیر می‌توان گفت که ارزش یک ترکیب فصلی فقط در صورتی نادرست است که هر دو گزاره p و q نادرست باشند، در غیر این صورت ارزش ترکیب فصلی درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن



برای درک بهتر ترکیب فصلی $p \vee q$ فرض کنید:



دو کلید p و q در یک مدار به طور موازی قرار دارند، بدیهی است که برای برقراری جریان در مدار کافی است یکی از دو کلید وصل باشند و اگر هر دو کلید قطع باشند جریان در مدار برقرار نیست.

NOTE

EXAMPLE

7. اگر گزاره $p \vee q \sim$ یک گزاره نادرست باشد. ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $p \vee q$ (۲) p (۳) $p \vee \sim q$ (۴) q

پاسخ: گزینه (۴)

نقشه راه: ترکیب فصلی در شرایطی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند. پس هم $\sim p$ و q هر دو گزاره‌هایی نادرست هستند. اما چون $\sim p$ نادرست است گزاره p درست خواهد بود و در نتیجه $p \vee q$ و همچنین $p \vee \sim q$ نیز درست خواهد بود.



8. ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ گنگ است یا ۲ زوج است.
 (۲) ۱۷ اول است یا $\sqrt{2}$ گویا است.
 (۳) عدد π گویاست یا صفر فرد است.
 (۴) صفر زوج است یا یک عدد اول است.

پاسخ: گزینه (۳)

نقشه راه: ترکیب فصلی دو گزاره وقتی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند. بنابراین **گزینه (۳)** نادرست است. چون π گنگ است و صفر هم عدد زوج است.

اگر چندین گزاره مانند p و q و r و s و ... با هم ترکیب فصلی شده باشند، یعنی $p \vee q \vee r \vee s \vee \dots$ ارزش حداقل یکی از آن‌ها درست باشد ارزش گزاره مرکب درست است. به تعبیر دیگر با چندین کلید موازی اگر حداقل یکی از کلیدها وصل باشد، جریان در کل مدار، وصل است.

ترکیب عطفی (\wedge)

تعریف: فرض کنید p و q دو گزاره دلخواه باشند، از این دو گزاره، گزاره مرکب جدیدی به صورت « p و q » می‌سازیم که آن را ترکیب عطفی دو گزاره p و q می‌نامیم و با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهیم. به علامت « \wedge » عطف گفته می‌شود.

به عنوان مثال: می‌دانیم اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $a^2 + b^2 = 0$ آن‌گاه $a = 0$ و $b = 0$ و به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$a, b \in \mathbb{R} \quad a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow (a = 0) \wedge (b = 0)$$

از ویژگی فوق برای حل بعضی از معادله‌های چند مجهولی استفاده می‌شود:

$$(x-1)^2 + (2x+y)^2 + (x+z)^2 = 0 \Rightarrow (x-1=0) \wedge (2x+y=0) \wedge (x+z=0)$$

$$\Rightarrow (x=1) \wedge (y=-2) \wedge (z=-1)$$

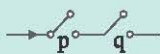
ارزش ترکیب عطفی: مطابق جدول زیر می‌توان گفت که ارزش ترکیب عطفی فقط در صورتی درست است که هر دو گزاره p و q درست باشند و در غیر این صورت ارزش گزاره نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن



برای درک بهتر ترکیب عطفی $p \wedge q$ فرض کنید:

دو کلید p و q در یک مدار به طور متوالی قرار دارند، بدیهی است که جریان تنها در صورتی برقرار است که هر دو کلید وصل باشند.



NOTE

EXAMPLE

9. اگر گزاره $p \wedge \sim q$ درست باشد، آن‌گاه کدام گزینه یک گزاره درست است؟

- (۱) $\sim p \vee q$ (۲) $p \wedge q$ (۳) $p \vee q$ (۴) $\sim p \wedge q$

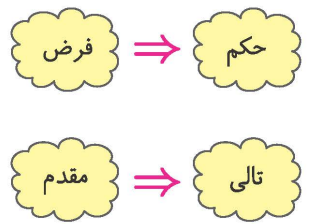
پاسخ: گزینه (۳)

تحلیل مفهوم: ترکیب عطفی دو گزاره فقط زمانی درست است که هر دو گزاره آن درست باشند. پس p درست و $\sim q$ نیز درست است. یعنی q نادرست می‌باشد. از طرفی $p \vee q$ ترکیب فصلی یک گزاره درست با یک گزاره نادرست است که ارزش آن درست است.

اگر چندین گزاره مانند p و q و r و s و ... با هم ترکیب عطفی شده باشند، یعنی $p \wedge q \wedge r \wedge s \wedge \dots$ و حداقل یکی از آن‌ها نادرست باشد ارزش گزاره مرکب نادرست است. به تعبیر دیگر اگر در یک مدار با چندین کلید متوالی، یک کلید باز باشد جریان در کل مدار قطع است.

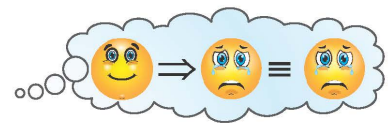
ترکیب شرطی (\Rightarrow)

تعریف: فرض کنید p ، q دو گزاره دلخواه باشند، هر گزاره به صورت «اگر p آن‌گاه q » را ترکیب شرطی p و q می‌نامیم و با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می‌دهیم. **مقدم و تالی:** در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » گزاره p را **مقدم** یا **فرض** گزاره شرطی و گزاره q را **تالی** یا **حکم** گزاره شرطی می‌نامیم.



ارزش ترکیب شرطی: مطابق جدول زیر می‌توان گفت ارزش ترکیب شرطی وقتی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د



برای درک بهتر این مفهوم در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ فرض کنید، p معادل **قول دادن** و q معادل **انجام دادن** باشد. در این صورت:

- «قول دادم» آن‌گاه «انجام دادم» \Leftarrow کار درستی کردم.
- «قول دادم» آن‌گاه «انجام ندادم» \Leftarrow کار نادرستی کردم.
- «قول ندادم» آن‌گاه «انجام دادم» \Leftarrow کار درستی کردم.
- «قول ندادم» آن‌گاه «انجام ندادم» \Leftarrow کار درستی کردم.

همان‌طور که می‌بینید آدم اگر **قول ندهد** چه کار را انجام و چه کار را انجام ندهد. کار درستی را انجام داده است و کسی نمی‌تواند از لحاظ منطقی به آدم ایراد بگیرد. به زبان گزاره‌ها و منطق ریاضی می‌توان آن را به صورت قانونی به عنوان انتفای مقدم بیان کرد.

NOTE

انتفای مقدم: هرگاه مقدم یک ترکیب شرطی نادرست باشد، ارزش آن گزاره شرطی درست است و به ارزش تالی بستگی ندارد. در این حالت می‌گوییم ارزش $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
ن	د	د
ن	ن	د



باز هم اگر دقت کنید می‌بینید که اگر آدم «کار را انجام دهد» حال چه قولی برای انجام آن داده باشد و چه قولی نداده باشد، کار درستی انجام داده است و به زبان گزاره‌ها و منطق می‌توان قانونی به عنوان درستی تالی مطرح کرد که چندان اسم و رسم متداولی ندارد.

NOTE

25 مربع بودن یک چهارضلعی چه شرطی برای مستطیل بودن است؟

(۱) لازم و غیرکافی

(۲) غیرلازم و کافی

(۳) لازم و کافی

(۴) نه لازم و نه کافی

26 اگر p نادرست باشد، ارزش گزاره $\sim(p \Rightarrow q)$ کدام است؟

(۱) نادرست (۲) درست

(۳) بستگی به ارزش q دارد. (۴) همواره درست

27 اگر $p \Leftrightarrow q$ نادرست باشد، کدام گزاره به یقین همواره درست است؟

(۱) $p \vee q$

(۲) $p \Rightarrow q$

(۳) $p \wedge q$

(۴) $q \Rightarrow p$

28 اگر $p \Rightarrow q$ نادرست باشد، آن‌گاه کدام گزاره همواره نادرست است؟

(۱) $p \wedge \sim q$

(۲) $\sim p \Leftrightarrow q$

(۳) $p \vee q$

(۴) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

29 اگر $p \wedge q$ یک گزاره درست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره نادرست است؟

(۱) $\sim p \vee q$

(۲) $p \Rightarrow q$

(۳) $p \Leftrightarrow q$

(۴) $p \Rightarrow \sim q$

30 اگر گزاره $p \vee q$ نادرست باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر قطعاً نادرست است؟

(۱) $p \Rightarrow \sim q$

(۲) $p \Rightarrow q$

(۳) $p \Leftrightarrow q$

(۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

31 اگر گزاره $(p \Rightarrow q)$ نادرست باشد و r گزاره‌ای دلخواه باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره نادرست است؟

(۱) $(p \wedge \sim q) \vee r$

(۲) $(\sim q \Rightarrow \sim p) \Rightarrow r$

(۳) $(p \vee \sim q) \vee r$

(۴) $p \Rightarrow (q \wedge r)$

32 اگر p گزاره‌ای نادرست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$

(۲) $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

(۳) $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

(۴) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

33 گزاره $(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)$ در کدام صورت درست است؟

(۱) p درست و q نادرست. (۲) p نادرست و q درست.

(۳) p و q هم‌ارزش باشند. (۴) همواره درست است.

34 اگر p گزاره‌ای نادرست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $(q \vee p) \Rightarrow (p \wedge r)$

(۲) $p \wedge (q \wedge r)$

(۳) $(r \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(۴) $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

35 اگر $(p \wedge q) \Rightarrow r$ نادرست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

(۱) $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)$

(۲) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$

(۳) $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$

(۴) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

36 اگر p گزاره‌ای درست و q و r گزاره‌هایی دلخواه باشند، کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $p \Rightarrow (q \vee r)$

(۲) $p \Rightarrow (p \wedge q)$

(۳) $(r \wedge q) \Rightarrow \sim p$

(۴) $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee r)$

37 جدول ارزش زیر مربوط به کدام ترکیب گزاره‌ها است؟

p	q	...
د	د	ن
ن	د	د
د	ن	د
ن	ن	د

(۲) $p \Rightarrow \sim q$

(۴) $\sim p \Rightarrow \sim q$

(۱) $p \Rightarrow q$

(۳) $\sim p \Rightarrow q$

38 جدول ارزش زیر مربوط به کدام ترکیب گزاره است؟

p	q	...
د	د	ن
د	ن
.....	د	...
...	...	ن

(۱) $\sim p \wedge q$

(۳) $p \vee \sim q$

(۲) $p \wedge \sim q$

(۴) $\sim p \vee q$

39 جدول ارزش زیر مربوط به کدام ترکیب گزاره است؟

p	q	...
...
د	ن	ن
...
ن	ن	د

(۱) $p \wedge \sim q$

(۲) $\sim p \vee q$

(۳) $p \vee \sim q$

(۴) $\sim p \wedge q$

40 با توجه جدول ارزش گزاره‌های زیر سمت راست به کدام صورت است؟

p	q	$\sim p \Rightarrow q$
.....
ن	ن
ن
.....	ن

(۲) $\begin{matrix} \text{د} \\ \text{د} \\ \text{ن} \\ \text{د} \end{matrix}$

(۴) $\begin{matrix} \text{د} \\ \text{ن} \\ \text{د} \\ \text{د} \\ \text{د} \end{matrix}$

(۱) $\begin{matrix} \text{ن} \\ \text{د} \\ \text{د} \\ \text{د} \end{matrix}$

(۳) $\begin{matrix} \text{د} \\ \text{د} \\ \text{د} \\ \text{ن} \end{matrix}$

41 جدول زیر سطر اول یک جدول ارزش گزاره‌ها را نشان می‌دهد، با توجه به این جدول کدام گزاره ممکن است در ستون آخر قرار گیرد؟

p	q	$\sim p \vee q$
.....	ن	ن

(۱) $\sim p \Rightarrow q$

(۳) $p \Rightarrow q$

(۲) $\sim q \Rightarrow p$

(۴) $p \Leftrightarrow \sim q$

42 با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها که قسمتی از آن دیده می‌شود، کدام گزاره مرکب می‌تواند در ستون آخر قرار گیرد؟

p	q	$p \wedge \sim q$
.....	د	د

(۱) $(p \Rightarrow q) \vee q$

(۳) $p \Rightarrow q$

(۲) $p \wedge (q \Rightarrow p)$

(۴) $(\sim p \wedge q) \vee q$

43 با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر که قسمتی از آن داده شده است، کدام گزاره برای ستون آخر مناسب است؟

p	q	$p \Rightarrow q$...
.....	ن	د

(۱) $\sim p \wedge (p \vee q)$

(۳) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

(۲) $p \Leftrightarrow q$

(۴) $\sim p \Leftrightarrow q$

44 با توجه به جدول زیر، ارزش کدام گزاره برای ستون آخر مناسب است؟

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$...
.....	د	د	د

(۱) $q \Rightarrow p$

(۳) $\sim p \Rightarrow q$

(۲) $q \Rightarrow \sim p$

(۴) $p \Rightarrow \sim q$

45 با توجه به جدول زیر ارزش کدام گزاره برای ستون آخر مناسب است؟

p	q	r	$p \vee (q \Rightarrow r)$...
.....	ن	ن

(۱) $\sim p \Rightarrow r$

(۳) $r \Leftrightarrow \sim q$

(۲) $r \Rightarrow q$

(۴) $p \vee q$

4 17

تحلیل مفهوم: فرض کنیم گزاره‌های p و q به صورت زیر باشد:

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{ او فیلسوف است} \\ q: \text{ او درستکار است} \end{array} \right\} \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

و این یعنی او فیلسوف است ولی درستکار نیست.

3 18

تحلیل مفهوم: فرض کنیم گزاره‌های p و q به صورت زیر باشند:

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{ فرد ۲} \\ q: ۲ < ۵ \end{array} \right\} \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

یعنی ۲ فرد است و $۲ \geq ۵$ است.

3 19

تحلیل مفهوم: مثلث متساوی الساقین است را گزاره p و دو زاویه مجاور به قاعده برابرند را گزاره q فرض می‌کنیم. در این صورت داریم:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

3 20

تحلیل مفهوم: اگر گزاره‌های p و q به صورت‌های زیر تعریف شوند:

$$\left. \begin{array}{l} p: \text{ مثلث } ABC \text{ قائم‌الزاویه است} \\ q: (a^2 = b^2 + c^2) \end{array} \right\}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

4 21

تحلیل مفهوم: عکس نقیض یعنی جای مقدم و تالی را عوض و هر دو را نقیض کنیم.

$$Q \Rightarrow R \equiv \sim R \Rightarrow \sim Q$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = p \wedge q \\ R = \sim p \end{array} \right\} \rightarrow \sim(\sim p) \Rightarrow \sim(p \wedge q) \equiv p \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

1 22

نقشه راه: هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم‌ارز است، بنابراین کافی است خود گزاره را ساده کنیم.

$$\begin{aligned} (p \wedge q) \Rightarrow \sim r &\equiv \sim(p \wedge q) \vee \sim r \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee \sim r \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee \sim r) \\ &\equiv \sim p \vee \sim(q \wedge r) \end{aligned}$$

2 23

نقشه راه: می‌دانیم هر گزاره شرطی با عکس نقیض خودش هم‌ارز است، پس اگر گزاره‌های p و q را به صورت زیر در نظر بگیریم داریم:

$$\left. \begin{array}{l} p: ABC \text{ متساوی‌الاضلاع} \\ q: ABC \text{ متساوی‌الساقین} \end{array} \right\}$$

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

3 24

تحلیل مفهوم: ارزش موارد (ب) و (د) و (ه) درست هستند، در مورد (ب) چون ترکیب فصلی است و یکی از مؤلفه‌های آن درست است ارزش کل گزاره درست است و گزینه‌های (د) و (ه) با انتقای مقدم درست است.

2 25

نقشه راه: باید دو گزاره شرطی زیر را تشکیل دهیم:

کافی است \checkmark مستطیل بودن چهارضلعی \Rightarrow مربع بودن چهارضلعی
لازم نیست \times مربع بودن چهارضلعی \Rightarrow مستطیل بودن چهارضلعی
بنابراین مربع بودن برای مستطیل بودن کافی است ولی لازم نیست. اما همان‌طور که می‌دانید این تست و تست‌های شبیه به این مربوط به قسمت خواندنی کتاب هستند و فقط برای علاقه‌مندان است و هیچ ضرورتی برای حل آن‌ها وجود ندارد.

1 26

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

چون p نادرست است پس $p \wedge \sim q$ نادرست است.

1 27

نقشه راه: وقتی $p \Leftrightarrow q$ نادرست باشد، حتماً یکی از دو گزاره p یا q درست و دیگری نادرست است. بنابراین گزاره $p \vee q$ حتماً درست است چون برای درست بودن $p \vee q$ کافی است یکی از دو گزاره p یا q درست باشد.

4 28

نقشه راه: وقتی $p \Rightarrow q$ نادرست است که p درست و q نادرست باشد. پس $\sim p$ نادرست است و $\sim q$ درست است. پس داریم:

$$\begin{array}{ll} \sim p \Leftrightarrow q \equiv \text{د} & (۲) \\ \sim p \Leftrightarrow \sim q \equiv \text{ن} & (۴) \end{array}$$

4 29

تحلیل مفهوم: گزاره $p \wedge q$ فقط زمانی درست است که p و q هر دو درست باشد.

35 3

نقشه راه: گزاره شرطی زمانی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، پس:

$$p \wedge q \equiv \text{د} \Rightarrow \begin{cases} p \equiv \text{د} \\ q \equiv \text{د} \end{cases} \text{ و } r \equiv \text{ن}$$

$$(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r) \equiv \text{د} \quad (p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r) \equiv \text{د} \quad (1)$$

$$(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r) \equiv \text{د} \quad (p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r) \equiv \text{ن} \quad (3)$$

36 4

نقشه راه: می دانیم اگر p درست باشد نقیض آن نادرست است و ترکیب عطفی آن با هر گزاره دلخواه نادرست خواهد بود. بنابراین به انتفای مقدم گزاره شرطی گزینه (۴) درست است.

37 2

نقشه راه: اگر ردیف اول جدول را نگاه کنیم متوجه می شویم که وقتی p و q درست هستند باید، گزاره فوق نادرست باشد. بنابراین گزینه (۲) جواب است.

38 1

نقشه راه: اگر به ردیف اول نگاه کنید می بینید وقتی هر دو گزاره p و q درست هستند، گزاره مورد بحث باید نادرست باشد. بنابراین گزینه های (۳) و (۴) رد می شوند. حال اگر به ردیف دوم نگاه کنید وقتی گزاره p درست و q نادرست است ارزش گزاره باید نادرست باشد. در نتیجه گزینه (۲) هم رد می شود و گزینه (۱) جواب تست خواهد بود.

39 2

نقشه راه: اگر به ردیف آخر نگاه کنید وقتی هر دو گزاره نادرست هستند ارزش گزاره مورد بحث درست است. بنابراین گزینه های (۱) و (۴) رد می شوند از طرف دیگر در ردیف دوم ارزش p درست و ارزش q نادرست بوده و ارزش گزاره مورد بحث نادرست است. بنابراین گزینه (۳) هم رد می شود و گزینه (۲) جواب است.

40 4

نقشه راه: بهتر است ابتدا گزاره $p \Rightarrow q \sim$ را به ترکیب فصلی تبدیل کنیم که معادل با $p \vee q$ خواهد بود و با توجه به دو ستون اول ارزش های درست در ستون آخر برای آن گزینه (۴) است.

41 3

نقشه راه: می دانیم وقتی ترکیب فصلی دو گزاره نادرست است، هر دو مولفه آن نادرست است بنابراین p درست و q نادرست است. بنابراین در گزینه (۳) مقدم درست و تالی نادرست بوده و ارزش ترکیب شرطی نادرست است و این گزاره می تواند در ستون آخر جدول قرار گیرد.

$$\sim p \vee q \equiv \text{د} \quad (1) \text{ گزینه}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \text{د} \quad (2) \text{ گزینه}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv \text{د} \quad (3) \text{ گزینه}$$

$$p \Rightarrow \sim q \equiv \text{ن} \quad (3) \text{ گزینه}$$

30 4

تحلیل مفهوم: گزاره $p \vee q$ نادرست باشد p و q هر دو نادرست هستند.

$$p \Rightarrow \sim q \equiv \text{د} \quad (1) \text{ گزینه}$$

$$p \Rightarrow q \equiv \text{د} \quad (2) \text{ گزینه}$$

$$p \Leftrightarrow q \equiv \text{د} \quad (3) \text{ گزینه}$$

$$\sim p \Leftrightarrow q \equiv \text{ن} \quad (3) \text{ گزینه}$$

31 4

تحلیل مفهوم: گزاره $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد حال به بررسی گزینه ها می پردازیم:

$$(p \wedge \sim q) \vee r \equiv \text{د} \quad (1) \text{ گزینه}$$

$$(\sim p \Rightarrow \sim p) \Rightarrow r \equiv \text{د} \quad (2) \text{ گزینه}$$

$$(p \vee \sim q) \vee r \equiv \text{د} \quad (3) \text{ گزینه}$$

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \text{ن} \quad (3) \text{ گزینه}$$

32 4

تحلیل مفهوم: گزاره دو شرطی در صورتی درست است که دو طرف آن هم ارزش باشند. حال چون p نادرست است، $p \wedge q$ و همچنین $p \wedge r$ نادرست بوده و دو طرف گزینه (۴) هم ارزش شده و ارزش کل گزاره درست است.

33 3

نقشه راه: ابتدا گزاره داده شده را ساده می کنیم:

$$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \equiv (p \vee q) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv p \Leftrightarrow q$$

بنابراین گزاره دو شرطی در صورتی درست است که p و q هم ارزش باشند.

34 3

نقشه راه: چون p نادرست است گزاره $p \Rightarrow q$ به انتفای مقدم درست است و حال گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow q)$ با درستی تالی همواره درست است.

2 42

نقشه راه: می‌دانیم ارزش ترکیب عطفی وقتی درست است که هر دو مولفه درست باشد. بنابراین p درست و q نادرست است و در نتیجه گزینه (۲) تنها گزینه‌ای است که مناسب برای ستون آخر است چون ارزش آن در این شرایط درست است:

$$p \wedge (q \Rightarrow p) \equiv T \wedge (F \Rightarrow T) \equiv T \wedge T \equiv T$$

4 43

نقشه راه: می‌دانیم ارزش ترکیب هنگامی نادرست است که مقدم درست و تالی نادرست باشد، بنابراین p درست و q نادرست خواهد بود. بنابراین گزینه (۴) گزینه‌ای درست خواهد بود چون دو طرف آن نادرست است و مناسب برای ستون آخر خواهد بود.

3 44

نقشه راه: اگر $p \Rightarrow q$ و $p \vee q$ هر دو درست باشند، ترکیب عطفی آن‌ها نیز باید درست باشد بنابراین:

$$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_T \vee q \equiv q$$

بنابراین باید q درست باشد، حال در گزینه (۳) چون تالی درست با اطمینان ارزش گزاره درست است.

1 45

نقشه راه: ارزش ترکیب فصلی $p \vee (q \Rightarrow r)$ نادرست است. بنابراین ارزش p و ارزش $q \Rightarrow r$ هر دو نادرست است و در نتیجه گزاره q دارای ارزش درست و گزاره r دارای ارزش نادرست است، بنابراین تنها گزاره‌ای که ارزش نادرست دارد. گزینه (۱) است چون مقدم درست و تالی نادرست است.

4 46

نقشه راه: گزاره $p \Leftrightarrow q$ درست است یعنی p و q هم‌ارزش هستند، یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست هستند از طرف دیگر $\sim q \Rightarrow \sim p$ نادرست است پس باید p و q هر دو درست باشند [چون اگر هر دو نادرست باشند مقدم $\sim q \Rightarrow \sim p$ نادرست شده و به انتفای مقدم ارزش آن درست می‌شود] در نتیجه در گزینه (۴) ارزش مولفه $\sim p$ نادرست بوده و ارزش کل گزاره مرکب را نادرست می‌کند.

2 47

نقشه راه: می‌دانیم $p \vee q \equiv \sim p \Rightarrow q$. بنابراین اکنون می‌دانیم $p \vee q$ درست و $p \wedge q$ نادرست، یعنی یکی از گزاره‌های p و q درست و دیگری نادرست است در نتیجه گزاره $p \Leftrightarrow q$ الزاماً نادرست است.

2 48

نقشه راه: وقتی گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است، p و q غیرهم‌ارزش هستند و چون q درست است، بنابراین p نادرست است و همچنین از نادرستی $r \vee q$ نتیجه می‌گیریم که r نیز نادرست است در نتیجه گزاره $p \Leftrightarrow r$ نادرست خواهد بود و سایر گزاره‌ها به انتفای مقدم درست هستند.

4 49

نقشه راه: گزاره $p \Leftrightarrow q$ نادرست است، بنابراین p و q هم‌ارزش نیستند. یعنی یکی درست و دیگری نادرست است از طرفی $p \vee (q \Rightarrow p)$ درست است که اگر $p \equiv F$ و $q \equiv T$ فرض شود ارزش آن نادرست خواهد شد. بنابراین باید p درست و q نادرست باشد تا ارزش گزاره $p \vee (q \Rightarrow p)$ درست باشد، حال اگر p درست و q نادرست باشد ارزش گزاره $q \wedge p$ نادرست خواهد شد.

2 50

نقشه راه: گزاره $(p \vee q) \sim$ نادرست است یعنی $p \vee q$ درست است، یعنی حداقل یکی از دو گزاره p و q درست است. از طرفی $p \Leftrightarrow q$ نیز درست است پس p و q هر دو درست و یا هر دو نادرست هستند که فرض هر دو نادرست را قبلاً رد کردیم، پس هم p و هم q باید درست باشند بنابراین $\sim q \vee p$ نیز درست خواهد بود و گزینه (۲) جواب است.

3 51

نقشه راه: گزاره $p \Rightarrow q$ تنها در صورتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد، بنابراین $p \wedge q$ نیز نادرست خواهد بود و گزینه (۳) جواب خواهد بود.

4 52

نقشه راه: ارزش $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ نادرست است، پس $p \equiv T$ و $q \equiv F$ و $r \equiv F$ می‌باشد. حال با ارزش‌های به دست آمده برای سه گزاره ارزش گزینه (۴) درست خواهد بود و برای ستون آخر مناسب است.

3 53

نقشه راه: در ردیف اول چون $r \sim q \wedge$ درست است. پس q درست و r نادرست است. در ردیف دوم چون $r \Rightarrow p$ درست است و p درست است باید r هم درست باشد بنابراین گزینه (۳) جواب است.

4 54

نقشه راه: اگر جدول کامل برای گزاره‌های فوق رسم کنید، خواهیم داشت:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	د	د
ن	ن	د	ن

$q = T$

همانطور که در ردیف دوم جدول می‌بینید. در این ردیف ارزش p درست و q نادرست است. اما ردیف اول و سوم این جدول هر دو به صورت د-د می‌باشد که در هر دوی آن‌ها ارزش q درست اما در یکی از آن‌ها ارزش p درست و در دیگری ارزش p نادرست است. بنابراین معلوم می‌شود که q در هر دوی این حالت دارای ارزش ثابت درست است. بنابراین گزینه (۴) تنها گزینه قطعی و قابل قبول است:

CHAPTER

4 آمار استنباطی

۲۶۲	درس ۱: گردآوری داده‌ها
۲۷۳	TEST
۲۸۱	درس ۲: برآورد
۲۹۵	TEST
۳۰۱	پاسخ‌نامه

گردآوری داده‌ها

1. آشنایی با چند اصطلاح اولیه
2. مطالعه جامعه آماری
3. انواع روش‌های آمارگیری
4. آمار استنباطی

قبل از این‌که وارد مقوله گردآوری داده‌ها و اصطلاحات تخصصی‌تر در این فصل شویم، ابتدا باید تکلیف خودمان را با معنی این دو واژه روشن کنیم:

1 گردآوری: منظور جمع‌آوری و کسب اطلاعات و نوشتن آنها روی کاغذ یا وارد کردن آنها در کامپیوتر است.

2 داده‌ها: واقعیت‌هایی (حقیقی) درباره یک چیز هستند که در موارد زیر به کار می‌روند.

● **استنباط:** ادراک و دریافت معنی و مفهوم چیزی بر اثر دقت و تیزهوشی [فرهنگ معین]

● **محاسبه:** حساب چیزی را نگه داشتن

● **برنامه‌ریزی:** مجموعه کارهایی که به هدفی مشخص منجر می‌شود.

به‌عنوان مثال: فرض کنید وزارت بهداشت می‌خواهد برقی ویژگی‌های [مثل سن، وزن، پهناسیت و ...] بیماران دیابتی را بررسی کند. حال سؤال این است که آیا برای این‌کار می‌تواند همه این بیماران را پیدا کند و از تک‌تک آنها درباره این ویژگی‌ها سؤال کند؟

پاسخ این است که عملاً همه این افراد در دسترس نیستند و این‌کار بسیار پرهزینه و وقت‌گیر است، بنابراین پاره، استفاده از علم آمار است، که در این فصل به آن می‌پردازیم.

PART

1

آشنایی با چند اصطلاح اولیه

1 جامعه آماری: به مجموعه تمام افراد یا اشیایی که می‌خواهیم در مورد آنها داده‌ها را گردآوری کنیم جامعه آماری گفته می‌شود. به تعداد اعضای یک جامعه آماری اندازه جامعه گفته می‌شود.

به‌عنوان مثال: اگر بخواهیم قدر دانش‌آموزان یک مدرسه را بررسی کنیم، جامعه آماری، دانش‌آموزان مدرسه و ویژگی مورد بررسی قدر آن‌هاست و اعدادی که از این بررسی حاصل می‌شود را **داده** می‌نامیم.

2 واحد آماری: به هر یک از افراد یا اشیاء در یک جامعه آماری، **واحد آماری**¹ گفته می‌شود.

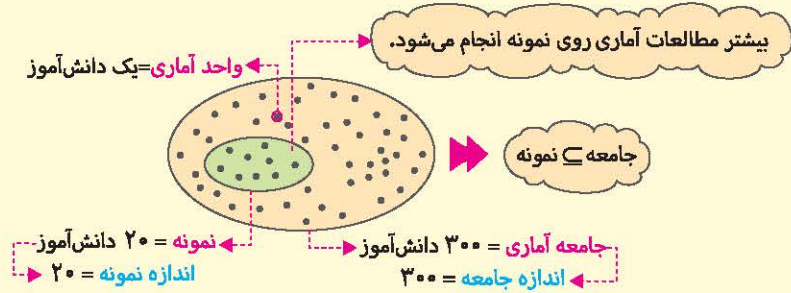
به‌عنوان مثال: در مثال قبلی هر دانش‌آموز یک واحد آماری است.

3 نمونه: هر زیرمجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک **نمونه** می‌نامند. به تعداد عضوهای یک نمونه اندازه نمونه گفته می‌شود.

به‌عنوان مثال: ممکن است با قرعه‌کشی، ۲۰ نفر از ۳۰۰ دانش‌آموز مدرسه‌ای را انتخاب کنیم. این ۲۰ نفر یک **نمونه** هستند و ۳۰۰ نفر جامعه آماری و هر نفر یک **واحد آماری** و روش مشخص **قرعه‌کشی** می‌باشد.

حال در یک نگاه می‌توانیم این اصطلاحات اساسی را روی شکل ببینیم:

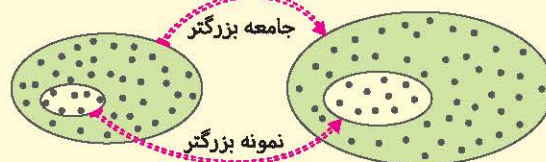
1. شاعر بلندآوازه احمد شاملو با نگاهی تیز و نقادانه به این نام‌گذاری می‌تازد و انسان را در برابر چالشی عمیق قرار می‌دهد: «میلاد مبارک ای واحد آماری / قربانی فاجعه کاهش نوزادمرگی»



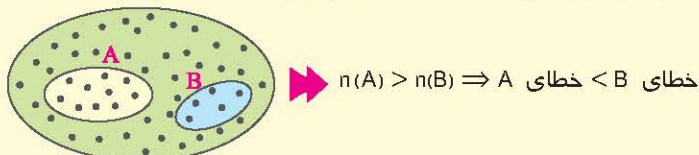
EXAMPLE

1. می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های مگس‌های سفید مزاحم در شهر تهران را بررسی کنیم. جاهای خالی را با یکی از دو عبارت مناسب پر کنید:
- (الف) هر مگس سفید است.
 یک نمونه یک واحد آماری
- (ب) همه مگس‌های سفید که کل واحدهای آماری هستند را تشکیل می‌دهند.
 نمونه آماری جامعه آماری
- (ج) اگر طول عمر همه مگس‌های سفید را در اختیار داشته باشیم را داریم.
 جامعه آماری داده‌های جامعه
- (د) صد مگس سفید معرفی یک است.
 واحد آماری نمونه
2. می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم. اگر ۵ ماهی از میان آنها صید کنیم و وزن آنها را اندازه‌گیری کنیم در این صورت:
- (الف) هر ماهی درون حوضچه است.
 یک واحد آماری یک نمونه
- (ب) به کل ماهی‌های درون حوضچه گفته می‌شود.
 واحد آماری جامعه آماری
- (ج) پنج تا از ماهی‌های درون حوضچه معرفی است.
 واحد آماری یک نمونه
- (د) اگر وزن تک تک ماهی‌های درون حوضچه را در اختیار داشته باشیم را داریم.
 داده‌های نمونه داده‌های جامعه

1. اندازه نمونه (تعداد اعضای نمونه) و اندازه جامعه (تعداد اعضای جامعه) رابطه مستقیم دارند و باید متناسب باشند و این گزاره مصداق دقیق این ضرب‌المثل معروف است که می‌گوید: «هر که بامش بیش، برفش بیشتر»:



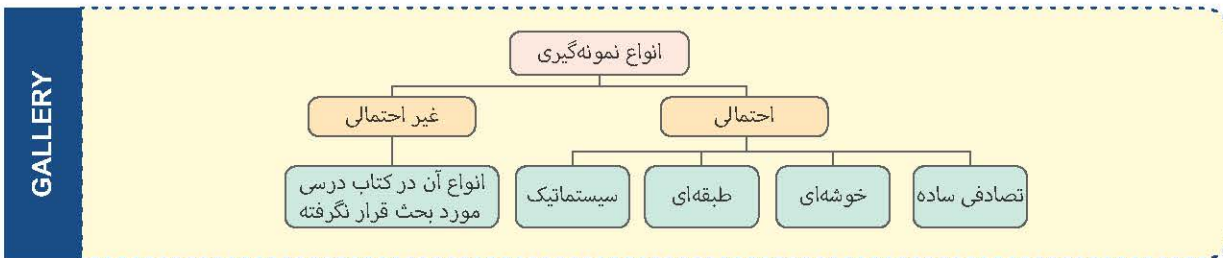
2. در ضمن در یک جامعه مشخص هر چه اندازه نمونه بزرگ‌تر باشد، امکان خطا در تحلیل داده‌ها کمتر است:



برای مطالعه یک جامعه آماری دو روش عمده وجود دارد:

1 سرشماری: معمولاً اگر اندازه یک جامعه **بزرگ نباشد**، می‌توانیم از روش سرشماری استفاده کنیم که در این حالت تک تک افراد جامعه (همه واحدهای آماری) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

2 نمونه‌گیری: اگر اندازه یک جامعه **بزرگ باشد** و همه اعضای آن در دسترس نباشد یا دسترسی به آنها هزینه و زمان بسیاری بخواهد به جای استفاده از **سرشماری** از روش **نمونه‌گیری** استفاده می‌شود. یعنی زیرمجموعه‌ای از جامعه را انتخاب می‌کنیم. نمونه‌گیری را می‌توان به دو تیپ عمده تقسیم کرد که هر یک مدل‌هایی نیز دارند. به نمودار زیر خوب نگاه کنید:



حال به بررسی انواع نمونه‌گیری‌های احتمالی می‌پردازیم و در انتها اشاره‌ای هم به انواع نمونه‌گیری‌های غیراحتمالی خواهیم کرد که در کتاب درسی به‌طور سربسته و بدون اسم بردن از آنها مطرح شده است:

نمونه‌گیری احتمالی

نوعی نمونه‌گیری است که در آن همه واحدهای آماری (هر یک از افراد جامعه) شانس **معلوم (نه لزوماً برابر)** برای انتخاب در **نمونه** دارند و از روشی تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده می‌شود. حال به بررسی انواع نمونه‌گیری احتمالی می‌پردازیم:

نمونه‌گیری تصادفی ساده

نوعی روش نمونه‌گیری است که در آن همه واحدهای آماری، **شانس برابر** برای انتخاب شدن در نمونه دارند و احتمال انتخاب هر کدام از واحدهای آماری برابر است با:

FORMUL

$$p = \frac{n}{N} = \frac{\text{تعداد اعضای نمونه}}{\text{تعداد اعضای جامعه}}$$

به‌عنوان مثال: اگر بخواهیم در آرد ماهیانه مغازه‌داران یک پاساژ ۳ طبقه با ۶۰ مغازه را بررسی کنیم، بدون این که بدانیم موقعیت مغازه آنها به چه صورت است یا در کدام طبقه پاساژ هستند، اسم آنها را روی ۶۰ کاغذ می‌نویسیم و به تصادف ۱۰ تا از آنها را انتخاب می‌کنیم و آن ۱۰ نفر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این روش همه مغازه‌داران **شانسی برابر** برای انتخاب شدن دارند که برابر $p = \frac{10}{60}$ است. در ضمن توجه دارید که در این روش تمامی واحدهای آماری **فهرست** شده‌اند.

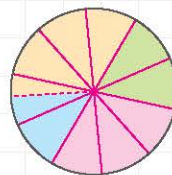
نکات قابل توجه در نمونه‌گیری تصادفی ساده:

- در مواردی از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده استفاده می‌کنیم که تمامی واحدها **فهرست** شده باشند و تمام واحدهای آماری **شانسی برابر** برای انتخاب شدن داشته باشند.
- اگر اندازه جامعه **بزرگ باشد** یعنی تعداد واحدهای آماری **زیاد باشد** دسترسی به **فهرست** اعضای جامعه دشوار و هزینه‌بر است و استفاده از روش نمونه‌گیری تصادفی ساده **مناسب نیست**.
- اگر جامعه آماری دارای **طبقات** متمایزی باشد، ممکن است در نمونه انتخابی از بعضی از طبقات واحد آماری وجود نداشته باشد. مثلاً در نمونه‌گیری فوق ممکن است از طبقه اول پاساژ که معمولاً درآمد بالاتری نسبت به بقیه طبقات دارند هیچ مغازه‌داری وجود نداشته باشد یا مثلاً از میان زنان هیچ فردی انتخاب نشده باشد این امر ممکن است باعث بروز خطا در محاسبه درآمد مغازه‌داران پاساژ شود.

52 در نمونه‌گیری طبقه‌ای از یک جامعه اندازه نمونه انتخاب شده برابر ۴۸ و فراوانی طبقه وسط ۳۰ می‌باشد. اگر ۴ نفر از این طبقه در نمونه حضور داشته باشند اندازه جامعه کدام است؟

- (۱) ۵۶۰
(۲) ۲۴۰
(۳) ۴۸۰
(۴) ۳۶۰

53 یک جامعه آماری که از دبیران ریاضی، فیزیک، شیمی و زیست تشکیل شده با نمودار دایره‌ای زیر به نمایش درآمده است. در نمونه‌گیری طبقه‌ای از این جامعه اگر اندازه نمونه ۲۰۰ باشد سهم دبیران فیزیک در نمونه انتخاب شده چند نفر است؟



ریاضی (سبز) فیزیک (زرد)
شیمی (آبی) زیست (صورتی)

- (۱) ۶۰
(۲) ۷۰
(۳) ۷۵
(۴) ۳۵

54 در نمونه‌گیری طبقه‌ای از یک جامعه، تعداد واحدهای آماری انتخاب شده از طبقه آخر ۱۲ و اندازه نمونه انتخاب شده ۶۰ است. طبقه آخر در این جامعه چند درصد جامعه را تشکیل می‌دهد؟

- (۱) ۱۲
(۲) ۲۵
(۳) ۲۰
(۴) ۱۵

55 در نمونه‌گیری سیستماتیک، شماره‌های ۳ نفر که پشت سر هم انتخاب شده‌اند $x+1$ ، $2x+3$ و $x+7$ است. اگر اندازه جامعه ۶۰ باشد، اندازه نمونه انتخاب شده کدام ممکن است باشد؟

- (۱) ۳۰
(۲) ۲۰
(۳) ۱۵
(۴) ۱۲

56 در نمونه‌گیری سامانمند از یک جامعه، ۱۰ نفر به عنوان نمونه انتخاب می‌شوند، اگر شماره‌های ۳ نفری که پشت سر هم انتخاب می‌شوند $5a-1$ ، $3a+4$ و $2a+3$ باشد، اندازه جامعه کدام است؟

- (۱) ۹۰
(۲) ۶۰
(۳) ۸۰
(۴) ۷۰

57 یک آمارگیر از ۱۵۰ نفری که برای دیدن تئاتر شمش پرنده ساخته خانم پری صابری از تئاتر شهر خارج می‌شدند، یک نمونه‌گیری سیستماتیک به عمل آورد تا نظر آنها را درباره کیفیت تئاتر جویا شود. اگر شماره نفر دهم ۲۹ و شماره نفر یازدهم ۴ برابر شماره نفر سوم باشد، اندازه نمونه چقدر است؟

- (۱) ۴۵
(۲) ۶۰
(۳) ۵۰
(۴) ۲۵

58 در یک نمونه‌گیری سیستماتیک از یک جامعه آماری شماره‌های واحدهای آماری انتخاب شده به صورت $7, a, 23, \dots, 159$ است. اندازه این جامعه کدام ممکن است باشد؟

- (۱) ۱۶۰
(۲) ۱۶۶
(۳) ۱۷۲
(۴) ۱۷۸

59 در نمونه‌گیری سیستماتیک از یک جامعه ۸۰ نفری بین دو نفر با شماره‌های ۷ و ۲۳ سه نفر دیگر نیز انتخاب شده‌اند، اندازه نمونه انتخاب شده کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۰
(۲) ۲۰
(۳) ۱۶
(۴) ۸

60 تفاوت اصلی بین نمونه‌گیری احتمالی و غیراحتمالی کدام است؟
(۱) نمونه‌گیری غیراحتمالی در جوامع بزرگ و نمونه‌گیری احتمالی در جوامع کوچک کاربرد دارد.

(۲) در نمونه‌گیری غیراحتمالی همه اعضا شانس برابر و در نمونه‌گیری احتمالی شانس نابرابر برای انتخاب شدن دارند.

(۳) نمونه‌گیری احتمالی در جوامع بزرگ و نمونه‌گیری غیراحتمالی در جوامع کوچک کاربرد دارد.

(۴) در نمونه‌گیری احتمالی همه اعضا شانس معلوم و در نمونه‌گیری غیراحتمالی شانس نامعلوم برای انتخاب شدن دارند.

61 در کدام یک از موارد زیر از نمونه‌گیری غیراحتمالی استفاده نمی‌شود؟

- (۱) هنگامی که جامعه طبقه‌بندی شده باشد و لیست افراد موجود باشد.
(۲) هنگامی که نخواهیم نتایج را از نمونه به جامعه تعمیم دهیم.
(۳) هنگامی که جامعه کوچک باشد.
(۴) زمانی که چارچوب نمونه‌گیری موجود نباشد.

4 38

تحلیل مفهوم: احتمال انتخاب هر عضو برابر $P = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ است یعنی تعداد عضوهای نمونه تقسیم بر تعداد عضوهای جامعه که البته می‌شد جواب را به صورت $P = \frac{20}{100}$ هم در نظر گرفت یعنی تقسیم جامعه به قسمت ۵۰ تایی و انتخاب ۱۰ عضو از هر کدام تأثیری در احتمال انتخاب واحدهای آماری ندارد.

3 39

تحلیل مفهوم: احتمال هر عضو جامعه برابر است با:

$$P = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

چون دو قسمت شامل ۲۰ نفر است.

1 40

تحلیل مفهوم: تعداد طبقات یا فاصله نمونه‌گیری برابر است با:

$$d = \left[\frac{N}{n} \right] = \left[\frac{120}{30} \right] = 4$$

یعنی ۳۰ طبقه داریم که در هر کدام ۴ نفر حضور دارند. احتمال این که هر یک از افراد طبقه اول انتخاب شوند $\frac{1}{4}$ است، بنابراین برای سایر طبقات هم همین است.

2 41

تحلیل مفهوم: در نمونه‌گیری سیستماتیک نیز همانند نمونه‌گیری تصادفی ساده احتمال انتخاب همه واحدهای آماری برابر است. بنابراین نسبت هر کدام به دیگری ۱ خواهد بود.

3 42

$$n_1 = \frac{150}{200 + 150 + 100 + 50} \times 200 = \frac{150}{500} \times 200 = 60$$

3 43

تحلیل مفهوم: احتمال انتخاب هر خوشه برابر سایر خوشه‌هاست و چون ۴ خوشه داریم احتمال انتخاب هر یک برابر $\frac{1}{4}$ است.

1 44

$$n_1 = \frac{210}{210 + 90} \times 40 = \frac{21}{30} \times 40 = \frac{21 \times 4}{3} = 28$$

1 45

$$d = \left[\frac{900}{45} \right] = 20$$

2 46

تحلیل و محاسبه: اندازه طبقات (فاصله نمونه‌گیری) برابر است با:

$$d = \frac{1000}{200} = 5$$

$$a_1 = 2 \xrightarrow{+5} a_2 = 7 \xrightarrow{+5} a_3 = 12 \xrightarrow{+5} a_4 = 17$$

2 47

$$d = 23 - 11 = 12$$

$$d = \left[\frac{N}{n} \right] \Rightarrow 12 = \left[\frac{N}{40} \right] \Rightarrow 12 \leq \frac{N}{40} < 13$$

$$\Rightarrow 480 \leq N < 520$$

1 48

$$d = \left[\frac{N}{n} \right] = \frac{50000}{250} = 200$$

4 49

$$d = \left[\frac{N}{n} \right] = \frac{3000}{200} = 15$$

چون نقطه شروع ۵ و فاصله نمونه‌گیری ۱۵ است. پس گزینه (۴) صحیح است.

3 50

نقشه راه: تعداد افراد در طبقه سوم برابر است با:

$$f_3 = 1240 - 200 - 480 = 560$$

$$\frac{n_1}{f_1} = \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_3}{f_3} \Rightarrow \frac{25}{200} = \frac{n_2}{480} = \frac{n_3}{560} \Rightarrow$$

$$n_2 = \frac{25 \times 48}{20} = 60, n_3 = \frac{25 \times 56}{20} = 70 \Rightarrow n_2 - n_3 = 10$$

2 51

$$n_1 = \frac{f_1}{\sum f_i} \times n \Rightarrow n_1 = \frac{21}{420} \times 60 = 3$$

4 52

$$n_k = \frac{f_k}{N} \times n \Rightarrow 4 = \frac{30}{N} \times 48 \Rightarrow N = 30 \times 12 = 360$$

2 53

$$n_k = \frac{f_k}{\sum f_i} \times n = \frac{3/5}{10} \times 200 = 70$$

3 54

$$12 = \frac{f_k}{\sum f_k} \times 60 \Rightarrow R_k = \frac{f_k}{\sum f_k} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \Rightarrow f_k = 20\%$$

2 55

نقشه راه: افرادی که پشت سر هم در نمونه‌گیری سیستماتیک انتخاب می‌شوند، شماره‌هایشان جملات متوالی یک تصاعد عددی است بنابراین:

$$2 \times (2x + 3) = (x + 1) + (x + 7) \Rightarrow$$

$$4x + 6 = 2x + 8 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{\Delta} = 23 \Rightarrow 23 = 7 + (\Delta - 1) \times d \Rightarrow d = \frac{16}{4} = 4 \end{cases}$$

حال با داشتن d و N می‌توانیم اندازه نمونه را به دست آوریم:

$$4 = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \Rightarrow 4 \leq \frac{N}{n} < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{n}{N} < \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 16 \leq n < 20$$

4 60

تحلیل مفهوم: در نمونه‌گیری احتمالی همه اعضا شانس معلوم دارند.

1 61

تحلیل مفهوم: اگر جامعه طبقه طبقه باشد و لیست افراد موجود باشد بهتر است از نمونه‌گیری احتمالی استفاده شود.

3 62

تعریف «نمونه‌گیری اربیب» ارائه شده است.

3 63

تحلیل مفهوم: اربیبی باعث می‌شود مشت نمونه خروار نباشد.

3 64

تحلیل مفهوم: چون احتمال حضور افرادی که خانواده پرجمعیت تر دارند در نمونه بیشتر است. برای رفع اربیبی باید از ۱۰۰ سرپرست خانوار سؤال شود.

1 65

در نمونه‌گیری‌های غیراحتمالی امکان اربیبی بیشتر وجود دارد.

1 66

تحلیل مفهوم: در نمونه‌گیری‌های «احتمالی» از جمله تصادفی ساده امکان اربیبی وجود ندارد.

2 67

تحلیل مفهوم: قطعاً نمی‌توان در ورودی شهر ماشین‌ها را وادار به پر کردن پرسش‌نامه کرد یا با تک‌تک خودروها مصاحبه کرد و دادگانی هم در این زمینه وجود ندارد بنابراین بهترین راه مشاهده است.

1 68

ساده‌ترین راه پر کردن پرسش‌نامه توسط دانش‌آموزان است.

2 69

تعریف «آمارگیری» است.

4 70

روش‌های آمارگیری مصاحبه، پرسش‌نامه، مشاهده و دادگان است.

2 71

2 72

تحلیل مفهوم: بهترین راه پرسش‌نامه است چون مشاهده مقدور نیست و وقت مصاحبه با تک‌تک آنها وجود ندارد. اطلاعات ذخیره شده‌ای هم در این زمینه وجود ندارد.

بنابراین شماره نفرات انتخاب شده ۲ و ۵ و ۸ است. در نتیجه:

$$d = 8 - 5 = 3 \Rightarrow d = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \Rightarrow 3 = \left\lfloor \frac{60}{n} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow 3 \leq \frac{60}{n} < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{n}{60} < \frac{1}{3} \Rightarrow 15 \leq n < 20$$

4 56

نقشه راه: این اعداد باید تشکیل تصاعد عددی بدهند بنابراین:

$$2 \times (3a + 4) = (2a + 3) + (\Delta a - 1)$$

$$\Rightarrow 6a + 8 = 2a + 3 \Rightarrow a = 6$$

بنابراین شماره افراد انتخاب شده ۲۹ و ۲۲ و ۱۵ می‌باشد در نتیجه خواهیم داشت:

$$d = 22 - 15 = 7$$

$$d = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \Rightarrow 7 = \left\lfloor \frac{N}{10} \right\rfloor \Rightarrow 7 \leq \frac{N}{10} < 8 \Rightarrow 70 \leq N < 80$$

3 57

نقشه راه: به سراغ تصاعد عددی می‌رویم:

$$\begin{cases} a_1 = 29 \Rightarrow a_1 + 9d = 29 \\ a_2 = 4a_1 \Rightarrow a_1 + 10d = 4(a_1 + 2d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 29 - 9d \\ 2a_1 = 2d \end{cases}$$

$$\frac{2d}{3} = 29 - 9d \Rightarrow 2d = 87 - 27d \Rightarrow 29d = 87 \Rightarrow d = 3$$

از طرفی می‌دانیم $d = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$ می‌باشد بنابراین:

$$3 = \left\lfloor \frac{150}{n} \right\rfloor \Rightarrow 3 \leq \frac{150}{n} < 4 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{n}{150} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{150}{4} < n \leq 50 \Rightarrow 38 < n \leq 50$$

1 58

نقشه راه: ابتدا a را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{7 + 23}{2} = \frac{30}{2} = 15 \Rightarrow d = 15 - 7 = 8$$

از طرفی جمله آخر $a_n = 159$ معلوم است؛ بنابراین:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 159 = 7 + (n-1) \times 8$$

$$\Rightarrow 8(n-1) = 152 \Rightarrow n = 20$$

بنابراین داریم:

$$d = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \Rightarrow 8 = \left\lfloor \frac{N}{20} \right\rfloor$$

$$8 \leq \frac{N}{20} < 9 \Rightarrow 160 \leq N < 180$$

2 59

نقشه راه: فرض کنیم شماره سه فرد انتخاب شده a_1, a_2, a_3 باشد در این صورت داریم:

$$7, a_1, a_2, a_3, 23$$