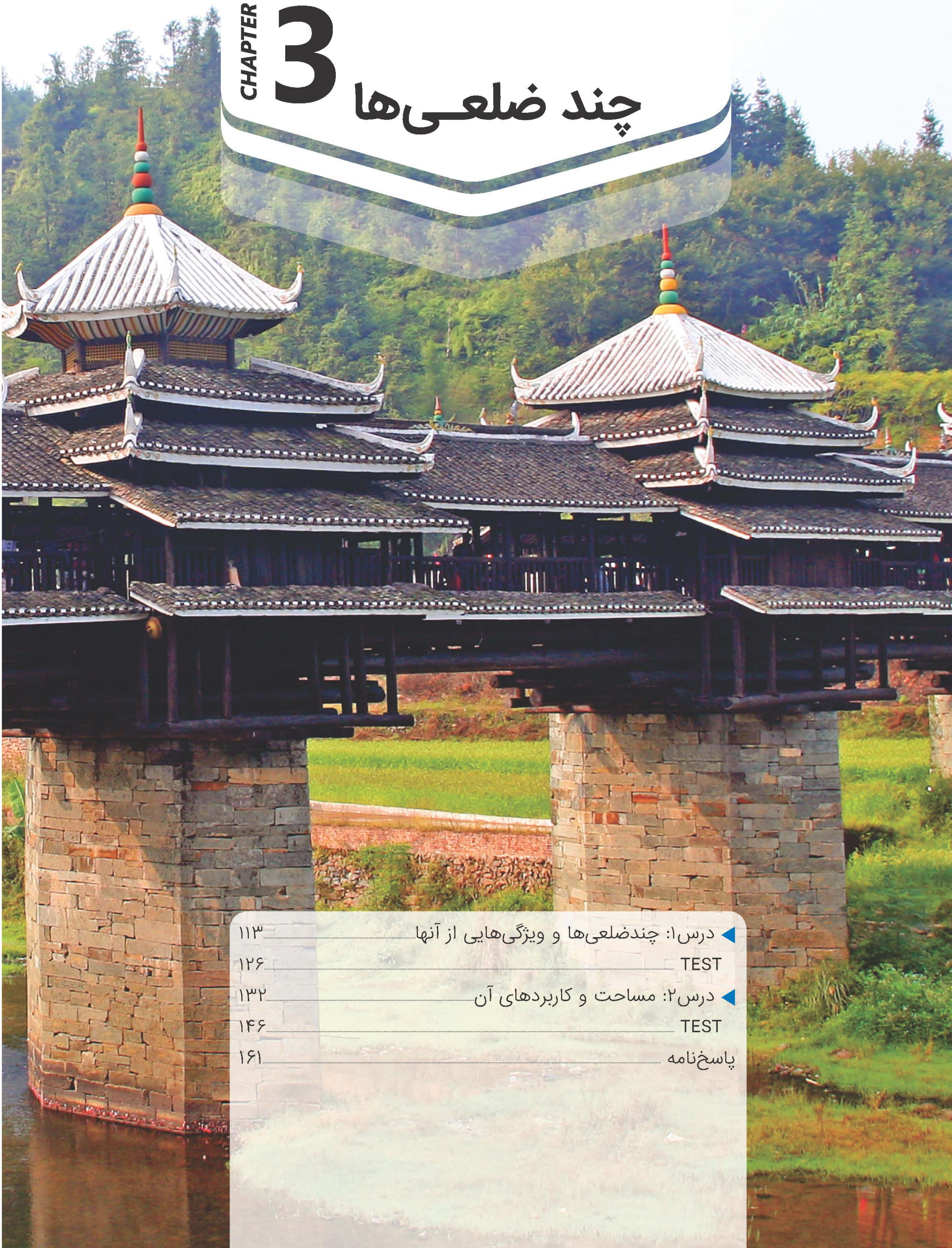
CHAPTER 3

چند ضلعی‌ها



3.2 LESSON

مساحت و کاربردهای آن

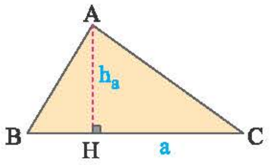
مسائل و قضایای مطرح شده در درس دوم این فصل از کتاب درسی را می‌توان به سه بخش عمده تقسیم‌بندی کرد که عبارتند از محاسبهٔ مساحت مثلث‌ها در انواع و اقسام حالات، مساحت چهارضلعی‌های معروف و در نهایت مساحت انواع چندضلعی‌ها به کمک نقاط شبکه‌ای و قضیهٔ پیک، بنابراین با محاسبهٔ مساحت مثلث و نتایج و قضایای مربوط به آن درس را شروع می‌کنیم:

PART 1 مساحت مثلث

مسائل، قضایا و نکات مطرح شده دربارهٔ مثلث به نسبت گسترده‌تر از سایر بحث‌ها است، اما می‌توان آنها را در چند تیپ خلاصه کرد [بعضی تیپ‌ها نیز در هندسه یازدهم مطرح می‌شود]:

فرمول مساحت

در مثلث ABC، اگر $BC = a$ و ارتفاع $AH = h_a$ باشد، مساحت مثلث برابر است با:

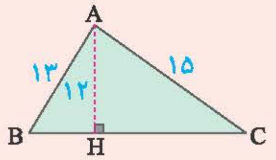


FORMUL

$$S = \frac{۱}{۲} a.h_a$$

EXAMPLE

17. در شکل مقابل مساحت مثلث ABC کدام است؟



۱) ۹۱　　۲) ۵۴

۳) ۸۴　　۴) ۷۲

پاسخ: گزینهٔ (۳)

نقشهٔ راه: ابتدا پاره‌خط BH و HC را به کمک فیثاغورس به دست می‌آوریم:

$$BH^۲ = ۱۳^۲ - ۱۲^۲ = ۵^۲ \Rightarrow BH = ۵ \ , \ CH^۲ = ۱۵^۲ - ۱۲^۲ = ۹^۲ \Rightarrow CH = ۹$$

حال با معلوم شدن BH و HC قاعدهٔ BC معلوم شده است بنابراین مساحت برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times (۵ + ۹) \times ۱۲ = ۸۴$$

مسائل مربوط به ارتفاع

در بعضی مسائل رابطه‌ای بین اضلاع داده می‌شود و رابطهٔ بین ارتفاع‌ها را از ما می‌خواهد یا برعکس، ممکن است رابطه‌ای بین ارتفاع‌ها داده شود و رابطهٔ بین اضلاع را بخواهند، در این تیپ مسائل کافی است رابطهٔ مساحت را طرفین وسطین کنید و به یکی از دو شکل زیر درآورید و در مسأله جای‌گذاری کنید:

FORMUL

$$h_a = \frac{۲S}{a} \text{ یا } a = \frac{۲S}{h_a}$$

EXAMPLE

18. نشان دهید عکس ارتفاع‌های هر مثلث در نامساوی مثلثی صدق می‌کنند.

نقشهٔ راه: کافی است به جای a از $\frac{۲S}{h_a}$ و به جای b از $\frac{۲S}{h_b}$ و به جای c از $\frac{۲S}{h_c}$ استفاده کنیم در نتیجه داریم:

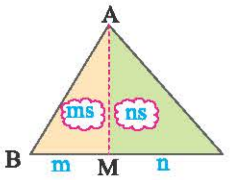
$$a < b + c \Rightarrow \frac{\cancel{۲S}}{h_a} < \frac{\cancel{۲S}}{h_b} + \frac{\cancel{۲S}}{h_c} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} < \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c}$$

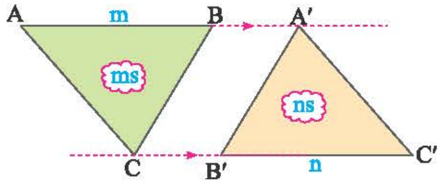
دو مثلث هم ارتفاع یا هم قاعده

با توجه به این که مساحت مثلث ABC از رابطهٔ $S = \frac{۱}{۲} AH \times BC$ به دست می‌آید دو نتیجهٔ مهم زیر قابل دسترسی است که در کتاب درسی مطرح شده است که تحت عنوان مدل اول و مدل دوم مطرح می‌کنیم:

دو مثلث هم ارتفاع

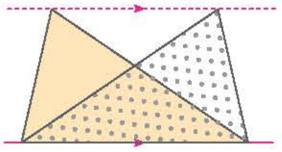
اگر دو مثلث هم ارتفاع باشند، نسبت مساحت‌های آنها برابر با نسبت قاعده‌های آنهاست:



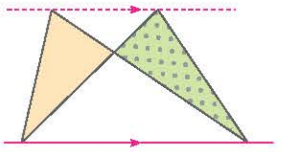


نتایج پرکاربرد

1 در دو شکل زیر مساحت رنگی و مساحت خال‌خالی برابرند:

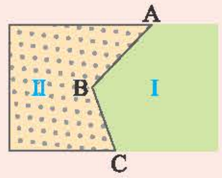


2 بال‌های پروانهٔ اسیر بین دو خط موازی هم مساحت هستند.

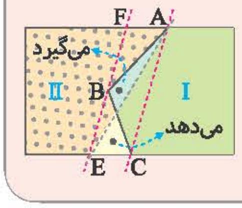


EXAMPLE

19. مزرعه‌ای به شکل مستطیل بین دو نفر به شکل زیر تقسیم شده است، اگر بخواهیم مرز مشترک ABC را به یک مرز مشترک بین دو مزرعه تقسیم کنیم تا مساحت زمین‌های دو طرف تغییر نکند، چه کار باید کرد؟

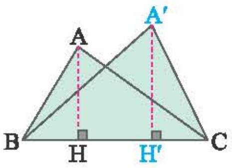


پاسخ: نقشهٔ راه: ابتدا از A به C وصل می‌کنیم، حال از B پاره‌خطی به موازات AC عبور می‌دهیم تا اضلاع مستطیل را در E و F قطع کند اگر از A به F وصل کنیم یک پروانه به وجود می‌آید که بال‌های آن بین دو خط موازی AC و EF به دام افتاده‌اند و هم مساحت هستند بنابراین پاره‌خط AF همان چیزی است که دنبالش بودیم این خط مساحت بال خال‌خالی پروانه را به I می‌دهد و مساحت بال رنگی پروانه را از او می‌گیرد و به II می‌دهد.

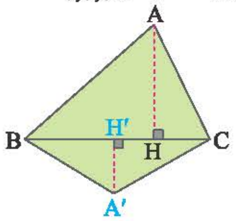


دو مثلث هم قاعده

اگر دو مثلث دارای قاعده‌های برابر باشند مساحت به نسبت ارتفاع‌ها تقسیم می‌شود.

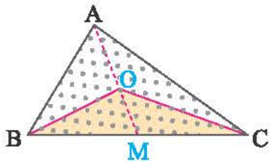


$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'BC}} = \frac{AH}{A'H'}$$



نتیجه

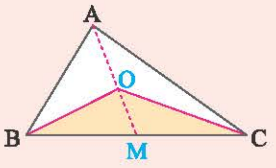
در شکل زیر نسبت مساحت قسمت رنگی و قسمت خال‌خالی برابر است با:



$$\frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{\text{خال خالی}}} = \frac{OM}{AM}$$

EXAMPLE

20. نقطهٔ O پاره‌خط AM را که از رأس A به قاعدهٔ BC وصل شده است به نسبت $\frac{OM}{OA} = \frac{۲}{۳}$ قطع کرده است. مساحت OBC چند درصد مساحت ABC است؟



۱) ۲۰ ۲) ۳۰

۳) ۴۰ ۴) ۲۵

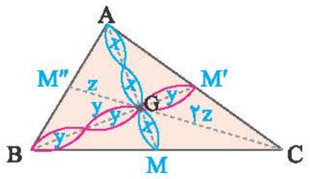
پاسخ: گزینهٔ (۳)

نقشهٔ راه: برای پیدا کردن نسبت مساحت OBC به ABC باید نسبت $\frac{OM}{AM}$ را به دست آوریم، بنابراین نسبت فوق را ترکیب در مخرج می‌کنیم.

$$\frac{OM}{OA} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{OM}{OA + OM} = \frac{۲}{۳ + ۲} \Rightarrow \frac{OM}{OA} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} = \frac{۲}{۵} = ۴۰\%$$

ویژگی سه میانه

سه میانهٔ هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث همرس‌اند، به طوری که فاصلهٔ این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر این ضلع است و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{۲}{۳}$ اندازهٔ میانهٔ نظیر آن رأس است.



FORMUL

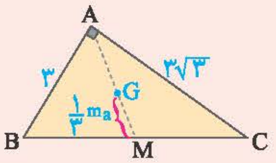
$$AG = \frac{۲}{۳}AM \ , \ GM = \frac{۱}{۳}AM$$

EXAMPLE

21. اندازهٔ دو ضلع قائم از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۳ و $۳\sqrt{۳}$ است، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی میانه‌ها از وسط وتر چقدر است؟

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ (۱)

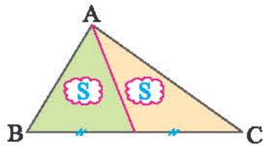


نقشهٔ راه: مطابق شکل باید $\frac{۱}{۳}$ طول میانهٔ AM را پیدا کنیم. بنابراین ابتدا وتر را به دست می‌آوریم:

$$BC^{۲} = (۳\sqrt{۳})^{۲} + ۳^{۲} = ۲۷ + ۹ = ۳۶ \Rightarrow BC = ۶ \Rightarrow AM = \frac{۶}{۲} = ۳$$

حال GM برابر با $\frac{۱}{۳}$ اندازهٔ میانه است یعنی: $GM = \frac{۱}{۳} \times ۳ = ۱$

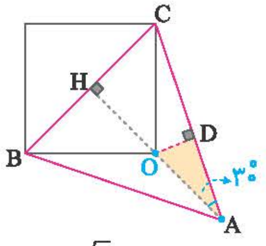
تقسیم مساحت مثلث توسط میانه‌ها



می‌دانیم با رسم میانهٔ هر مثلث، دو مثلث هم ارتفاع ایجاد می‌شود که چون قاعده‌های آنها نیز برابر است، بنابراین هم مساحت هستند. حتماً می‌دانید که این دو مثلث فقط هم مساحت هستند و همنهشت (مثل هم) نیستند، مگر آن که ساق‌های AB و AC برابر باشند. حال با ترکیب این قضیه و ویژگی سه میانه و مثلث‌های هم‌قاعده دو نتیجهٔ مهم می‌توان به دست آورد:

2 **108**

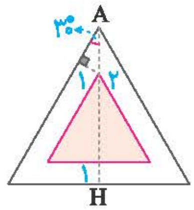
نقشهٔ راه: ابتدا ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع را مشخص می‌کنیم که $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}$ است. حال نصف قطر مربع یعنی OH را از آن کم می‌کنیم تا OA به دست آید؛ پس $OA = ۲\sqrt{۳} - ۲$. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAD، ضلع OD رو به زاویهٔ ۳۰° است و نصف OA است. بنابراین:



$$OD = \sqrt{۳} - ۱$$

3 **109**

نقشهٔ راه: چون فاصلهٔ عمودی از اضلاع داده شده است، بهتر است ارتفاع مثلث را رسم کنیم؛ طول ارتفاع برابر است با $AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۶\sqrt{۳}) = ۹$، بنابراین ارتفاع مثلث رنگی برابر است با:

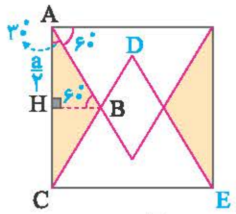


$$h = ۹ - ۲ - ۱ = ۶ \Rightarrow ۶ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow a = \frac{۱۲}{\sqrt{۳}} = ۴\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴\sqrt{۳})^۲ = ۱۲\sqrt{۳}$$

3 **110**

نقشهٔ راه: از مثلث ABC کار را شروع می‌کنیم و ابتدا ارتفاع BH را رسم می‌کنیم؛ با فرض ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع یا مربع برابر O داریم:



$$\overset{\Delta}{ABH}: \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}AB \Rightarrow AB = \frac{a}{\sqrt{۳}}$$

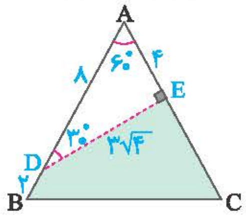
$$\Rightarrow HB = \frac{۱}{۲}AB = \frac{a}{۲\sqrt{۳}} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲}AC \times HB$$

$$= \frac{۱}{۲} \times a \times \frac{a}{۲\sqrt{۳}} = \frac{a^۲}{۴\sqrt{۳}} \Rightarrow S_{\text{رنگی}} = \frac{a^۲}{۲\sqrt{۳}}$$

$$S_{CDE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ \Rightarrow \frac{S_{\text{رنگی}}}{S_{CDE}} = \frac{\frac{\cancel{a^۲}}{۲\sqrt{۳}}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}\cancel{a^۲}} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

4 **111**

نقشهٔ راه: کافی است به مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع را پیدا کنیم و مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ سفید رنگ را از آن کم کنیم:

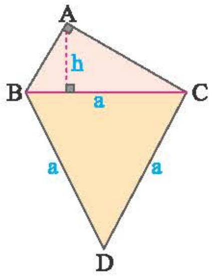


$$S_{DECB} = S_{ABC} - S_{ADE} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۰)^۲ - \frac{۱}{۲}(۴)(۴\sqrt{۳})$$

$$= ۲۵\sqrt{۳} - ۸\sqrt{۳} = ۱۷\sqrt{۳}$$

4 **112**

نقشهٔ راه: فرض کنیم وتر مثلث قائم‌الزاویه a باشد در این صورت داریم:

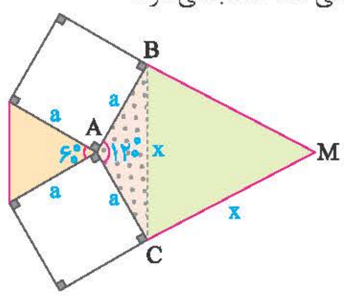


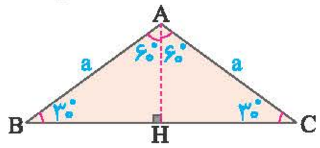
$$\begin{cases} S_{BCD} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = ۱۶\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۶۴ \Rightarrow a = ۸ \\ S_{ABC} = \frac{۱}{۲}ah \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۸ \times h = ۸ \Rightarrow h = ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{a} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \text{.زاویه‌ها } ۱۵^\circ \text{ و } ۷۵^\circ \text{ است} \Rightarrow \frac{۷۵^\circ}{۱۵^\circ} = ۵$$

3 **113**

نقشهٔ راه: ابتدا باید در مثلث خال‌خالی x را پیدا کنیم: ارتفاع AH وارد به ضلع BC را رسم می‌کنیم و دو مثلث با زاویه‌های ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° ایجاد می‌شود و به راحتی BC حساب می‌شود:



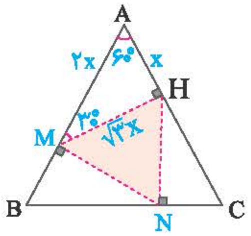


$$\Rightarrow AH = \frac{a}{۲}, BH = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \Rightarrow x = BC = \sqrt{۳}a$$

$$\Rightarrow S_{MBC} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\sqrt{۳}a)^۲ = ۳(\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲) = ۳S$$

2 114

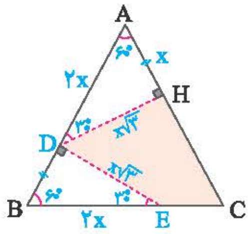
نقشهٔ راه: اگر فرض کنیم $AH = x$ باشد، در این صورت $AM = ۲x$ و در نتیجه $MH = \sqrt{۳}x$ به دست می‌آید. حال ضلع مثلث بزرگ برابر با $۳x$ می‌شود و نسبت مساحت آنها برابر است با:



$$\frac{S_{MHN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\sqrt{۳}x}{۳x}\right)^۲ = \frac{۱}{۳}$$

3 115

نقشهٔ راه: با فرض $AH = x$ در مثلث ADH، ضلع $AD = ۲x$ و $DH = \sqrt{۳}x$ به دست می‌آید، همچنین $DB = AH = x$ و از آنجا که $BE = ۲x$ و در نتیجه $DE = \sqrt{۳}x$ به دست می‌آید. حال داریم:



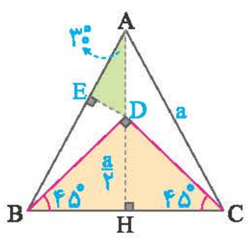
$$S_{DHCE} = S_{ABC} - ۲S_{ADH} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۳x)^۲ - ۲\left(\frac{۱}{۲}x \times \sqrt{۳}x\right)$$

$$\Rightarrow S_{DHCE} = \frac{۵}{۴}\sqrt{۳}x^۲$$

$$\Rightarrow \frac{S_{DHCE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۵}{\cancel{۴}} \times \cancel{\sqrt{۳}}x^۲}{\frac{\cancel{\sqrt{۳}}}{\cancel{۴}}(۳x)^۲} = \frac{۵x^۲}{۹x^۲} = \frac{۵}{۹}$$

4 116

نقشهٔ راه: فاصلهٔ رأس قائم از نزدیک‌ترین ضلع مثلث همان پاره‌خط DE است پس ابتدا باید AD را به دست آوریم:



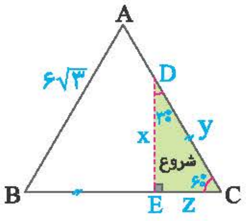
$$AD = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a - \frac{a}{۲} = \frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲} \times ۴ = ۲(\sqrt{۳} - ۱)$$

از طرفی DE در مثلث خال‌خلی ضلع رو به زاویهٔ ۳۰° است:

$$\Rightarrow DE = \frac{۱}{۲}(۲(\sqrt{۳} - ۱)) = \sqrt{۳} - ۱$$

1 117

نقشهٔ راه: می‌دانیم $\hat{C} = ۶۰^\circ$ بنابراین در مثلث DEC داریم $\hat{D} = ۳۰^\circ$ و حال خواهیم داشت:

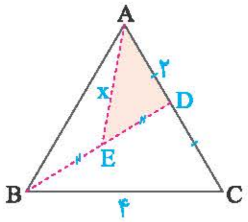


$$\overset{\Delta}{DEC} : x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}y \Rightarrow y = \frac{۲x}{\sqrt{۳}} \Rightarrow z = \frac{۱}{۲}y = \frac{x}{\sqrt{۳}}$$

$$BC = y + z = \frac{۲x}{\sqrt{۳}} + \frac{x}{\sqrt{۳}} = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow ۳x = ۱۸ \Rightarrow x = ۶$$

3 118

نقشهٔ راه: ابتدا با استفاده از مساحت، ضلع مثلث را به دست می‌آوریم:



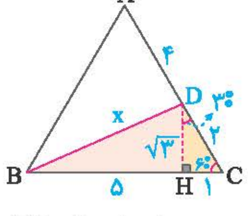
$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲ = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۱۶ \Rightarrow a = ۴$$

حال BD که میانهٔ مثلث است. به علت آن که مثلث متساوی‌الاضلاع است، ارتفاع هم محسوب می‌شود و اندازهٔ آن برابر است با $BD = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳}$ و در نتیجه $BE = ED = \sqrt{۳}$. حال در مثلث قائم‌الزاویهٔ AED فیثاغورس را می‌نویسیم:

$$x^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۲^۲ = ۷ \Rightarrow x = \sqrt{۷}$$

4 119

نقشهٔ راه: از D عمودی بر BC رسم می‌کنیم. در مثلث DHC زاویه‌ها ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° است، بنابراین $HC = ۱$ و $DH = \sqrt{۳}$ به دست می‌آید. حال در مثلث BDH با فیثاغورس x به دست می‌آید:

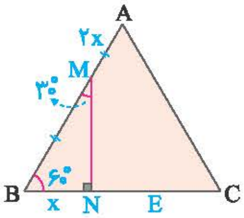


$$BH = ۶ - ۱ = ۵$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۵^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = ۲۸ \Rightarrow x = ۲\sqrt{۷}$$

120 | **3**

نقشهٔ راه: فرض کنیم $BN = x$ باشد، در این صورت داریم:



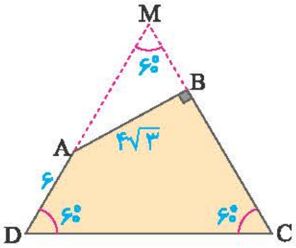
$$BN = x \Rightarrow BM = ۲x \Rightarrow MA = ۲x \Rightarrow AB = ۴x$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴x)^{۲} = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow (۴x)^{۲} = ۳۶ \Rightarrow ۴x = ۶$$

$$\Rightarrow x = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \Rightarrow NC = ۴x - ۶x = ۳x = ۴/۵$$

121 | **4**

نقشهٔ راه: اضلاع AD و BC را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ M همدیگر را قطع کنند. در مثلث MAB زاویه‌ها ۳۰°، ۶۰° و ۹۰° هستند و $MA = ۸$ و $MB = ۴$ به دست می‌آید. حال برای پیدا کردن مساحت چهارضلعی، مساحت MAB را از MDC کم می‌کنیم و داریم:



$$S_{ABCD} = S_{MDC} - S_{MAB} = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱۴)^{۲} - \frac{۱}{۲} \times ۴\sqrt{۳} \times ۴$$

$$= ۴۹\sqrt{۳} - ۸\sqrt{۳} = ۴۱\sqrt{۳}$$

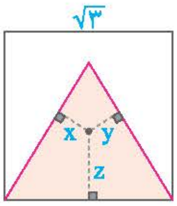
122 | **4**

نقشهٔ راه: می‌دانیم جمع طول سه عمودی که از نقطه‌ای درون مثلث متساوی‌الاضلاع بر اضلاع رسم می‌شود برابر ارتفاع مثلث است.

$$x + y + z = h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶\sqrt{۳} = ۹$$

123 | **2**

نقشهٔ راه: می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع، برابر ارتفاع مثلث است.

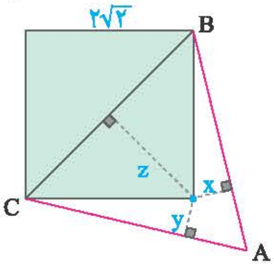


بنابراین:

$$x + y + z = h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(\sqrt{۳}) = \frac{۳}{۲}$$

124 | **1**

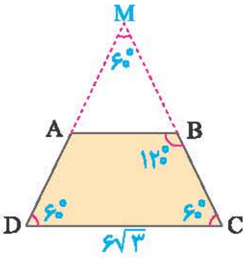
نقشهٔ راه: چون ضلع مربع $۲\sqrt{۲}$ است، قطرآن ۴ است و حال ارتفاع مثلث برابر است با:



$$h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۴ = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow x + y + z = ۲\sqrt{۳}$$

125 | **3**

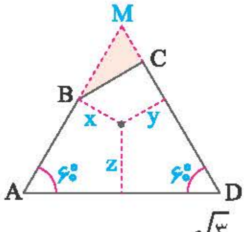
نقشهٔ راه: ساق‌های ذوزنقه را امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در M قطع کند. مثلث MDC متساوی‌الاضلاع است، بنابراین مجموع طول سه عمودی که به اضلاع رسم می‌شود برابر ارتفاع مثلث است.



$$h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶\sqrt{۳} = ۹$$

126 | **1**

نقشهٔ راه: چهارضلعی در واقع یک مثلث متساوی‌الاضلاع است که قسمتی از آن در مُحاق قرار گرفته است (پنهان شده است)، بنابراین مجموع فواصل هر نقطه داخل آن از اضلاع AB، AD و CD برابر ارتفاع مثلث MAD است:



$$x + y + z = h_a = \frac{\sqrt{۳}}{۲}(۴\sqrt{۳}) = ۶$$

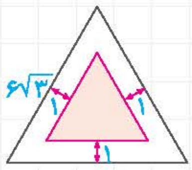
127 | **2**

نقشهٔ راه: می‌دانیم که در این حالت ارتفاع مثلث برابر است با مجموع عمودی‌های کناری منهای عمود وسطی، یعنی:

$$h_a = ۷ + ۱۱ - ۶ = ۱۲ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۲۴}{\sqrt{۳}} = ۸\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۸\sqrt{۳})^{۲} = ۴۸\sqrt{۳}$$

109 مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۶\sqrt{۳}$ واحد مفروض است. خطوطی موازی اضلاع آن و به فاصلهٔ یک واحد از اضلاع رسم کرده‌ایم. مساحت سایه خورده کدام است؟



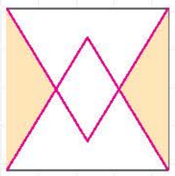
۱) $۱۶\sqrt{۳}$

۲) $۹\sqrt{۳}$

۳) $۱۲\sqrt{۳}$

۴) $۸\sqrt{۳}$

110 در شکل مقابل به روی دو ضلع مربع، دو مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کرده‌ایم. مساحت ناحیهٔ رنگ شده چند برابر مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع است؟



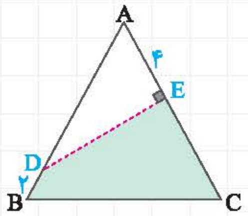
۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۳}$

۴) $\frac{۳}{۴}$

111 در شکل مقابل ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. مساحت سایه خورده کدام است؟



۱) $۱۹\sqrt{۳}$

۲) $۱۴\sqrt{۳}$

۳) $۱۵\sqrt{۳}$

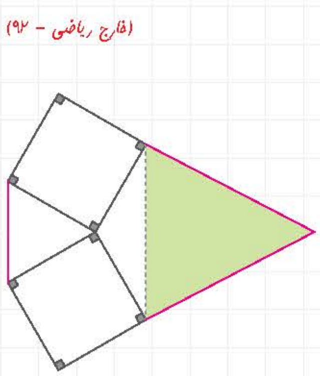
۴) $۱۷\sqrt{۳}$

112 روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای به مساحت ۸، مثلث متساوی‌الاضلاعی به مساحت $۱۶\sqrt{۳}$ ساخته شده است. نسبت دو زاویهٔ حادهٔ مثلث قائم‌الزاویه کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۲/۵   ۴) ۵

113 در یک مثلث متساوی‌الاضلاع بر روی دو ضلع آن دو مربع ساخته شده است. مساحت سایه زده شده چند برابر مساحت مثلث اصلی است؟ (خارج ریاضی - ۹۲)



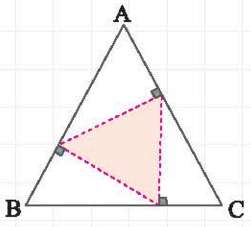
۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۳

۴) ۴

114 مثلث ABC مطابق شکل متساوی‌الاضلاع است. نسبت مساحت مثلث رنگ شده به مساحت ABC کدام است؟



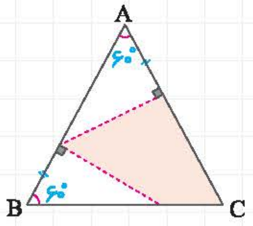
۱) $\frac{۱}{۴}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۲}{۵}$

۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

115 در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مطابق شکل مساحت رنگ شده چه کسری از مساحت مثلث اصلی است؟



۱) $\frac{۴}{۹}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۹}$

۴) $\frac{۲}{۵}$

116 مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۴ و مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی درون آن در یک ضلع مشترک‌اند. فاصلهٔ رأس قائمه از نزدیک‌ترین ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع کدام است؟

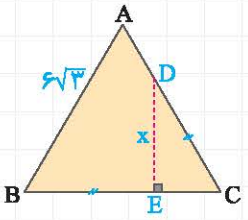
۱) $۲\sqrt{۳} - ۲$

۲) $۲ - \sqrt{۳}$

۳) $۲ - \sqrt{۳}$

۴) $\sqrt{۳} - ۱$

117 در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اندازهٔ اضلاع $۶\sqrt{۳}$ است. مقدار x کدام است؟



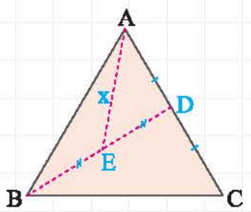
۱) ۶

۲) ۸

۳) ۴

۴) ۳

118 مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به مساحت $۴\sqrt{۳}$ مطابق شکل مفروض است. مقدار x کدام است؟



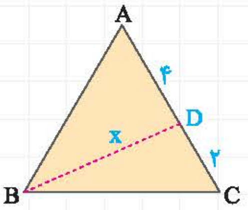
۱) $\sqrt{۵}$

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $\sqrt{۷}$

۴) $۲\sqrt{۲}$

۱۱۹ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مطابق شکل مقدار x کدام است؟



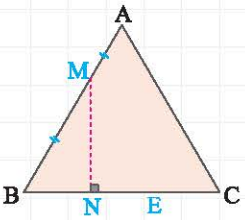
۱) $۳\sqrt{۲}$

۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) ۴

۴) $۲\sqrt{۷}$

۱۲۰ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نقطهٔ M وسط ضلع AB است و مساحت مثلث $۹\sqrt{۳}$ است. مقدار NC کدام است؟



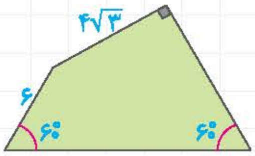
۱) ۲/۵

۲) ۱/۵

۳) ۴/۵

۴) ۳

۱۲۱ مساحت چهارضلعی شکل داده شده کدام است؟



۱) $۲۴\sqrt{۳}$

۲) $۳۶\sqrt{۳}$

۳) $۴۸\sqrt{۳}$

۴) $۴۱\sqrt{۳}$

۱۲۲ نقطهٔ M درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $۶\sqrt{۳}$ قرار دارد. مجموع فاصله‌های این نقطه از سه ضلع چقدر است؟ (داخل تجربی - ۸۱)

۱) ۶

۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $۶+\sqrt{۳}$

۴) ۹

۱۲۳ در داخل یک مربع به طول ضلع $\sqrt{۳}$، مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع $\sqrt{۳}$ رسم می‌کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟ (خارج ریاضی - ۸۷)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$

۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۱۲۴ ضلع یک مثلث متساوی‌الاضلاع، قطر یک مربع به ضلع $۲\sqrt{۲}$ است. مجموع فواصل رأس مربع که درون مثلث واقع شده از سه ضلع مثلث کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $\sqrt{۶}$

۳) $۳\sqrt{۲}$

۴) $۲\sqrt{۶}$

۱۲۵ در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قاعده‌های بزرگ $۶\sqrt{۳}$ و یکی از زاویه‌های ۱۲۰° است. از محل تلاقی قطرها عمودهایی به ساق (یا امتداد آنها) و قاعده‌های بزرگ رسم می‌کنیم. مجموع طول این سه عمود کدام است؟

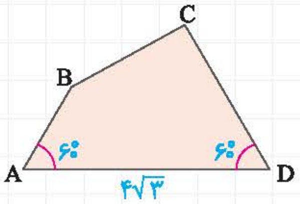
۱) ۸

۲) ۶

۳) ۹

۴) ۱۲

۱۲۶ در چهارضلعی شکل مقابل از محل تلاقی قطرها سه عمود به اضلاع AB، AD و CD رسم می‌کنیم. اگر $AD = ۴\sqrt{۳}$ باشد، مجموع طول این سه عمود کدام است؟



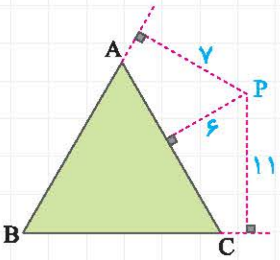
۱) ۶

۲) ۴

۳) ۱۲

۴) ۸

۱۲۷ در شکل مقابل ABC یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



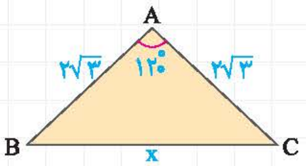
۱) $۲۴\sqrt{۳}$

۲) $۴۸\sqrt{۳}$

۳) $۹۶\sqrt{۳}$

۴) $۱۲\sqrt{۳}$

۱۲۸ در مثلث ABC مطابق شکل مقدار x کدام است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$

۲) ۱۲

۳) ۶

۴) ۹

۱۲۹ اگر محیط یک مثلث متساوی‌الساقین ۱۸ واحد و ارتفاع وارد بر قاعده ۳ واحد باشد، مساحت مثلث چند واحد مربع است؟ (داخل تجربی - ۷۵)

۱) $۶\sqrt{۲}$

۲) ۹

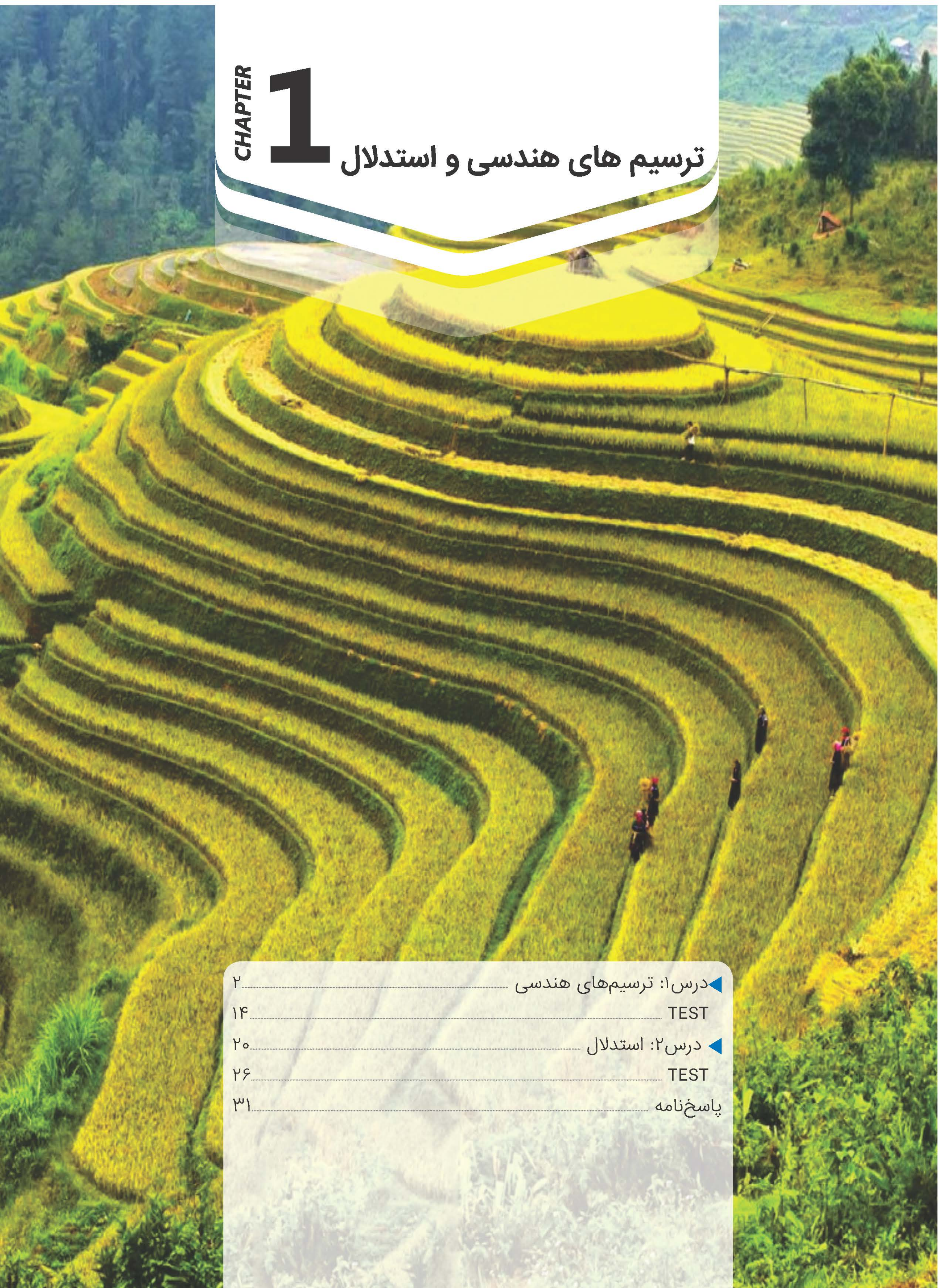
۳) $۶\sqrt{۳}$

۴) ۱۲

درس 2 TEST

CHAPTER

1 ترسیم های هندسی و استدلال

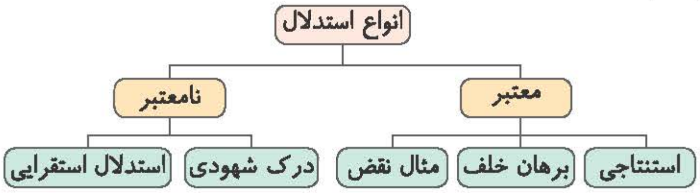


استدلال

1.2
LESSON

PART 1 انواع استدلال

در کتاب ریاضی پایهٔ نهم با برخی از انواع استدلال آشنا شدید، که بعضی از آنها معتبر و بعضی دیگر غیرمعتبر بودند. حال می‌خواهیم به بررسی دقیق‌تر انواع استدلال و کاربرد آنها در هندسه بپردازیم هرچند که انواع استدلال‌های معتبر و نامعتبر بسیاری در ریاضی وجود دارد، از این انواع بسیار فقط به استدلال‌های زیر در کتاب درسی اشاره شده است:



حال به طور مفصل و مجزا به بررسی هر یک از استدلال‌ها می‌پردازیم:

درک شهودی

یک نوع دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است. میزان شهود در افراد مختلف متفاوت است [این نوع استدلال را در کتاب نهم بررسی کردید.]

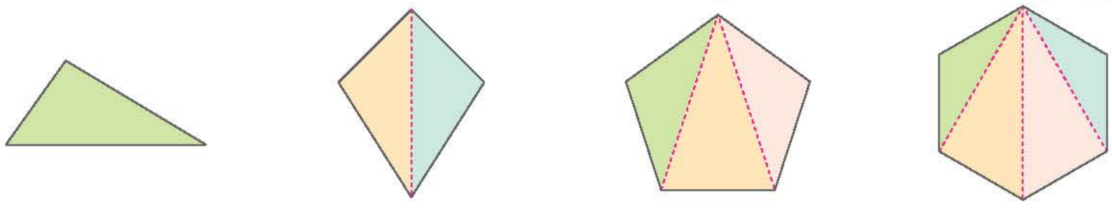
به‌عنوان مثال: *قضیهٔ معروفی به اسم قضیه خم جردن وجود دارد که می‌گوید اگر از یک نقطه درون یک خم سادهٔ بسته به یک نقطه خارج آن خم وصل کنیم خم را در یک نقطه قطع می‌کند.*

این قضیه را بدون استدلال می‌توان درک کرد و پذیرفت اما برای اثبات این قضیه نمی‌توان از نقطه‌ای درون آن به نقطه‌ای در بیرون خم وصل کرد و گفت «همان‌طور که می‌بینید خم در یک نقطه قطع شد پس قضیه درست است» ما فقط از طریق مشاهده به حقیقت پی بردیم نه با یک استدلال دقیق و محکم ومتقن! اثبات‌های ریاضی، ساز و کار خود را دارد که به تدریج با آنها آشنا می‌شویم.

استدلال استقرایی

روش نتیجه‌گیری کُلی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌نامند، یعنی با بررسی یک موضوع در چند حالت نتیجه‌ای کُلی از آن گرفته می‌شود و به عبارت دیگر استدلال استقرایی از جزءِ به کل رسیدن است.

به‌عنوان مثال: *به شکل‌های زیر نگاه کنید و مجموع زوایای هر شکل را در جدول زیر کامل کنید.*



تعداد اضلاع	۳	۴	۵	۶
مجموع زوایای داخلی	۱۸۰			

می‌توان حدس زد در حالت کلی مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر است با:

FORMUL

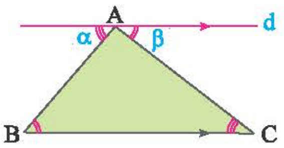
$$(n-۲)\times ۱۸۰^\circ$$

به این روش استدلال روش استدلال استقرایی گفته می‌شود که البته همیشه هم معتبر نیست و نتایجی که از این طریق به دست می‌آید. (ممکن است درست یا نادرست باشد.)

استدلال استنتاجی

این استدلال روش نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ حقایقی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم. این حقایق همان اصول و قضایای ریاضی هستند.

به‌عنوان مثال: *با استفاده از قضیه خطوط موازی و مورب و دانستن زوایای بین آنها با یک استدلال ساده می‌توان ثابت کرد، مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰° است.*



$$d \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}=\beta \\ \hat{C}=\alpha \end{cases} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+\alpha+\beta=۱۸۰^\circ$$

استدلال استنتاجی را به‌صورت کلامی نیز می‌توان بیان کرد.

چند اصطلاح مهم در استدلال

1 قضیه: برخی نتایج مهم و پرکاربرد را که با استدلال استنتاجی ثابت می‌شود، قضیه می‌نامند. مانند قضیهٔ تالس، قضیهٔ فیثاغورس و ...

2 عکس قضیه: اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، به آنچه حاصل می‌شود عکس قضیه گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

به‌عنوان مثال: *عکس قضیهٔ فیثاغورس به‌صورت زیر است:*

«اگر در مثلثی به اضلاع a و b و c رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار باشد آن‌گاه $\hat{A}=۹۰^\circ$»

3 قضیه دو شرطی: اگر یک قضیه و عکس آن هر دو درست باشند، آن قضیه را قضیهٔ دو شرطی می‌نامند. مانند قضیهٔ فیثاغورس

$$\hat{A}=۹۰^\circ \Leftrightarrow a^۲=b^۲+c^۲$$

روش خواندن قضایای دو شرطی: جملهٔ فوق بدین صورت خوانده می‌شود «مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد.»

4 گزاره: جمله‌ای است خبری که دقیقاً درست یا نادرست باشد، هرچند که درستی یا نادرستی آن را اکنون یا در آیندهٔ نزدیک نتوان معلوم کرد. جمله‌های پرسشی، عاطفی و امری یا دعایی گزاره محسوب نمی‌شوند.

EXAMPLE

15. کدام‌یک از جملات زیر گزاره است؟

الف) بی‌نهایت عدد اول مانند P وجود دارد که ۲ + P نیز اول باشد.

تحلیل مفهوم: این جمله گزاره است چون خبری را اعلام می‌کند [هر چند درستی آن هنوز بر ما معلوم نشده]

ب) مرا تو بی‌سببی! نیستی، به راستی صِلت کدام قصیده‌ای ای غزل؟ [شاملو]

تحلیل مفهوم: این جمله گزاره نیست چون سرشار از عاطفه و احساس است.

5 گزارهٔ ساده: گزاره‌ای که تنها یک خبر را اعلام می‌کند، گزارهٔ ساده نامیده می‌شود.

به‌عنوان مثال: *مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است.*

6 گزارهٔ مرکب: گزاره‌ای که بیش از یک خبر را اعلام می‌کند و ترکیبی از چند گزاره است را گزاره مرکب می‌نامند. [در سال یازدهم با انواع ترکیب دو گزاره آشنا می‌شوید.]

به‌عنوان مثال: *در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است و ارتفاع وارد بر وتر واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ ایجاد شده روی وتر است.*

7 نقیض یک گزاره: نقیض یک گزاره عبارت است از ساختن گزارهٔ جدیدی که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزارهٔ اصلی باشد، ساده‌ترین روش برای ساختن نقیض یک گزاره، آوردن عبارت «این طور نیست که» یا «چنین نیست که» قبل از گزارهٔ اصلی است.

EXAMPLE

16. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید، سپس آن را به‌صورت فارسی روان درآورید.

الف) ۲ عددی زوج است.

تحلیل مفهوم: چنین نیست که ۲ عددی زوج است $\equiv$ ۲ عددی فرد است.

ب) ۴ عددی اول نیست.

تحلیل مفهوم: چنین نیست که ۴ عددی اول نیست $\equiv$ ۴ عددی اول است.

منفی در منفی

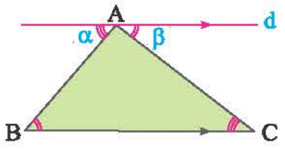
مثبت

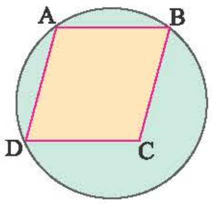
8 گزارهٔ شرطی: اگر گزارهٔ خبری به‌صورت شرطی بیان شود گزاره را شرطی می‌نامند. در گزارهٔ شرطی جملهٔ بعد از اگر را فرض و جملهٔ دوم را حکم می‌نامند.

به‌عنوان مثال: *اگر $\underbrace{\text{باران ببارد}}_{\text{فرض}}$، مسابقه برگزار نخواهد شد.*

9 احکام کلی: اگر حکمی در مورد تمام اعضای یک مجموعه بیان شود، به آن حکم کلی گفته می‌شود، احکام کلی ممکن است درست یا نادرست باشند.

به‌عنوان مثال: *حکم «از هر سه رأس یک مثلث دلخواه همواره یک دایره می‌گذرد» حکمی درست و حکم «از هر ۴ رأس یک چهارضلعی دلخواه همواره یک دایره می‌گذرد» حکمی نادرست است. نگاه کنید:*





برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسه از آن استفاده می‌شود برهان غیرمستقیم یا برهان خلف است. در برهان خلف به جای این که مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد [فرض خلف] و به یک تناقض می‌رسیم یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل شده و درستی حکم ثابت می‌شود به بیان ساده‌تر در روش برهان خلف ثابت می‌کنیم حکم نمی‌تواند نادرست باشد و مجبور است درست باشد.

EXAMPLE

17. ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

پاسخ: نقشهٔ راه: با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسأله نادرست است؛ یعنی n عددی فرد نباشد، بنابراین n عددی زوج است در نتیجه می‌توان نوشت $n = 2k$ که در آن k عددی طبیعی است حالا داریم:

$$n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2 = 2(\underbrace{2k^2}_{k'}) = 2k' \Rightarrow n^2 = 2k' = \text{زوج}$$

بنابراین به خلاف فرض مسأله رسیدیم چون در صورت مسأله فرض شده بود n^2 فرد است ولی ما به این رسیدیم که n^2 زوج است، پس آنچه در ابتدا فرض کردیم باطل است یعنی فرض «n فرد نباشد» باطل شده و اثبات شد که «n فرد است.»

18. در مثلث ABC با فرض $AB \neq AC$ ثابت کنید $\hat{B} \neq \hat{C}$

پاسخ: می‌خواهیم از برهان خلف استفاده کنیم.

نقشهٔ راه: برای استفاده از برهان خلف باید فرض کنیم گزارهٔ $\hat{B} \neq \hat{C}$ درست نیست یعنی باید بگوییم $\hat{B} = \hat{C}$ در این صورت مثلث متساوی‌الساقین است و ساق‌های آن برابرند پس $AB = AC$ که خلاف فرض است. پس حکم درست است.

مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی [حکم کلی] غلط است، مثال نقض گفته می‌شود. احکام کلی معمولاً با کلماتی نظیر «هر، همه، تمام یا هیچ» بیان می‌شوند.

EXAMPLE

19. برای هر کدام از احکام کلی زیر مثال نقض بیاورید:

الف) تمام اعداد اول فرد هستند.

مثال نقض: ۲

ب) هر عدد فردی، اول است.

مثال نقض: ۹

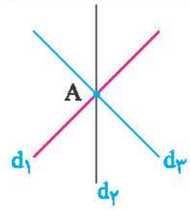
ج) هیچ ایرانی تا به حال مدال فیلدز نگرفته است.

مثال نقض: مریم میرزاخانی

د) عبارت $n^2 + n + 41$ به ازای همهٔ nها اول است.

مثال نقض: $n = 41$

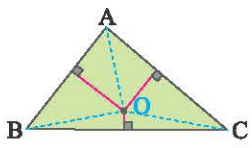
PART 2 خطوط همرس در مثلث



تعریف: اگر سه خط d_1 و d_2 و d_3 هر سه از نقطهٔ A عبور کنند گفته می‌شود این سه خط در نقطهٔ A همرس هستند:

تعداد خطوط همرس می‌تواند بیشتر از ۳ نیز باشد. در مثلث، ۴ تیپ خطوط همرس مهم وجود دارد:

همرسی عمودمنصف‌ها



عمودمنصف‌های هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

[چون هر نقطه روی عمودمنصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.]

محل تلاقی عمودمنصف‌ها در مثلث‌های حادالزاویه همواره داخل مثلث است اما در مثلث‌های قائم‌الزاویه وسط وتر و در مثلث‌های منفرجه‌الزاویه خارج مثلث است.

91 در مثلث ABC پای میانه‌ها را به هم وصل می‌کنیم و در مثلث حاصل محل تلاقی ارتفاع‌ها را O می‌نامیم، نقطهٔ O برای مثلث ABC چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تلاقی ارتفاع‌ها ۲) محل تلاقی نیمسازها
۳) محل تلاقی میانه‌ها ۴) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

92 در مثلث ABC از نقطهٔ O محل همرسی نیمسازها، عمودهایی بر سه ضلع رسم می‌کنیم و پای عمودها را D، E و F می‌نامیم. نقطهٔ O برای مثلث DEF چه نقطه‌ای است؟

۱) محل همرسی میانه‌ها ۲) محل همرسی نیمسازها
۳) محل همرسی ارتفاع‌ها ۴) محل همرسی عمودمنصف‌ها

93 از نقطهٔ O محل همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC به سه رأس A، B و C وصل می‌کنیم و در نقاط A، B و C عمودهایی بر OA، OB و OC رسم می‌کنیم تا همدیگر را در D، E و F قطع کنند. نقطهٔ O برای مثلث DEF چه نقطه‌ای است؟

۱) محل همرسی ارتفاع‌ها
۲) محل همرسی میانه‌ها
۳) محل همرسی نیمسازها
۴) محل همرسی عمودمنصف‌ها

94 در مثلث ABC از نقطهٔ O محل تلاقی نیمسازها، عمودهایی به اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم و به اندازهٔ خودشان تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. رأس A برای مثلث ODE چه نقطه‌ای است؟

۱) محل همرسی میانه‌ها
۲) محل همرسی نیمسازها
۳) محل همرسی ارتفاع‌ها
۴) محل همرسی عمودمنصف‌ها

95 درمثلث ABC، ازنقطهٔ O محل تلاقی نیمسازهای داخلی، عمودهایی به اضلاع مثلث رسم کرده و به اندازهٔ ۲ برابر خودشان امتداد می‌دهیم تا به نقاط D، E و F برسیم. برای مثلث DEF نقطهٔ O چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تقاطع میانه‌ها
۲) محل تقاطع ارتفاع‌ها
۳) محل تقاطع نیمسازها
۴) محل تقاطع عمودمنصف‌ها

96 در مثلث ABC ارتفاع‌های BH و CH′ در O متقاطع‌اند. این دو ارتفاع را به اندازهٔ OH و OH′ تا نقاط D و E امتداد می‌دهیم. در مثلث ODE محل تلاقی عمودمنصف‌ها کدام نقطه است؟

۱) وسط ضلع DE ۲) رأس B
۳) رأس A ۴) محل تلاقی نیمسازهای ABC

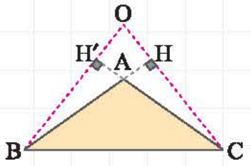
97 در مثلث ABC از نقاط A، B و C خطوطی به موازات اضلاع عبور می‌دهیم تا یکدیگر را در D، E و F قطع کنند. محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABC برای مثلث DEF چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تلاقی میانه‌ها ۲) محل تلاقی نیمسازها
۳) محل تلاقی عمودمنصف‌ها ۴) محل تلاقی ارتفاع‌ها

98 در مثلث ABC نقطهٔ O محل برخورد ارتفاعات است. در مثلث OBC محل تلاقی ارتفاعات کدام نقطه است؟

۱) محل تلاقی عمودمنصف‌های ABC
۲) نقطه‌ای خارج از مثلث ABC
۳) رأس A از مثلث ABC
۴) محل تلاقی نیمسازهای ABC

99 در مثلث ABC، اضلاع AB و AC را امتداد می‌دهیم و از رأس‌های B و C عمودهایی بر امتداد اضلاع فرود می‌آوریم و امتداد می‌دهیم تا همدیگر را در D قطع کنند، کدام گزینه درست است؟



۱) نقطهٔ A محل تلاقی عمودمنصف‌های DBC است.
۲) نقطهٔ D محل تلاقی عمودمنصف‌های ABC است.
۳) نقطهٔ D محل تلاقی ارتفاع‌های ABC است.
۴) نقطهٔ A محل تلاقی نیمسازهای DBC است.

100 در مثلث ABC نقطهٔ O محل تقاطع عمودمنصف‌هاست. اگر عمودمنصف‌ها در نقاط D، E و F بر اضلاع عمود شده باشند، در مثلث DEF نقطهٔ O چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تقاطع نیمسازها
۲) محل تقاطع ارتفاع‌ها
۳) محل تقاطع میانه‌ها
۴) محل تقاطع عمودمنصف‌ها

101 در متوازی‌الاضلاع ABCD، قطر BD را رسم می‌کنیم، سپس اضلاع BC و CD را از سمت B و D امتداد می‌دهیم و از رأس A خطی به موازات قطر BD عبور می‌دهیم تا آنها را در M و N قطع کند. محل تلاقی ارتفاع‌های مثلث ABD برای مثلث MNC چه نقطه‌ای است؟

۱) محل همرسی میانه‌ها
۲) محل همرسی ارتفاع‌ها
۳) محل همرسی عمودمنصف‌ها
۴) محل همرسی نیمسازها

102 در یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را به دو مثلث همنهشت تقسیم کرده‌ایم. محل تلاقی ارتفاعات یکی از دو مثلث همنهشت برای مثلث اصلی چه نقطه‌ای است؟

۱) محل تلاقی میانه‌ها ۲) محل تلاقی نیمسازها

۳) محل تلاقی ارتفاع‌ها ۴) محل تلاقی عمودمنصف‌ها

103 در مثلث ABC، نیمساز داخلی زاویهٔ A، ضلع BC را در نقطهٔ D قطع می‌کند. کدام نامساوی همواره صحیح است؟ *(داخل - ریاضی - ۸۰)*

۱) $AB > BD$ ۲) $AD > BD$

۳) $AB > AD$ ۴) $BD > AD$

104 در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ اگر نیمساز BD را رسم کنیم، کدام نامساوی نادرست است؟

۱) $AD < DC$ ۲) $AB > AD$

۳) $BC > DC$ ۴) $BD < AD$

105 در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A} = 100^\circ)$ نقطهٔ M روی ساق AB است. کدام گزینه قطعاً درست است؟

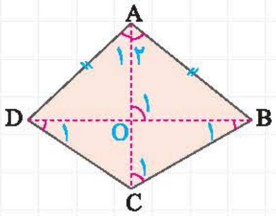
۱) $MC = MB$

۲) $MC < MB$

۳) $MC > MB$

۴) هر سه حالت امکان‌پذیر است.

106 در چهارضلعی ABCD داریم $AB = AD$ و $BC > CD$. در مورد زاویه‌ها کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟



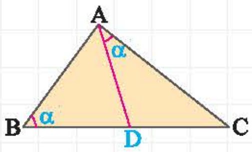
۱) $\hat{D}_1 > \hat{B}_1$

۲) $\hat{C}_1 > \hat{A}_1$

۳) $\hat{D} > \hat{B}$

۴) $\hat{O}_1 > \hat{A}_1$

107 در مثلث ABC مطابق شکل، کدام گزینه قطعاً درست است؟ (اندازه‌ها واقعی نیستند.)



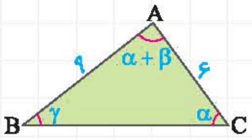
۱) $AC < DC$

۲) $AB < AC$

۳) $AD = DC$

۴) $AB > AD$

108 در شکل مقابل برای ضلع BC چند مقدار صحیح می‌توان در نظر گرفت؟



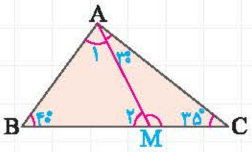
۱) ۴

۲) ۵

۳) ۶

۴) ۷

109 در مثلث ABC مطابق شکل کدام نامساوی نادرست است؟



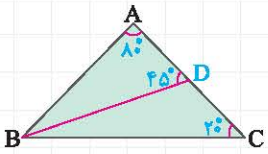
۱) $BM > AM$

۲) $AB < AC$

۳) $AC > AM$

۴) $AB > BM$

110 در شکل مقابل کدام نامساوی درست نیست؟ (اندازه‌های رسم شده واقعی نیستند.)



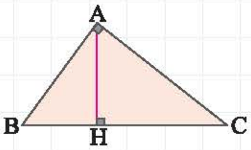
۱) $BD > DC$

۲) $BC > AB$

۳) $AD > AB$

۴) $BC > BD$

111 در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC اگر $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، کدام نامساوی الزاماً درست نیست؟



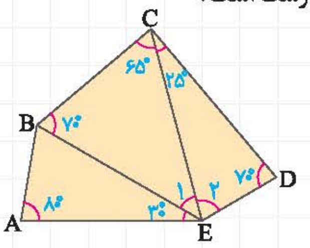
۱) $BH < AC$

۲) $HC > AB$

۳) $AH < CH$

۴) $BH < AH$

112 در شکل مقابل کدام گزینه نادرست است؟



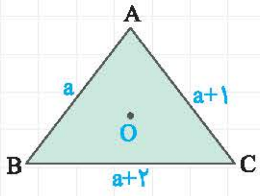
۱) $CE > AE$

۲) $AE > CE$

۳) $CD > BE$

۴) $CD > BC$

113 در مثلث ABC مطابق شکل، نقطهٔ O محل برخورد نیمسازهای داخلی است، کدام رابطه همواره درست است؟



۱) $OA = OB = OC$

۲) $OC > OB > OA$

۳) $OA > OB > OC$

۴) $OB > OC > OA$

114 در مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A} > \hat{C}$، نیمساز زاویهٔ B و عمودمنصف ضلع AB در نقطهٔ D متقاطع‌اند. M و N پای عمودهایی است که از نقطهٔ D به ترتیب بر BA و BC رسم شده‌اند. کدام نابرابری درست است؟

(داخل ریاضی - ۹۵)

۱) $NC > NB$ ۲) $NC < NB$

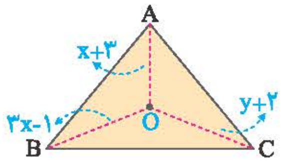
۳) $DA > DC$ ۴) $AM < BN$

87 **۴**

تحلیل مفهوم: محل تلاقی نیمسازها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، بنابراین چون فاصله تا یک ضلع ۲ است، تا دو ضلع دیگر هم ۲ است و مجموع فواصل تا دو ضلع دیگر ۴ است.

88 **۳**

تحلیل مفهوم: فرض کنید جزیره‌ای به شکل مثلث داریم، این یعنی بیرون از مثلث از هر ۳ طرف دریا قرار دارد. حال اگر شخصی درون جزیره حرکت کند و از نقطهٔ A به B برود، ممکن است فکر کند که از ساحل و دریا دور شده، در حالی که اصلاً این طور نیست. وقتی از یک ساحل دور می‌شود به ساحل دیگر نزدیک می‌شود، بنابراین دورترین نقطه از دریا، نقطه‌ای است که از همرسی ساحل‌ها به یک فاصله باشد، زیرا در غیر این صورت هر چند از یک ساحل دور است ولی به ساحل دیگری نزدیک‌تر است. حال نقطه‌ای که از همهٔ ساحل‌ها (یعنی اضلاع مثلث) به یک فاصله است، محل تلاقی نیمسازهاست.



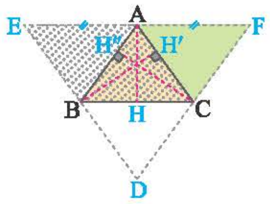
89 **۴**

نقشهٔ راه: محل تلاقی عمودمنصف‌ها از سه رأس مثلث به یک فاصله است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} x + ۳ = ۳x - ۱ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲ \\ x + ۳ = y + ۲ \Rightarrow y = ۳ \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = ۵$$

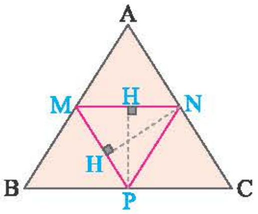
90 **۴**

نقشهٔ راه: شکل را رسم می‌کنیم، حال چون $BC \parallel EF$ و $AB \parallel DF$ است، چهارضلعی‌های AFCB و EACB هر دو متوازی‌الاضلاع هستند و در نتیجه AE و AF هر دو برابر BC هستند، یعنی نقطهٔ A وسط EF است و چون AH بر BC عمود است، بر خط موازی آن یعنی EF هم عمود است، یعنی AH عمودمنصف EF است، یعنی عمودمنصف یک ضلع مثلث DEF ارتفاع مثلث ABC است. به همین ترتیب در سایر اضلاع نیز این اتفاق تکرار می‌شود و در نتیجه محل تلاقی عمودمنصف‌های DEF محل تلاقی ارتفاع‌های ABC است.



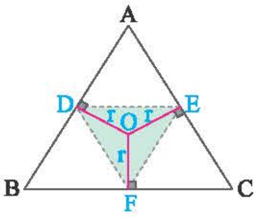
91 **۴**

نقشهٔ راه: چون ارتفاع PH بر ضلع MN عمود است و MN هم موازی BC است (وسط‌های اضلاع را به هم وصل کرده، طبق عکس تالس موازی BC است)، پس PH بر BC نیز عمود است و P نیز وسط ضلع BC است، پس PH عمودمنصف BC است و به طریق مشابه ′NH نیز عمودمنصف AC و در نتیجه O محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC است.



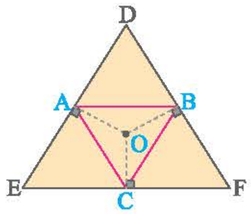
92 **۴**

تحلیل مفهوم: چون محل تلاقی نیمسازها از سه ضلع به یک فاصله است، بنابراین $OD = OE = OF = ۲$. حال در مثلث DEF نقطهٔ O از سه رأس به یک فاصله است، یعنی در محل تلاقی عمودمنصف‌های DEF قرار دارد.



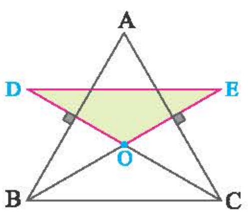
93 **۳**

تحلیل مفهوم: در مثلث DEF چون $OA = OB = OC$ است، پس نقطهٔ O از سه ضلع مثلث به یک فاصله است، یعنی O روی محل تلاقی نیمسازهای مثلث ABC است.



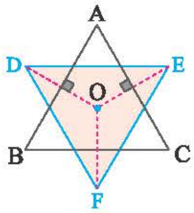
94 **۴**

تحلیل مفهوم: در مثلث ODE اضلاع AB و AC عمودمنصف هستند، چون بر ضلع عمودند و آن را نصف کرده‌اند. بنابراین رأس A محل همرسی عمودمنصف‌هاست.



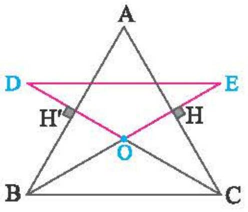
95 ۴

تحلیل مفهوم: چون محل تلاقی نیمسازها از سه ضلع به یک فاصله است، حال به اندازهٔ ۲ برابر خودشان هم که امتداد دهیم باز هم سه پاره‌خط مساوی به دست می‌آید؛ یعنی O از سه رأس DEF به یک فاصله است و در نتیجه روی محل تلاقی عمودمنصف‌های DEF است.



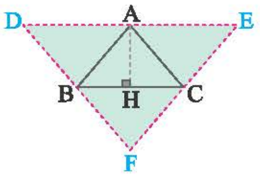
96 ۳

تحلیل مفهوم: در مثلث ODE خطوط AB و AC هم بر اضلاع OE و OD عمودند و هم آنها را نصف می‌کنند، پس عمودمنصف‌های مثلث ODE هستند که در A متقاطع‌اند، یعنی محل تلاقی عمودمنصف‌های ODE همان نقطهٔ A است.



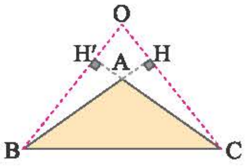
97 ۳

تحلیل مفهوم: در واقع انگار در مثلث DEF وسط‌های اضلاع را به هم وصل کرده‌ایم، در این صورت ارتفاع AH در مثلث ABC بر ضلع موازی BC یعنی OE هم عمود است، در ضمن A هم وسط DE است یعنی AH عمودمنصف ضلع DE است و در نتیجه محل تلاقی ارتفاعات مثلث ABC، محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث DEF است.



98 ۳

تحلیل مفهوم: در مثلث OBC پاره‌خط BH بر ضلع OC عمود است و هم‌چنین پاره‌خط ′CH بر ضلع OB عمود است؛ یعنی در مثلث OBC، ′CH و BH ارتفاع هستند که در A متقاطع و نقطهٔ A محل تلاقی ارتفاعات مثلث OBC است.



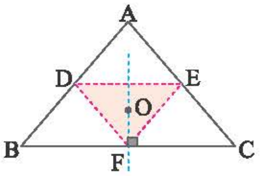
99 ۳

تحلیل مفهوم: خطوط BH و ′CH در مثلث DBC ارتفاع هستند، بنابراین در این مثلث نقطهٔ A محل تلاقی ارتفاع‌هاست و برای مثلث ABC نقطهٔ D محل تلاقی ارتفاع‌هاست.

100 ۲

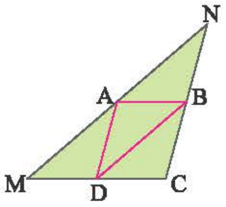
تحلیل مفهوم: نقاط D، E و F وسط اضلاع مثلث ABC هستند، بنابراین مثلث DEF مثلثی است که وسط‌های اضلاع را به هم وصل کرده است. در نتیجه اضلاع آن موازی اضلاع مثلث ABC است، در نتیجه عمودمنصف BC بر DE هم عمود است و هم ارتفاع مثلث محسوب می‌شود.

در نتیجه نقطهٔ O محل تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC برای مثلث DEF محل تلاقی ارتفاع‌هاست.



101 ۳

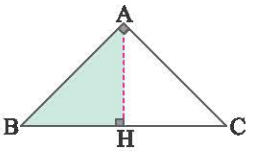
تحلیل مفهوم: چون در مثلث MNC خطوط AB، AD و BD به موازات اضلاع رسم شده‌اند، پس معلوم است که نقاط A، B و D وسط اضلاع MNC هستند (هم AMDB و هم AMBD متوازی‌الاضلاع هستند، پس $AM = DB = AN$).



حال ارتفاع‌های مثلث ABD عمودمنصف‌های MNC خواهد بود.

102 ۴

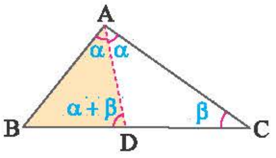
تحلیل مفهوم: نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاع‌های یکی از دو مثلث همنهشت است که برای مثلث ABC محل تلاقی عمودمنصف‌هاست، چون در مثلث‌های قائم‌الزاویه محل تلاقی عمودمنصف‌ها وسط وتر است.



103 ۱

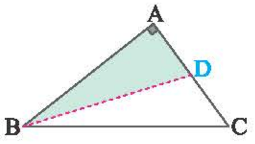
در مثلث ADC زاویهٔ خارجی رأس D برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور است، حال در مثلث ABD داریم:

$\alpha + \beta > \alpha \Rightarrow AB > BD$



104 ۴

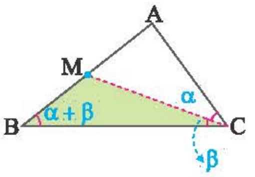
تحلیل مفهوم: در مثلث ABD ضلع BD وتر و AD ضلع زاویهٔ قائمه است، پس $BD > AD$ است و گزینهٔ «۴» نادرست است.



105 ۳

اگر دو زاویهٔ ایجاد شده توسط پاره‌خط MC روی زاویهٔ C را α و β فرض کنیم، چون مثلث متساوی‌الساقین است؛ بنابراین $\hat{B} = \alpha + \beta$.

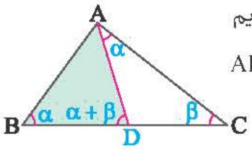
حال در مثلث MBC داریم: $\alpha + \beta > \beta \Rightarrow MC > MB$



۲ 106

تحلیل مفهوم: در مثلث BDC چون $BC > CD$ است، پس $D_۱ > B_۱$ و در مثلث ADB چون $AB = AD$ است، $\hat{B}_۲ = \hat{D}_۲$ باید باشد و در نتیجه $\hat{D} > \hat{B}$. در ضمن در مثلث OAD زاویهٔ $\hat{O}_۱$ زاویهٔ خارجی است و از زوایای داخلی غیرمجاور بزرگ‌تر است.

۴ 107



تحلیل مفهوم: با فرض $\hat{C} = \beta$ داریم $\hat{D} = \alpha + \beta$ و در نتیجه در مثلث ABD داریم $\hat{D} > \hat{B}$، بنابراین $AB > AD$.

۲ 108

تحلیل مفهوم: براساس نامساوی مثلثی باید $۹ - ۶ < BC < ۹ + ۶$ باشد. درضمن چون $\hat{A} > \hat{C}$ است؛ پس باید $BC > ۹$ باشد و درنتیجه:

$۹ < BC < ۱۵$

$\Rightarrow BC = \underbrace{۱۰,۱۱,۱۲,۱۳,۱۴}_{۵\ \text{مقدار}}$

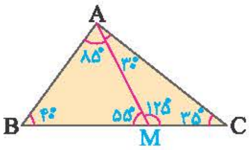
۴ 109

نقشهٔ راه: ابتدا از مجموع زوایای مثلث AMC استفاده می‌کنیم و $\hat{M}_۱$ را پیدا می‌کنیم و سپس $\hat{M}_۲$ و آن‌گاه $\hat{A}_۱$ و بعد از آن از روی زاویه‌ها دربارهٔ اضلاع قضاوت می‌کنیم:

$\overset{\Delta}{AMC} : ۱۲۵^\circ > ۳۵^\circ \Rightarrow AC > AM$

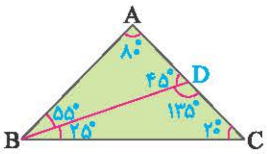
$\overset{\Delta}{ABM} : ۸۵^\circ > ۵۵^\circ > ۴۰^\circ \Rightarrow BM > AB > AM$

$\overset{\Delta}{ABC} : ۴۰^\circ > ۳۵^\circ \Rightarrow AC > AB$



۱ 110

نقشهٔ راه: از زاویه‌های داده شده به راحتی بقیهٔ زاویه‌ها معلوم است، حال سه مثلث داریم با زاویه‌های معلوم که در هر کدام می‌توانیم اضلاع را با هم مقایسه کنیم:



$\overset{\Delta}{ABC} : ۸۰^\circ > ۲۰^\circ \Rightarrow BC > AB$

$\overset{\Delta}{ABD} : ۵۵^\circ > ۴۵^\circ \Rightarrow AD > AB$

$$\overset{\Delta}{ADC} : \begin{cases} ۱۳۵^\circ > ۲۰^\circ \Rightarrow BC > BD \\ ۲۵^\circ > ۲۰^\circ \Rightarrow DC > BD \end{cases}$$

۲ 111

تحلیل گزینه‌ها: همان‌طور که گفتیم چون $\hat{B} > \hat{C}$ است بنابراین $BH < AH < HC$ یعنی ارتفاع وارد بر وتر بین دو قطعهٔ ایجاد شده روی وتر قرار دارد بنابراین گزینه‌های ۳ و ۴ درست هستند. از طرف دیگر:
$BH < AH , AH < AC \Rightarrow BH < AC$

اما در گزینهٔ ۲ قابل تأیید نیست و بستگی به مقدار زاویه‌های B و C دارد.

۲ 112

نقشهٔ راه: ابتدا زاویه‌های نامعلوم را مشخص می‌کنیم:

$\overset{\Delta}{ABE} : \hat{B} + ۸۰^\circ + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۷۰^\circ$

$\overset{\Delta}{BCE} : \hat{E}_۱ + ۷۰^\circ + ۶۵^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{E}_۱ = ۴۵^\circ$

$\overset{\Delta}{CDE} : \hat{E}_۲ + ۲۵^\circ + ۷۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{E}_۲ = ۸۵^\circ$

حال در هر کدام از مثلث‌ها می‌توانیم اضلاع را مقایسه کنیم:

$\overset{\Delta}{ABE} : ۸۰^\circ > ۷۰^\circ > ۳۰^\circ \Rightarrow BE > AE > AB$

$\overset{\Delta}{BCE} : ۷۰^\circ > ۶۵^\circ > ۴۵^\circ \Rightarrow CE > BE > BC \Rightarrow$

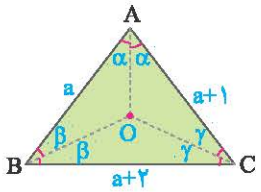
گزینهٔ «۲» نادرست است.

$\overset{\Delta}{CDE} : ۸۵^\circ > ۷۰^\circ > ۲۵^\circ \Rightarrow CD > CE > DE$

۲ 113

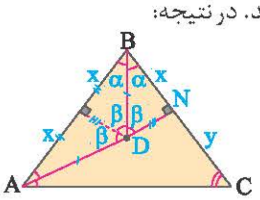
تحلیل مفهوم: چون $BC > AC > AB$ است، بنابراین $۲\alpha > ۲\beta > ۲\gamma$ و در نتیجه $\alpha > \beta > \gamma$ می‌باشد. حال در مثلث OAB چون $\alpha > \beta$ است، پس $OB > OA$ و هم‌چنین در مثلث OBC چون $\beta > \gamma$ است، پس $OC > OB$ و در نتیجه:

$OC > OB > OA$



۱ 114

نقشهٔ راه: در مثلث‌های MBD و BDN همنهشت هستند، بنابراین $BN = \alpha$ می‌باشد. در نتیجه:



$\hat{A} > \hat{C} \Rightarrow x + y > x + x \Rightarrow y > x$

$\Rightarrow NC > NB$