مقدمه

در کتاب حاضر که منطبق بر کتاب درسی حسابان (۱) پایهٔ یازدهم تدوین شده، مطالب هر درس از هر فصل، به یک یا چند قسمت تقسیم شده و در هر قسمت، مفاهیم درسی بیان شده‌اند و با حل مثال‌ها و تست‌های هدف‌دار سعی شده که مفاهیم به صورت ساده، روان و قابل فهم برای دانش‌آموزان ارائه شود.

با حل تست‌ها در پایان هر قسمت، دانش‌آموزان می‌توانند به تسلط در آن مبحث برسند. این تست‌ها شامل مثال‌های کتاب درسی هستند که به صورت تستی شبیه‌سازی شده‌اند. هم‌چنین تست‌های کنکور سراسری به‌ویژه کنکورهای سراسری اخیر، در تست‌های پایانی هر قسمت دیده می‌شود که این تست‌ها از آسان به دشوار طبقه‌بندی شده‌اند. در حل تست‌ها سعی بر آن شده است که راه‌حل‌ها کامل و مفصل باشند و در صورت لزوم راهبردهایی ارائه شده است که به دانش‌آموزان کمک می‌کند که در زمان کمتری تست‌ها را حل کنند.

تا این‌جا متوجه شدید که ما از هیچ تلاشی جهت آموزش در این کتاب به‌ویژه آموزش حل تست‌ها دریغ نکردیم و اکنون نوبت شما دانش‌آموزان عزیز است که نهایت تلاش را در حل تست‌ها به کار گیرید. ممکن است بفرمایید، چطوری؟ این‌جاست که همهٔ اساتید، حل تمرین زیاد را به شما پیشنهاد می‌هند، ما هم همین طور. البته ممکن است بعضی تست‌ها درجهٔ سختی‌شان فراتر از حد معمول باشد. شما باید به دنبال راهی برای حل این تست‌ها باشید. این‌جا هم احتمالاً بفرمایید، چطوری؟ برای جواب، شما را به خواندن داستانی که در ادامه آمده است، دعوت می‌کنم.

صدها سال پیش در یک شهر کوچک ایتالیا، فردی که مغازهٔ کوچکی داشت، مبلغ زیادی را به یک رباخوار بدهکار بود. رباخوار مردی بسیار پیر و غیر جذاب بود. مغازه‌دار دختری زیبا داشت. رباخوار تصمیم گرفت به این مغازه‌دار معامله‌ای پیشنهاد دهد که بدهی خود را به طور کامل صاف کند. با این حال، ماجرا از این قرار بود که فقط در صورت ازدواج فرد رباخوار با دختر مغازه‌دار، او می‌تواند بدهی‌اش را صاف کند. نیازی به گفتن نیست که این پیشنهاد با نگاه انزجاری دختر روبه‌رو شد. رباخوار گفت که او دو سنگ‌ریزه را درون کیسه قرار می‌دهد، یکی سفید و یکی سیاه. دختر باید دست در کیسه کند و یک سنگ‌ریزه را انتخاب کند. اگر سیاه بود، بدهی پاک می‌شود، اما رباخوار با دختر ازدواج می‌کند. اگر سفید بود، بدهی او صاف می‌شود، اما دختر دیگر مجبور نیست با رباخوار ازدواج کند. رباخوار که در مسیر سنگ‌ریزه‌ای باغ مغازه‌دار ایستاده بود، خم شد و دو سنگ‌ریزه برداشت. در حالی که آن‌ها را برمی‌داشت، دختر متوجه شد که او دو سنگ‌ریزهٔ سیاه را برداشته و هر دو کیسه دارای سنگ سیاه است. وی سپس از دختر خواست که دست در کیسه کند و یکی را انتخاب کند. دختر سه راه داشت که میتوانست انجام دهد:

- از برداشتن سنگ‌ریزه از کیسه خودداری کند.
- هر دو سنگ‌ریزه را از کیسه بیرون آورده و دست رباخوار را رو کند.
- یک سنگ‌ریزه از کیسه‌ای که کاملاً مطمئن است که سیاه است بردارد و خود را فدای آزادی پدرش کند.

اما او راه دیگری را انتخاب کرد. او سنگ‌ریزه‌ای را از کیسه بیرون آورد و قبل از این‌که به آن نگاه کند، به‌صورتی که انگار تصادفی است، آن را در میان سنگ‌ریزه‌های دیگر انداخت. او به رباخوار گفت: «اوه، چقدر من دست و پاچلفتی هستم. مهم نیست، اگر به کیسه‌ای که باقی مانده است نگاه کنید، می‌توانید بگویید کدام سنگریزه را برداشتم.»

سنگ‌ریزه‌ای که در کیسه مانده بود، به وضوح سیاه بود و چون رباخوار نمی‌خواست لو برود، مجبور شد قبول کند که دختر سنگ سفید را برداشته و بدهی پدرش را صاف کند.

این داستان را برایتان گفتم که با تفکر خلاقانه‌تان گزینهٔ درست را انتخاب کنید و تسلیم شدن گزینهٔ مناسبی نیست.

و اما قدردانی....

■ اول؛ باید از آقای اختیاری مدیر انتشارات تشکر کنیم که واقعاً مثل رئیس سازمان استاندارد کشور (!) می‌مونه، یعنی تا کتابی رو به لحاظ محتوایی و ظاهری در حد استانداردهای مهروماه تشخیص نده، اجازهٔ چاپ بهش نمی‌ده، ممنونیم که هستید و کیفیت رو بالا نگه می‌دارید.

■ دوم؛ از استاد انوشه مدیر شورای تألیف انتشارات که راهنمایی‌های ایشان در تکمیل کتاب بسیار راهگشا بود، تشکر می‌کنیم.

■ سوم؛ از آقای حسن امین‌ناصری مدیر اجرایی انتشارات که در رفع دغدغه‌های ما تلاش‌های فراوانی نمودند تشکر می‌کنیم.

این کتاب مرهون زحمات و تلاش‌های این دوستان است:

■ خانم کبری ملکی مدیر واحد ویراستاری که بسیار دقیق و با جدیت تمام پیگیر اتمام و تکمیل مراحل مختلف کتاب بودند.

■ آقای وحید جعفری مسئول ویراستاری گروه ریاضی که با زحمات ارزشمند و صادقانهٔ خود این کتاب را به این مرحله رساند.

■ آقایان مهدی مرادی، امیرحسین نیکان و آروین حسینی و خانم حدیث مختوایی که ویرایش علمی کتاب را بر عهده داشتند.

■ آقای محسن فرهادی مدیر گروه هنری و تیم هنری ایشان آقایان تایماز کاویانی و حسام طلایی.

■ سرکار خانم مریم تاجداری مدیر تولید و همهٔ عزیزانی که در زمینهٔ تولید کتاب همراهی کردند، به‌خصوص خانم بهناز آب‌خرابات و آقای نیما منتظری صفحه‌آراهای عزیز که زحمات زیادی رو متقبل شدن.

■ آقای امیر انوشه مدیریت سایت، آقای عماد ولدی و همکاران روابط عمومی، بابت همکاری صمیمانه‌شون.

از تمام صاحب‌نظران، استادان و خوانندگان عزیز صمیمانه درخواست می‌کنیم که این مجموعه را از نقد و نظر خود محروم نسازند.

یکی از راه‌های ارتباط با ما از طریق اینستاگرام است:

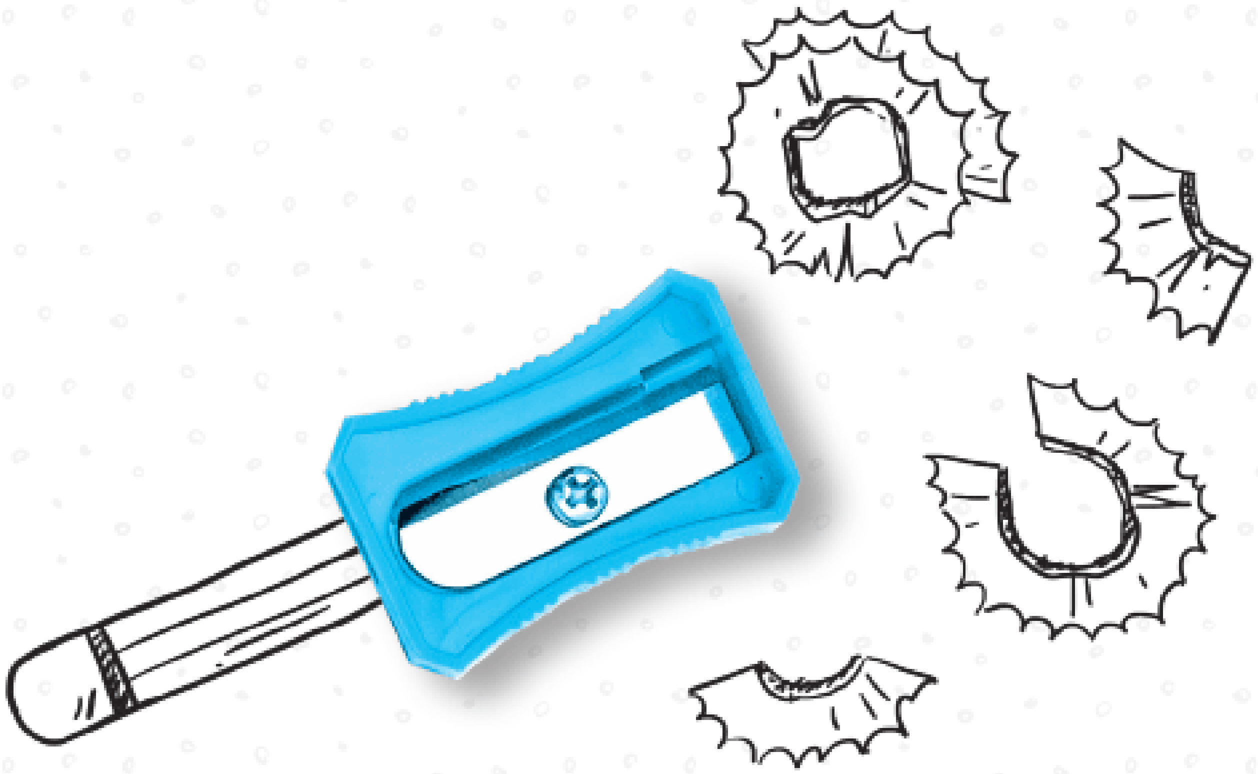
عباس اشرفی: @ashrafii.official

دکتر بهرام دستوریان: @Dr_Dastourian

فصل دوم

تابـع

- یکی از مهم‌ترین مباحث ریاضی، تابعه!
- در ادامهٔ درس تابع که پارســال خوندین، امسال تو این فصل با تابع بیشتر آشنا می‌شــین. انواع تابع در ادامه میاد. تابع یک‌به‌یک و تابع وارون بعد از اینا بحث میشــه. در نهایت یاد می‌گیرید که چطور دو تابع رو با هم جمع، تفریق، ضرب، تقسیم یا ترکیب کنین.

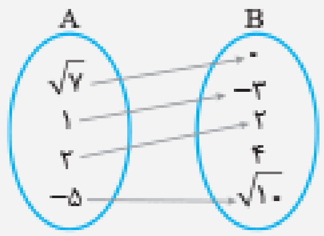


مفهوم تابع

در سال قبل با مفهوم تابع آشنا شدیم. در ادامه بیشتر با تابع آشنا می‌شویم.

یک تابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود، A را دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع می‌نامند.

به عنوان مثال رابطهٔ زیر از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B یک تابع است که دامنهٔ آن $A=\{\sqrt{۷},۱,۲,-۵\}$ و هم دامنهٔ آن $B=\{۰,-۳,۲,۴,\sqrt{۱۰}\}$ است و همچنین برد آن مجموعهٔ $\{۰,-۳,۲,\sqrt{۱۰}\}$ می‌باشد که زیرمجموعهٔ هم دامنه (مجموعهٔ B) است.



تذکر: برد تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه است. در واقع هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعهٔ دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

نکته

برای مشخص کردن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوهٔ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد (ضابطهٔ تابع)، معلوم باشد.

$$\begin{cases} f: \underset{\text{دامنهٔ تابع}}{A} \to \underset{\text{هم‌دامنهٔ تابع}}{B} \\ y=f(x) \to \text{ضابطهٔ تابع} \end{cases} \qquad (D_f=A\ \text{(دامنهٔ تابع)},\ R_f\subseteq B\ \text{(برد تابع)})$$

مثال: کدام‌یک از نمایش‌های زیر برای تابع $\begin{cases} f:(-۱,۲]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$ قابل قبول است؟

۱) $\begin{cases} f:(-۱,۲]\to(۱,۴] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$

۲) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[۰,۴] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to(۱,۴] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$

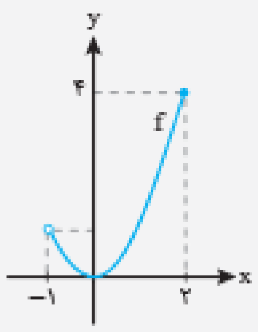
۴) $\begin{cases} f:(-۱,۲]\to[۰,۴] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

نمایشی برای تابع f قابل قبول است که دامنهٔ آن $(-۱,۲]$، ضابطهٔ آن $f(x)=x^۲$ و همچنین هم‌دامنهٔ آن شامل برد تابع باشد.

$$\begin{cases} f:(-۱,۲]\to[۰,۴] \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$$

$$R_f=[۰,۴]$$



گزینهٔ ۱: هم‌دامنه شامل برد نیست، پس نادرست است.

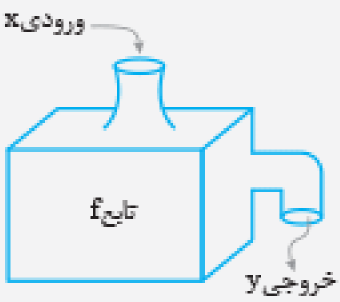
گزینهٔ ۲ و ۳: دامنه $(-۱,۲]$ نیست و نادرست است.

گزینهٔ ۴: دامنه $(-۱,۲]$، ضابطه $f(x)=x^۲$ و هم‌دامنه شامل برد است، پس نمایش قابل قبولی برای تابع است. دقت داشته باشید که هریک از تابع‌های زیر، نمایش قابل قبولی برای تابع f هستند.

$$\begin{cases} f:(-۱,۲]\to[-۱,۵) \\ f(x)=x^۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} f:(-۱,۲]\to(-۱,+\infty) \\ f(x)=x^۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} f:(-۱,۲]\to[۰,+\infty) \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$$

تابع به عنوان یک ماشین

می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و هر ورودی دقیقاً یک خروجی دارد. اگر چه ممکن است که چند ورودی دارای یک خروجی یکسان باشند. اگر x عضو دلخواهی از دامنهٔ f، y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند و می‌نویسیم: $y=f(x)$.



مثال: **فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد حقیقی را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، یک واحد به آن اضافه کرده و سپس آن را $\sqrt{8}$ برابر می‌کند. این ماشین به ازای ورودی $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$، چه خروجی خواهد داشت؟**

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴

ابتدا باید توجه داشته باشید که $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$، زیرا:

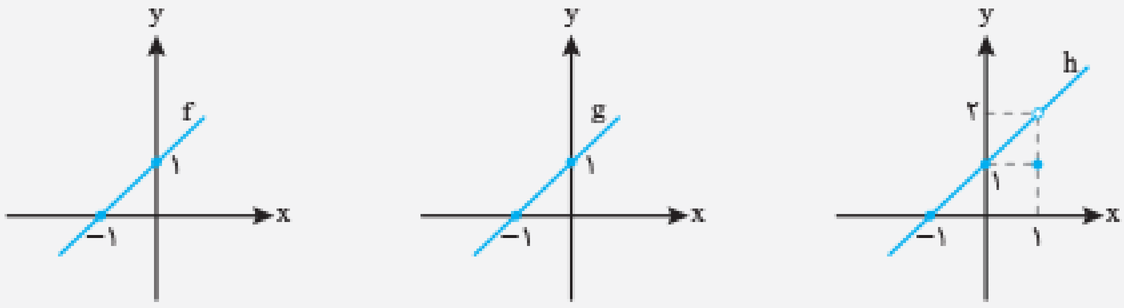
$$(\sqrt{2}-1)^2=\sqrt{2}^2-2\sqrt{2}+1^2=3-2\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=|\sqrt{2}-1|=\sqrt{2}-1$$

پس ورودی ماشین $\sqrt{2}-1$ است.

$$\text{ورودی}=\sqrt{2}-1\xrightarrow{\text{یک واحد اضافه}}\sqrt{2}-1+1=\sqrt{2}\xrightarrow{\sqrt{8}\ \text{برابر}}\sqrt{2}\times\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$$

برابری دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات کاملاً بر هم منطبق باشند، آن‌گاه این دو تابع با هم برابرند.



دو تابع f و g برابرند زیرا کاملاً بر هم منطبق هستند ولی توابع h,f برابر نیستند زیرا در $x=1$ دو تابع منطبق نیستند و در واقع $f(1)\neq h(1)$.

تعریف: دو تابع g,f را برابر می‌نامیم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

الف: دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند. $(D_f=D_g)$

ب: برای هر x از این دامنهٔ یکسان، مقدار تابع‌ها یکسان باشند. $(f(x)=g(x))$

به عنوان مثال توابع $f(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-1)|x+1|$ با هم برابر نیستند، زیرا اگرچه دامنه‌هایشان با هم برابر است، یعنی:

$$D_f=\mathbb{R};D_g=\mathbb{R}$$

اما شرط دومی برقرار نیست، یعنی $x\in\mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $f(x)$ با $g(x)$ برابر نباشد، مثلاً:

$$f(-2)=(-2)^2-1=3$$
$$g(-2)=(-2-1)|-2+1|=-3$$

پس دو تابع g,f برابر نیستند.

مثال: **اگر دو تابع $f=\{(2,m^2+2),(-2,m-1),(-1,k)\}$ و $g=\{(2,3),(m,2),(-2,n)\}$ با هم برابر باشند. حاصل $k-n$ کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

ابتدا باید توجه داشت که $(2,3)\in g$ و $(2,m^2+2)\in f$، بنابراین:

$$m^2+2=3\Rightarrow m^2=1\Rightarrow m=\pm1$$

پس دو حالت داریم:

۱) $m=1:g=\{(2,3),(1,2),(-2,n)\}$

در این حالت g تابعی با دامنهٔ $\{2,1,-2\}$ است که با دامنهٔ f برابر نیست، پس دو تابع مساوی نخواهند بود.

۲) $m=-1:g=\{(2,3),(-1,2),(-2,n)\}$

$$f=\{(2,3),(-2,-2),(-1,k)\}$$

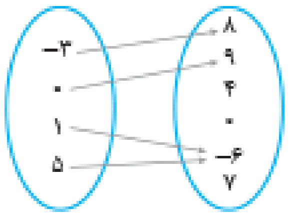
پس داریم:

$$f(-2)=g(-2)\Rightarrow n=-2$$
$$f(-1)=g(-1)\Rightarrow k=2$$

در نتیجه $k-n=2-(-2)=4$.

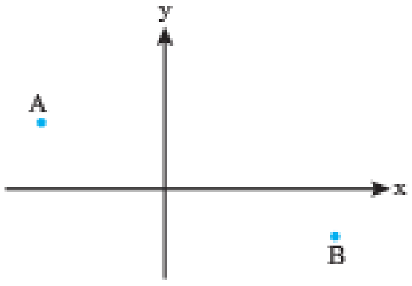
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۶۷. نمودار پیکانی تابع f داده شده است. مجموعه‌های هم‌دامنه و برد این تابع به‌ترتیب چند عضو دارند؟



۱) ۶ , ۶
۲) ۶ , ۳
۳) ۳ , ۶
۴) ۳ , ۳

۲۶۸. در صفحهٔ مختصات مقابل چه تعـــداد تابع وجود دارد (دارند) که نقاط A و B روی آن(ها) قرار داشته باشند؟ (تمرین کتاب درسی)

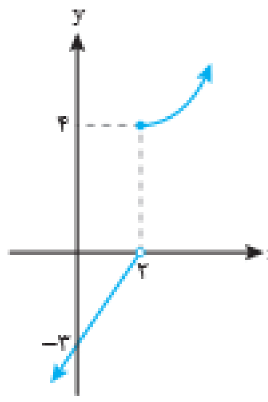


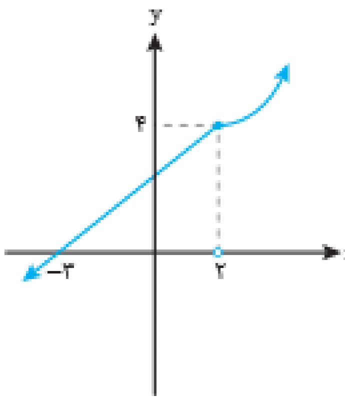
۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

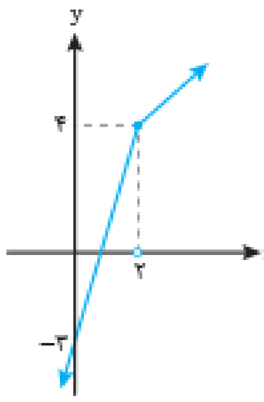
۲۶۹. نمودار تابع f در شرایط زیر صدق می‌کند، نمودار این تابع کدام می‌تواند باشد؟ (تمرین کتاب درسی)

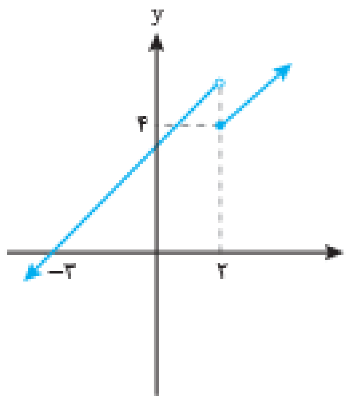
الف) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت می‌دهد.

ب) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۱)


۲)


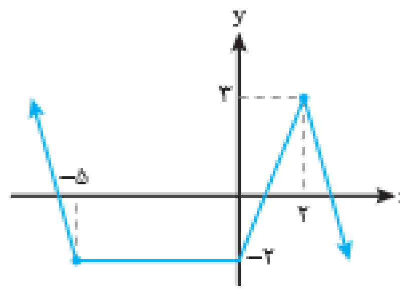
۳)


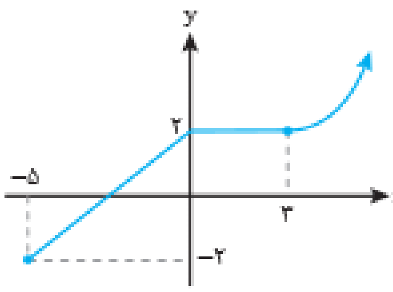
۴)


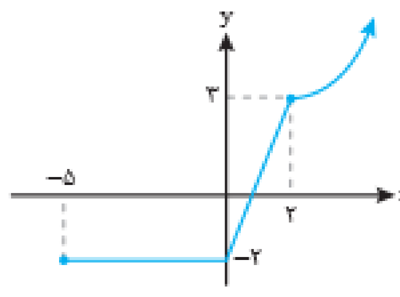
۲۷۰. نمودار کدام تابع f در شرایط زیر صدق می‌کند؟ (تمرین کتاب درسی)

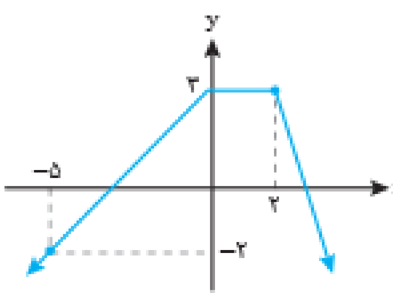
الف) دامنهٔ تابع f مجموعهٔ اعداد حقیقی است و $f(2)=3$ و $f(-5)=-2$.

ب) تابع f در بازهٔ $[0,2]$ ثابت است.

۱)


۲)


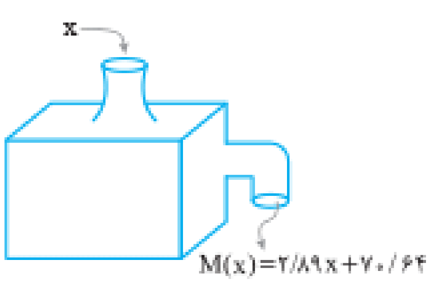
۳)


۴)


۲۷۱. چند تابع از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به مجموعهٔ $B=\{d,e\}$ وجود دارد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۹

۲۷۲. ورودی ماشین روبه‌رو، طول اســـتخوان بازوی یک مرد برحسب سانتی‌متر و خروجی آن، طول قد او برحسب سانتی‌متر می‌باشد. اگر قد یک مرد برابر ۱۸۶ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او تقریباً کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) ۳۵
۲) ۴۰
۳) ۴۵
۴) ۵۰

۲۷۳. چه تعداد از موارد زیر درست است؟ (تمرین کتاب درسی)

الف) اگر دامنهٔ دو تابع با هم برابر و برد آن‌ها نیز با یکدیگر برابر باشد، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنهٔ تابع، زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ $[0, 3]$ است.

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

۲۷۴. برای تابع $\begin{cases} f:[0,5)\to \mathbb{R}^+ \\ f(x)=3x+1 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟

۱) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to \mathbb{R}^+ \\ f(x)=3x+1 \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f:[0,5)\to [1,15] \\ f(x)=3x+1 \end{cases}$ ۳) $\begin{cases} f:[0,5)\to [1,16) \\ f(x)=3x+1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^+\to \mathbb{R} \\ f(x)=3x+1 \end{cases}$

۲۷۵. اگر نمایش تابع f به‌صورت $\begin{cases} f:A\to \{-3,1,2\} \\ f(x)=x^2+1 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین مجموعهٔ A کدام است؟

۱) $\{0\}$ ۲) $\{-1,0,1\}$ ۳) $\{-2,-1,0,1,2\}$ ۴) $\{-2,-1,0,1\}$

۲۷۶. اگر نمایش تابع f به‌صورت $\begin{cases} f:[-1,2)\to B \\ f(x)=|x| \end{cases}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ B کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) $[-2,1)$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[1,3)$

۲۷۷. اگر هم‌دامنهٔ تابع f به‌صورت $\{2,5,6\}$ باشد، کدام گزینه قطعاً در مورد دامنهٔ f درست است؟

۱) حداقل سه عضو دارد.

۲) فقط سه عضو دارد.

۳) حداکثر سه عضو دارد.

۴) می‌تواند بی‌شمار عضو داشته باشد.

۲۷۸. تابع $f=\{(1,2),(5,7)\}$ با کدام تابع برابر است؟

۱) $g=\{(1,7),(5,2)\}$ ۲) $g=\{(1,5),(2,7)\}$

۳) $g=\{(2,5),(1,7)\}$ ۴) $g=\{(5,7),(1,2)\}$

۲۷۹. دو تابع $f=\{(7,4),(2,a)\}$ و $g=\{(2,-1),(b,4)\}$ با هم برابرند. حاصل $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۱۱

۲۸۰. تابع $\begin{cases} g:\mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ g(x)=5x \end{cases}$ با چند مورد از توابع داده شده مساوی است؟ (تمرین کتاب درسی)

الف) $\begin{cases} r:[0,+\infty)\to \mathbb{R} \\ r(a)=5a \end{cases}$ ب) $\begin{cases} s:\mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ s(a)=5a \end{cases}$ پ) $\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{0\}\to \mathbb{R} \\ t(x)=5x \end{cases}$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸۱. چند جفت از توابع زیر با هم برابرند؟

الف) $\begin{cases} g:\mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ g(x)=8x \end{cases}$ ، $\begin{cases} f:\mathbb{R}^+\to \mathbb{R} \\ f(x)=\dfrac{16x}{2} \end{cases}$

ب) $f(x)=x|x|, g(x)=x^2$

پ) $f(x)=\dfrac{9x}{3}, g(x)=3x$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۸۲. دو تابع $f(x)=(x-1)|x|$ و $g(x)=\begin{cases} ax^2+bx & ; & x\ge e \\ cx^2+dx & ; & x<e \end{cases}$ با هم برابرند. حاصل $2a-b+3c-d+e$ کدام است؟

۱) -1 ۲) -5 ۳) ۱ ۴) ۵

توابع گویا

در سال قبل با توابع مختلفی آشنا شدید، تابع‌های ثابت $(f(x)=c\,,\,c\in\mathbb{R})$، تابع همانی $(f(x)=x)$، تابع‌های خطی $(f(x)=ax+b)$، تابع‌های درجه دوم $(f(x)=ax^2+bx+c)$ و به طور کلی توابع چند جمله‌ای، نمونه‌هایی از توابعی هستند که با آن‌ها آشنا شدید. در ادامه با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

تابع گویا: هر تابع به شکل $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $Q(x)\,,\,P(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

تذکر: توابع به فرم $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+c$ که در آن $n\in\mathbb{N}$ و $c\,,\ldots,b\,,a$ اعداد حقیقی‌اند، توابع چند جمله‌ای هستند.

مثال: کدام یک از توابع گزینه‌های داده شده گویا <u>نیست</u>؟

۱) $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$ ۲) $g(x)=\dfrac{\sqrt{3}\,x-1}{x^2+5}$ ۳) $h(x)=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{x}+1}$ ۴) $k(x)=x^3+x^2+1$

■ پاسخ: گزینهٔ ۳

صورت و مخرج توابع کسری گزینه‌های «۱» و «۲»، توابع چندجمله‌ای هستند، پس این توابع گویا هستند. به علاوه، تابع گزینهٔ «۴» نیز گویا است: $\left(k(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{1}\right)$ ولی تابع گزینهٔ «۳» گویا نیست، زیرا در مخرج آن $\sqrt{x}$ وجود دارد و مخرجش تابع چند جمله‌ای نیست.

نکته

دامنهٔ تابع گویای $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ برابر $D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه(های) مخرج}\}$ است.

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x^2+ax+b}$ به‌صورت $D_f=\mathbb{R}-\{2\,,3\}$ است. حاصل $2a-b$ کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۴- ۳) ۱۶ ۴) ۱۶-

■ پاسخ: گزینهٔ ۴

دامنهٔ تابع گویا برابر $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است، پس ۲ و ۳، ریشه‌های مخرج هستند.

$$x=2:(2)^2+a(2)+b=4+2a+b=0\Rightarrow 2a+b=-4$$

$$x=3:(3)^2+a(3)+b=9+3a+b=0\Rightarrow 3a+b=-9$$

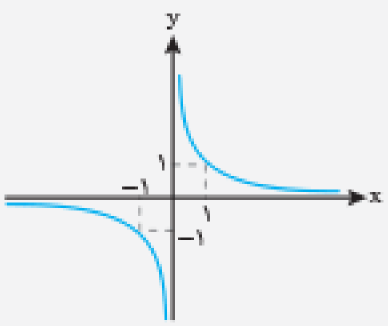
$$\begin{cases}2a+b=-4\\3a+b=-9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=-4\\-3a-b=9\end{cases}\Rightarrow -a=5\Rightarrow a=-5$$

$$2a+b=-4\xrightarrow{a=-5}-10+b=-4\Rightarrow b=6$$

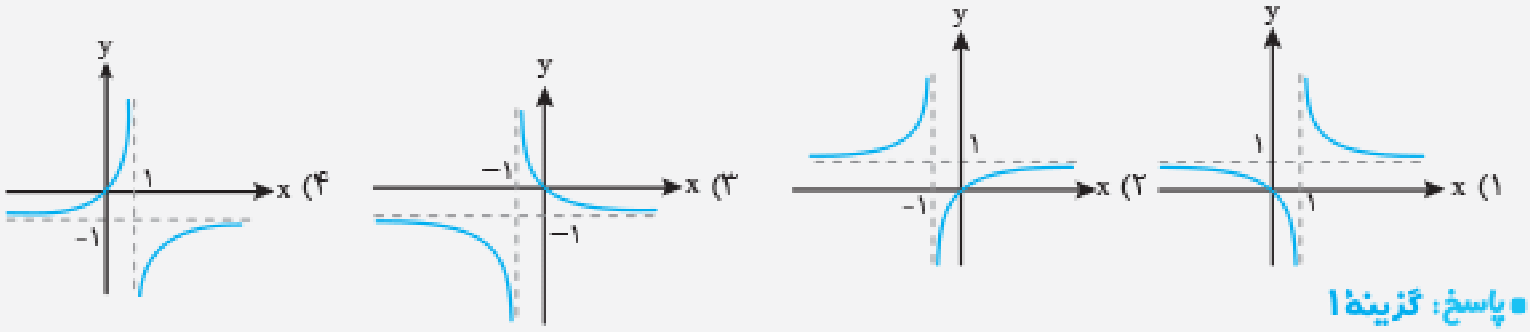
پس: $2a-b=2(-5)-6=-16$

نکته

یکی از مهم‌ترین توابع گویا، $f(x)=\dfrac{1}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ است که نمودار آن به شکل مقابل است:



مثال: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ کدام است؟



■ پاسخ: گزینهٔ ۱

با توجه به $f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-1}$ داریم: $f(x)=\dfrac{1}{x-1}+1$. پس کافی است نمودار f را یک واحد به راست و سپس یک واحد به بالا ببریم.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۸۳. اگر تعداد افرادی که طی یک مدت معین، به وسیلهٔ یک نوع ویروس آلوده می‌شوند از رابطهٔ $n(t)=\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان بر حسب ماه است، پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۲   ۲) ۴

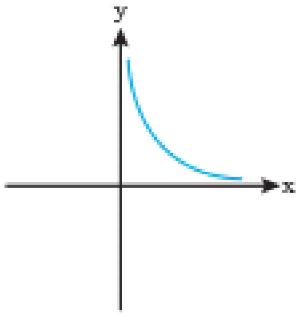
۳) ۶   ۴) ۸

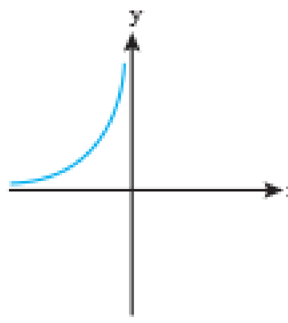
۲۸۴. هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x، درصد آلودگی و $f(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است. هزینهٔ پاک‌سازی ٪۵۰ از آلودگی این رودخانه کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

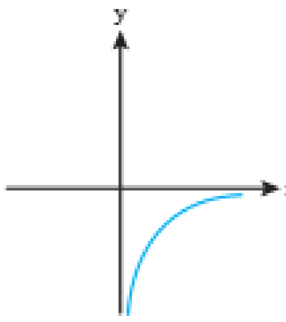
۱) ۲/۵۵   ۲) ۲۵/۵

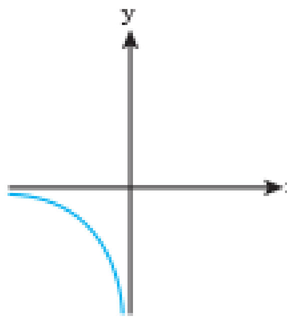
۳) ۲۵۵   ۴) ۲۵۵۰

۲۸۵. نمودار تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ f(x)=-\frac{۱}{x} \end{cases}$ کدام است؟

۱) 

۲) 

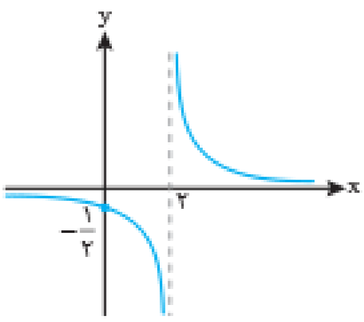
۳) 

۴) 

۲۸۶. نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x} & ; \quad x>۰ \\ x+۲ & ; \quad x\leq ۰ \end{cases}$ از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟

۱) اول   ۲) دوم   ۳) سوم   ۴) چهارم

۲۸۷. نمودار تابع $f(x)=\frac{a}{x+b}$ به‌صورت مقابل است. حاصل $۲a-b$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۲

۳) ۴

۴) ۶

۲۸۸. اگر دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۱}{x-۱} & ; \quad x\neq ۱ \\ k & ; \quad x=۱ \end{cases}$ برابر باشند، مقدار k کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

۲۸۹. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۳}$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) $\mathbb{R}-\{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\}$

۳) $\mathbb{R}-\{-\frac{۱}{۲}\pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\pm\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}\}$

۲۹۰. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{۲x^۲-۴x-۷}$ به‌صورت $\mathbb{R}-\{a,b\}$ است. حاصل $a\times b$ کدام است؟

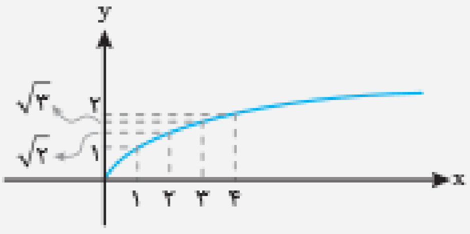
۱) ۲   ۲) ۲-   ۳) ۳/۵   ۴) ۳/۵-

۲۹۱. دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{۶x-۷}{mx^۲-۴x+m}$ برابر $\mathbb{R}$ است. m چند عدد صحیح نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲   ۲) ۳   ۳) ۴   ۴) ۵

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشهٔ دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع ریشه دوم نامیده می‌شود و به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش داده می‌شود.
دامنهٔ این تابع و هم‌چنین برد آن برابر $[0,+\infty)$ است و نمودار آن به شکل مقابل است:



تذکر: تابع ریشه دوم یعنی $f(x)=\sqrt{x}$، یک تابع رادیکالی است.

برای به‌دست آوردن دامنهٔ توابع رادیکالی با فرجهٔ زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

مثال: اگر دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{3x-6}$ به‌ترتیب D_f و R_f باشد، آن‌گاه R_f-D_f شامل چند عدد صحیح است؟

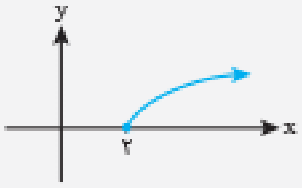
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

باید عبارت زیر رادیکال یعنی $3x-6$ را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار داده تا دامنهٔ تابع رادیکالی f به‌دست آید.

$$3x-6\ge 0\Rightarrow 3x\ge 6\Rightarrow x\ge \frac{6}{3}\Rightarrow x\ge 2\Rightarrow D_f=[2,+\infty)$$

از طرفی برد تابع رادیکالی f برابر $R_f=[0,+\infty)$ است که از روی نمودار هم کاملاً مشخص است.



بنابراین $R_f-D_f=[0,+\infty)-[2,+\infty)=[0,2)$ که این مجموعه شامل دو عدد صحیح ۰، ۱ است.

مثال: دامنهٔ تابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-mx-m}}$ برابر $\mathbb{R}$ است. حدود m کدام است؟

۱) $(-4,0)$ ۲) $[-4,0]$ ۳) $\mathbb{R}-(-4,0)$ ۴) $\mathbb{R}-[-4,0]$

پاسخ: گزینهٔ ۱

ابتدا مخرج نباید ریشه داشته باشد و سپس زیر رادیکال نباید منفی شود که برای هر دو مورد کافی است زیر رادیکال مثبت باشد. عبارت زیر رادیکال یک عبارت درجهٔ دوم است و زمانی مثبت است که: ① $a>0$ (ضریب x^2 مثبت) ② $\Delta<0$

که شرط ① یعنی $a>0$ برقرار است $(1>0)$ و کافی است $\Delta<0$ باشد. $\Delta=b^2-4ac=(-m)^2-4(1)(-m)=m^2+4m<0$

$\Rightarrow m(m+4)<0\Rightarrow$

m		-4		0	
m^2+4m	+	0	−	0	+

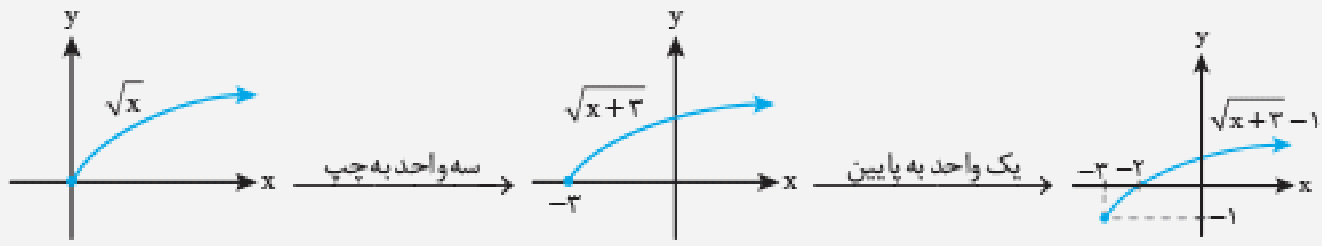
$\Rightarrow m\in(-4,0)$

مثال: نمودار تابع رادیکالی $f(x)=\sqrt{x+3}-1$ از کدام ناحیه مختصاتی <u>نمی‌گذرد</u>؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینهٔ ۴

برای رسم نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+3}-1$، باید نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ را سه واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین ببریم.



همان‌طور که از نمودار مشخص است، از ناحیهٔ چهارم مختصاتی نمی‌گذرد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۹۲. اگر $f(x)=\sqrt{8-x}$ و $g(x)=\sqrt{3x+1}$ باشند، مجموعهٔ $D_f\cap D_g$ شامل چند عدد صحیح است؟ (D_f و D_g به‌ترتیب دامنه‌های f , g هستند.)

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰ (تمرین کتاب درسی)

۲۹۳. دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$ شامل چند عدد صحیح <u>نمی‌شود</u>؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۹۴. برای رسم نمودار تابع $g(x)=۳+\sqrt{x-۱}$ به کمک انتقال نمودار $f(x)=\sqrt{x}$، چه مراحلی را باید انجام داد؟

۱) سه واحد به بالا و یک واحد به چپ
۲) سه واحد به پایین و یک واحد به چپ
۳) سه واحد به بالا و یک واحد به راست
۴) سه واحد به پایین و یک واحد به راست

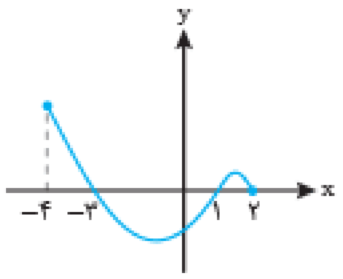
۲۹۵. معادلهٔ $x\sqrt{x}=۱$ چند جواب دارد؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۲۹۶. قرینهٔ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال می‌دهیم، نمودار حاصل، نیمساز ناحیهٔ اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۷)

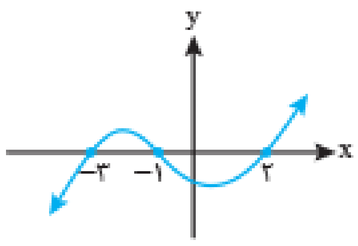
۱) -۲
۲) $۰/۵$
۳) ۱
۴) $۱/۵$

۲۹۷. شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$، کدام است؟ (ریاضی ۹۲)



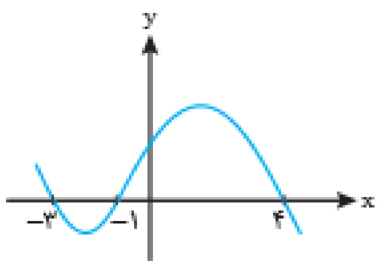
۱) $[۰,۲]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۴,-۳]\cup[۱,۲]$
۴) $[-۳,۰]\cup[۱,۲]$

۲۹۸. شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)$ است. دامنهٔ تابع غیرنقطه‌ای $\sqrt{(x+۱)f(x)}$، کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۷)



۱) $[-۳,۲]$
۲) $[-۱,+\infty)$
۳) $(-\infty,-۱]$
۴) $\mathbb{R}-(-۳,۲)$

۲۹۹. شکل مقابل، نمودار تابع $y=f(x-۲)$ است. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)



۱) $[-۱,۶]$
۲) $[-۳,۲]$
۳) $[-۵,-۳]\cup[-۱,۲]$
۴) $[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۳۰۰. برد تابع $y=\sqrt{x-|x|}$ کدام است؟

۱) $\varnothing$
۲) $[۰,+\infty)$
۳) $(-\infty,۰]$
۴) $\{۰\}$

۳۰۱. برد تابع $f(x)=x-\sqrt{۴-x^{۲}}$ در کدام فاصله قرار دارد؟

۱) $[-۲,۲]$
۲) $[-\sqrt{۲},۲]$
۳) $[-۲\sqrt{۲},۲]$
۴) $[-۲\sqrt{۲},\sqrt{۲}]$

۳۰۲. برد تابع $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{۲-x}{x}}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $(۰,۱]$
۲) $[۰,۲]$
۳) $[۱,۲]$
۴) $(۱,۳)$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند y,x هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند: مثلاً معادلهٔ $x+y=۳$ شامل همهٔ زوج مرتب‌هایی است که مجموع مؤلفه‌های آن‌ها برابر ۳ است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به‌صورت $y=-x+۳$ یا $f(x)=-x+۳$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر بر حسب y,x یک تابع را مشخص نمی‌کند.

نکته

۱ در معادلهٔ جبری شامل y,x اگر از رابطهٔ $x_۱=x_۲$ نتیجه بگیریم $y_۱=y_۲$، آن‌گاه y تابعی از x است. $(x_۱=x_۲\Rightarrow y_۱=y_۲)$

۲ گاهی اوقات در یک معادلهٔ شامل y,x، برای آن‌که نشان دهیم y تابعی از x نیست، کافی است به x عددی دهیم که برای y بیش از یک مقدار به‌دست آید.

تذکر: معمولاً معادلاتی که در آن‌ها توان y زوج بوده یا y دارای قدر مطلق می‌باشد، تابع نیستند. در مواردی که دامنه محدود می‌شود، ممکن است تابع باشد.

مثال: در کدام یک از معادلات زیر، y تابعی از x است؟

۱) $x^۲+y^۲=۲۵$ ۲) $x^۲+(y-۱)^۲=۰$ ۳) $x+|y|=۲$ ۴) $x+|y-۱|=۰$

■ پاسخ: گزینهٔ ۲

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: فرض کنید $x=۰$، در این صورت $y^۲=۲۵$ و $y=\pm ۵$؛ بنابراین معادلهٔ تابع نیست.

گزینهٔ ۲: مجموع دو عبارت نامنفی زمانی صفر است که هر کدام صفر باشد:

$$\begin{cases} x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \\ (y-۱)^۲=۰ \Rightarrow y=۱ \end{cases} \Rightarrow$$ این رابطه فقط از یک نقطه $(۰,۱)$ تشکیل شده و تابع است.

گزینهٔ ۳: فرض کنید $x=۰$، در این صورت $|y|=۲$ و $y=\pm ۲$، بنابراین معادلهٔ تابع نیست.

گزینهٔ ۴: فرض کنید $x=-۱$، در این صورت $|y-۱|=۱$ و $y=۰$ و $y=۲$، پس دو مقدار برای y به‌دست می‌آید و این معادله تابع نیست.

توجه: معادلهٔ $y^۳-۳y^۲+۳y=x$ یک تابع است، زیرا با اضافه و کم کردن عدد یک داریم:

$$y^۳-۳y^۲+۳y-۱+۱=x \Rightarrow (y-۱)^۳+۱=x \Rightarrow (y-۱)^۳=x-۱ \Rightarrow y-۱=\sqrt[۳]{x-۱} \Rightarrow y=\sqrt[۳]{x-۱}+۱$$

$$x_۱=x_۲ \xrightarrow{-۱} x_۱-۱=x_۲-۱ \xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }} \sqrt[۳]{x_۱-۱}=\sqrt[۳]{x_۲-۱} \xrightarrow{+۱} \sqrt[۳]{x_۱-۱}+۱=\sqrt[۳]{x_۲-۱}+۱ \Rightarrow y_۱=y_۲$$

بنابراین y تابعی از x است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۲۰۳. چه تعداد از معادلات داده شده یک تابع را مشخص می‌کند؟ (تمرین کتاب درسی)

الف) $۳x+۲y=۱۲$ ب) $x=۱$ پ) $y=-۲$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۴. معادلات $y=x^۲+۱$ و $x=y^۲+۱$ از نظر تابع بودن به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) تابع است ـ تابع است ۲) تابع است ـ تابع نیست ۳) تابع نیست ـ تابع است ۴) تابع نیست ـ تابع نیست

۲۰۵. در کدام گزینه y تابعی از x است؟

۱) $|x|+|y|=۰$ ۲) $|x|+|y|=۱$ ۳) $|x|+|y|=۲$ ۴) $|x|+|y|=۴$

۲۰۶. چه تعداد از معادلات داده شده یک تابع را مشخص می‌کند؟ (تمرین کتاب درسی)

الف) $f(x)=\begin{cases} x+۳ & ; & x\le ۰ \\ x-۱ & ; & x\ge ۰ \end{cases}$ ب) $y^۲=x^۲$ پ) $y=|x|$

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲۰۷. اگر معادلهٔ $f(x)=\begin{cases} ۴x-۱ & ; & x\ge ۲ \\ ax+۱ & ; & x\le ۲ \end{cases}$ معرف یک تابع باشد، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۰۸. در کدام یک از روابط زیر y تابعی از x است؟

۱) $y^۳+۳y^۲+۳y+x^۳+x=۰$ ۲) $y^۲+۲y=x-۱$ ۳) $|x|+|y-۱|=۱$ ۴) $|y|+\sqrt[۳]{x}=۱$

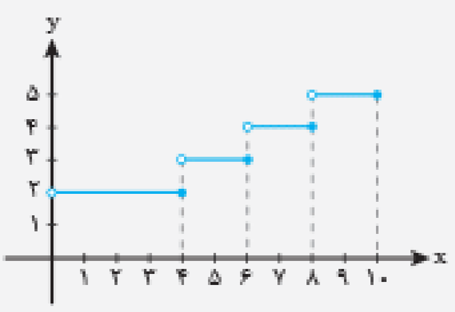
تابع پله‌ای

هر تابعی که بتوان دامنهٔ آن را به تعدادی بازه تقسیم کرد به گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای نامیده می‌شود.

مثال: پارکینگ یک مجتمع تفریحی ـ ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو دوهزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن هزار تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر توقف یک اتومبیل در پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینهٔ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد، رسم کنید. دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

■ پاسخ: ضابطهٔ تابعی که هزینه پارکینگ (هزار تومان) برحسب زمان را نشان می‌دهد، به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} ۲ & ; & ۰<x\le ۴ \\ ۳ & ; & ۴<x\le ۶ \\ ۴ & ; & ۶<x\le ۸ \\ ۵ & ; & ۸<x\le ۱۰ \end{cases}$$



$D_f=(۰,۱۰]$

$R_f=\{۲,۳,۴,۵\}$

تابع جزء صحیح

یکی از مهم‌ترین توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست، تابع جزء صحیح نام دارد.

جزء صحیح x: برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح آن، بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

$$[x]=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\le x\}$$

تذکر: جزء صحیح هر عدد صحیح با آن عدد برابر است و جزء صحیح هر عدد غیرصحیح برابر عدد صحیح قبل از آن است. به عنوان مثال:

$[-1/1]=-2$ $[2/7]=2$ $[-2/7]=-3$ $[5]=5$

مثال: اختلاف جزء صحیح عدد $\sqrt{2}-1$ و جزء صحیح عدد $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) ۱   ۳) ۲   ۴) ۳

● پاسخ: گزینهٔ ۲

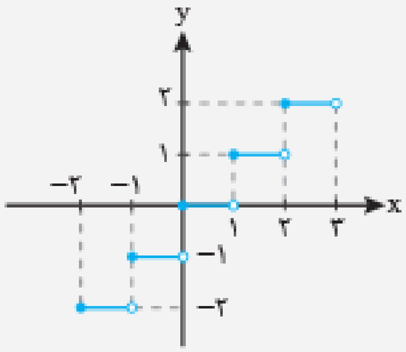
هر کدام را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\sqrt{2}\simeq 1/4\Rightarrow\sqrt{2}-1\simeq 0/4\Rightarrow[\sqrt{2}-1]=0$$

$$\sqrt{3}\simeq 1/7,\ \sqrt{5}\simeq 2/2\Rightarrow\sqrt{3}-\sqrt{5}\simeq -0/5\Rightarrow[\sqrt{3}-\sqrt{5}]=-1$$

که اختلاف آن‌ها برابر $|0-(-1)|=1$ است.

تابـــع جزء صحیح: تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نســبت می‌دهد؛ تابع جزء صحیح نامیده می‌شــود و آن را به‌صورت $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند. دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $\mathbb{Z}$ است و نمودار آن در بازهٔ $[-2,3)$ به شکل زیر است:



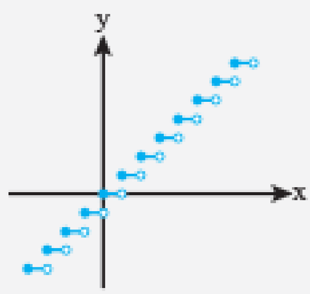
$$-2\le x<-1\Rightarrow[x]=-2$$
$$-1\le x<0\Rightarrow[x]=-1$$
$$0\le x<1\Rightarrow[x]=0$$
$$1\le x<2\Rightarrow[x]=1$$
$$2\le x<3\Rightarrow[x]=2$$

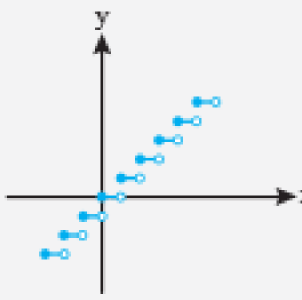
توجه داشته باشید که در این نمودار، طول بازه‌ها یک واحد است.

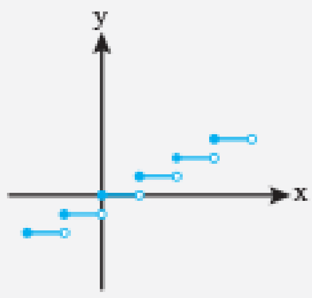
نکته

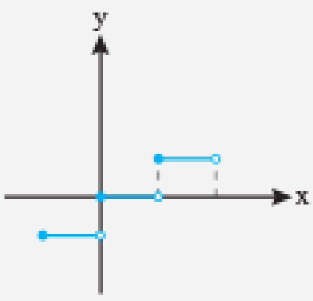
برای رسم نمودار تابع $y=[ax]$ طول بازه‌ها را باید $\frac{1}{|a|}$ بگیریم.

مثال: نمودار تابع $y=3[\frac{x}{2}]$ در بازهٔ $[-2,4)$ به کدام صورت است؟

۱) 

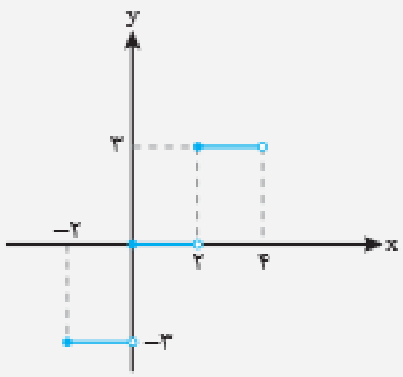
۲) 

۳) 

۴) 

● پاسخ: گزینهٔ ۴

برای رسم نمودار تابع $y=3[\frac{x}{2}]$ باید طول بازه‌ها را $\frac{1}{|\frac{1}{2}|}=2$ واحد در نظر گرفت:



$$-2\le x<0\Rightarrow -1\le\frac{x}{2}<0\Rightarrow[\frac{x}{2}]=-1\Rightarrow y=-3$$
$$0\le x<2\Rightarrow 0\le\frac{x}{2}<1\Rightarrow[\frac{x}{2}]=0\Rightarrow y=0$$
$$2\le x<4\Rightarrow 1\le\frac{x}{2}<2\Rightarrow[\frac{x}{2}]=1\Rightarrow y=3$$

رسم نمودار تابع $y=[f(x)]$ به کمک نمودار $y=f(x)$

برای رسم نمودار $y=[f(x)]$ از روی نمودار $y=f(x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱ نمودار $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم.

۲ خط‌های افقی $y=k(k\in\mathbb{Z})$ را طوری رسم می‌کنیم که نمودار f را قطع کنند.

۳ محل تلاقی نمودار با خط‌های $y=k$ را با نقطهٔ توپر مشـخص کرده و سـپس بخش‌هایی از نمودار که بین دو خط $y=k$ و $y=k+1$ قرار دارند را روی خط $y=k$ تصویر می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع $y=[x^2]$ در بازهٔ $[-\sqrt{2},\sqrt{2})$ شامل چند پاره‌خط است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

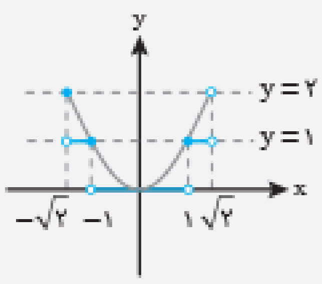
طبق مراحل گفته شده نمودار را رسم می‌کنیم:

۱ نمودار $y=f(x)$ را رسم می کنیم.

۲ خط‌های $y=0$، $y=1$ و $y=2$ را رسم می‌کنیم.

۳ محل تلاقی با نقطهٔ توپر و بخش‌هایی که بین دو خط هستند به پایین تصویر می‌کنیم.

پس این نمودار شامل سه پاره‌خط است.



ویژگی‌های جزء صحیح

۱ $[x+k]=[x]+k(k\in\mathbb{Z})$

۲ $0\le x-[x]<1$

۳ $[x]=k\Leftrightarrow k\le x<k+1$

۴ $[x]+[x+\frac{1}{n}]+\cdots+[x+\frac{n-1}{n}]=[nx](n\in\mathbb{N})$

۵ $[x+y]=\begin{cases}[x]+[y]\\ \text{یا}\\ [x]+[y]+1\end{cases}$

۶ $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & ;\ x\in\mathbb{Z}\\ -1 & ;\ x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

مثال: مجموعهٔ جواب معادلهٔ $[2x+1]=[x]-3$ به‌صورت $[a,b)$ است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

با توجه به ویژگی ۴ داریم:

$$[x]+[x+\frac{1}{2}]=[2x]$$

هم‌چنین با استفاده از ویژگی ۱ داریم:

$$[2x+1]=[2x]+1$$

$$[2x+1]=[x]-3\Rightarrow[2x]+1=[x]-3\Rightarrow\cancel{[x]}+[x+\frac{1}{2}]+1=\cancel{[x]}-3\Rightarrow[x+\frac{1}{2}]=-4$$

$$\xrightarrow{\text{ویژگی ۳}}-4\le x+\frac{1}{2}<-3\Rightarrow-\frac{9}{2}\le x<-\frac{7}{2}$$

پس مجموعه جواب معادله به‌صورت $[-\frac{9}{2},-\frac{7}{2})$ است که $b-a=-\frac{7}{2}-(-\frac{9}{2})=1$.

مثال: برد تابع $f(x)=\frac{1}{[x+2]-x}$ کدام است؟

۱) $[-1,-\frac{1}{2}]$ ۲) $[-1,-\frac{1}{2})$ ۳) $[\frac{1}{2},1]$ ۴) $[\frac{1}{2},1)$

پاسخ: گزینهٔ ۴

با توجه به ویژگی ۱ داریم:

$$[x+2]-x=[x]+2-x=[x]-x+2$$

از ویژگی ۲ داریم:

$$0\le x-[x]<1\Rightarrow-1<[x]-x\le0\Rightarrow1<[x]-x+2\le2\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{[x]-x+2}<1$$

نکته

اگر u تابعی از x و k عددی صحیح باشد، نامعادلات براکتی را می‌توان به کمک روابط زیر حل کرد:

① $[u]\le k \Rightarrow u<k+1$

② $[u]\ge k \Rightarrow u\ge k$

مثال: چند عدد صحیح در رابطهٔ $\sqrt{3}<[2x]<7$ صدق می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

$$\begin{cases}[2x]>\sqrt{3}\xrightarrow{[2x]\in\mathbb{Z}}[2x]\ge 2\Rightarrow 2x\ge 2\Rightarrow x\ge 1 & ①\\ [2x]<7\xrightarrow{[2x]\in\mathbb{Z}}[2x]\le 6\Rightarrow 2x<7\Rightarrow x<\frac{7}{2} & ②\end{cases}$$

$\xrightarrow{①\cap②} 1\le x<\frac{7}{2}\Rightarrow$ شامل سه عدد صحیح ۱ و ۲ و ۳ می‌باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۰۹. حاصل $\big||[7x]|-|[5x]|\big|$ به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۳۱۰. نمودارهای دو تابع $f(x)=[x-a]$ و $g(x)=[x]-a$ در چه صورتی بر هم منطبق می‌شوند؟

۱) به‌ازای هیچ مقدار a بر هم منطبق نمی‌باشند.
۲) به‌ازای $a\in\mathbb{Z}$ بر هم منطبق می‌شوند.
۳) به‌ازای $a\notin\mathbb{Z}$ بر هم منطبق می‌شوند.
۴) به‌ازای هر مقدار $a\ (a\in\mathbb{R})$ بر هم منطبق می‌شوند.

۳۱۱. برای هر عدد طبیعی $n>2$، حاصل $[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۱۲. اگر $(1+\sqrt{2})^6+(1-\sqrt{2})^6=198$، آن‌گاه جزءصحیح عدد $(1+\sqrt{2})^6$ کدام است؟

۱) ۱۹۵ ۲) ۱۹۶ ۳) ۱۹۷ ۴) ۱۹۸

۳۱۳. نمودار تابع $f(x)=[\frac{1}{2}x]$ در بازهٔ $[-4,4)$ شامل: (تمرین کتاب درسی)

۱) هشت پاره‌خط به طول ۱ است.
۲) هشت پاره‌خط به طول ۲ است.
۳) چهار پاره‌خط به طول ۱ است.
۴) چهار پاره‌خط به طول ۲ است.

۳۱۴. نمودار تابع $y=2[\frac{x}{2}]+1;\ x\in[-2,6)$ از چند پاره‌خط مساوی تشکیل شده است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۱۵. نمودار تابع $y=[x^2]$ روی بازهٔ $x\in(-2,2)$ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۱۶. مجموعه جواب نامعادلهٔ $[x+1]<2$ کدام است؟

۱) $(-\infty,1)$ ۲) $(-\infty,0)$ ۳) $(1,+\infty)$ ۴) $(0,+\infty)$

۳۱۷. معادلهٔ $[x]=2x$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱۸. معادلهٔ $x-[x]=2$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۱۹. اگر $x^2<x$ باشد، آن‌گاه حاصل $[x]$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) -1 ۴) ۲

۳۲۰. معادلهٔ $[[x]+[-x]]=2$ چند جواب دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۲۱. اگر $[x^2+x]=-1$، آن‌گاه $[x^{20}]$ کدام است؟

۱) ۱− ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۳۲۲. معادلهٔ $[2x]=[x]$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۲۳. معادلهٔ $[\frac{3}{x-1}]+[\frac{x-4}{x-1}]=1$ چند جواب صحیح دارد؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) ۶

۳۲۴. مجموعه جواب معادلهٔ $[x+\frac{1}{2}]+[x+\frac{3}{2}]=5$ کدام است؟

۱) $[2,3)$ ۲) $[\frac{5}{2},\frac{7}{2})$ ۳) $[\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ ۴) $[1,2)$

۳۲۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=x-[x];\ x\in[-2,3)$ از n پاره‌خط مساوی به اندازهٔ L تشکیل شده است. دوتایی مرتب (n,L) کدام است؟

۱) $(4,1)$ ۲) $(4,\sqrt{2})$ ۳) $(5,1)$ ۴) $(5,\sqrt{2})$

۳۲۶. مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع $f(x)=x-[x]$ و محور xها به‌ازای $0\le x<2$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

۳۲۷. اگر $[x-2]=1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x)=|x-3|-|x-4|$ و $g(x)=2x^2+x-17$ در چند نقطه مشترک هستند؟ (تجربی خارج ۹۷)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) فاقد نقطهٔ مشترک

۳۲۸. برد تابع $f(x)=x-[x+1]$ کدام است؟

۱) $[-1,0]$ ۲) $[-1,0)$ ۳) $[1,2]$ ۴) $[1,2)$

۳۲۹. برد تابع $f(x)=2x-2[x]+1$ کدام است؟

۱) $[0,2]$ ۲) $[1,3)$ ۳) $[0,2)$ ۴) $[0,3]$

۳۳۰. برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-[x]}}$ کدام مجموعه است؟

۱) $(-\infty,0]$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $[0,+\infty)$ ۴) $(1,+\infty)$

۳۳۱. برد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{[x]} & ;\ x<0\\ 0 & ;\ x\ge 0\end{cases}$ کدام است؟

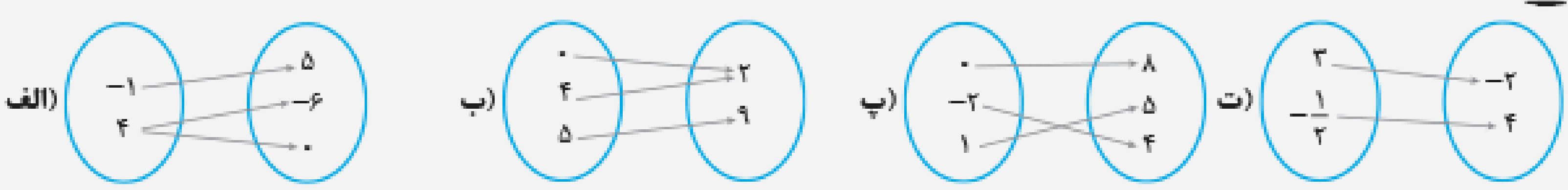
۱) $(-\infty,0]$ ۲) $[0,1]$ ۳) $[0,1)$ ۴) $[0,+\infty)$

تابع یک‌به‌یک

تابع f یک‌به‌یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند. در ادامه شرایط یک‌به‌یک بودن یک تابع را در نمایش‌های مختلف آن بررسی می‌کنیم.

یک‌به یک بودن تابع از روی نمودار ون: نمودار ون یک تابع زمانی یک‌به‌یک است که به هر عنصر مجموعهٔ دوم، یک و فقط یک پیکان وارد شده باشد.

مثال: چند مورد از نمودارهای زیر یک‌به‌یک هستند؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

مورد «الف» تابع نیست زیرا از عدد ۴ دو پیکان خارج شده است، پس در مورد یک‌به‌یک بودن اصلاً بحثی نیست زیرا اصلاً تابع نیست. مورد «ب» تابع است زیرا از هر عنصر یک پیکان خارج شده است اما به ۲، دو پیکان وارد شده است، پس یک‌به‌یک نیست. موارد «پ» و «ت» هم تابع هستند و هم یک‌به‌یک، زیرا از هر عنصر مجموعهٔ اول، یک و تنها یک پیکان خارج شده و به هر عنصر مجموعهٔ دوم، یک و تنها یک پیکان وارد شده است.

یک‌به‌یک بودن تابع از روی زوج مرتب

یک زوج مرتب زمانی تابع یک‌به‌یک است که اولاً تابع باشد، یعنی هیچ دو زوج مرتبی مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشند و اگر مؤلفه‌های اول یکسان باشند، باید مؤلفه‌های دوم نیز یکسان باشند.

دوماً یک به یک باشـــد یعنی هیچ دو زوج مرتب متمایزی، مؤلفه‌های دوم یکســـان نداشـــته باشند و اگر مؤلفه‌های دوم یکسان باشند، باید مؤلفه‌های اول نیز یکسان باشند.

مثال: اگر رابطهٔ $f=\{(۲,۳),(m-۱,n),(-۱,۴),(m^۲+۱,۳),(۰,-۲),(m,۵)\}$ یک تابع یک‌به‌یک باشد، حاصل $m+n$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۰   ۳) -۱ ۴) ۲

■ پاسخ: گزینهٔ ۳

این رابطه باید تابع یک‌به‌یک باشد، پس $(m^۲+۱,۳)=(۲,۳)$، یعنی: $m^۲+۱=۲\Rightarrow m^۲=۱\Rightarrow m\pm۱$

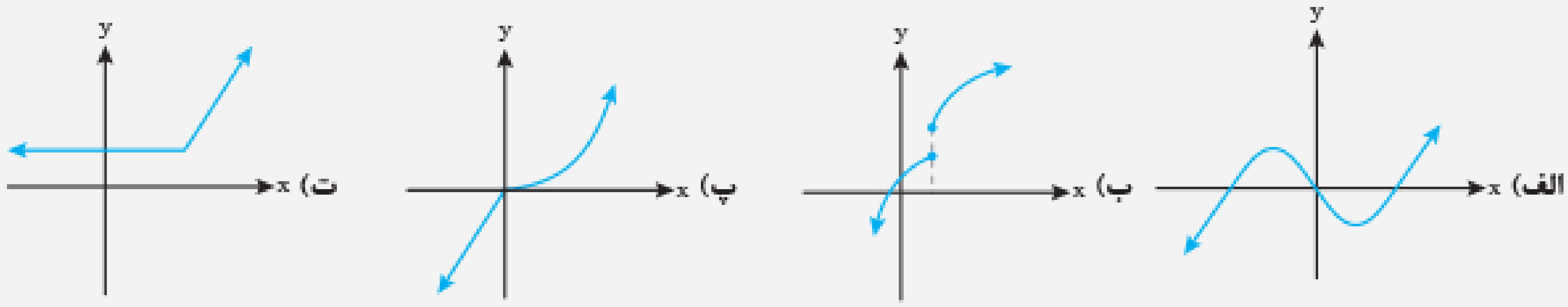
اگر $m=-۱$ باشد، دو مؤلفهٔ $(\underset{-۱}{m},۵)$ و $(-۱,۴)$ باعث می‌شوند که f تابع نباشد، پس $m\neq-۱$ است و $m=۱$.

اکنون دو مؤلفهٔ $(\underbrace{m-۱}_{۰},n)$ و $(۰,-۲)$ دارای مؤلفه‌های اول برابر هســـتند، برای آن‌که رابطهٔ f یک تابع باشد، باید مؤلفه‌های دوم نیز باهم برابر باشند، یعنی $n=-۲$. بنابراین $m+n=-۱$ است.

یک‌به‌یک بودن تابع از روی نمودار مختصاتی

در این حالت، تابع در صورتی یک‌به‌یک است که هر خط موازی محور xها نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

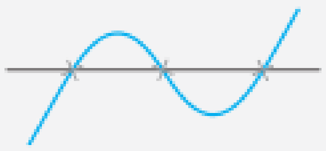
مثال: چه تعداد از نمودارهای داده شده، تابع یک‌به‌یک نیست؟



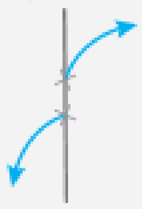
۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

■ پاسخ: گزینهٔ ۳

نمودار «الف» تابع است ولی یک‌به‌یک نیست.



نمودار «ب» اصلاً تابع نیست.



نمودار «پ» هم تابع و هم یک‌به‌یک است.

نمودار «ت» تابع است ولی یک‌به‌یک نیست.

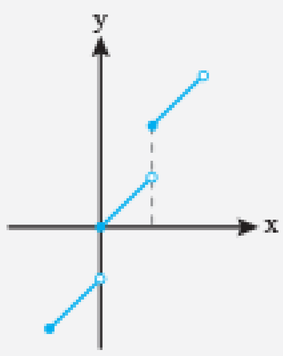
مثال: توابع $y=x+[x]$ و $y=|x|+|x-۱|$ به‌ترتیب چگونه‌اند؟

۱) یک‌به‌یک ـ یک‌به‌یک   ۲) یک‌به‌یک ـ غیر یک‌به‌یک   ۳) غیر یک‌به‌یک ـ یک‌به‌یک   ۴) غیر یک‌به‌یک ـ غیر یک‌به‌یک

■ پاسخ: گزینهٔ ۲

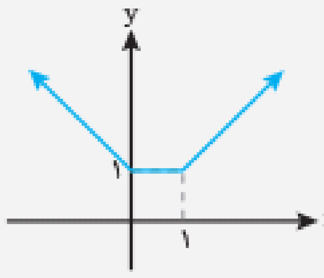
ابتدا نمودارهای این توابع را رسم کرده و سپس یک‌به‌یک بودن آن‌ها را بررسی می‌کنیم:

$y=x+[x]$



یک‌به‌یک است.

$y=|x|+|x-۱|$



یک‌به‌یک نیست.

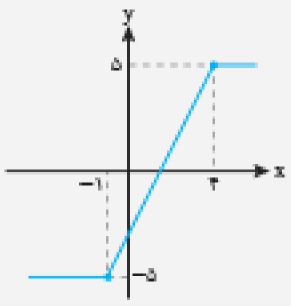
تذکر: گاهی اوقات می‌توان با محدود کردن دامنه، توابعی یک‌به‌یک ساخت.

مثال: تابع $f(x)=|x+۱|-|x-۴|$ در بازهٔ $[a,b]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

▪ پاسخ: گزینهٔ ۳

با رسم نمودار تابع f، تابعی یک‌به‌یک می‌سازیم:



همان‌طور که مشخص است تابع حداکثر در بازهٔ $[-۱,۴]$ یک‌به‌یک است و در نتیجه $a=-۱$ و $b=۴$ و $b-a=۴-(-۱)=۵$.

نکته

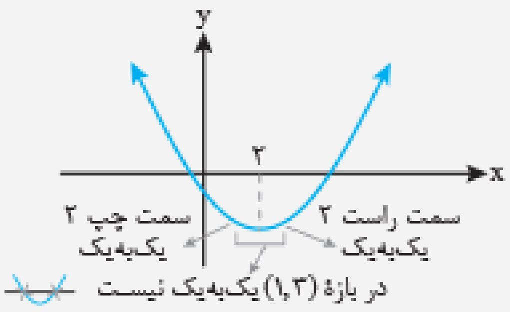
تابـع درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ در بازهٔ $[-\frac{b}{۲a},+\infty)$ یا در بازهٔ $(-\infty,-\frac{b}{۲a}]$ یک‌به‌یک اسـت. در نتیجـه تابع در هر بازهٔ (d,e) که شامل $-\frac{b}{۲a}$ باشد، یک‌به‌یک نیست.

مثال: تابع $y=۲x^۲-۸x-۱$ در کدام بازه یک‌به‌یک نیست؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(۱,۳)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۵,۷)$

▪ پاسخ: گزینهٔ ۲

تابع در بازهٔ $[\frac{-(-۸)}{۲(۲)},+\infty)$ یا $(-\infty,\frac{-(-۸)}{۲(۲)}]$ یک‌به‌یک اسـت. یعنی در $[۲,+\infty)$ یا $(-\infty,۲]$ و در بازه‌ای که شـامل ۲ باشـد، یک‌به‌یک نیسـت، پس در $(-۱,۱)$، $(۳,۵)$ و $(۵,۷)$ یک‌به‌یک است ولی در بازهٔ $(۱,۳)$ یک‌به‌یک نیست.



$\Delta=(-۸)^۲-۴(۲)(-۱)=۷۲$

$x=\frac{۸\pm۶\sqrt{۲}}{۴}$

البته با توجه به نمودار آن نیز می‌توان به راحتی این موضوع را تشخیص داد و گزینهٔ صحیح را انتخاب کرد.

یک‌به‌یک بودن تابع از روی ضابطهٔ تابع

تابع f زمانی یک‌به‌یک است که از تساوی $f(x_۱)=f(x_۲)$ به $x_۱=x_۲$ برسیم.

تذکر: برای اثبات یک‌به‌یک نبودن تابع از روی ضابطه کافی است به y مقداری دهیم که برای x بیش از یک مقدار حاصل شود.

مثال: توابع $f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x$ و $g(x)=|x|+|x-۱|$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) یک‌به‌یک ـ غیر یک‌به‌یک ۲) غیر یک‌به‌یک ـ یک‌به‌یک ۳) یک‌به‌یک ـ یک‌به‌یک ۴) غیر یک‌به‌یک ـ غیر یک‌به‌یک

▪ پاسخ: گزینهٔ ۱

می‌دانیم $x^۳+۳x^۲+۳x=x^۳+۳x^۲+۳x+۱-۱=(x+۱)^۳-۱$، پس داریم:

$f(x)=x^۳+۳x^۲+۳x=(x+۱)^۳-۱$

$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow(x_۱+۱)^۳-۱=(x_۲+۱)^۳-۱\xrightarrow{+۱}(x_۱+۱)^۳=(x_۲+۱)^۳\xrightarrow{\sqrt[۳]{\ }}x_۱+۱=x_۲+۱\xrightarrow{-۱}x_۱=x_۲$

پس f یک تابع یک‌به‌یک است.

$g(x)=۳\Rightarrow x=۲,x=-۱\Rightarrow$ تابع g یک‌به‌یک نیست.

نکته

در توابع چندضابطه‌ای، برای یک‌به‌یک بودن تابع، باید اشتراک بردهای هریک از ضابطه‌ها، تهی باشد. (در نقاط مرزی ممکن است برد یکی شود.)

مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & ; \quad x\ge ۱ \\ x-k & ; \quad x<۱ \end{cases}$ یک‌به‌یک است. حدود k کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $k\ge -۲$ ۳) $k\le -۲$ ۴) $\mathbb{R}$

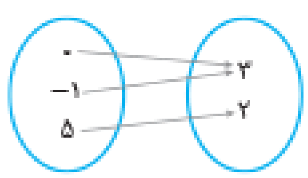
پاسخ: گزینهٔ ۲

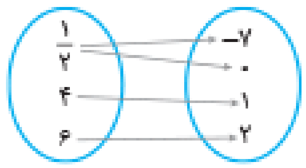
برد ضابطه‌های بالا و پایین نباید هیچ اشتراکی داشته باشند.

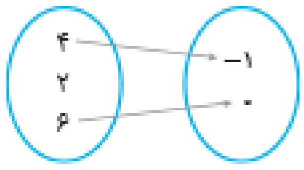
$$\left.\begin{array}{l} \text{ضابطهٔ بالایی}: x\ge ۱\Rightarrow x^{۲}\ge ۱\Rightarrow x^{۲}+۲\ge ۳\Rightarrow y\ge ۳ \\ \text{ضابطهٔ پایینی}: x<۱\Rightarrow x-k<۱-k\Rightarrow y<۱-k \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک نداشته باشند}} ۱-k\le ۳\Rightarrow k\ge -۲$$

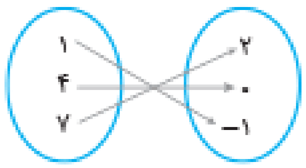
پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۳۳۲. کدام گزینه نمایش نمودار ون یک تابع یک‌به‌یک است؟

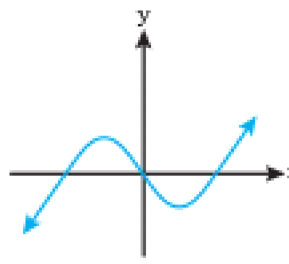
۱) 

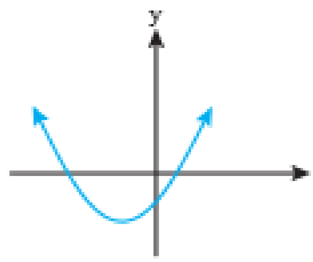
۲) 

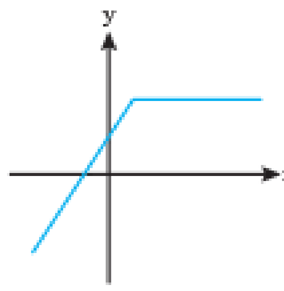
۳) 

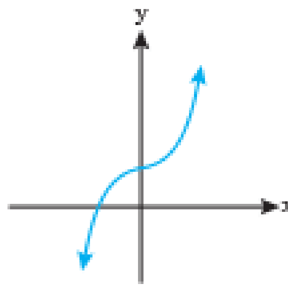
۴) 

۳۳۳. کدام نمودار، مربوط به یک تابع یک‌به‌یک است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

۳۳۴. کدام تابع یک‌به‌یک است؟

۱) $y=[x]$ ۲) $y=|x|$ ۳) $y=\sqrt[۳]{x^{۲}}$ ۴) $y=\sqrt[۳]{x}$

۳۳۵. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با کدام ضابطه یک‌به‌یک است؟

۱) $f(x)=x-[x]$ ۲) $f(x)=x+|x|$ ۳) $f(x)=x|x|$ ۴) $f(x)=\frac{|x|}{x}$

۳۳۶. دامنهٔ تابع $f(x)=x^{۲}-۴x+۵$ به کدام بازه محدود شود تا تابع حاصل، یک‌به‌یک باشد؟

۱) $(-\infty,۴]$ ۲) $(-\infty,۳]$ ۳) $[۲,+\infty)$ ۴) $[۱,+\infty)$

۳۳۷. اگر تابع $f=\{(-۱,۱),(m,۲),(-۲,۲),(m+۱,k)\}$ یک‌به‌یک باشد، k کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۳۳۸. اگر رابطهٔ $f=\{(۳,۲),(a,۵),(۳,a^{۲}-a),(b,۲),(-۱,۴)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دوتایی (a,b) کدام است؟

۱) $(-۱,۱)$ ۲) $(-۱,۳)$ ۳) $(۲,۱)$ ۴) $(۲,۳)$

۳۳۹. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+k & ; \quad x\ge ۱ \\ x+۳ & ; \quad x<۱ \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، حدود k کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $k\ge ۳$ ۳) $k\le -۲$ ۴) $\mathbb{R}$

۳۴۰. اگر تابع $f(x)=mx+|x-۱|$ یک‌به‌یک باشد، حدود m کدام است؟

۱) $|m|>۰$ ۲) $|m|>۱$ ۳) $|m|\le ۰$ ۴) $|m|<۱$

۲۶۷. ۱ ۲ ▨ ۴

تمام عضوهای مجموعهٔ سمت راستی (که پیکان به این مجموعه وارد شده است)، هم‌دامنه و آن‌هایی که پیکان به آن‌ها وارد شده، برد هستند.

$\{۸,۹,۴,۰,-۶,۷\}=$ هم‌دامنه

$\{۸,۹,-۶\}=$ برد

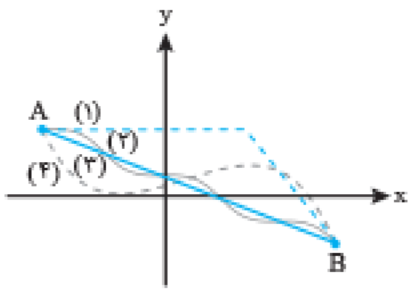
بنابراین هم‌دامنه ۶ عضو و برد ۳ عضو دارد.

۲۶۸. ۱ ۲ ۳ ▨

راهبرد

یک نمودار در صفحه مختصات، زمانی تابع است که هر خط موازی محور y ها نمودار را حداکثر در یک نقطه (یا یک نقطه یا هیچ نقطه) قطع کند.

در صفحه مختصات بی‌شمار تابع می‌توان رسم کرد که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چهار نمونه از این نمودارها در صفحه مختصات رسم شده‌اند.



۲۶۹. ۱ ▨ ۳ ۴

بررسی گزینه‌ها:

نمودار تابع گزینهٔ «۱» محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳− قطع نکرده است و رد می‌شود و نمودارهای گزینهٔ «۳» و گزینهٔ «۴» به هر عدد بزرگ‌تر از ۲، مربع آن را نسبت نمی‌دهد چون باید نمودار به شکل سهمی باشد و به صورت خطی نباشد و رد می‌شوند.

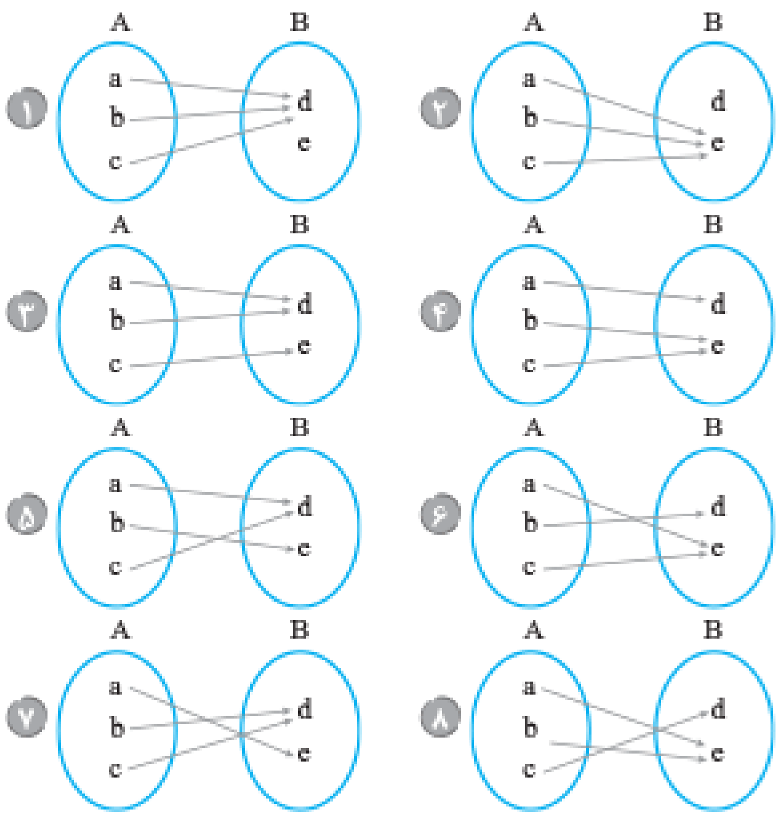
فقط نمودار گزینهٔ «۲» تمام شرایط داده شده را دارد.

۲۷۰. ۱ ۲ ۳ ▨

در گزینهٔ «۱»، تابع f در $[۰,۲]$ ثابت نیست و رد می‌شود. در گزینه‌های «۲» و «۳» دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ نیست و رد می‌شوند. تنها نمودار گزینهٔ «۴» دارای همهٔ شرایط است.

۲۷۱. ۱ ۲ ▨ ۴

برای تعیین تعداد توابع از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B از نمودار پیکانی کمک می‌گیریم. یک رابطه از روی نمودار پیکانی، زمانی تابع است که از هر عضو مجموعهٔ اول دقیقاً یک پیکان خارج شود.



پس تعداد توابع موجود برابر ۸ تاست. علاوه بر این می‌توانیم از فرمول $(\text{تعداد عضوهای B})^{(\text{تعداد عضوهای A})}$ یعنی $۸=۲^۳$ برای تعداد توابع استفاده کنیم.

راهبرد

تعداد توابع از مجموعهٔ m عضوی A به مجموعهٔ n عضوی B، برابر n^m است.

۲۷۲. ۱ ▨ ۳ ۴

باید محاسبه کنیم به ازای کدام مقدار x، $M(x)=۱۸۶$ است.

$$۲/۸۹x+۷۰/۶۴=۱۸۶\Rightarrow ۲/۸۹x=۱۱۵/۳۶$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱۱۵/۳۶}{۲/۸۹}\simeq ۴۰$$

۲۷۳. ۱ ▨ ۳ ۴

تک‌تک موارد را بررسی می‌کنیم:

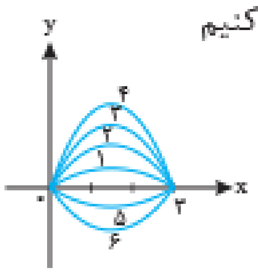
الف) لزوماً درست نیست. $f=\{(۲,۵),(۸,۴)\}, g=\{(۲,۴),(۸,۵)\}$

دامنهٔ هر دو $\{۲,۸\}$ و برد هر دو $\{۴,۵\}$ است اما دو تابع برابر نیستند، زیرا مثلاً $f(۲)\neq g(۲)$.

ب) برد، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است، پس می‌توانند یکی باشند.

پ) نادرست است زیرا برد، زیرمجموعه‌ای از هم دامنه است.

ت) درست است: به عنوان نمونه چند تابع رسم می‌کنیم که دامنهٔ آن‌ها بازهٔ $[۰,۳]$ باشد.



۲۷۴. ۱ ۲ ▨ ۴

تابعی برای تابع f نمایش قابل قبولی دارد که دامنه‌اش (۰,۵]، ضابطه‌اش $۳x+۱$ و هم دامنه‌اش شامل برد تابع یعنی (۱,۱۶] باشد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: دامنه‌اش برابر (۰,۵] نیست.

گزینهٔ ۲: هم‌دامنه‌اش شامل (۱,۱۶] نیست، مثلاً شامل عدد ۱۵/۵ نیست.

گزینهٔ ۳: تمامی شرایط را دارد.

گزینهٔ ۴: دامنه‌اش برابر (۰,۵] نیست.

۲۷۵. ۱ ▨ ۳ ۴

هم دامنهٔ تابع f به‌صورت $\{-۳,۱,۲\}$ است، پس باید محاسبه کنیم به ازای چه x هایی به‌دست می‌آیند.

$f(x)=-۳\Rightarrow x^۲+۱=-۳\Rightarrow x^۲=-۴$ جواب ندارد

$f(x)=۱\Rightarrow x^۲+۱=۱\Rightarrow x^۲=۰\Rightarrow x=۰$

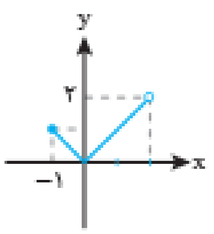
$f(x)=۲\Rightarrow x^۲+۱=۲\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm۱$

بزرگ‌ترین مجموعهٔ A به‌صورت $\{-۱,۰,۱\}$ است.

۲۷۶. ۱ ۲ ▨ ۴

هم‌دامنه شامل برد می‌باشد، که برد این تابع برابر (۰,۲] است، زیرا:

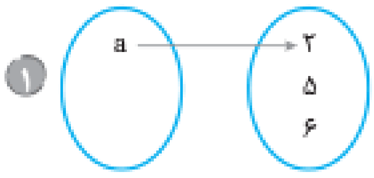
$$R_f=[۰,۲)$$



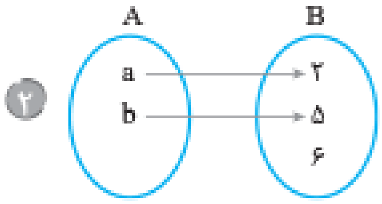
که در گزینه‌ها فقط $[۰,۲]$ شامل برد است؛ یعنی برد زیرمجموعهٔ $[۰,۲]$ است.

۲۷۷. ۱ ۲ ۳ **۴**

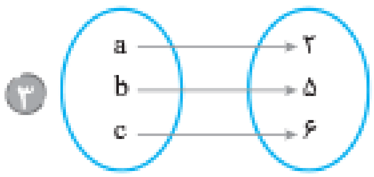
توابعی که می‌توانند هم‌دامنهٔ سه عضوی $\{2, 5, 6\}$ داشته باشند را با نمودار پیکانی مشخص می‌کنیم و برای دامنهٔ آن‌ها از a، b، c و... استفاده می‌کنیم.



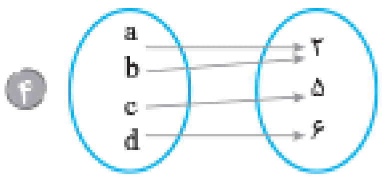
a به هریک از ۲، ۵ یا ۶ وصل شود.



هر عضو دامنه به یک عضو هم‌دامنه (یا هر دو به یک عضو) وصل شود.

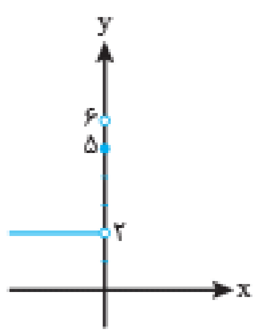


برای سه عضو، هرکدام به یکی یا هر دوتا به یکی یا دیگری به یکی دیگر یا هر سه به یکی وصل شود.



این یکی از حالت‌های دامنه با چهار عضو است. حالت‌های دیگر نیز می‌تواند رخ دهد. مثلاً همه به ۲ وصل شوند.

پس می‌تواند بی‌شمار عضو داشته باشد. حتی می‌توان روی دستگاه مختصات چنین تابع‌هایی را رسم کرد که به عنوان نمونه یک مورد را رسم می‌کنیم.



۲۷۸. ۱ ۲ ۳ **۴**

دو تابع f و g زمانی برابر هستند که دامنه‌هایشان مساوی باشد و $\forall x \in D_f(D_g): f(x)=g(x)$.

دامنهٔ گزینهٔ «۲» و گزینهٔ «۳»، $\{1, 2\}$ ولی دامنهٔ f برابر $\{1, 5\}$ است، پس برابر نیستند و در گزینهٔ «۱»، $g(5)=2$ ولی $f(5)=7$ است، پس برابر نیستند، اگر چه دامنه‌هایشان برابر است. تنها با گزینهٔ «۴» برابر است که هر دو شرط را دارد.

۲۷۹. ۱ ۲ **۳** ۴

دو تابع f و g زمانی برابر هستند که ۱ $D_f=D_g$ و ۲ $\forall x \in D_f(D_g): f(x)=g(x)$

۱ $D_f=\{7, 2\}, D_g=\{2, b\} \Rightarrow D_f=D_g \Rightarrow b=7$

۲ $\forall x \in D_f: f(x)=g(x): f(2)=g(2) \Rightarrow a=-1$

بنابراین $a+b=-1+7=6$ است.

۲۸۰. ۱ **۲** ۳ ۴

دو تابع f و g هنگامی برابر هستند که $D_f=D_g$، به علاوه $\forall x \in D_f(D_g): f(x)=g(x)$. توابع t، r دامنه‌شان با g برابر نیست، پس این توابع با g برابر نیستند.

$$D_r=[0, +\infty), D_t=\mathbb{R}-\{0\}, D_g=\mathbb{R}$$

اما دامنهٔ توابع s و g با هم برابر و همچنین $\forall x \in \mathbb{R}: g(x)=s(x)=5x$، بنابراین توابع s و g با هم برابر هستند.

۲۸۱. ۱ **۲** ۳ ۴

راهبرد

دو تابع f و g زمانی برابر هستند که ۱ $D_f=D_g$ و ۲ $\forall x \in D_f=D_g; f(x)=g(x)$

تک‌تک موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) دامنهٔ f برابر $\mathbb{R}^+$ و دامنهٔ g برابر $\mathbb{R}$ است، بنابراین f و g برابر نیستند.

ب) دامنهٔ f و g برابر $\mathbb{R}$ است ولی $f(-1)=-1$ و $g(-1)=1$، یعنی xای از دامنه وجود دارد که $f(x) \neq g(x)$، بنابراین f و g برابر نیستند.

پ) دامنهٔ f و g برابر $\mathbb{R}$ است و ضابطهٔ هر دو برابر است، یعنی:

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=g(x): f(x)=\frac{9x}{3}=\frac{\cancel{3}(3x)}{\cancel{3}}=3x=g(x)$$

۲۸۲. **۱** ۲ ۳ ۴

دامنهٔ هر دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است. شرط دوم را بررسی می‌کنیم.

می‌دانیم $|x|=\begin{cases} x & ; \ x \geq 0 \\ -x & ; \ x<0 \end{cases}$، بنابراین:

$$f(x)=(x-1)|x|=\begin{cases} (x-1)x & ; \ x \geq 0 \\ (x-1)(-x) & ; \ x<0 \end{cases}=\begin{cases} x^2-x & ; \ x \geq 0 \\ -x^2+x & ; \ x<0 \end{cases}$$

اگر $f(x)=g(x)$، آن‌گاه $a=1, b=-1, c=-1, d=1$ و $e=0$ و داریم:

$$2a-b+3c-d+e=2(1)-(-1)+3(-1)-(1)+(0)=-1$$

۲۸۳. ۱ ۲ **۳** ۴

باید t را با حل معادلهٔ $n(t)=5500$ به‌دست آوریم:

$$n(t)=5500 \Rightarrow \frac{9500t-2000}{4+t}=5500$$
$$\Rightarrow 9500t-2000=22000+5500t \Rightarrow 4000t=24000 \Rightarrow t=6$$

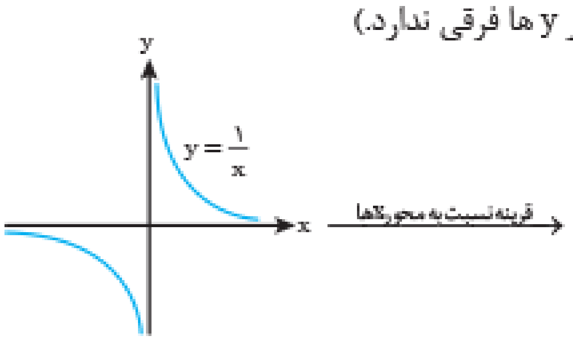
۲۸۴. ۱ ۲ **۳** ۴

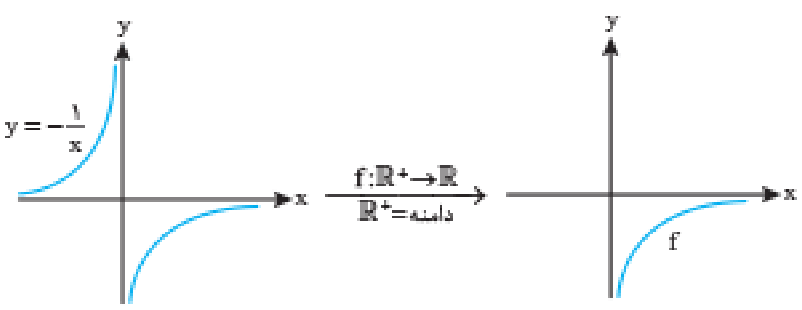
باید $f(50)$ محاسبه شود:

$$f(50)=\frac{255 \times 50}{100-50}=\frac{255 \times \cancel{50}}{\cancel{50}}=255$$

۲۸۵. ۱ ۲ **۳** ۴

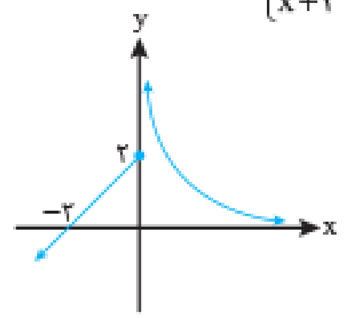
برای رسم نمودار تابع $f(x)=-\frac{1}{x}$ (با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$) باید نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را نسبت به محور xها قرینه کرد. (البته با قرینه کردن نسبت به محور yها فرقی ندارد.)





۲۸۶.

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ; \ x>0\\ x+2 & ; \ x\le 0\end{cases}$ به‌صورت زیر است:



پس نمودار از ناحیهٔ چهارم نمی‌گذرد.

۲۸۷.

دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}-\{2\}$ است، بنابراین ریشهٔ مخرج برابر ۲ است.

مخرج: $x+b \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b=-2$

پس $f(x)=\frac{a}{x-2}$، به‌علاوه $f(0)=-\frac{1}{2}$:

$f(0)=\frac{a}{0-2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$

بنابراین $2a-b=2(1)-(-2)=4$.

۲۸۸.

دو تابع f و g برابر هستند هرگاه: ۱ $D_f=D_g$، ۲ $\forall x\in D_f: f(x)=g(x)$

دامنهٔ دو تابع f و g برابر $\mathbb{R}$ است، کافی است مقدار این توابع در هر نقطهٔ دلخواه از $\mathbb{R}$ با هم برابر باشد.

$x\neq 1: g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=x+1=f(x)$

$x=1: g(1)=k; f(1)=2\Rightarrow k=2$

۲۸۹.

دامنهٔ تابع گویا برابر $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است.

$x^2+x-3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4(1)(-3)=1+12=13$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$

۲۹۰.

دامنهٔ تابع گویای f به‌صورت $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. بنابراین a و b ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-4x-7=0$ هستند و داریم:

$\text{ضرب ریشه‌ها}=a\times b=\frac{-7}{2}=-3/5$

یادآوری: حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر $P=\frac{c}{a}$ است.

۲۹۱.

دامنهٔ تابع گویا برابر $\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$ است. برای آن که دامنهٔ تابع برابر $\mathbb{R}$ باشد، کافی است مخرج ریشه نداشته باشد یعنی $\Delta<0$ باشد:

$\Delta=(4)^2-4(m)(m)<0\Rightarrow 16-4m^2<0\Rightarrow 4(4-m^2)<0$

$\xrightarrow{\text{ریشه‌ها}=\pm 2}$

	−۲		۲	
−		+		−
		ج		

$\Rightarrow m>2 \cup m<-2$

اما دقت داشته باشید که به ازای $m=0$ مخرج، ریشهٔ $x=0$ دارد، پس m نمی‌تواند اعداد صحیح $-2, -1, 0, 1, 2$ باشد.

۲۹۲.

برای تعیین دامنهٔ تابع ریشهٔ دوم (رادیکالی)، باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهیم.

$f: 8-x\ge 0\Rightarrow 8\ge x\Rightarrow D_f=(-\infty, 8]$

$g: 3x+1\ge 0\Rightarrow 3x\ge -1\Rightarrow x\ge\frac{-1}{3}\Rightarrow D_g=[-\frac{1}{3}, +\infty)$

بنابراین $D_f\cap D_g=(-\infty, 8]\cap[-\frac{1}{3}, +\infty)=[-\frac{1}{3}, 8]$ است که شامل عددهای صحیح ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ یعنی ۹ عدد است.

۲۹۳.

راهبرد

فرض کنید $k>0$، در این صورت:

الف) برای رسم نمودار $y=f(x-k)$، باید نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد به راست ببریم.

ب) برای رسم نمودار $y=f(x)+k$، باید نمودار $y=f(x)$ را به اندازهٔ k واحد به بالا ببریم.

برای تعیین دامنهٔ عبارت رادیکالی با فرجهٔ زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر در نظر گرفت و سپس حل کرد:

$x^2-4x+3\ge 0\Rightarrow (x-1)(x-3)\ge 0\Rightarrow$

	۱		۳	
+		−		+
ج				ج

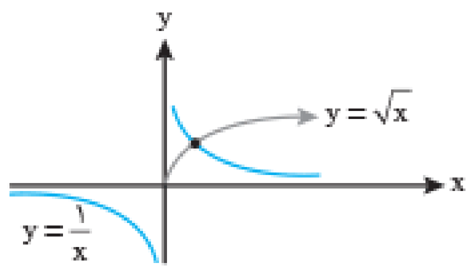
پس دامنهٔ تابع $\mathbb{R}-(1,3)$ است که شامل یک عدد صحیح یعنی ۲ نیست.

۲۹۴.

توجه داشته باشید که $g(x)=3+f(x-1)$، پس برای رسم نمودار تابع g باید نمودار تابع f سه واحد به بالا و یک واحد به راست انتقال داده شود.

۲۹۵.

با استفاده از رسم نمودار، معادلهٔ $x\sqrt{x}=1$ $(\sqrt{x}=\frac{1}{x})$ را حل می‌کنیم:



با توجه به این که نمودارها یک نقطهٔ برخورد دارند، پس معادله یک جواب دارد.

۲۹۶.

ابتدا نمودار انتقال یافته را می‌یابیم:

$\sqrt{x}\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}\sqrt{-x}$

$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}}\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$

اکنون باید محل تلاقی با نیمساز ناحیهٔ اول و سوم، یعنی $y=x$ را مشخص کنیم:

$\sqrt{-x+2}=x\xrightarrow{\text{به توان ۲}}-x+2=x^2$

$\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=1, x=-2$

که $x=-2$ در معادله صدق نمی‌کند و $x=1$ قابل قبول است.

۲۹۷.

برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ باید زیر رادیکال نامنفی باشد که باید در دو حالت بررسی شود:

الف) $x\ge 0, f(x)\ge 0 \Rightarrow x\ge 0, x\in[-4,-3]\cup[1,2] \Rightarrow x\in[1,2]$

ب) $x\le 0, f(x)\le 0 \Rightarrow x\le 0, x\in[-3,1]\Rightarrow x\in[-3,0]$

بنابراین دامنه به صورت $[-3,0]\cup[1,2]$ است.

۲۹۸.

برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $\sqrt{(x+1)f(x)}$ باید زیر رادیکال نامنفی باشد که در دو حالت باید بررسی شود:

الف) $x+1\ge 0, f(x)\ge 0\Rightarrow x\ge -1, x\in[-3,-1]\cup[2,+\infty)$

$\Rightarrow [2,+\infty)\cup\{-1\}$

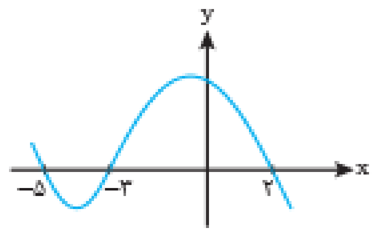
ب) $x+1\le 0, f(x)\le 0 \Rightarrow x\le -1, x\in(-\infty,-3]\cup[-1,2]$

$\Rightarrow(-\infty,-3]\cup\{-1\}$

بنابراین دامنهٔ تابع به‌صورت $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)\cup\{-1\}$ یا $\mathbb{R}-(-3,2)\cup\{-1\}$ است که دامنهٔ غیرنقطه‌ای به‌صورت $\mathbb{R}-(-3,2)$ است.

۲۹۹.

برای رسم نمودار تابع $y=f(x)$ باید نمودار تابع $y=f(x-2)$ را دو واحد به چپ انتقال دهیم:



$f(x)\ge 0: x\in(-\infty,-5]\cup[-3,2]$

$f(x)\le 0: x\in[-5,-3]\cup[2,+\infty)$

برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $\sqrt{xf(x)}$ باید زیر رادیکال نامنفی باشد:

الف) $x\ge 0, f(x)\ge 0\Rightarrow x\ge 0, x\in(-\infty,-5]\cup[-3,2]$

$\Rightarrow x\in[0,2]$

ب) $x\le 0, f(x)\le 0\Rightarrow x\le 0, x\in[-5,-3]\cup[2,+\infty)$

$\Rightarrow x\in[-5,-3]$

بنابراین دامنه به‌صورت $[-5,-3]\cup[0,2]$ است.

۳۰۰.

ابتدا دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم: $x-|x|\ge 0\Rightarrow x\ge|x|$

اما x هیچ‌گاه از $|x|$ بزرگ‌تر نیست و در صورتی مساوی هستند که $x\ge 0$ باشد. بنابراین در این حالت $y=0$ می‌شود، یعنی:

$y=\sqrt{x-|x|} \xrightarrow[x\ge 0]{|x|=x} \sqrt{x-x}=\sqrt{0}=0$

۳۰۱.

ابتدا دامنهٔ تابع را به دست می‌آوریم:

$4-x^2\ge 0\Rightarrow(2-x)(2+x)\ge 0\Rightarrow x\in[-2,2]$

$y=x-\sqrt{4-x^2}\Rightarrow y-x=\underbrace{-\overbrace{\sqrt{4-x^2}}^{\text{نامنفی}}}_{\text{نامثبت}}\Rightarrow y-x\le 0$

$\Rightarrow y\le x\xrightarrow{x\le 2} y\le x\le 2$

$y=x-\sqrt{4-x^2}\Rightarrow y-x=-\sqrt{4-x^2}$

$\xrightarrow{\text{به‌توان ۲}} y^2+x^2-2yx=4-x^2\Rightarrow 2x^2-2xy+y^2-4=0$

$\Delta=(-2y)^2-4(2)(y^2-4)=4y^2-8y^2+32\ge 0$

$\xrightarrow{\div 4} y^2-2y^2+8\ge 0\Rightarrow -2\sqrt{2}\le y\le 2\sqrt{2}$

$\xrightarrow[y\le 2\ \text{یا}]{y\le x\le 2} -2\sqrt{2}\le y\le 2$

بنابراین $y\in[-2\sqrt{2},2]$ است.

۳۰۲.

ابتدا دامنهٔ تابع را می‌یابیم:

$\frac{2-x}{x}\ge 0 \xrightarrow[x=0]{x=2}$

x		۰		۲	
	−	ن‌ت	+	۰	−

$\Rightarrow x\in(0,2]$

اکنون برد را برای $0<x\le 2$ مشخص می‌کنیم:

$0<x\le 2\xrightarrow{|x|=x} f(x)=(x+x)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$

$=2x\sqrt{\frac{2-x}{x}}=2\sqrt{x^2\frac{(2-x)}{x}}=2\sqrt{x(2-x)}=2\sqrt{2x-x^2}$

که حداقل مقدار $2(0)=0$ و حداکثر مقدار به ازای رأس سهمی زیر رادیکال به دست می‌آید:

$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2(-1)}=1\Rightarrow y=2(1)-(1)^2=1$

$\Rightarrow f(x)=2\sqrt{(1)}=2$

بنابراین برد برابر $[0,2]$ است.

۳۰۳.

تک‌تک موارد را بررسی می‌کنیم:

الف) $3x+2y=12\Rightarrow 2y=-3x+12\Rightarrow y=\frac{-3}{2}x+6$

$x_1=x_2\Rightarrow -\frac{3}{2}x_1=-\frac{3}{2}x_2\Rightarrow -\frac{3}{2}x_1+6=-\frac{3}{2}x_2+6$

$\Rightarrow y_1=y_2$ پس تابع است.

ب) $x=1$

خطی موازی محور y هاست و تابع نیست.

پ) $y=-2$

تابع است و همچنین تابع ثابت است.

بنابراین دو تا از معادلات داده شده تابع است.

۳۰۴.

معادلهٔ $y=x^2+1$ تابع است، زیرا:

$x_1=x_2\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1^2+1=x_2^2+1\Rightarrow y_1=y_2$

معادلهٔ $x=y^2+1$ تابع نیست، زیرا:

$x=2\Rightarrow y^2+1=2\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$

پس برای یک مقدار x دو مقدار y داریم و تابع نیست.

۳۰۵.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: مجموع دو عبارت نامنفی زمانی برابر صفر است که هر کدام برابر صفر باشند.

$|x|+|y|=0\Rightarrow|x|=0,|y|=0\Rightarrow x=0,y=0$

بنابراین این معادله فقط شامل یک زوج مرتب $\{(0,0)\}$ است و تابع می‌باشد.

گزینهٔ ۲: $x=0\Rightarrow|y|=1\Rightarrow y=\pm 1\Rightarrow$ تابع نیست

گزینهٔ ۳: $x=1\Rightarrow|y|=1\Rightarrow y=\pm 1\Rightarrow$ تابع نیست

گزینهٔ ۴: $x=2\Rightarrow|y|=2\Rightarrow y=\pm 2\Rightarrow$ تابع نیست

۳۰۶. ۱ ■ ۳ ۴

معادلات داده‌شده را بررسی می‌کنیم:

الف) $f(x)=\begin{cases} x+3 & ; \ x\le 0 \\ x-1 & ; \ x\ge 0\end{cases}$

$x=0 \Rightarrow$ ضابطهٔ بالایی $f(0)=3$ و ضابطهٔ پایینی $f(0)=-1$

پس تابع نیست.

ب) $y^2=x^2$

$x=1\Rightarrow y^2=1\Rightarrow y=\pm 1$ پس تابع نیست.

پ) $y=|x|$

$x_1=x_2\Rightarrow |x_1|=|x_2|\Rightarrow y_1=y_2$ پس تابع است.

بنابراین یکی از معادلات داده شده تابع است.

۳۰۷. ۱ ۲ ■ ۴

معادله زمانی معرف یک تابع اسـت که بـه ازای هر x، حداکثر یک y وجود داشته باشد که کافی است برای نقطهٔ مرزی $x=2$ امتحان کنیم:

$$\left.\begin{matrix} x=2: \text{ضابطهٔ بالایی}\ f(2)=4(2)-1=7 \\ x=2: \text{ضابطهٔ پایینی}\ f(2)=a(2)+1=2a+1\end{matrix}\right\}\Rightarrow 2a+1=7$$

$$\Rightarrow 2a=6\Rightarrow a=3$$

۳۰۸. ■ ۲ ۳ ۴

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: می‌دانیم: $y^3+3y^2+3y+1=(y+1)^3$

$$y^3+3y^2+3y+x^3+x=0\Rightarrow y^3+3y^2+3y+1-1+x^3+x=0$$

$$\Rightarrow (y+1)^3-1+x^3+x=0\Rightarrow (y+1)^3=-x^3-x+1$$

$$y+1=\sqrt[3]{-x^3-x+1}\Rightarrow y=\sqrt[3]{-x^3-x+1}-1$$

که y تابعی از x است.

گزینهٔ ۲:

$x=1: y^2+2y=0\Rightarrow y(y+2)=0\Rightarrow y=0, y=-2$ تابع نیست.

گزینهٔ ۳: تابع نیست. $x=0: |y-1|=1\Rightarrow y=0, y=2$

گزینهٔ ۴: تابع نیست. $x=0: |y|=1\Rightarrow y=-1, y=1$

گزینه‌های «۲»، «۳» و «۴» تابع نیستند، زیرا به‌ازای یک مقدار خاص x چند مقدار برای y به‌دست می‌آید.

۳۰۹. ۱ ۲ ۳ ■

به‌ازای $x=-\frac{1}{2}$ داریم:

$$[7x]=[-\tfrac{7}{2}]=[-3/5]=-4$$

$$[5x]=[-\tfrac{5}{2}]=[-2/5]=-3$$

$$|[7x]-|[5x]||=|-4-|-3||=|-7|=7$$

۳۱۰. ۱ ■ ۳ ۴

راهبرد

در حالت کلی $[x+k]=[x]+k$ برای $k\in\mathbb{Z}$ برقرار است.

نمودارهـای دو تابـع f و g زمانـی بـر هـم منطبق می‌شـوند که $f(x)=g(x)$ باشد. یعنی رابطهٔ $[x-a]=[x]-a$ برقرار باشد و این رابطه زمانی برقرار است که $a\in\mathbb{Z}$ باشد.

۳۱۱. ۱ ۲ ■ ۴

باید حاصل عبارت را برای هر عدد طبیعی $n>2$ محاسبه کنیم، پس کافی است $n=3$ را امتحان کنیم:

$$[\sqrt{4n^2-3n+1}]-2[\sqrt{n^2-2n}]$$

$$=[\sqrt{4(3)^3-3(3)+1}]-2[\sqrt{(3)^2-2(3)}]=[\sqrt{28}]-2[\sqrt{3}]$$

$$=[5/\cdots]-2[1/\cdots]=5-2(1)=3$$

۳۱۲. ۱ ۲ ■ ۴

با استفاده از برابری $(1+\sqrt{2})^6=198-(1-\sqrt{2})^6$

$$[(1+\sqrt{2})^6]=[198-(1-\sqrt{2})^6]=[-(1-\sqrt{2})^6]+198$$

$$\xrightarrow{0<(1-\sqrt{2})^6<1} -1+198=197$$

توجه داشته باشید که: $1-\sqrt{2}\simeq 1-1/4=-0/4$

$$\Rightarrow 0<(1-\sqrt{2})^6<1\Rightarrow -1<-(1+\sqrt{2})^6<0\Rightarrow [-(1+\sqrt{2})^6]=-1$$

۳۱۳. ۱ ۲ ۳ ■

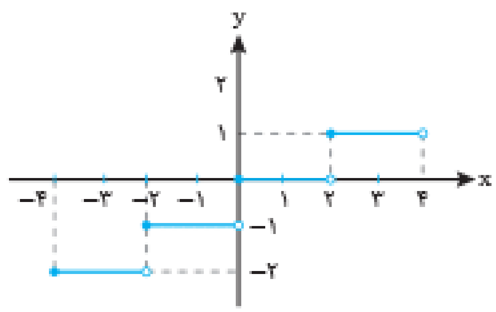
برای رسـم نمودار تابع $f(x)=[\frac{1}{2}x]$ طول بـازه را $\frac{1}{|\frac{1}{2}|}=2$ در نظر می‌گیریم:

$$-4\le x<-2\Rightarrow -2\le \tfrac{1}{2}x<-1\Rightarrow [\tfrac{1}{2}x]=-2$$

$$-2\le x<0\Rightarrow -1\le \tfrac{1}{2}x<0\Rightarrow [\tfrac{1}{2}x]=-1$$

$$0\le x<2\Rightarrow 0\le \tfrac{1}{2}x<1\Rightarrow [\tfrac{1}{2}x]=0$$

$$2\le x<4\Rightarrow 1\le \tfrac{1}{2}x<2\Rightarrow [\tfrac{1}{2}x]=1$$



بنابراین نمودار تابع شامل چهار پاره‌خط به طول ۲ است.

۳۱۴. ۱ ■ ۳ ۴

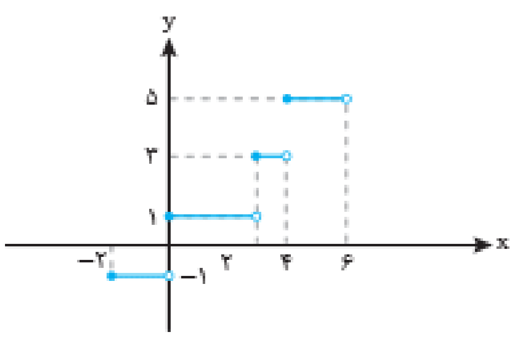
طول بازه‌ها را ۲ واحد در نظر می‌گیریم:

$$-2\le x<0\Rightarrow -1\le \frac{x}{2}<0\Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1\Rightarrow y=2(-1)+1=-1$$

$$0\le x<2\Rightarrow 0\le \frac{x}{2}<1\Rightarrow [\frac{x}{2}]=0\Rightarrow y=2(0)+1=1$$

$$2\le x<4\Rightarrow 1\le \frac{x}{2}<2\Rightarrow [\frac{x}{2}]=1\Rightarrow y=2(1)+1=3$$

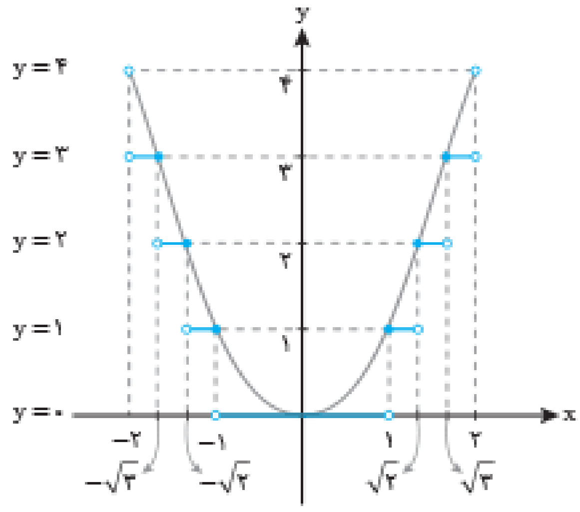
$$4\le x<6\Rightarrow 2\le \frac{x}{2}<3\Rightarrow [\frac{x}{2}]=2\Rightarrow y=2(2)+1=5$$



بنابراین نمودار از ۴ پاره‌خط مساوی تشکیل شده است.

۳۱۵.

نمودار تابع $y=x^2$ را رسم کرده و سپس از روی آن نمودار $y=[x^2]$ را رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار از هفت پاره‌خط تشکیل شده است.

۳۱۶.

راهبرد

$[x]<k(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow[x]\le k-1\Rightarrow x<k$

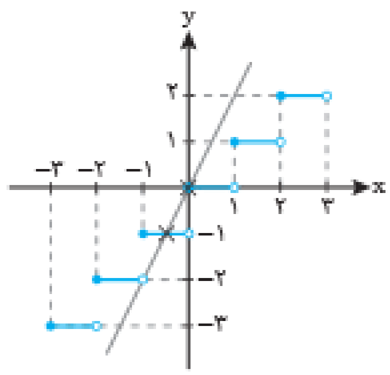
با استفاده از $[x+a]=[x]+a$ که در آن $a\in\mathbb{Z}$ است، داریم:

$[x+1]<2\Rightarrow[x]+1<2\Rightarrow[x]<1\Rightarrow[x]\le 0\Rightarrow x<1$

بنابراین جواب به صورت $(-\infty,1)$ است.

۳۱۷.

با استفاده از رسم شکل (نمودار هندسی) تعداد نقاط برخورد را مشخص می‌کنیم.



بنابراین معادله دو ریشه دارد.

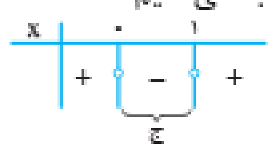
۳۱۸.

می‌دانیم $0\le x-[x]<1$، پس $x-[x]$ هیچ‌وقت بزرگ‌تر از یک نیست و مساوی دو نمی‌شود، بنابراین معادله هیچ ریشه‌ای ندارد.

۳۱۹.

ابتدا شرط را بررسی می‌کنیم و سپس به‌ازای x های جواب، $[x]$ را محاسبه می‌کنیم.

$x^2<x\Rightarrow x^2-x<0\Rightarrow x(x-1)<0$



بنابراین $0<x<1$ و $[x]=0$ است.

۳۲۰.

با توجه به این که اعداد صحیح از جزء صحیح بیرون می‌آیند، پس داریم:

$[[x]+[-x]]=[[x]]+[-x]=[x]+[-x]$

توجه داشته باشید که $[x],[-x]\in\mathbb{Z}$، پس معادله به‌صورت زیر است:

$[x]+[-x]=2$

اما می‌دانیم که حاصل $[x]+[-x]$ برابر ۰ یا -1 است و هیچ‌گاه برابر ۲ نمی‌شود، بنابراین معادله هیچ جوابی ندارد.

۳۲۱.

اگر $[x^2+x]=-1$، آن‌گاه $-1\le x^2+x<0$ و داریم:

$$-1\le x^2+x<0\Rightarrow\begin{cases}x^2+x\ge-1\Rightarrow x^2+x+1\ge 0\xrightarrow[a>0]{\Delta<0}x\in\mathbb{R}\\ x^2+x<0\Rightarrow x(x+1)<0\Rightarrow -1<x<0\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}}-1<x<0$$

پس شرط به صورت $-1<x<0$ است، پس $0<x^{20}<1$ و در نتیجه $[x^{20}]=0$ می‌باشد.

۳۲۲.

با استفاده از $[2x]=[x]+[x+\frac{1}{2}]$ داریم:

$$[2x]=[x]\Rightarrow[x]+[x+\frac{1}{2}]=[x]\Rightarrow[x+\frac{1}{2}]=0$$

$$\Rightarrow 0\le x+\frac{1}{2}<1\xrightarrow{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2}$$

که فقط شامل یک عدد صحیح یعنی $x=0$ است.

۳۲۳.

$$[\frac{3}{x-1}]+[\frac{x-4}{x-1}]=1\Rightarrow[\frac{3}{x-1}]+[\frac{x-1-3}{x-1}]=1$$

$$\Rightarrow[\frac{3}{x-1}]+[1-\frac{3}{x-1}]=1\Rightarrow[\frac{3}{x-1}]+[\frac{-3}{x-1}]+1=1$$

$$\Rightarrow[\frac{3}{x-1}]+[\frac{-3}{x-1}]=0$$

عبارت $[u]+[-u]$ زمانی برابر صفر است که $u\in\mathbb{Z}$ باشد.

$\frac{3}{x-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-1=\pm1$ یا ±3

$$\begin{cases}x-1=\pm1\Rightarrow x=2 \text{ یا } x=0\\ x-1=\pm3\Rightarrow x=4 \text{ یا } x=-2\end{cases}$$

بنابراین معادله چهار جواب صحیح دارد.

۳۲۴.

ابتدا $x+\frac{3}{2}$ را به‌صورت $x+\frac{1}{2}+1$ نوشته و عدد یک را از جزء صحیح بیرون می آوریم:

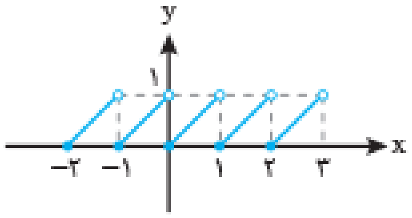
$$[x+\frac{1}{2}]+[x+\frac{3}{2}]=5\Rightarrow[x+\frac{1}{2}]+[x+\frac{1}{2}+1]=5$$

$$\Rightarrow[x+\frac{1}{2}]+[x+\frac{1}{2}]+1=5\Rightarrow 2[x+\frac{1}{2}]=4\Rightarrow[x+\frac{1}{2}]=2$$

$$\Rightarrow 2\le x+\frac{1}{2}<3\Rightarrow\frac{3}{2}\le x<\frac{5}{2}$$

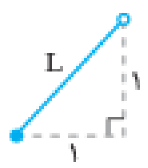
۳۲۵.

نمودار $y=x-[x]$ را در بازهٔ $[-2,3)$ رسم می‌کنیم:



که این نمودار شامل دو پاره‌خط $(n=5)$ مساوی به اندازهٔ $\sqrt{2}$ است $(L=\sqrt{2})$.

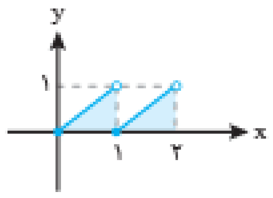
$L=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$



بنابراین $(n,L)=(5,\sqrt{2})$ است.

۳۲۶.

با رسم نمودار $f(x)=x-[x]$ در بازهٔ $[0,2)$ مساحت را می‌یابیم:



$S=\frac{1}{2}(1)(1)+\frac{1}{2}(1)(1)=1$

۳۲۷.

اگر $[x-2]=1$، آن‌گاه $1\le x-2<2$ و در نتیجه $3\le x<4$ و $f(x)$ در این بازه به صورت زیر است:

$(|x-3| \xlongequal{x\ge 3} x-3;\ |x-4| \xlongequal{x<4} -(x-4))$

$f(x)=|x-3|-|x-4|=(x-3)-(-(x-4))$

$=x-3+x-4=2x-7$

برای پیدا کردن نقطه (نقاط) مشترک (در صورت وجود) کافی است معادلهٔ مقابل را حل کنیم: $f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-7=2x^2+x-17$

$\Rightarrow 2x^2-x-10=0\Rightarrow (2x-5)(x+2)=0\Rightarrow x=-2$ یا $x=\frac{5}{2}$

با توجه به این‌که $3\le x<4$ است و هیچ کدام در این بازه قرار ندارد، پس هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند.

۳۲۸.

با توجه به این‌که $[x+1]=[x]+1$ و $0\le x-[x]<1$ داریم:

$f(x)=x-[x+1]=x-([x]+1)=x-[x]-1$

$0\le x-[x]<1 \xrightarrow{-1} -1\le x-[x]-1<0\Rightarrow -1\le f(x)<0$

یعنی برد برابر $[-1,0)$ است.

۳۲۹.

راهبرد

اگر $y=ax-a[x]$ باشد، آن‌گاه:

الف) $0\le y<a\ (a>0)$ ب) $a<y\le 0\ (a<0)$

از $0\le x-[x]<1$ داریم:

$f(x)=2x-2[x]+1=2(x-[x])+1\Rightarrow 2(0)+1\le f(x)<2(1)+1$

$\Rightarrow 1\le f(x)<3$

۳۳۰.

ابتدا دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم:

$1-[x]>0\Rightarrow [x]<1\Rightarrow [x]\le 0\Rightarrow x<1$

اکنون برد را محاسبه می‌کنیم:

$x<1\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-[x]}}<1\Rightarrow f(x)<1$

توجه داشته باشید که اگر $x<1$ باشد، آن‌گاه $[x]\le 0$ است:

$-[x]\ge 0\Rightarrow 1-[x]\ge 1\Rightarrow \sqrt{1-[x]}\ge 1$

۳۳۱.

در حالت‌های مختلف x، برد را می‌یابیم:

الف) $x\ge 0\Rightarrow y=0$

ب) $[x]\le x<0 \xrightarrow[\text{وجهت نامعادله برمی‌گردد } [x]<0]{\div [x]} \frac{[x]}{[x]}\ge \frac{x}{[x]}>\frac{0}{[x]}$

$\Rightarrow 0<\frac{x}{[x]}\le 1\Rightarrow y\in (0,1]$

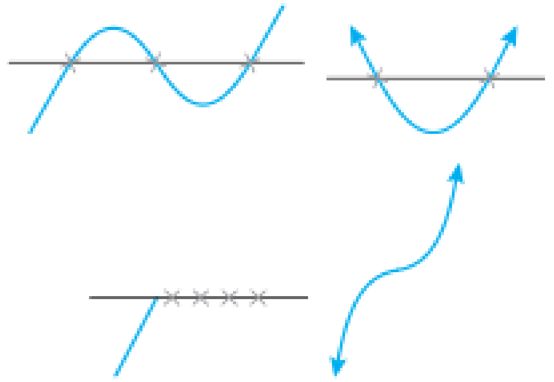
بنابراین برد برابر $[0,1]$ است.

۳۳۲.

نمودارهای ون گزینه‌های «۲» و «۳» اصلاً تابع نیستند و نمودار گزینهٔ «۱» تابع هست ولی یک‌به‌یک نیست. فقط نمودار ون گزینهٔ «۴» یک تابع یک‌به‌یک است.

۳۳۳.

نمودار یک تابع از لحاظ نمودار مختصاتی، یک‌به‌یک است هرگاه هر خط موازی محور xها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



۳۳۴.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: $y=0\Rightarrow x=0,0/5,\ldots\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ ۲: $y=1\Rightarrow x=1,-1\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ ۳: $y=1\Rightarrow x=1,-1\Rightarrow$ تابع یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ ۴: تابع یک‌به‌یک است، زیرا:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \sqrt[3]{x_1}=\sqrt[3]{x_2}\xrightarrow{\text{به توان ۳}} x_1=x_2$

۳۳۵.

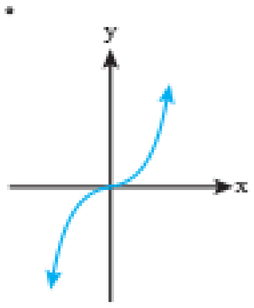
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: $f(x)=0\Rightarrow x=0,1,\ldots\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ ۲: $f(x)=0\Rightarrow x=-1,-2,\ldots\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ ۳: با توجه به نمودار تابع f مشخص است که تابع یک‌به‌یک است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ; & x\ge 0\\ -x^2 & ; & x<0\end{cases}$$



گزینهٔ ۴: $f(x)=1\Rightarrow x=1,2,\ldots\Rightarrow$ یک‌به‌یک نیست.

۳۳۶.

تابع درجه دوم می‌تواند در سمت راست یا چپ رأس سهمی یک‌به‌یک باشد.

$x_S=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{2}=2$

پس در بازهٔ $[2,+\infty)$ یا $(-\infty,2]$ می‌تواند یک‌به‌یک باشد.

۳۳۷.

با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع و دو زوج مرتب $(m,2)$ و $(-2,2)$ باید $m=-2$ باشد. اکنون دو زوج مرتب $(-1,1),(m+1,k)=(-1,k)$ داریم که f باید تابع باشد یعنی $k=1$ است.