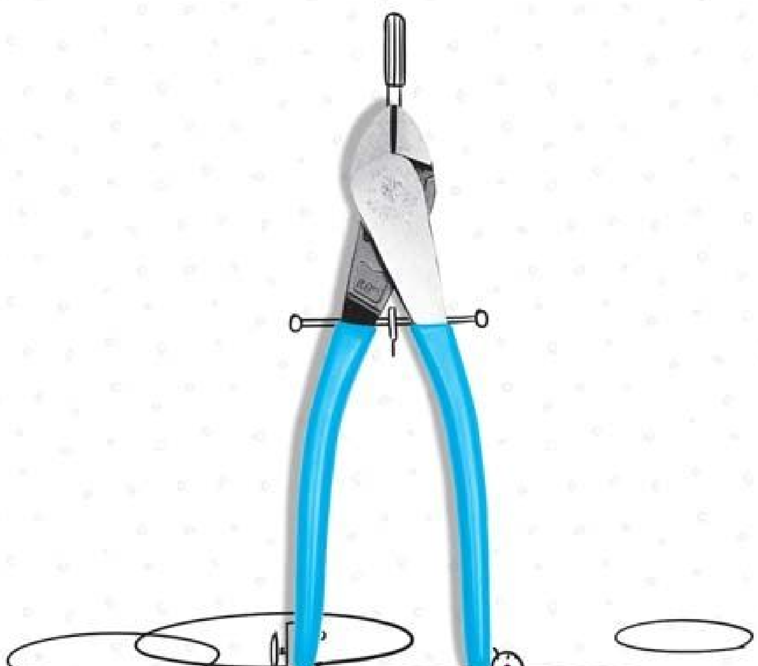
فهرست

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

این فصل یکی از اساسی‌ترین فصل‌های کتاب هندسه است!
دو بخش مجزا از هم ترسـیم‌های هندسی و استدلال شاکلـهٔ این فصل رو ساختن.
از رسم‌های ساده شروع و درنهایت به رسم مثلث و چهارضلعی‌های خاص در بخش اول می‌رسـیم. تصور هندسی و رسـیدن به توانایی روش رسم اشکال می‌تونه پایه مناسبی ایجاد کنه برای ورود به هندسه!
هدف بخش دوم که توی اون با انواع اسـتدلال‌ها (استنتاجی، استقرایی و ...) آشنا می‌شیم. یادگیری نحوهٔ تفکر و حل صحیح و زیبای مسائل.
حدس ما اینه که از این فصل یه دونه تست توی کنکور بیاد.

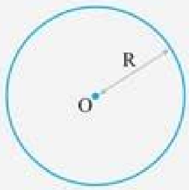


ترسیم‌های هندسی

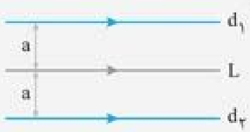
◂ در مسائل گوناگون مانند تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی ابزارها و ماشین‌های صنعتی، نیازمند ترسیم‌های هندسی با استفاده از ابزارهای ساده‌ای همچون خط‌کش و پرگار هستیم.

در این درس تعدادی از رسم‌های هندسی که کاربرد فراوانی دارند را توسط خط‌کش و پرگار یاد می‌گیریم. قبل از ورود به بحث ترسیم ابتدا در مورد مجموعه نقاطی که دارای ویژگی‌های مشترکی هستند (مکان هندسی) صحبت می‌کنیم.

۱ مجموعهٔ نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ R باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R می‌باشد.

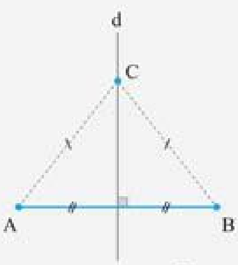


۲ مجموعه نقاطی که از خط L به فاصلهٔ معلوم a باشند، دو خط موازی با L و به فاصلهٔ a از آن می‌باشد.



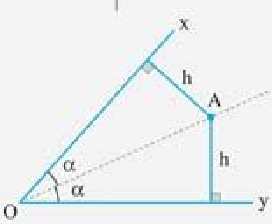
۳ مجموعه نقاطی که از دو سر پاره‌خط AB به فاصله یکسان هستند، عمود منصف AB می‌باشد.

◂ بنابراین هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.

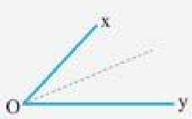


۴ مجموعه نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به فاصله برابر باشد نیمساز آن می‌باشد.

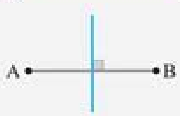
◂ بنابراین هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن به یک فاصله است.



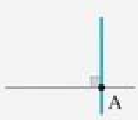
◂ رسم‌هایی که در این فصل با آن‌ها آشنا شده‌ایم و در حل مسائل استفاده می‌کنیم، عبارت‌اند از:



۱ رسم نیمساز یک زاویه



۲ رسم عمودمنصف یک پاره‌خط

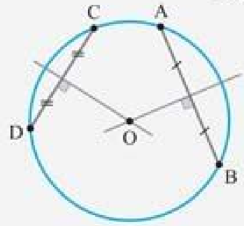


۳ رسم خط عمود از نقطه‌ای بر روی آن

۴ رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج از آن

۵ رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج از آن

مثال: **یک نجّار از یک تختهٔ مسطّح چوبی، صفحه‌ای دایره‌ای شکل را بریده و می‌خواهد پایه‌ای را در مرکز این صفحه به آن پیچ کند. برای ساختن یک میز متعادل، به نجّار طریقهٔ یافتن مرکز صفحهٔ دایره‌ای شکل را توضیح دهید.**



پاسخ: می‌دانیم که مرکز هر دایره از دو سر هر وتر آن دایره به یک فاصله است؛ به بیان دیگر، عمود منصّف هر وتر دلخواه از یک دایره، حتماً از مرکز آن دایره می‌گذرد.
مطابق شکل، کافی است دو وتر دلخواه از صفحهٔ دایره‌ای شکل را کشیده و عمود منصّف‌های آن دو وتر را رسم کنید. نقطهٔ برخورد این دو عمودمنصّف، همان مرکز صفحهٔ دایره‌ای شکل است.

۱. مرکز دایره‌هایی به شعاع ۱ سانتی‌متر که از نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، روی .... قرار دارد.

۱) دو خط موازی و به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از هم
۲) دو خط موازی و به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از هم
۳) دایره‌ای به قطر ۲ سانتی‌متر
۴) دایره‌ای به قطر ۱ سانتی‌متر

۲. مربع $ABCD$ به ضلع ۳ مفروض است. چند نقطه روی محیط مربع $ABCD$ وجود دارد که فاصله‌اش از قطر AC برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) هیچ

۳. حداکثر چند نقطه روی دایرهٔ C به شعاع ۵ وجود دارد که از خط Δ به فاصلهٔ ۲/۵ باشند؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۴. نقطهٔ ثابت M بین دو خط موازی Δ_1 و Δ_2 قرار دارد. حداکثر چند دایره می‌توان رسم کرد که از M گذشته و بر دو خط Δ_1 و Δ_2 مماس است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۵. دو خط موازی Δ و Δ' به فاصلهٔ m از هم و نقطهٔ A از محدودهٔ بین دو خط Δ و Δ' و به فاصلهٔ $\frac{m}{2}$ از خط Δ قرار دارد. اگر دقیقاً دو نقطه روی خطوط Δ و Δ' به فاصلهٔ ۳ از نقطهٔ A قرار داشته باشد، m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۴/۵ ۴) ۷

۶. دو نقطهٔ M و N به فاصلهٔ ۷ از هم قرار دارند. اگر فقط یک نقطه در صفحه، به فاصله‌های $m+1$ و $3m-2$ (به ترتیب) از نقاط M و N وجود داشته باشد، m چه مقادیری می‌تواند باشد؟

۱) ۳ و ۶ ۲) ۲ و ۵ ۳) ۳ و ۵ ۴) ۲ و ۶

۷. از دو نقطهٔ ثابت A و B در یک صفحه، دایره‌ای می‌گذرد. مرکز این دایره روی .... قرار دارد.

۱) دایره‌ای به قطر AB ۲) خطی موازی AB ۳) خطی عمود بر AB ۴) دو خط موازی AB

۸. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین به ارتفاع ۶ و طول ساق ۸، مساحت مثلثی که نیمسازهای داخلی زوایای مجاور یک ساق روی آن ساق به وجود می‌آورند، کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۹. از نقطهٔ A خارج خط d، دو خط متقاطع Δ و Δ' را رسم می‌کنیم. حداکثر چند نقطه روی d وجود دارد که از دو خط Δ و Δ' به یک فاصله باشد؟

۱) بی‌شمار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

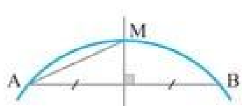
۱۰. خط D دو خط موازی d_1 و d_2 را قطع کرده است. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصله‌های مساوی از این سه خط باشند؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) بی‌شمار

۱۱. در مثلث ABC داریم $AB = AC$ و $\hat{A} = 80^\circ$، عمودمنصف‌های دو ساق مثلث، قاعدهٔ BC را در M و N قطع می‌کنند. کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث AMN چند درجه است؟ (تجربی ۹۲)

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۲. شکل روبه‌رو، کمان AB از دایره‌ای به شعاع ۵ را نشان می‌دهد. عمودمنصف وتر AB، کمان را در نقطهٔ M قطع می‌کند طوری که $AM = 2\sqrt{5}$؛ فاصلهٔ M از وتر AB چقدر است



۱) $\sqrt{6}$ ۲) $\sqrt{5}$ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۱۳. نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ از خط d و به فاصلهٔ ۶ از نقطهٔ B قرار دارد. اگر هیچ نقطه‌ای روی خط d به فاصلهٔ یکسان از نقاط A و B وجود نداشته باشد، فاصلهٔ B از خط d کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۹

۱۴. دو خط موازی d و d' به فاصلهٔ ۸ از هم و نقطهٔ متغیر A بین این دو خط مفروض است. اگر فقط سه نقطهٔ روی این دو خط به فاصلهٔ a از نقطهٔ A وجود داشته باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) هر سه مقدار قابل قبول است.

۱۵. چند نقطه در صفحهٔ شامل دو خط متقاطع d_1 و d_2 وجود دارد که از d_1 به فاصلهٔ ۳ و از d_2 به فاصلهٔ ۴ باشند؟

۱) بی‌شمار ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۶. نقطهٔ A خارج از خط d قرار دارد. اگر فقط سه نقطه به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ A و به فاصلهٔ ۳ از خط d وجود داشته باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۸

۱۷. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۰ واحد از هم قرار دارند. چند نقطه در صفحه وجود دارد که به فاصلهٔ ۴ واحد از هر کدام از نقاط A و B باشد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

۱۸. دو نقطهٔ O و O' به فاصلهٔ $3x-2$ از هم قرار گرفته‌اند. اگر دو نقطه به فاصلهٔ $x+1$ از هر کدام آنها وجود داشته باشد، x کدام است؟

۱) $x>1/5$ ۲) $4>x>1/5$ ۳) $x>4$ ۴) $x<4$

۱۹. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $5x-1$ واحد از هم قرار گرفته‌اند. اگر تنها یک نقطه به فاصلهٔ $x+4$ از نقطهٔ A و به فاصلهٔ $3x$ از نقطهٔ B وجود داشته باشد، مقدار x کدام است؟

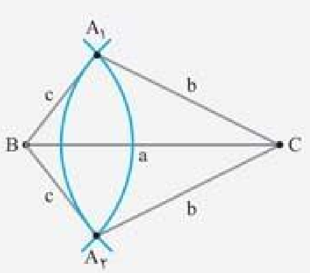
۱) $3, \frac{5}{7}$ ۲) $4, \frac{3}{7}$ ۳) $5, \frac{5}{7}$ ۴) $6, \frac{3}{7}$

۲۰. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $4l-2$ واحد از هم قرار گرفته‌اند. اگر فقط یک نقطه وجود داشته باشد که به فاصلهٔ $l+2$ از A و B واقع باشد، مقدار l کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) ۳

رسم مثلث و قضیهٔ وجود مثلث

رسم مثلث با داشتن اندازهٔ اضلاع a، b و c



ابتدا پاره‌خطی به طول a رسم می‌کنیم (ضلع BC)، سپس دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ b باز کرده و به مرکز C کمانی می‌زنیم. در پایان به مرکز B و به شعاع c کمانی رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو کمان، رأس سوم مثلث (نقطهٔ A) می‌باشد.

◀ توجه کنید که دو مثلث A_1BC و A_2BC با حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند.

همانطور که در ترسیم آخری دیدید، در رسم یک مثلث، یک شرط مهم برای وجود آن مثلث وجود دارد که آن را به طور کامل می‌آوریم:

◀ **شرط وجود مثلث:** اندازه‌های a, b, c در صورتی می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که مجموع هر دوتای آن‌ها از سومی بیشتر باشد؛ به بیان دیگر یک مثلث با طول اضلاع a, b, c در صورتی قابل رسم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$$

این سه رابطه را می‌توان به صورت کلی $|b-c|<a<b+c$ بیان کرد.

مثال: با کدام دسته از پاره‌خط‌های زیر می‌توان یک مثلث ایجاد کرد؟

۱) ۱,۲,۳ ۲) ۱۳,۵,۷ ۳) ۴,۵,۲ ۴) ۸,۴,۴

● **پاسخ:** با توجه به اعداد داده شده در گزینه‌ها داریم:

گزینهٔ ۱: $1+2 \not> 3$

گزینهٔ ۲: $5+7 \not> 13$

گزینهٔ ۴: $4+4 \not> 8$

بنابراین قضیهٔ وجود مثلث فقط برای گزینهٔ ۳ صدق می‌کند.

$$\begin{cases} 2+5>4 \\ 2+4>5 \\ 5+4>2 \end{cases}$$

گزینهٔ «۳» صحیح است.

۲۱. سه پاره‌خط به طول‌های $۶x , x+۷ , ۴x-۴$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟ (ریاضی ۸۳)

۱) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۳$ ۲) $\frac{۵}{۳} < x < ۳$ ۳) $۲ < x < ۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹} < x < ۴$

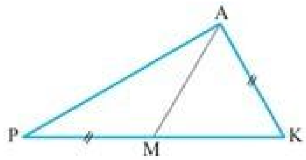
۲۲. باکدام یک از سه طول داده‌شده نمی‌توان مثلث ساخت؟ $(۱ < a < b)$ (کنکور زیرخاکی)

۱) $\sqrt{۵} , \sqrt{۳} , \sqrt{۲}$ ۲) $۵a , ۴a , ۳a$ ۳) $a+b-۱ , b , a$ ۴) $b-۱ , a+b , a+۲b$

۲۳. فرض کنیم $۰ < a < b < c$ باشد. با کدام شرط، قطعاً مثلثی با اضلاع c , b , a وجود دارد؟ (کنکور زیرخاکی)

۱) $c < a+b$ ۲) $a < b+c$ ۳) $b < a+c$ ۴) $c^۲ < a^۲ + b^۲$

۲۴. در مثلث مقابل، اگر $PM = AK$ ، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (کنکور زیرخاکی)



۱) $AP < AM$
۲) $AP > MK$
۳) $AP < MK$
۴) $MK > PM$

۲۵. در مثلث ABC یکی از میانه‌ها بر یکی از نیمسازهای داخلی عمود است. اگر اندازهٔ اضلاع این مثلث، سه عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه اندازهٔ محیط این مثلث برابر است با: (المپیاد ریاضی کشوری ۷۷)

۱) ۶ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ۴) ۱۸

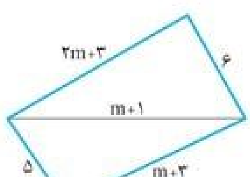
۲۶. محیط یک مثلث به طول اضلاع ۳ و ۵ کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۲۷. اندازهٔ بزرگترین ضلع یک مثلث با محیط ۹ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۲/۸ ۲) ۳/۷ ۳) ۴/۶ ۴) ۵/۵

۲۸. باتوجه به اندازهٔ پاره‌خط‌های شکل مقابل، حدود تغییرات m کدام است؟



۱) $\frac{۲}{۳} < m < ۴$ ۲) $\frac{۱}{۲} < m < ۳$ ۳) $۰ < m < \frac{۷}{۲}$ ۴) $۱ < m < \frac{۱۳}{۳}$

۲۹. فاصلهٔ هوایی از شهر A تا شهر B برابر ۳۰ کیلومتر، از B تا C برابر ۸۰ کیلومتر، از C تا D برابر ۲۳۶ کیلومتر، از D تا E برابر ۸۶ و از E تا A برابر ۴۰ کیلومتر است. فاصلهٔ هوایی از E تا C چند کیلومتر است؟

۱) ۷۰ ۲) ۱۱۶ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۵۰

۳۰. چهار میله به طول‌های ۵، ۳، ۷ و ۴ متر به همین ترتیب به هم لولا شده‌اند و ابتدای میلهٔ اول هم به انتهای میلهٔ چهارم لولا شده است. اگر میله‌ها بتوانند آزادانه در یک صفحه حول لولاهایشان بچرخند، فاصلهٔ لولای بین میله‌ی ۵ و ۴ متری تا لولای مقابل چند متر می‌تواند باشد؟ (المپیاد ریاضی کشوری ۸۸)

۱) هر مقدار بین ۳ و ۸ متر ۲) هر مقدار بین ۲ و ۱۱ متر ۳) هر مقدار بین ۲ و ۸ متر ۴) هر مقدار بین ۳ و ۱۱ متر

۳۱. در رسم مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $b = ۷ , c = ۵$ و میانهٔ $m_a = ۴$، با خط‌کش و پرگار، کدام نتیجه حاصل می‌شود؟ (ریاضی ۸۳)

۱) غیر قابل رسم ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

۳۲. در مثلثی طول دو ضلع برابر ۴ و ۷ است. میانهٔ وارد بر ضلع سوم، کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۵ ۲) ۵/۵ ۳) ۶ ۴) ۶/۵

۳۳. مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع $a = ۸$ و $b = ۷$ و میانهٔ m_a رسم می‌شود. طول این میانه کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۱۳

۳۴. چند مثلث متمایز ABC به اضلاع $b=4$ و $c=5$ و $h_a=3$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۵. چند مثلث متمایز ABC به اضلاع $b=5$ و $c=3$ و $h_a=4$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۶. چند مثلث متمایز ABC به اضلاع $b=c=4$ و $h_a=3$ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۷. چند مثلث متمایز ABC با طول اضلاع ۳ و ۵ و ارتفاع ۴ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳۸. اگر اعداد $4x-2$ و $2x+12$ قطرهای یک لوزی و ضلع آن $x+4$ باشد، محدودهٔ x کدام است؟

۱) $x>\frac{3}{2}$ ۲) $10>x>\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}<x<10$

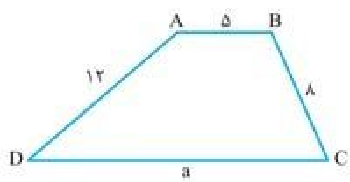
۳۹. اگر دو ضلع از مثلثی برابر ۵ و ۸ باشد. حدود ضلع سوم کدام است؟

۱) $3<x$ ۲) $1<x<3$ ۳) $x<13$ ۴) $3<x<13$

۴۰. اگر طول اضلاع دو مثلث ABC برابر با $x+1$ ، $2x-1$ و ۵ باشد. x چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۴۱. اگر ذوزنقهٔ مقابل قابل رسم باشد، آن‌گاه محدودهٔ a کدام است؟



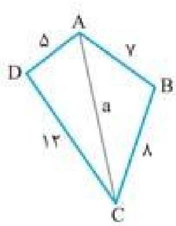
۱) $5<a<15$

۲) $9<a<25$

۳) $9<a<15$

۴) $15<a<25$

۴۲. در چهارضلعی ABCD ، حدود a به کدام صورت است؟



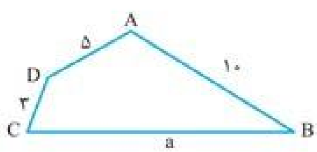
۱) $7<a<17$

۲) $1<a<15$

۳) $7<a<15$

۴) $1<a<17$

۴۳. در چهارضلعی ABCD مطابق شکل برای a چند جواب صحیح وجود دارد؟



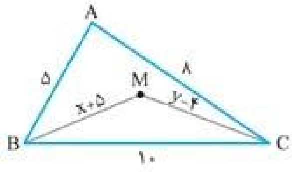
۱) ۳ ۲) ۵

۳) ۷ ۴) ۱۰

۴۴. در مثلثی به طول اضلاع ۳، $3-\sqrt{2}$ و $2+\sqrt{2}$ واحد، نقطهٔ M داخل مثلث تغییر مکان می‌دهد. کدام عدد برای مجموع فواصل نقطهٔ M از سه رأس مثلث، مورد قبول است؟ (ریاضی خارج ۸۸)

۱) $5-\sqrt{2}$ ۲) ۴ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) ۸

۴۵. با توجه به شکل مقابل، مقدار $x+y$ کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۷/۵ ۲) ۸/۵

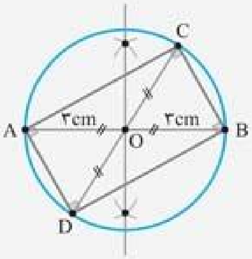
۳) ۹/۵ ۴) ۱۲/۵

۴۶. دو ضلع از مثلثی ۷ و ۱۰ واحد است. کدام عدد برای اندازهٔ میانهٔ ضلع سوم مورد قبول نیست؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۷ ۴) ۹

رسم چهارضلعی‌های مهم

مثال: مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد. مسأله چند جواب دارد؟ (تمرین کتاب درسی)



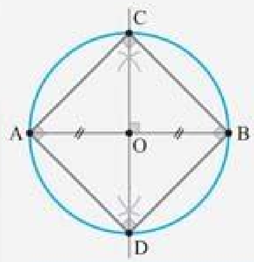
■ **پاسخ:** می‌دانیم که در مستطیل اولاً طول قطرها با هم برابر بوده، ثانیاً قطرها منصّف یکدیگر هستند. باتوجه به این موضوع، برای رسم این مستطیل به صورت زیر عمل می‌کنیم:

توسط خط‌کش پاره‌خط $AB = ۶cm$ را رسم می‌کنیم. سپس با رسم عمودمنصّف AB، نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB را پیدا کرده و دایره‌ای به مرکز O و شعاع $OA = ۳cm$ می‌کشیم. یک قطر از این دایره را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط C و D قطع کند. طبق شکل، چهارضلعی $ACBD$ مستطیلی با طول قطر ۶ سانتی‌متر است.

با تغییر قطر CD مستطیل مورد نظر تغییر می‌کند، یعنی مسأله بی‌شمار جواب دارد.

نکته

◄ رسم عمودمنصّف یک پاره‌خط در ترسیم بسیاری از شکل‌های هندسی مهم به کار گرفته می‌شود. یک نمونه از این ترسیم شکل‌های مهم را برای شما بیان می‌کنیم:

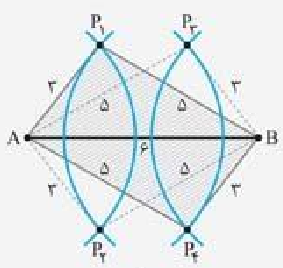


ترسیم یک مربع با طول قطر مفروض: می‌خواهیم مربعی با طول قطر d رسم کنیم.

توسط خط‌کش پاره‌خط $AB = d$ را می‌کشیم. عمودمنصّف AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخوردش با AB را O (وسط AB) می‌نامیم. بر مرکز O و شعاع $r = \frac{d}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود منصّف AB را در نقاط C و D قطع کند. چهارضلعی $ACBD$، مربعی با طول قطر d است.

◄ می‌دانیم در مربع، قطرها با هم مساوی بوده و عمودمنصف یکدیگرند.

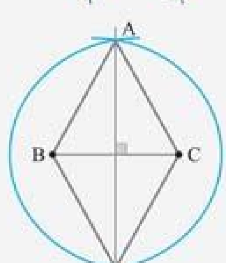
مثال: متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد. (تمرین کتاب درسی)



■ **پاسخ:** می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع اگر یکی از قطرها را رسم کنیم دو مثلث هم‌نهشت پدید می‌آید. با توجه به این موضوع، برای رسم این متوازی‌الاضلاع به شیوهٔ زیر عمل می‌کنیم:

توسط خط‌کش پاره‌خط $AB = ۶$ را می‌کشیم. مطابق شکل به مرکز A دایره‌هایی به شعاع ۳ و ۵ رسم کرده و همین کار را برای نقطهٔ B انجام می‌دهیم. از برخورد این دایره‌ها ۴ نقطه پدید می‌آید. طبق شکل، هرکدام از چهارضلعی‌های AP_1BP_4 و AP_2BP_3 متوازی‌الاضلاعی به طول ضلع‌های ۵ و ۳ و طول قطر ۶ هستند.

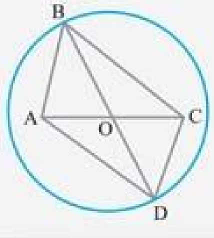
مثال: لوزی رسم کنید که طول یک ضلع آن ۱۰ و طول یکی از قطرهای آن ۸ می‌باشد.



■ **پاسخ:** ابتدا پاره‌خطی به طول ۸ رسم می‌کنیم (قطر BC). سپس عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم کرده و به مرکز B و به شعاع ۱۰ کمانی می‌زنیم تا عمودمنصف را در A و D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ لوزی مطلوب است.

مثال: چند متوازی‌الاضلاع به اندازهٔ قطار ۶ و ۸ می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) صفر ۳) ۴ ۴) بی‌شمار



■ **پاسخ:** پاره‌خط AC را به اندازهٔ ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. به مرکز O وسط AC و به شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم . هر قطر دلخواه از این دایره را در نظر بگیریم، دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع خواهند بود. چهارضلعی $ABCD$، چهارضلعی است که قطرهایش منصف یکدیگرند. بنابراین $ABCD$ همان متوازی‌الاضلاع است.

پس گزینهٔ «۴» صحیح است.

۴۷. می‌دانیم چند ضلعی‌ای که قطرهایش با هم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است. چند مستطیل به طول قطر ۶ سانتی‌متر می‌توان رسم کرد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۴۸. چند متوازی‌الاضلاع با طول قطرهای ۴ و ۸ و یک ضلع به طول ۳ می‌توان رسم کرد؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۴۹. متوازی‌الاضلاعی به طول قطرهای ۸ و m و طول ضلع ۷ رسم می‌شود. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

۱) ۲۲ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۸

۵۰. می‌دانیم چندضلعی‌ای که قطرهایش عمودمنصف یکدیگر باشند، لوزی است. چند لوزی با طول قطرهای ۳ و ۵ می‌توان رسم کرد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) بی‌شمار ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) هیچ

۵۱. چند لوزی به طول ضلع ۴ و طول قطر ۹ می‌توان رسم کرد؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۵۲. در کدام مورد، رسم دو شکل متمایز غیرهم‌نهشت امکان‌پذیر نیست؟

۱) رسم یک متوازی‌الاضلاع به طول اضلاع ۳ و ۵ ۲) رسم یک لوزی به ضلع ۶

۳) رسم یک مربع به طول قطر ۴ ۴) رسم یک دایرهٔ گذرنده بر نقاط A و B

استدلال

ما انسان‌ها در زندگی روزمرهٔ خود دائماً به دنبال دلیل برای کارهای خود هستیم. در مواقعی به مسائل و مواردی برمی‌خوریم که از روی آن‌ها نتیجه‌گیری می‌کنیم. این‌که دلایل و نتیجه‌گیری‌های ما درست و منطقی باشد هم برای ما مهم است و هم برای اطرافیان ما، و مسلماً توسط این نتیجه‌گیری‌های درست و دلایل منطقی می‌توان با خیال راحت و بدون هیچ دغدغهٔ فکری به اهداف مورد نظر نزدیک‌تر شد.

به روش‌های نتیجه‌گیری، «استدلال» گفته می‌شود. در این درس به استدلال‌های مهم از جمله «استدلال استقرایی»، «استدلال استنتاجی»، «برهان خلف» و «استدلال با مثال نقض» خواهیم پرداخت.

استدلال استقرایی

در این نوع استدلال، با مشاهدات محدود و بررسی چند حالت از یک موضوع، یک نتیجهٔ کلی دربارهٔ آن موضوع گرفته می‌شود. در این نوع استدلال، به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم».

آرسام تعدادی چهارضلعی مشخص از جمله مربع، مستطیل و متوازی‌الاضلاع رسم کرده و با اندازه‌گیری مجموع زوایای داخلی آن‌ها به این نتیجه رسیده که «مجموع زوایای هر چهارضلعی برابر 360° است.» این‌که این جمله درست است یا نادرست، یک بحث جداست و این‌که این استدلال منطقی است و می‌توان به آن اعتماد کرد یک بحث دیگر؛ واقعیت این است که نمی‌توان به چنین نتیجه‌گیری‌هایی اتّکا کرد، چون ممکن است حالاتی وجود داشته باشد که این جمله نقض شود، اصولاً در استدلال استقرایی، نمی‌توان به درستی نتیجهٔ گرفته شده، اطمینان داشت.

استدلال استنتاجی

این نوع استدلال، برخلاف استدلال استقرایی، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی است که درستی آن‌ها را قبلاً اثبات کرده‌ایم.

توجه شما را به چند تعریف و قرارداد مهم جلب می‌کنم:

گزاره: به جمله‌ای خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد «گزاره» می‌گوییم. توجه داشته باشید درست یا نادرست بودن این جمله ممکن است برای ما معلوم نباشد.

این جملات گزاره نیستند:

چه طبیعت زیبایی! آیا فردا تعطیل است؟ آهسته رانندگی کن.

این جملات گزاره هستند:

اعداد ۳ و ۵ تنها دو عدد فرد متوالی و اول هستند.

مربع نوعی مستطیل است.

حاصلضرب عددی گویا در عددی گنگ همواره گنگ است.

◀ **گزاره‌ها بر دونوع‌اند:**

۱ **گزارهٔ ساده:** این گزاره فقط یک خبر را اعلام می‌کند.

۲ **گزارهٔ مرکب:** این گزاره بیش از یک خبر را اعلام می‌کند.

◀ **گزاره‌های زیر ساده‌اند:**

مربع نوعی لوزی است.

حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است.

◀ **گزاره‌های زیر مرکب‌اند:**

فردا تعطیل بوده و باران خواهد آمد.

در عدد طبیعی $\overline{ab}$، حاصل $a-b$ حداقل (۸−) و حاصل $a+b$ حداکثر ۱۸ است.

نقیض گزاره: به گزاره‌ای که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش یک گزاره است «نقیض گزاره» می‌گوییم.

به چند گزاره و نقیض آن‌ها توجه کنید:

گزاره: چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی‌اش °۳۶۰ است.

نقیض گزاره: چنین نیست که چهارضلعی‌ای وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی‌اش °۳۶۰ است.

(یا این‌که بگوییم) هیچ چهارضلعی‌ای وجود ندارد که مجموع زوایای داخلی‌اش °۳۶۰ باشد.

گزاره: هیچ مثلثی با بیش از یک زاویهٔ منفرجه وجود ندارد.

نقیض گزاره: چنین نیست که مثلثی با بیش از یک زاویهٔ منفرجه وجود نداشته باشد.

(یا این‌که بگوییم) مثلثی وجود دارد که بیش از یک زاویهٔ منفرجه دارد.

گزاره: x از y بزرگتر نیست.

نقیض گزاره: چنین نیست که x از y بزرگتر نباشد.

(یا این‌که بگوییم) x از y بزرگتر و یا با y برابر است.

◀ **گزاره‌های شرطی:** در بعضی از گزاره‌ها، به جای بیان یک خبر قطعی دربارهٔ چیزی، خبری اعلام می‌شود که با یک شرط همراه است؛ به چنین گزاره‌هایی «گزاره‌های شرطی» می‌گوییم.

به عنوان مثال «اگر تیم والیبال ایران در گروه خود سه بازی را ببرد، حتماً به مرحلهٔ نهایی مسابقات صعود می‌کند» یک گزارهٔ شرطی است.

◀ نتایج مهم و پرکاربرد که توسط استدلال استنتاجی بدست می‌آیند را «قضیه» می‌نامیم.

اصولاً در بیشتر مسائل هندسی (و ریاضی) از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم. در ادامه به تعدادی از قضایای مهم در همرسی خطوط و همچنین نامساوی‌هایی هندسی در مثلث که توسط استدلال استنتاجی بدست آمده‌اند می‌پردازیم.

◀ **عکس قضیه:** اگر در قضیه‌ای جای فرض و حکم را عوض کنیم، به آنچه که حاصل می‌شود «عکس قضیه» می‌گوییم که ممکن است درست یا نادرست باشد.

◀ به چند قضیه و عکس آن توجه کنید:

قضیه: در مثلثی که دو زاویهٔ برابر دارد، دو ضلع روبه‌روی آن دو زاویه با هم برابر هستند.

عکس قضیه: در مثلثی که دو ضلع برابر دارد، دو زاویهٔ روبه‌روی آن دو ضلع با هم برابر هستند.

قضیه: اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی، قطرها عمودمنصف یکدیگر باشند، آن‌گاه آن چهارضلعی، لوزی است.

قضیه: اگر $1 > a > 0$ باشد آن‌گاه $a^2 < 1$ ← (عکس قضیه) اگر $a^2 < 1$ باشد آن‌گاه $0 < a < 1$.

◀ **قضیهٔ دو شرطی:** به قضیه‌هایی که عکس آن‌ها نیز درست است «قضیهٔ دو شرطی» می‌گوییم.

قضیه‌های دوشرطی را می‌توان با نماد ⇔ (اگر و تنها اگر) بیان کرد. به قضایای دو شرطی زیر توجه کنید:

۱ در یک مثلث، دو ضلع باهم برابرند، اگر و تنها اگر ارتفاع نظیر آن دو ضلع باهم برابر باشند. $\overset{\triangle}{ABC}: a=b \Leftrightarrow h_a = h_b$

۲ مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اضلاع آن برقرار باشد.

$$\overset{\triangle}{ABC}: \hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

۳ قدرمطلق عدد a کوچک‌تر از ۱ است اگر و تنها اگر مجذور a کم‌تر از ۱ باشد. $|a| < 1 \Leftrightarrow a^2 < 1$

◀ قضایای دو شرطی را با عبارت (شرط لازم و کافی) نیز می‌توان بیان کرد. با این تفاوت که (شرط لازم و کافی) ابتدای جمله ولی (اگر و تنها اگر) وسط جمله می‌آیند.

برای مثال: شرط لازم و کافی برای اینکه مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ در رأس A قائمه باشد این است که: $a^2 = b^2 + c^2$

تا اینجا با دو استدلال مهم استقرایی و استنتاجی آشنا شدیم. می‌خواهیم دو استدلال مهم دیگر را معرفی کنیم.

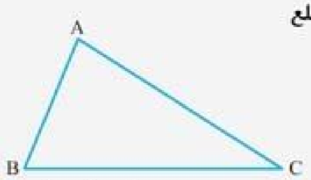
◀ **برهان خلف (برهان غیرمستقیم):** در این نوع استدلال، برخلاف استدلال استنتاجی به جای این‌که از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم که حکم درست نباشد (یعنی نقیض حکم درست باشد) و به یک تناقض (امر غیرممکن) می‌رسیم.

در واقع در این نوع استدلال، نشان می‌دهیم که چیزی به غیر از حکم نمی‌تواند درست باشد، زیرا در آن صورت به یک تناقض خواهد رسید.

به اصطلاح، این‌که فرض می‌کنیم حکم درست نباشد را «فرض خلف» می‌نامیم.

اگر یادتان باشد در بحث «نامساوی‌های هندسی مهم» دو قضیهٔ ۴ و ۵ را بیان کردیم. در اینجا می‌خواهیم قضیهٔ (۵) را در قالب یک مثال به روش برهان خلف اثبات کنیم.

مثال: با استفاده از برهان خلف نشان دهید که اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشد، ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگ‌تر؛ بزرگ‌تر است از ضلع مقابل به زاویهٔ کوچک‌تر.



■ **پاسخ:** فرض و حکم داده شده به صورت روبه‌رو است:

فرض	$\hat{B} > \hat{C}$
حکم	$AC > AB$

برای اثبات به روش برهان خلف به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(فرض خلف) فرض می‌کنیم که $AC > AB$ نباشد، یعنی: $AC = AB$ یا $AC < AB$

اگر $AC = AB$ باشد، آنگاه $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین بوده و داریم $\hat{B} = \hat{C}$؛ که با فرض $(\hat{B} > \hat{C})$ در تناقض است.

اگر $AC < AB$ باشد که طبق قضیهٔ (۴) در نامساوی‌های هندسی، باید $\hat{B} < \hat{C}$ باشد که باز هم با فرض در تناقض است.

پس طبق روش برهان خلف، نمی‌تواند نقیض حکم برقرار باشد و حتماً حکم $(AC > AB)$ درست است.

◀ کتاب درسی، ۲ تمرین مهم دارد که اثبات آن‌ها توسط برهان خلف، خالی از لطف نیست. این ۲ تمرین به صورت زیر هستند:

از یک نقطه خارج یک خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را قطع می‌کند. (به عنوان یک اصل می‌دانیم که «از هر نقطه خارج یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد.»

مثال نقض: هدف این نوع استدلال آن است که نادرستی یک حکم را نشان دهد.

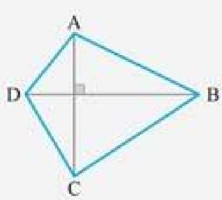
در بسیاری مواقع، یک گزاره که به صورت کلی بیان می‌شود دارای تناقض‌هایی است که توسط هر کدام از این تناقض‌ها می‌توان نشان داد که گزاره نادرست است.

به چند گزاره و مثال نقض آن‌ها توجه کنید:

گزاره: مربع هر عدد طبیعی از خود آن عدد بزرگ‌تر است. $\xrightarrow{\text{مثال نقض}: n=1} 1^2 = 1$

گزاره: حاصلضرب هر عدد گویا در هر عدد گنگ همواره گنگ است. $\xrightarrow{\text{مثال نقض: عدد گویای صفر}} 0 \times \sqrt{2} = 0$

گزاره: هر چهارضلعی که دو قطر هم‌اندازه و عمود برهم دارد، مربع است. $\Leftarrow$ مثال نقض:



◀ مثال نقض را با نقیض یک گزاره اشتباه نگیریم.

۵۳. در مورد استدلال استقرایی، کدام درست است؟

۱) همیشه از کل به جزء می‌رسیم.

۲) نمی‌توان همواره به درستی نتیجهٔ گرفته شده مطمئن بود.

۳) نشان می‌دهیم که نتیجهٔ حکم همواره صحیح است.

۴) براساس نتیجهٔ حکم همواره صحیح است.

۵۴. کدام یک از عبارات زیر یک گزاره نیست؟

۱) α یکی از حروف انگلیسی است.
۲) مولوی ریاضیدان است.

۳) ماهان پسر خوبی است.
۴) عدد ۵ زوج است.

۵۵. نقیض گزارهٔ « هیچ مربعی، ذوزنقه نیست.» کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۱) هر مربعی، ذوزنقه است.
۲) همهٔ مربع‌ها، ذوزنقه نیستند.

۳) مربعی وجود دارد که ذوزنقه نباشد.
۴) مربعی وجود دارد که ذوزنقه باشد.

۵۶. نقیض کدام گزاره، درست نوشته شده است؟

۱) گزاره: «هیچ مثلثی با مجموع زوایای 180° وجود ندارد.» - نقیض گزاره: «مجموع زوایای تمام مثلث‌ها 180° است.»

۲) گزاره: «هیچ مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه ندارد.» - نقیض گزاره: «مثلثی با دو زاویهٔ قائمه وجود دارد.»

۳) گزاره: «هر مربع، یک مستطیل است.» - نقیض گزاره: «هیچ مربعی مستطیل نیست.»

۴) گزاره: «مثلث متساوی‌الساقینی وجود دارد که متساوی‌الاضلاع نیست.» - نقیض گزاره: « تمام مثلث‌های متساوی‌الساقین، متساوی‌الاضلاع‌اند.»

۵۷. کدام یک از گزاره‌های زیر یک حکم کلی است؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) هر لوزی یک مربع است.
۲) برای هر دو مجموعهٔ A و B یا $A\subseteq B$ یا $B\subseteq A$

۳) هر مثلثی حداکثر یک زاویهٔ قائمه دارد.
۴) هر مستطیل یک مربع است.

۵۸. کدام یک از احکام کلی زیر درست است؟

۱) اگر a یک عدد گنگ باشد، عدد $a^{\sqrt{2}}$ نیز گنگ است.

۲) اگر a یک عدد گنگ باشد، آن‌گاه حداقل یکی از دو عدد $a+\sqrt{2}$ یا $a-\sqrt{2}$ گنگ است.

۳) اگر a یک عدد گنگ باشد، آن‌گاه $a-\frac{1}{a}$ نیز گنگ است.

۴) اگر a یک عدد گنگ باشد، به ازای تمام مقادیر حقیقی x، $\frac{a+x}{2a+1}$ نیز یک عدد گنگ است.

۵۹. کدام قضیه به صورت دو شرطی بیان نمی‌شود؟ (کنکور زیرخاکی)

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع و میانهٔ یک ضلع برهم منطبق‌اند.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف اضلاع بر روی وتر متقاطع‌اند.

۳) در مثلث قائم‌الزاویه یکی از میانه‌ها نصف وتر است.

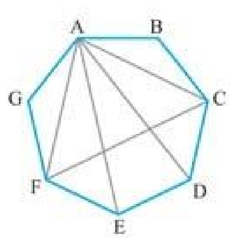
۴) در هر مثلث، ضلع مقابل به زاویهٔ 90° بزرگ‌ترین ضلع است.

۶۰. کدام یک از قضایای زیر دو شرطی است؟

۱) اگر $a>0$ و $b>c$ آنگاه $(ab>ac)$. $(a,b,c\in R)$
۲) برای هر عدد حقیقی مثبت x داریم: $x^2\ge x$.

۳) اگر $a\times b=0$ آنگاه $a=0$ یا $b=0$. $(a,b\in R)$
۴) اگر $|x+y|>|x|+|y|$ آنگاه $x\times y\le 0$. $(x,y\in R)$

۶۱. در هفت ضلعی منتظم روبه‌رو، حکم «با وصل‌کردن هر سه رأس از این شکل، یک مثلث متساوی‌الساقین به دست می‌آید.» را با کدام مثال نقض می‌توان رد کرد؟ (تمرین کتاب درسی)



۱) $\overset{\triangle}{ACF}$
۲) $\overset{\triangle}{ACD}$

۳) $\overset{\triangle}{ABC}$
۴) $\overset{\triangle}{ADE}$

۶۲. کدام یک از احکام کلی مثال نقض ندارد؟ (تمرین کتاب درسی)

۱) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

۲) در هر مثلث، اندازهٔ بزرگترین زاویه، از چهار برابر اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

۳) در هر مثلث، هر ارتفاع، از هر کدام از سه ضلع کوچک‌تر است.

۴) هر مثلثی حداقل ۲ زاویهٔ حاده دارد.

۶۳. کدام حکم تنها یک نقض دارد؟

۱) هر دو مثلث هم مساحت، هم‌نهشت هستند.

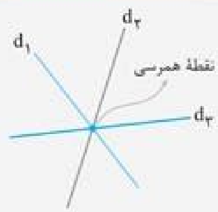
۲) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث یا درون آن است و یا بیرون آن.

۳) حاصل‌ضرب هر عدد صحیح در π عددی گنگ است.

۴) چند ضلعی‌ای که همهٔ زوایای آن با هم برابر است، اضلاعش نیز با هم برابر است.

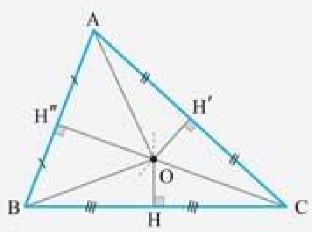
همرسی‌های خطوط مهم

◀ اگر سه یا بیش از سه خط از آن از یک نقطه عبور کنند، خطوط را همرس می‌نامیم.



قضیه: عمود منصّف‌های اضلاع یک مثلث همرس‌اند.

◀ **نقطه محل همرسی عمودمنصف‌ها از هر سه رأس مثلث به یک فاصله است.**

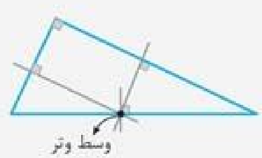


$$OA = OB = OC$$

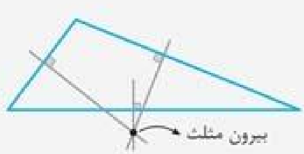
در ضمن، موقعیت نقطهٔ O نسبت به مثلث‌های ABC ، بسته به این‌که نوع مثلث حاده‌الزاویه، قائم‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه باشد با هم فرق دارد؛ نگاه کنید:

مثلث حاده‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه



مثلث منفرجه‌الزاویه



مثال: در یک مثلث، مجموع فاصله‌های نقطهٔ O، محل همرسی عمودمنصّف‌های اضلاع از سه رأس مثلث برابر ۲۷ است. اگر طول بزرگترین ضلع مثلث برابر ۱۴ باشد، فاصلهٔ O از این ضلع کدام است؟

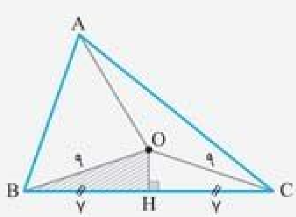
۱) $۲\sqrt{۵}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۵\sqrt{۲}$

■ **پاسخ:** این‌که نقطهٔ O درون مثلث یا بیرون آن باشد، تأثیری در جواب مسأله ندارد، پس فرض می‌کنیم که O درون $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد. می‌دانیم محل همرسی عمود منصّف‌های اضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس طبق فرض داریم:

$$OA + OB + OC = ۲۷ \Rightarrow OA = OB = OC = ۹$$

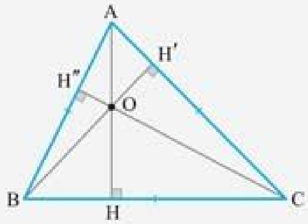
ضلع BC توسط عمود OH نصف می‌شود، پس $BH = HC = ۷$. توسط قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH، مقدار OH بدست می‌آید:



$$OH^۲ = OB^۲ - BH^۲ = ۹^۲ - ۷^۲ = ۳۲ \Rightarrow OH = ۴\sqrt{۲}$$

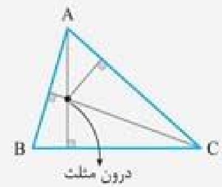
پس گزینهٔ «۲» درست است.

قضیه: ارتفاع‌های یک مثلث همرس‌اند.



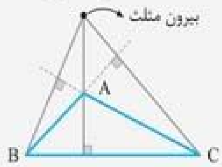
موقعیت نقطهٔ همرسی ارتفاع‌های $\overset{\triangle}{ABC}$، همانند نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع، بسته به نوع مثلث با هم فرق دارد. نگاه کنید.

مثلث حاده‌الزاویه



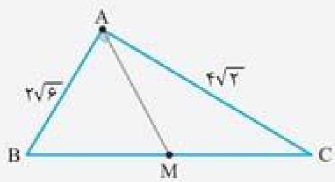
مثلث قائم‌الزاویه

مثلث منفرجه‌الزاویه



مثال: **در مثلث قائم‌الزاویه‌ای به طول اضلاع قائمهٔ $2\sqrt{6}$ و $4\sqrt{2}$ فاصلهٔ بین نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها و نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع چقدر است؟**

۱) $\sqrt{10}$ ۲) $2\sqrt{3}$ ۳) $\sqrt{14}$ ۴) ۴



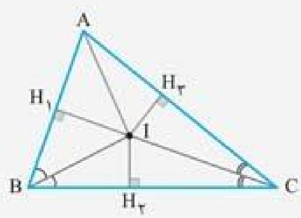
پاسخ: در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC؛ $(\hat{A}=90^\circ)$، رأس A و نقطهٔ M (وسط وتر BC) به ترتیب نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها و نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع هستند.

فاصلهٔ بین این دو نقطه همان طول میانهٔ وارد بر وتر BC است که برابر نصف وتر است، پس داریم:

قضیه‌ی فیثاغورس: $BC^2=(2\sqrt{6})^2+(4\sqrt{2})^2=56 \Rightarrow BC=2\sqrt{14} \Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=\sqrt{14}$

پس گزینهٔ «۳» درست است.

قضیه: نیمسازهای داخلی زوایای یک مثلث همرس‌اند.

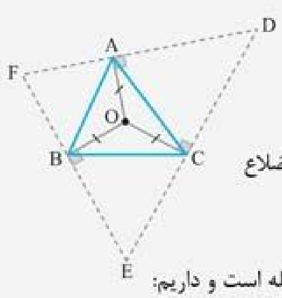


◀ محل همرسی نیمسازها از هر سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

$$OH_1=OH_2=OH_3$$

در ضمن؛ نقطهٔ I همواره درون مثلث ABC قرار می‌گیرد و به نوع مثلث وابسته نیست.

مثال: **رئوس مثلث ABC را به نقطهٔ O محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع آن وصل کرده‌ایم. از رأس‌های A ، B و C به ترتیب عمودهایی بر OA ، OB و OC خارج می‌کنیم تا از برخورد آن‌ها مثلث DEF حاصل می‌شود. نقطهٔ O برای مثلث DEF چه نقطه‌ای است؟**



۱) محل همرسی ارتفاع‌ها ۲) محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع

۳) محل همرسی نیمسازهای داخلی زوایا ۴) محل همرسی میانه‌های اضلاع

پاسخ: نقطهٔ O محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع $\overset{\triangle}{ABC}$ است، پس از سه رأس آن به یک فاصله است و داریم:

$$OA=OB=OC$$

باتوجه به شکل و رابطهٔ اخیر نتیجه می‌گیریم که نقطهٔ O از سه ضلع مثلث DEF به یک فاصله است؛ پس نقطهٔ O همان محل همرسی نیمسازهای داخلی زوایای مثلث DEF است.

پس گزینهٔ «۳» درست است.

۶۴. در مثلث ABC به اضلاع $AB = AC = ۵$ و $BC = ۸$، عمودمنصف‌های اضلاع در نقطهٔ O، خارج از مثلث، متقاطع‌اند. فاصلهٔ نقطهٔ O از رأس A چقدر است؟

۱) $\frac{۲۵}{۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۲۰}{۳}$

۶۵. نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلثی که زاویهٔ منفرجهٔ بین دو نیمساز داخلی آن ۱۳۵° است .... قرار دارد.

۱) خارج مثلث ۲) درون مثلث ۳) روی یکی از اضلاع ۴) بر یکی از رأس‌ها

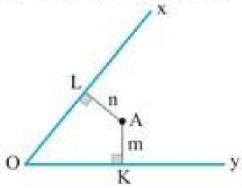
۶۶. در کدام مثلث با طول سه ضلع داده‌شده، محل تلاقی سه ارتفاع خارج مثلث است؟

۱) ۷ و ۸ و ۹ ۲) ۵ و ۶ و ۷ ۳) ۳ و ۴ و ۵ ۴) ۲ و ۳ و ۴

۶۷. در یک مثلث بین زوایا رابطهٔ $\hat{C} = \hat{A} + ۲\hat{B}$ برقرار است. محل تلاقی سه ارتفاع کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث ۲) روی محیط مثلث ۳) خارج مثلث ۴) هر سه حالت ممکن است.

۶۸. از نقطهٔ A درون زاویهٔ حادهٔ xoy عمودهای $AK = m$ و $AL = n$ را رسم کرده‌ایم. اگر امتداد AK و AL، اضلاع این زاویه را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کند، آنگاه PQ و امتداد OA نسبت به هم چه وضعی دارند؟



۱) OA از وسط PQ می‌گذرد.

۲) OA، پاره خط PQ را نسبت به $\frac{m}{n}$ قطع می‌کند.

۳) OA بر PQ عمود است.

۴) OA عمودمنصف PQ است.

۶۹. در صفحهٔ یک مثلث، چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد؟ (تجربی ۸۰)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۷۰. اگر در مثلث ABC، $\hat{A} > \hat{B} + \hat{C}$ باشد، کدام یک نادرست است؟

۱) نقطهٔ همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث است.
۲) نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی زوایا درون مثلث است.
۳) نقطهٔ همرسی میانه‌های اضلاع درون مثلث است.
۴) نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع روی یکی از اضلاع است.

۷۱. نیمسازهای خارجی زوایای مثلث ABC، تشکیل مثلث DEF را می‌دهند و نقطهٔ همرسی .... مثلث DEF بر نقطهٔ همرسی .... مثلث ABC منطبق است.

۱) نیمسازهای داخلی- عمودمنصف‌های اضلاع
۲) ارتفاع‌های – نیمسازهای داخلی
۳) عمودمنصف‌های اضلاع – ارتفاع‌های
۴) عمودمنصف‌های اضلاع – نیمسازهای داخلی

۷۲. در مثلث ABC نیمسازهای خارجی زوایای B و C در نقطهٔ K متقاطع‌اند. از رأس A بر این دو نیمساز، خط‌های عمود رسم می‌کنیم تا امتداد BC را به ترتیب در D و E قطع کنند. نقطهٔ K روی کدام جزء مثلث ADE است؟

۱) نیمسازداخلی زاویهٔ A ۲) عمودمنصف ضلع DE ۳) نیمساز خارجی زاویهٔ D ۴) میانهٔ نظیر ضلع DE

۷۳. در درون مثلثی به طول اضلاع ۱۳ و ۱۳ و ۱۰، نقطه‌ای از سه ضلع آن به یک فاصله است. اندازهٔ این فاصله چقدر است؟

۱) ۱/۵ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰}{۳}$ ۴) ۲/۵

۷۴. در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ اضلاع قائم ۳ و ۴ واحد است. فاصلهٔ دورترین رأس این مثلث، از نقطهٔ تلاقی نیمسازهای داخلی آن کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۸)

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۱۰}$ ۴) $۳\sqrt{۲}$

۷۵. در مثلثی به اضلاع ۱۰، ۱۰، ۱۲، نقطهٔ همرسی نیمسازهای داخلی از نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع چه فاصله‌ای دارد؟

۱) ۱/۲۵ ۲) ۱/۵۶ ۳) ۲/۱۶ ۴) ۲/۲۵

۷۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به طول وتر $۲\sqrt{۲}$، نقطهٔ همرسی نیمسازها چه فاصله‌ای از نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع دارد؟

۱) $\sqrt{۲} - ۱$ ۲) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ ۳) $۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $۲ - \sqrt{۲}$

۷۷. از نقطهٔ D پای نیمساز AD در مثلث ABC دو عمود به اضلاع AB، AC وارد می‌کنیم. نسبت $\frac{DE}{DF}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) بستگی به نوع مثلث ABC دارد.

۷۸. در مثلث ABC داریم $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$. نیمساز داخلی زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC در نقطهٔ M متقاطعند. زاویهٔ MBC چند درجه است؟ (ریاضی خارج ۸۹)

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۳۵ ۴) ۴۰

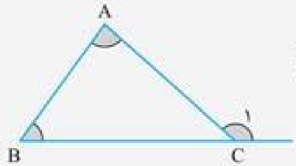
۷۹. در مثلثی $\hat{A} = ۸۰^\circ$ و $\hat{B} = ۶۰^\circ$. زاویهٔ بین نیمساز زاویهٔ A و عمودمنصف ضلع BC چند درجه است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۰ ۳) ۵ ۴) ۲۰

نامساوی‌های هندسی

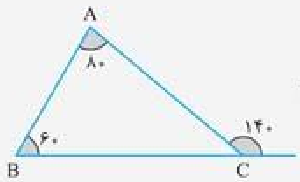
در ابتدای فصل، موقعی که رسم مثلث را توضیح دادیم به یک نامساوی مهم بین طول اضلاع یک مثلث اشاره کردیم. این نامساوی که شرط وجود مثلث را بیان می‌کرد به این صورت بیان می‌شد «اندازه هر ضلع مثلث از مجموع طول دو ضلع دیگر کوچکتر است.» حال به بیان چند قضیه دیگر می‌پردازیم:

قضیه: اندازه هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگتر است.



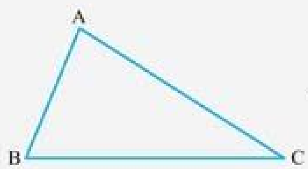
$\widehat{C_1} > \widehat{A}\ ,\ \widehat{C_1} > \hat{B}$

به طور مثال در مثلث روبه‌رو:



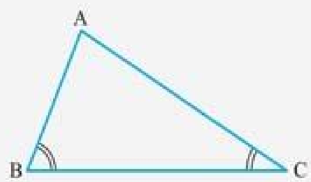
$۱۴۰° > ۸۰°\ ,\ ۱۴۰° > ۶۰°$

قضیه: در یک مثلث با دو ضلع نابرابر، زاویه بزرگتر روبه‌روی ضلع بزرگتر قرار دارد.



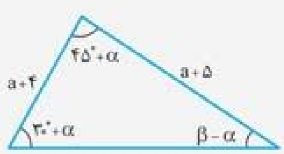
فرض: $AC > AB \Rightarrow$ حکم: $\hat{B} > \hat{C}$

◄ عکس قضیه قبل نیز برقرار است و به صورت زیر بیان می‌شود:



فرض: $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow$ حکم: $AC > AB$

مثال: باتوجه به شکل، کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟



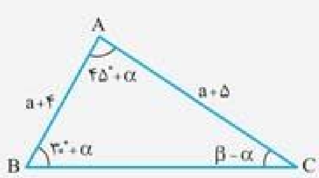
۱) $\alpha > ۲۵°$ ۲) $\beta > \alpha + ۴۰°$

۳) $\beta < \alpha + ۵۵°$ ۴) $\beta < ۸۰°$

پاسخ: قبل از هرچیزی، مجموع زوایای داخلی $\overset{\triangle}{ABC}$ را می‌نویسیم:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = (۴۵° + \alpha) + (۳۰° + \alpha) + (\beta - \alpha) = ۱۸۰° \Rightarrow \alpha + \beta = ۱۰۵°$$

چون $AC > AB$ است، پس طبق قضیهٔ (۴) باید $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، یعنی:



گزینهٔ ۱: $۳۰° + \alpha > \beta - \alpha \Rightarrow ۳۰° + ۲\alpha > \beta \xrightarrow{+\alpha} ۳۰° + ۳\alpha > \underbrace{\alpha + \beta}_{۱۰۵°}$

$$\Rightarrow ۳\alpha > ۷۵° \Rightarrow \alpha > ۲۵°$$

گزینهٔ ۴: از $\alpha > ۲۵°$ و $\alpha + \beta = ۱۰۵°$ نتیجه می‌شود که $\beta < ۸۰°$. همچنین از $\alpha > ۲۵°$ و $\beta < ۸۰°$ می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

گزینهٔ ۳:

$$\begin{cases} \beta < ۸۰° \\ \alpha > ۲۵° \Rightarrow -\alpha < -۲۵° \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \beta - \alpha < \underbrace{۸۰° - ۲۵°}_{۵۵°} \Rightarrow \beta < \alpha + ۵۵°$$

همانطور که دیدید در قضایای (۴) و (۵) جای فرض و حکم عوض شده است. باتوجه به این موضوع، دو مفهوم جدید را معرفی می‌کنیم.

پس گزینهٔ «۲» درست است.

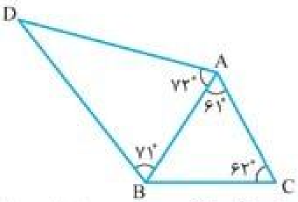
مثال: در هر مثلث دلخواه ثابت کنید که طول بزرگ‌ترین ضلع از $\frac{۱}{۳}$ محیط بزرگ‌تر یا مساوی بوده و از نصف محیط کوچک‌تر است.

پاسخ: فرض می‌کنیم که ترتیب اضلاع مثلث به صورت $a \ge b \ge c$ باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{cases} a \ge a \\ a \ge b \\ a \ge c \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۳a \ge \underbrace{a+b+c}_{\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow a \ge \frac{۱}{۳}(\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC})$$

اندازهٔ اضلاع مثلث در شرط وجود مثلث صدق می‌کنند، پس داریم:

$$a < b + c \xrightarrow{+a} ۲a < \underbrace{a+b+c}_{\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC}} \Rightarrow a < \frac{۱}{۲}(\text{محیط } \overset{\Delta}{ABC})$$



۸۰. در شکل روبه‌رو، کوچک‌ترین پاره‌خط کدام است؟

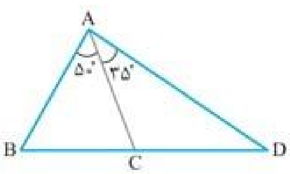
۱) AB
۲) BC
۳) AC
۴) AD

۸۱. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره صحیح است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) $AB > AD$ ۲) $DA > DB$ ۳) $DB > AD$ ۴) $AB > DB$

۸۲. در مثلث ABC، میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نامساوی همواره درست است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $AM < BC$ ۲) $AM < AB$ ۳) $AD < AB$ ۴) $AD < AM$

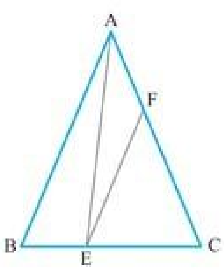


۸۳. در شکل روبه‌رو $AB = AC$ است. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟

۱) $AD > AB$
۲) $CD > BC$
۳) $AB > CD$
۴) $AC > BC$

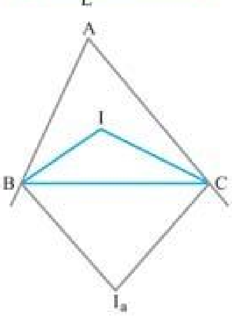
۸۴. در مثلث ABC، $\hat{A} > \hat{C}$ و نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع AB در نقطهٔ D متقاطع‌اند. N,M پای عمودهایی است که از نقطهٔ D به ترتیب BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $NC > NB$ ۲) $NC < NB$ ۳) $DA > DC$ ۴) $AM < BN$



۸۵. در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، نقطهٔ E واقع بر قاعدهٔ BC و به رأس B نزدیک‌تر از رأس C است. اگر EF موازی ضلع AB باشد، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $AF > FC$
۲) $AF < EF$
۳) $AE > AC$
۴) $AF = EF$



۸۶. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۶۰°$ و $\hat{B} > \hat{C}$ است. اگر نیمسازهای داخلی زاوایای B و C در نقطهٔ I و همچنین نیمسازهای خارجی آن‌ها در نقطهٔ I_a متقاطع باشند، کدام نتیجه‌گیری درست است؟

۱) $BI > CI$
۲) $BI_a > CI_a$
۳) $AB > BC$
۴) $AB > AC$

۸۷. در مثلث ABC داریم: $b = ۱۱$ و $c = ۷$ و $\hat{A} < \hat{C}$؛ اندازهٔ ضلع a چند مقدار طبیعی می‌تواند باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۸. در چهارضلعی ABCD، AB و CD به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع هستند. کدام نابرابری همواره درست است؟

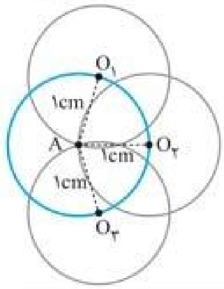
۱) $\hat{A} > \hat{C}$ ۲) $\hat{A} < \hat{B}$ ۳) $\hat{C} < \hat{D}$ ۴) $\hat{B} < \hat{D}$

پاسخ‌نامهٔ کلیدی

۱.	۳	۱۶.	۱	۳۱.	۲	۴۶.	۴	۶۱.	۲	۷۶.	۴
۲.	۱	۱۷.	۳	۳۲.	۱	۴۷.	۴	۶۲.	۴	۷۷.	۲
۳.	۱	۱۸.	۴	۳۳.	۲	۴۸.	۲	۶۳.	۳	۷۸.	۳
۴.	۲	۱۹.	۳	۳۴.	۳	۴۹.	۱	۶۴.	۲	۷۹.	۲
۵.	۳	۲۰.	۴	۳۵.	۱	۵۰.	۲	۶۵.	۳	۸۰.	۳
۶.	۲	۲۱.	۱	۳۶.	۲	۵۱.	۳	۶۶.	۴	۸۱.	۴
۷.	۳	۲۲.	۴	۳۷.	۳	۵۲.	۳	۶۷.	۳	۸۲.	۴
۸.	۱	۲۳.	۱	۳۸.	۱	۵۳.	۲	۶۸.	۳	۸۳.	۳
۹.	۳	۲۴.	۲	۳۹.	۴	۵۴.	۳	۶۹.	۱	۸۴.	۱
۱۰.	۲	۲۵.	۲	۴۰.	۳	۵۵.	۴	۷۰.	۴	۸۵.	۲
۱۱.	۲	۲۶.	۴	۴۱.	۲	۵۶.	۴	۷۱.	۲	۸۶.	۲
۱۲.	۴	۲۷.	۲	۴۲.	۳	۵۷.	۳	۷۲.	۲	۸۷.	۱
۱۳.	۴	۲۸.	۱	۴۳.	۱	۵۸.	۲	۷۳.	۳	۸۸.	۴
۱۴.	۴	۲۹.	۴	۴۴.	۳	۵۹.	۴	۷۴.	۳		
۱۵.	۲	۳۰.	۱	۴۵.	۳	۶۰.	۳	۷۵.	۱		

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

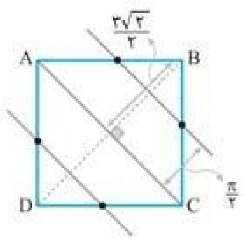
۱.



می‌دانیم که مرکز دایره از تمام نقاط روی محیط آن به فاصلهٔ ثابت R (شعاع دایره) قرار دارد.
مرکز دایره‌هایی به شعاع $R=۱cm$ که از نقطهٔ A می‌گذرند، فاصله‌شان از نقطهٔ A برابر مقدار ثابت ۱cm است.
پس تمام این مرکز دایره‌ها روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱cm (یا همان قطر ۲cm) قرار خواهند داشت.

۲.

ضلع مربع برابر $a=۳$ داده شده، پس طول قطرهای آن برابر $a\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲}$ است.
می‌دانیم قطرهای مربع بر هم عمود و همدیگر را نصف می‌کنند، پس فاصلهٔ B و D از قطر AC برابر $\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ است.



از طرفی، نقاط به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}$ از قطر AC، روی دو خط موازی در طرفین آن و به فاصلهٔ $\frac{\pi}{۲}$ از آن قرار دارند. این دو خط، قطعاً قطر BD را قطع می‌کنند، زیرا داریم:

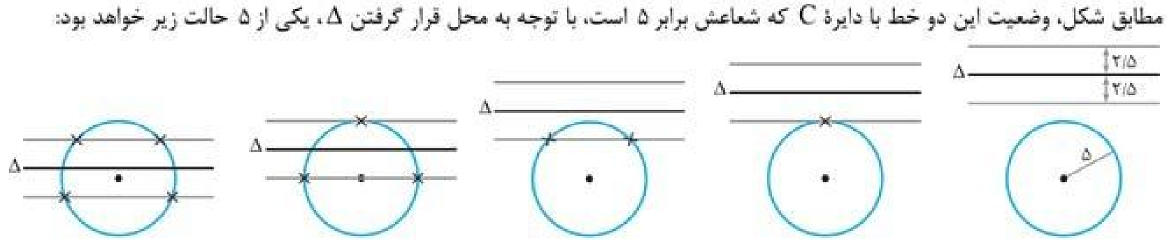
نکته: نقاطی که از خط مفروض Δ به فاصلهٔ ثابت h قرار دارند، مطابق شکل روی دو خط موازی Δ (در طرفین آن) و به فاصلهٔ h از Δ قرار دارند.

$$\underbrace{\frac{\pi}{۲}}_{\text{کمتر از ۲}} < \underbrace{\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}}_{\text{بیشتر از ۲}}$$

پس مطابق شکل، تقاطع این دو خط با محیط مربع، ۴ نقطه خواهد شد که فاصلهٔ هر کدام از آن‌ها از قطر AC برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۳.

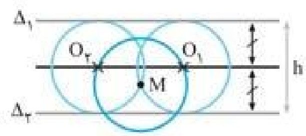
می‌دانیم که نقاط به فاصلهٔ ۲/۵ از خط Δ روی دو خط موازی با آن و به فاصلهٔ ۲/۵ از آن قرار دارند.
مطابق شکل، وضعیت این دو خط با دایرهٔ C که شعاعش برابر ۵ است، با توجه به محل قرار گرفتن Δ، یکی از ۵ حالت زیر خواهد بود:



هیچ نقطه | ۱ نقطه | ۲ نقطه | ۳ نقطه | ۴ نقطه

در بهترین حالت، این دو خط موازی، با دایرهٔ C، ۴ نقطهٔ برخورد خواهد داشت که حداکثر مقدار ممکن است.

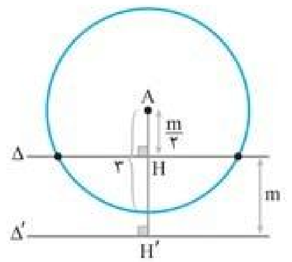
۴.



خُب، مرکز دایره‌های مماس بر دو خط موازی Δ_1 و Δ_2 روی خطی موازی Δ_1 و Δ_2 و به فاصلهٔ مساوی از آن دو خط قرار دارد، ولی توجه کنید که شعاع این دایره‌ها برابر با نصف فاصلهٔ Δ_1 و Δ_2 از یکدیگر است.
پس این دایره‌ها که از نقطهٔ M می‌گذرند شعاعشان برابر نصف فاصلهٔ Δ_1 و Δ_2 از هم است، لذا به مرکز M و شعاع مورد نظر دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط مذکور را قطع کند. خط و دایره حداکثر ۲ نقطه برخورد دارند.

نکته: مرکز دایره‌هایی که بر دو خط موازی d و d′ مماس است روی خطی بین d و d′، موازی آنها و به فاصلهٔ مساوی از هر دو خط قرار دارد.

۵.



مطابق شکل و فرض سؤال، دایرهٔ به شعاع ۳، خط Δ را در دو نقطه قطع کرده ولی خط Δ' را قطع نکرده است و فقط در این حالت است که دقیقاً ۲ نقطه روی Δ و Δ' به فاصلهٔ ۳ از A قرار خواهد گرفت.
باتوجه به شکل باید داشته باشیم:

$$AH < R < AH' \Rightarrow \frac{m}{۲} < ۳ < \underbrace{\frac{m}{۲}+m}_{\frac{۳m}{۲}} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{۲} < ۳ \to m < ۶ \\ \frac{۳m}{۲} > ۳ \to m > ۲ \end{cases} \Rightarrow ۲ < m < ۶$$

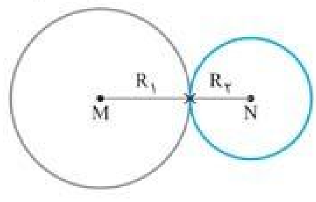
پس عددی برای m قابل قبول است که بیشتر از ۲ و کمتر از ۶ باشد و در بین گزینه‌ها تنها عدد ۴/۵ می‌تواند باشد.

۶.

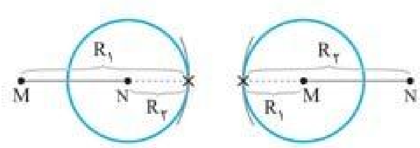
باید دایره‌ای به مرکز M و شعاع $R_۱ = m+۱$ و دایره‌ای به مرکز N و شعاع $R_۲ = ۳m-۲$ رسم کنیم. طبق فرض، این دایره‌ها باید فقط در یک نقطه مشترک باشند که یکی از ۲ حالت زیر ممکن است اتفاق بیافتد:

(الف $MN = R_۱ + R_۲ \Rightarrow ۷ = ۴m - ۱ \Rightarrow m = ۲$

(ب $\begin{cases} MN = R_۱ - R_۲ \\ MN = R_۲ - R_۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۷ = ۳ - ۲m \Rightarrow m = -۲ \text{ (غ ق ق)} \\ ۷ = ۲m - ۳ \Rightarrow m = ۵ \end{cases}$



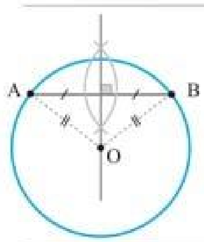
دو دایره از بیرون بر هم مماسند.



دو دایره از درون بر هم مماسند.

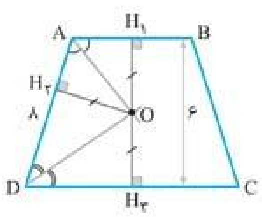
توجه: حالت دوم را می‌توانستیم به صورت کلی $MN = |R_۱ - R_۲|$ بنویسیم و آن را به صورت یک معادلهٔ قدر مطلقی حل کنیم. پس m هر یک از دو مقدار ۲ و ۵ را می‌تواند بپذیرد.

۷.



می‌دانیم که در هر دایره، عمودمنصف هر وتر دلخواه از مرکز آن دایره می‌گذرد. پس برای به‌دست آوردن مرکز دایرهٔ گذرا از دو نقطهٔ ثابت A و B، عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم؛ هر نقطه روی این خط عمودمنصف می‌تواند به عنوان مرکز دایره‌ای انتخاب شود که از نقاط ثابت A و B می‌گذرد.

۸.



می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دوضلع آن زاویه به یک فاصله است. پس اگر مطابق شکل، نیمسازهای داخلی زوایای A و D (مجاور ساق AD) در نقطهٔ O متقاطع باشند، آنگاه می‌توان نتیجه گرفت که:

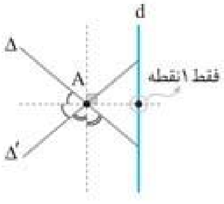
$$\begin{cases} \hat{A} \text{ روی نیمساز}: OH_۱ = OH_۲ \\ \hat{D} \text{ روی نیمساز}: OH_۲ = OH_۳ \end{cases} \Rightarrow OH_۱ = OH_۲ = OH_۳ = \frac{H_۱H_۳}{۲} = ۳$$

پس رأس O به فاصلهٔ یکسان ۳ از دو قاعدهٔ AB و CD و ساق AD قرار دارد.

مساحت مثلث OAD برابر می‌شود با:

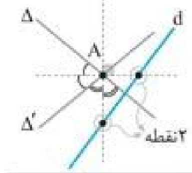
$$S_{\overset{\triangle}{OAD}} = \frac{۱}{۲} OH_۲ \times AD = \frac{۱}{۲}(۳ \times ۸) = ۱۲$$

۹.



طبق صورت سؤال، خط d از نقطهٔ تقاطع دو خط Δ و Δ' (نقطهٔ A) نمی‌گذرد.
نقاطی که از دو خط Δ و Δ' به یک فاصله‌اند روی نیمسازهای زاویهٔ بین Δ و Δ' (زاویهٔ رأس A) قرار دارند. برای خط d و این دو نیمساز مورد نظر (که بر هم عمودند) یکی از دو حالت زیر ممکن است به‌وجود آید:

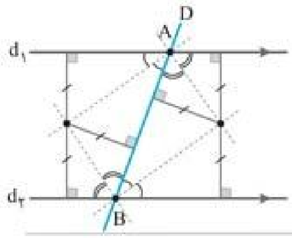
الف: اگر خط d با یکی از این دو نیمساز موازی باشد؛ در این حالت مطابق شکل، خط d فقط یک نقطهٔ تقاطع با آنها دارد؛ یعنی این‌که فقط یک نقطه روی d به فاصلهٔ یکسان Δ و Δ' قرار دارد.



ب: خط d با هیچ‌کدام از این دو نیمساز موازی نباشد؛ در این حالت مطابق شکل، خط d هر دو نیمساز را قطع می‌کند، یعنی این‌که دو نقطه روی d به فاصلهٔ یکسان از Δ و Δ' قرار دارند.
پس حداکثر ۲ نقطه با شرط مورد نظر وجود دارد.

---

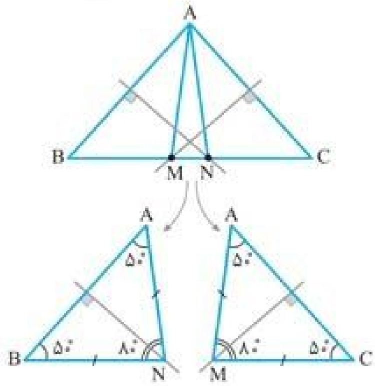
۱۰. ۴ ۳ **۲** ۱



نقاط تقاطع خط D با دو خط موازی d_1 و d_2 را A و B می‌نامیم.
برای به‌دست آوردن نقاط به فاصله‌های مساوی از سه خط d_1 و d_2 و D کافیست نیمسازهای زاویه‌های به وجود آمده در رأس‌های A و B را رسم کنیم.
همانطور که می‌بینید از برخورد این نیمسازها، ۲ نقطه به‌دست می‌آید که این دو نقطه، همان نقاطی هستند که فاصله‌شان از خطوط d_1 و d_2 و D یکسان است.

---

۱۱. ۴ ۳ **۲** ۱



مطابق شکل، مثلث اصلی را به دو مثلث MAC و NAB تفکیک کرده‌ایم.
ویژگی عمودمنصف این است که هر نقطه روی آن، از دو سر پاره خط به یک فاصله است، پس هر یک از دو مثلث MAC و NAB در رأس‌های M و N متساوی‌الساقین هستند.

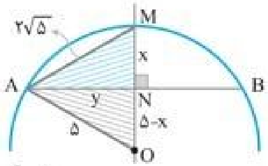
$$MA = MC$$
$$NA = NB$$

در مثلث ABC، زاویهٔ رأس برابر $\hat{A} = ۸۰^\circ$ است، پس هر یک از زاویه‌های مجاور قاعده برابر $۵۰^\circ = \frac{۱۸۰^\circ - ۸۰^\circ}{۲}$ خواهد بود.
با جایگذاری زوایای $\hat{B} = \hat{C} = ۵۰^\circ$ در دو مثلث MAC و NAB زاویه‌های M و N برابر با مقدار مساوی ۸۰° به‌دست می‌آید. پس در مثلث AMN، زاویهٔ A برابر می‌شود با:

$$M\hat{A}N = ۱۸۰^\circ - ۲(۸۰^\circ) = ۲۰^\circ$$

---

۱۲. **۴** ۳ ۲ ۱



می‌دانیم که مرکز دایره (نقطهٔ O) روی عمودمنصف وتر AB قرار دارد.
فاصلهٔ O از نقاط A و M برابر است با شعاع دایره، یعنی ۵.
فاصلهٔ M از N که مطلوب سؤال است را x در نظر می‌گیریم. اگر AN = y باشد، آنگاه با نوشتن قضیهٔ فیثاغورس در مثلث‌های OAN و ANM مقدار x به‌دست می‌آید:

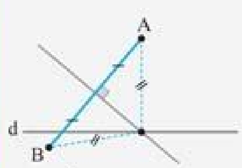
$$\begin{cases} \overset{\triangle}{OAN}: ۵^۲ = y^۲ + (۵-x)^۲ \\ \overset{\triangle}{ABM}: (۲\sqrt{۵})^۲ = y^۲ + x^۲ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \underbrace{۲۵ - ۲۰}_{۵} = \underbrace{(۵-x)^۲ - x^۲}_{(۵-۲x)(۵)} \Rightarrow ۵ - ۲x = ۱ \Rightarrow x = ۲$$

---

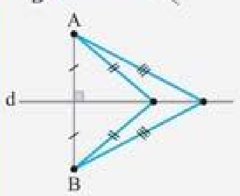
۱۳. **۴** ۳ ۲ ۱

راهبرد ۱

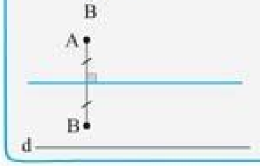
دو نقطهٔ A و B و خط d را در نظر بگیرید. برای یافتن نقطه‌ای روی خط d که به فاصلهٔ یکسان A و B باشد، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سه حالت ممکن است پیش بیاید:



الف: عمودمنصف پاره‌خط AB و خط d متقاطع باشند؛ در این حالت مطابق شکل، فقط یک نقطه روی خط d وجود دارد که فاصلهٔ یکسانی از نقاط A و B قرار دارد. (۱ نقطه)



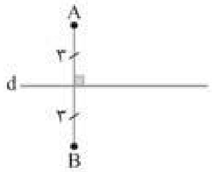
ب: عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d منطبق باشد؛ در این حالت مطابق شکل، خط d همان عمودمنصف پاره‌خط AB است و هر نقطه روی خط d به فاصلهٔ یکسانی قرار دارد. (بیشمار نقطه)



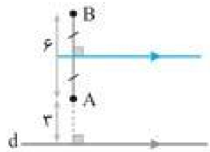
پ: عمودمنصف پاره‌خط AB با خط d موازی (غیرمنطبق) باشد؛ در این حالت مطابق شکل، هیچ نقطه‌ای روی خط d به فاصلهٔ یکسان از A و B وجود ندارد. (هیچ نقطه‌ای)

طبق صورت سؤال، هیچ نقطه‌ای روی خط d به فاصلهٔ یکسان از نقاط A و B وجود ندارد، پس عمودمنصف پاره‌خط AB باید موازی (غیرمنطبق) با خط d باشد؛ به بیان دیگر، پاره‌خط AB (و یا امتدادش) باید بر خط d عمود باشد. طبق فرض، A به فاصلهٔ ۳ از خط d و به فاصلهٔ ۶ از نقطهٔ B است.

دو حالت ممکن است پیش بیاید:

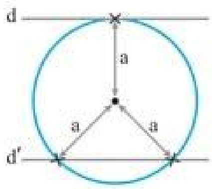


حالت اول: مطابق شکل، A و B در طرفین خط d و هر کدام به فاصلهٔ ۳ واحد از آن طوری قرار گیرد که AB بر d عمود باشد؛ ولی این حالت؛ قبول نیست، زیرا d همان عمودمنصف AB خواهد بود و در آن صورت همهٔ نقاط روی d از A و B به یک فاصله‌اند.



حالت دوم: مطابق شکل، A و B در یک طرف خط d طوری قرار گیرند که امتداد AB بر d عمود باشد؛ در این حالت، عمودمنصف پاره خط AB موازی d بوده و هیچ نقطهٔ تقاطعی با آن ندارد. مطابق شکل، فاصلهٔ نقطهٔ B از خط d برابر ۹ می‌شود.

۱۴. ۳ ۲ ۱



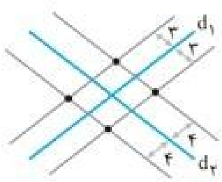
ادّعا می‌کنیم که a هر مقداری از محدودهٔ $۸ > a > \frac{۸}{۲}$ می‌تواند باشد.

فرض می‌کنیم نقطهٔ متغیر A به خط d' نزدیک‌تر باشد تا به خط d، یا به عبارتی از خط d دورتر باشد.

فاصله از خط دورتر (یعنی خط d) را برابر a می‌گیریم. اگر مطابق شکل، به مرکز A و شعاع a یک دایره رسم کنیم، این دایره بر خط d مماس بوده و خط d' را در دو نقطه قطع می‌کند که این ۳ نقطه روی این دو خط به فاصلهٔ a از نقطهٔ A قرار دارند.

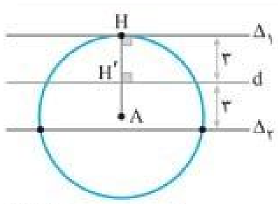
مقدار a از نصف فاصلهٔ بین دو خط موازی d و d' بیشتر است، یعنی $a > \frac{۸}{۲}$؛ همچنین از فاصلهٔ بین d و d' کمتر است، یعنی $a < ۸$.

۱۵. ۴ ۳ ۱



نقاط به فاصلهٔ ۳ از خط d_1 روی دو خط موازی d_1 و به فاصلهٔ ۳ از آن قرار دارند. به طریق مشابه، نقاط به فاصلهٔ ۴ از خط d_2 روی دو خط موازی d_2 و به فاصلهٔ ۴ از آن قرار خواهند داشت. مطابق شکل از تقاطع این دو جفت خط موازی؛ ۴ نقطه به‌دست می‌آید که هر کدام از آن‌ها به فاصلهٔ ۳ از خط d_1 و به فاصلهٔ ۴ از خط d_2 قرار دارند.

۱۶. ۴ ۳ ۲



نقاط به فاصلهٔ ۵ از نقطهٔ A، با رسم دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۵ به‌دست می‌آید. همچنین نقاط به فاصلهٔ ۳ از خط d، روی دو خط موازی با d و به فاصلهٔ ۳ از آن قرار دارد.

باتوجه به صورت سؤال، این دایره و دو خط موازی باید سه نقطهٔ مشترک داشته باشد؛ و در صورتی این اتفاق می‌افتد که مطابق شکل، دایره بر یکی از دو خط، مماس و با دیگری متقاطع باشد و داریم:

$$\begin{cases} AH = ۵ & \text{شعاع دایره:} \\ HH' = ۳ \end{cases} \Rightarrow AH' = AH - HH' = ۲$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۲ است.

۱۷. ۴ ۲ ۱

مجموعه نقاطی که به فاصلهٔ ۴ واحد از A و B قرار دارند. دو دایره به مراکز A و B و به شعاع ۴ می‌باشد. با توجه به اینکه فاصلهٔ نقاط A و B ۱۰ واحد است، هیچ نقطه مشترکی وجود ندارد که از A و B به فاصلهٔ ۴ باشد. $(r < \frac{L}{۲})$

۱۸. ۳ ۲ ۱

در صورتی دو نقطه به فاصلهٔ معلوم از دو نقطهٔ O و O' وجود دارد که دو دایره به مراکز O و O' و به شعاع $x + ۱$ با یکدیگر متقاطع باشند.

بنابراین:

$$r > \frac{L}{۲} \Rightarrow x + ۱ > \frac{۳x - ۲}{۲} \Rightarrow ۲x + ۲ > ۳x - ۲ \Rightarrow ۴ > x$$

۱۹.

راهبرد ۲

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ d از یکدیگر قرار گرفته‌اند. مجموعه نقاطی که به فاصلهٔ R از A و به فاصلهٔ r از B باشد، دو دایره به مراکز A و B و به شعاع‌های R و r می‌باشند. وضعیت قرارگیری دو دایره را بررسی می‌کنیم:

① **دو دایره متقاطع‌اند:** $R+r>d$

۲ نقطه به فاصلهٔ مشخص از A و B وجود دارد.

② **دو دایره مماس خارج‌اند:** $R+r=d$

۱ نقطه به فاصلهٔ مشخص از A و B وجود دارد.

③ **دو دایره مماس داخل‌اند:** $|R-r|=d$

۱ نقطه به فاصلهٔ مشخص از A و B وجود دارد.

④ **دو دایره متخارج‌اند:** $R+r<d$

هیچ نقطه به فاصلهٔ یکسان از A و B وجود ندارد.

پس در این سؤال که فقط یک نقطه به فاصلهٔ مشخص از A و B قرار دارد، حالت مماس خارج و مماس داخل می‌تواند باشد.

در این حالت فاصلهٔ دو مرکز دایره برابر مجموع شعاع دایره‌هاست.

① **مماس خارج:** $d=r+R \Rightarrow (۵x-۱)=(۳x)+(x+۴) \Rightarrow ۵x-۱=۴x+۴ \Rightarrow x=۵$

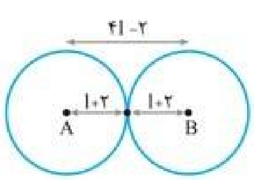
② **مماس داخل:** در این حالت قدرمطلق تفاضل شعاع‌ها برابر فاصلهٔ بین دو مرکز دایره است.

$$d=|R-r| \Rightarrow ۵x-۱=|۳x-(x+۴)| \Rightarrow ۵x-۱=|۲x-۴| \Rightarrow \begin{cases} ۵x-۱=۲x-۴ \Rightarrow ۳x=-۳ \Rightarrow x=-۱ \text{ غ ق ق} \\ ۵x-۱=۴-۲x \Rightarrow ۷x=۵ \Rightarrow x=\frac{۵}{۷} \checkmark \end{cases}$$

پس x می‌تواند برابر ۵ و $\frac{۵}{۷}$ باشد.

۲۰.

برای اینکه فقط یک نقطه به فاصلهٔ مشخص از دو نقطهٔ A و B وجود داشته باشد، باید دو دایره به مراکز A و B مماس خارج باشند، بنابراین:



$$۴l-۲=l+۲+l+۲ \Rightarrow ۴l-۲=۲l+۴$$
$$۲l=۶ \Rightarrow l=۳$$

۲۱.

قبل از هر چیز، باید طول اضلاع مثبت باشد، یعنی:

$$\begin{cases} a=۴x-۴>۰ \Rightarrow x>۱ \\ b=x+۷>۰ \Rightarrow x>-۷ \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۱ \\ c=۶x>۰ \Rightarrow x>۰ \end{cases}$$

خُب، سه پاره‌خط به طول $۴x-۴$، $x+۷$ و $۶x$ زمانی می‌توانند اضلاع یک مثلث باشند که در شرط وجود مثلث صدق کنند، پس:

$$\begin{cases} a=۴x-۴ \\ b=x+۷ \\ c=۶x \end{cases} \xrightarrow{|b-c|<a<b+c} |\underbrace{x+۷-۶x}_{۷-۵x}|<۴x-۴<\underbrace{x+۷+۶x}_{۷x+۷} \Rightarrow \begin{cases} ۴x-۴<۷x+۷ \Rightarrow -۱۱<۳x \Rightarrow x>\frac{-۱۱}{۳} \\ |۷-۵x|<۴x-۴ \Rightarrow -(۴x-۴)<۷-۵x<۴x-۴ \\ \Rightarrow \begin{cases} x<۳ \\ ۱۱<۹x \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۱}{۹}<x<۳ \end{cases}$$

توجه داشته باشید که محدودهٔ $\frac{۱۱}{۹}<x<۳$، شرط $x>۱$ در ابتدای سؤال را نقض نمی‌کند.

۲۲.

باید ببینیم که اعداد کدام گزینه در شرط وجود مثلث صدق نمی‌کنند.

گزینهٔ ۱: باتوجه به مقادیر تقریبی $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$، $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$ و $\sqrt{۵}\simeq ۲/۲$ داریم:

$$|\underbrace{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}_{۰/۳}|<\underbrace{\sqrt{۵}}_{۲/۲}<\underbrace{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}_{۳/۱}$$

گزینهٔ ۲: این سه مقدار نیز در شرط وجود مثلث صدق می‌کنند:

$$|\underbrace{۴a-۳a}_{a}|<۵a<\underbrace{۴a+۳a}_{۷a}$$

گزینهٔ ۳: این مقدار نیز می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند: $|a-b| < a+b-1 < a+b$

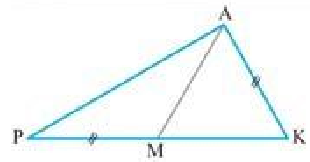
گزینهٔ ۴: این سه مقدار در شرط وجود مثلث صدق نمی‌کنند: $\underbrace{|(a+b)-(b-1)|}_{a+1} < \overbrace{a+2b < \underbrace{(a+b)+(b-1)}_{a+2b-1}}^{\text{غیرممکن}}$

۲۳.

طبق فرض $c > b > a > 0$، باید c بزرگ‌ترین ضلع باشد. از آنجا که $a < c$ و $b < c$ پس هر کدام از اضلاع a و b از c کوچک‌ترند و قطعاً نامساوی‌های $a < b+c$ و $b < a+c$ نیز برقرار خواهد بود که نیازی به بررسی آن‌ها نیست.

تنها کافیست نامساوی سوم یعنی $c < a+b$ بررسی شود تا مطمئن باشیم که ضلع بزرگ‌تر که از تک‌تک اضلاع a و b بزرگ‌تر است، از مجموع a و b بزرگ‌تر نشود، تا بتوان مثلثی با اضلاع a، b و c رسم کرد.

۲۴.

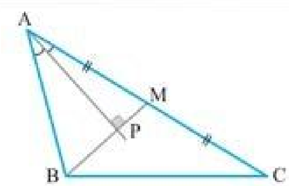


شرط وجود مثلث را برای اضلاع مثلث APK می‌نویسیم:

$$AP + AK > \underbrace{PK}_{PM+MK} \xrightarrow{AK=PM} AP > MK$$

۲۵.

نکته: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین میانه، نیمساز ارتفاع و عمودمنصف وارد بر قاعده یکی هستند.



طبق فرض و شکل روبه‌رو، میانهٔ BM را عمود بر نیمساز داخلی زاویهٔ A در نظر می‌گیریم.

در مثلث ABM، نیمساز AP، ارتفاع وارد بر ضلع BM نیز هست که می‌توان نتیجه گرفت که $\overset{\triangle}{ABM}$ در رأس A متساوی‌الساقین است یعنی:

$$AB = AM = \frac{AC}{2} \Rightarrow AC = 2AB$$

از طرفی طبق فرض، اندازهٔ اضلاع مثلث، سه عدد طبیعی متوالی نیز هست، پس AB فقط ۱ یا ۲ می‌توانند باشد، زیرا اگر $AB = 3$ باشد آن‌گاه $AC = 6$ بوده و به هیچ وجه، اندازهٔ اضلاع ۳، BC و ۶ نمی‌توانند شوند.

الف: اگر $AB = 1$، آنگاه $AC = 2AB = 2$ و در نتیجه باید $BC = 3$ باشد تا متوالی شوند؛ اما سه عدد ۱، ۲ و ۳ نمی‌توانند تشکیل مثلث دهند زیرا در شرط وجود مثلث صدق نمی‌کنند.

ب: اگر $AB = 2$، آنگاه $AC = 2AB = 4$ و درنتیجه باید $BC = 3$ باشد تا متوالی شوند. در این حالت، شرط وجود مثلث برای سه عدد ۲، ۳ و ۴ برقرار است و در نتیجه اضلاع این مثلث خواهند بود که محیط آن برابر می‌شود با: $2+3+4=9$

۲۶.

طول ضلع سوم را a می‌گیریم. اعداد ۳، ۵ و a باید در شرط وجود مثلث صدق کنند، پس: $|3-5| < a < 3+5 \Rightarrow 2 < a < 8$

در نتیجه محدودهٔ محیط این مثلث به صورت زیر می‌شود: $\text{محیط مثلث}: P = 3+5+a = 8+a \xrightarrow[+8]{2<a<8} \underbrace{8+2}_{10} < P < \underbrace{8+8}_{16}$

در بین گزینه‌ها، مقدار ۱۶ برای P قابل قبول نیست.

۲۷.

راهبرد ۳

اگر در مثلث ABC با اضلاع نابرابر، رابطهٔ $a > b > c$ برقرار باشد، آنگاه برای بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین ضلع (یعنی a و c) رابطه‌های زیر برقرار است:

ثلث محیط $\leq$ a $<$ نصف محیط

۰ $<$ C $\leq$ ثلث محیط

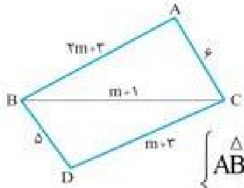
برای اثبات این رابطه‌ها، کافیست از شرط $a < b+c$ (که برای بزرگ‌ترین ضلع نوشته شده) استفاده کنید.

اگر a بزرگ‌ترین ضلع این مثلث باشد، آنگاه باتوجه به فرض داریم:

$$\frac{(\text{محیط})}{3} < a < \frac{(\text{محیط})}{2} \xrightarrow{\text{محیط}=9} \frac{9}{3} < a < \frac{9}{2} \Rightarrow 3 < a < 4/5$$

در بین گزینه‌ها فقط عدد ۳/۷ در این محدوده قرار دارد.

۲۸. ۱ ۲ ۳ ۴

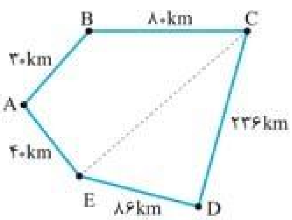


کافیست شرط وجود مثلث را در مثلث‌های ABC و BCD بنویسیم:

$$\begin{cases} \overset{\triangle}{ABC}: |(۲m+۳)-(m+۱)|<۶<(۲m+۳)+(m+۱) \Rightarrow |m+۲|<۶<۳m+۴ \Rightarrow \begin{cases} -۸<m<۴ \\ m>\frac{۲}{۳} \end{cases} \\ \overset{\triangle}{BCD}: |(m+۱)-(m+۳)|<۵<(m+۱)+(m+۳) \Rightarrow ۲<۵<۲m+۴ \Rightarrow m>\frac{۱}{۲} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \frac{۲}{۳}<m<۴$$

در ضمن حتماً توجه دارید که طول اضلاع باید مثبت باشد که به ازای m های این محدوده، هیچ مشکلی در این مورد وجود ندارد.

۲۹. ۱ ۲ ۳ ۴



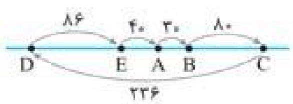
یک شکل فرضی برای این سؤال رسم کرده‌ایم.

در مثلث CDE، شرط وجود مثلث را می‌توانیم بنویسیم: $\underbrace{|۲۳۶-۸۶|}_{۱۵۰} < CE < \underbrace{۸۶+۲۳۶}_{۳۲۲}$

نکتهٔ مهم اینجاست که طول CE می‌تواند برابر ۱۵۰ و ۳۲۲ نیز باشد؛ فقط کافیست که سه شهر C، D و E در یک راستا (یعنی روی یک خط) قرار گیرند، پس: $۱۵۰ \le CE \le ۳۲۲$

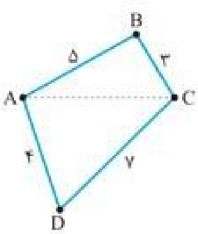
در چهارضلعی ABCE نیز می‌توان گفت که CE کوچک‌تر یا مساوی با جمع سه ضلع دیگر است، یعنی: $CE \le \underbrace{۴۰+۳۰+۸۰}_{۱۵۰}$

پس از یک طرف باید $CE \le ۱۵۰$ باشد و از یک طرف $۱۵۰ \le CE$، یعنی اندازهٔ CE قطعاً برابر ۱۵۰ است.



در واقع سه شهر به صورت شکل روبه‌رو در یک راستا قرار دارند:

۳۰. ۱ ۲ ۳ ۴



موقعیت میله‌ها براساس فرض سؤال به صورت شکل روبه‌رو است. می‌خواهیم ببینیم که فاصلهٔ بین لولای A و لولای C چه‌طوری تغییر می‌کند.

در مثلث ABC، باتوجه به این که B نیز می‌تواند در راستای AC قرار گیرد، شرط وجود مثلث را می‌نویسیم:

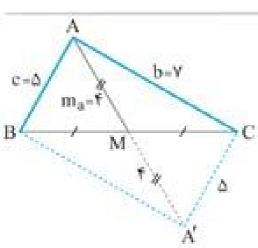
۱ $|۵-۳| \le AC \le ۵+۳ \Rightarrow ۲ \le AC \le ۸$

همین کار را در مثلث ACD نیز انجام می‌دهیم ولی با توجه به این‌که A و C و D می‌توانند در یک راستا قرار گیرند:

۲ $|۴-۷| \le AC \le ۴+۷ \Rightarrow ۳ \le AC \le ۱۱$

اشتراک محدوده‌های ۱ و ۲ به صورت $۳ \le AC \le ۸$ می‌شود و بیانگر آن است که فاصلهٔ لولای A تا لولای C هر مقداری بین ۳ و ۸ می‌تواند باشد.

۳۱. ۱ ۲ ۳ ۴



یک شکل فرضی از مثلث ABC رسم می‌کنیم. اگر میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش تا نقطهٔ A′ امتداد دهیم، شکل حاصل یک متوازی‌الاضلاع خواهد شد، زیرا قطرهای آن همدیگر را نصف کرده‌اند.

در مثلث ACA′ طول ضلع CA′ برابر ضلع AB یعنی ۵ است. پس طول اضلاع مثلث ACA′ برابر ۵ و ۷ و ۸ است که در شرط وجود مثلث صدق می‌کند. به طریقهٔ رسم مثلث ABC توجه کنید:

مثلث ACA′ را به اضلاع ۵، ۷ و ۸ رسم می‌کنیم. توسط رسم عمودمنصف AA′، نقطهٔ M وسط آن AA′ را مشخص می‌کنیم. به مرکز M و شعاع MC دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد CM را در B قطع کند.

مثلث ABC همان مثلث مطلوب است که به طور منحصر به فرد رسم می‌شود.

راهبرد ٤

مثلث ABC به اضلاع $AC=b$ و $AB=c$ و میانهٔ $AM=m_a$ در صورتی رسم می‌شود که داشته باشیم:

$$|b-c|<۲m_a<b+c \Rightarrow |\frac{b-c}{۲}|<m_a<\frac{b+c}{۲}$$

در صورت برقراری این رابطه بین مقادیر b، c و m_a، مثلث ABC به طور منحصر به فرد رسم می‌شود و جواب یکتا دارد.