CHAPTER 1 دایــــره

LESSON 1.1 مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

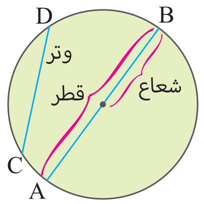
دایره یکی از اشکال مهم در هندسه است که در پایه‌های قبل با تعریف و برخی ویژگی‌های آن آشنا شدید. برای درک بهتر مطالب مربوط به دایره این درس را به ۳ بخش کلی تقسیم‌بندی کرده‌ایم.

PART 1 مفاهیم اولیه

در این بخش ما سه موضوع اصلی و اساسی را مورد بررسی و یادآوری قرار می‌دهیم، یکی تعریف اولیه است، دیگری وضعیت نقطه و دایره و در آخر وضعیت خط و دایره.

تعاریف

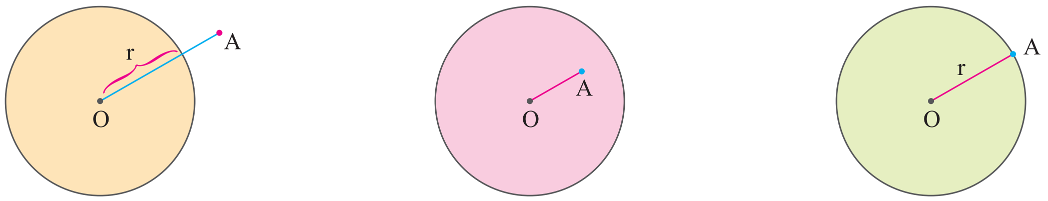
- **دایره:** مجموعه تمام نقاطی در صفحه را که از یک نقطه ثابت (مرکز) به یک فاصله (شعاع) باشند دایره گویند. دایره C به مرکز O و شعاع r را به صورت $C(O, r)$ نمایش می‌دهیم.
- **شعاع دایره:** پاره‌خطی که یک سرآن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.
- **وتر دایره:** پاره‌خطی که دو سرآن روی دایره باشد.
- **قطر دایره:** وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.



وضعیت نقطه و دایره

هر نقطه مانند A از صفحه نسبت به دایره $C(O, r)$ سه وضعیت دارد این وضعیت‌ها با توجه به فاصلهٔ نقطهٔ A از مرکز دایره به صورت زیر است:

1 $OA = r$: نقطه A روی دایره قرار دارد. **2** $OA < r$: نقطه A درون دایره قرار دارد. **3** $OA > r$: نقطه A بیرون دایره قرار دارد.



EXAMPLE

1. اگر نقطهٔ M درون دایرهٔ $C(O, ۳x - ۲)$ باشد. با فرض $OM = x^۲$ کدام مقدار برای x قابل قبول است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

پاسخ: گزینهٔ (۴)

نقشهٔ راه: اگر نقطهٔ M درون دایره باشد فاصله‌اش تا مرکز دایره باید کمتر از شعاع باشد پس داریم:

$$OM < R \Rightarrow x^۲ < ۳x - ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \Rightarrow (x - ۱)(x - ۲) < ۰ \Rightarrow ۱ < x < ۲$$

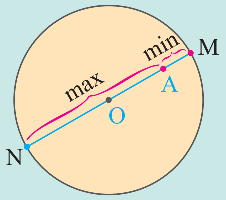
از طرفی شعاع دایره نمی‌تواند عددی منفی باشد پس $۳x - ۲ > ۰$ که به نامعادلهٔ $x > \frac{۲}{۳}$ می‌رسد و تأثیری در جواب ندارد، بنابراین تنها مقدار قابل قبول $\sqrt{۲} = ۱/۴$ است.

NOTE

1 اگر نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,R)$ باشد و $OA = d$، آنگاه بیشترین و کمترین فاصلهٔ نقاط دایره تا نقطهٔ A مطابق شکل برابر است با:

$\min = AM = R - d$

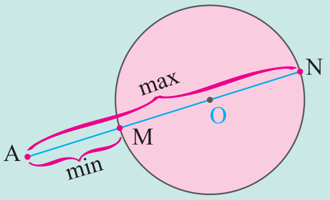
$\max = AN = R + d$



2 اگر نقطهٔ A خارج از دایرهٔ $C(O,R)$ باشد و $OA = d$، آنگاه بیشترین و کمترین فاصلهٔ نقاط دایره تا نقطهٔ A با توجه به شکل برابر است با:

$\min = AM = d - R$

$\max = AN = d + R$



EXAMPLE

2. فاصلهٔ A تا مرکز دایرهٔ $C(O,R)$ بیشتر از شعاع دایره است. اگر مجموع بیشترین و کمترین فاصلهٔ A تا نقاط دایره برابر ۱۸ باشد طول AO چقدر است؟

۱) ۹ ۲) $۹ + R$ ۳) ۱۸ ۴) $۹ - R$

پاسخ: گزینهٔ (۱)

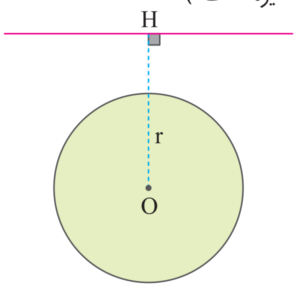
نقشهٔ راه: نقطهٔ A خارج از دایره است چون فاصله‌اش تا مرکز، بیشتر از شعاع دایره است. بنابراین بیشترین و کمترین فاصلهٔ نقاط دایره تا نقطهٔ A برابر $d + R, d - R$ است:

$(d - R) + (d + R) = ۱۸ \Rightarrow ۲d = ۱۸ \Rightarrow d = ۹ \Rightarrow OA = ۹$

اوضاع نسبی یک خط و یک دایره

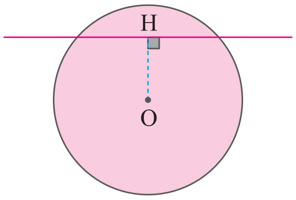
خط و دایره نسبت به یکدیگر سه وضعیت دارند، که برای بررسی آنها باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط را داشته باشیم در این صورت وضعیت‌های زیر قابل بررسی است:

1 غیرقاطع: خط و دایره هیچ نقطه اشتراکی ندارند و خط را نسبت به دایره غیرقاطع می‌نامیم. (خط خارج از دایره است.)



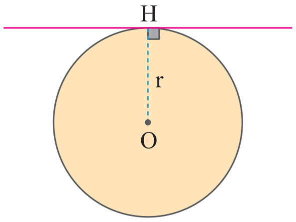
$OH > r$

2 قاطع: خط و دایره در دو نقطه اشتراک دارند که خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.



$OH < r$

3 مماس: خط و دایره در یک نقطه اشتراک دارند و خط را بر دایره مماس می‌نامیم.



$OH = r$

دو شرط برای مماس بودن خط بر دایره

NOTE

1 یک خط بر دایره مماس است، اگر و تنها اگر فاصلهٔ مرکز دایره از خط برابر شعاع دایره باشد.

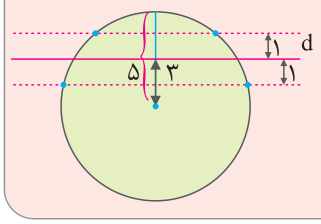
2 یک خط بر دایره مماس است اگر و تنها اگر این خط بر شعاع دایره در نقطهٔ تماس عمود باشد.

EXAMPLE

3. خط d به فاصلهٔ ۳ واحد از مرکز دایرهٔ $C(O,5)$ قرار دارد. چند نقطه روی دایره می‌توان یافت که از خط d به فاصلهٔ واحد باشند؟

۱) صفر ۲) دو ۳) سه ۴) چهار

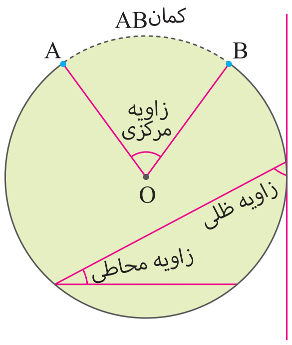
پاسخ: گزینهٔ (٤)



نقشهٔ راه: می‌دانیم نقاطی که به فاصلهٔ k واحد از یک خط قرار دارند واقع بر دو خط موازی آن و به فاصلهٔ k واحد از خط هستند بنابراین دو خط موازی با d و به فاصلهٔ واحد از آن رسم می‌کنیم با توجه به مقادیر شعاع دایره و فاصلهٔ خط از مرکز دایره، این دو خط دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

PART 2 زاویه‌ها

اگر یک زاویه و یک دایره داشته باشیم با توجه به موقعیت رأس زاویه که می‌تواند درون دایره (حتی مرکز دایره)، روی دایره یا بیرون دایره باشد، حالت‌های مختلفی می‌توان تصور کرد و در هر حالت اندازهٔ زاویه را می‌توانیم به کمان‌های دایره ارتباط دهیم. در این بخش قرار است این حالت‌ها را بررسی کنیم:

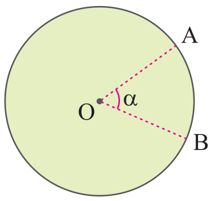


زاویهٔ مرکزی

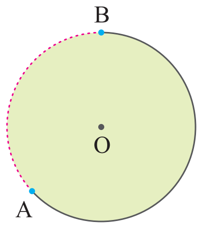
تعریف: زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع است و اضلاع آن دو شعاع از دایره است، زاویهٔ مرکزی نام دارد.

نکات مهم زیر دربارهٔ زاویهٔ مرکزی در کتاب درسی مطرح شده است.

- بنا به قرارداد اندازهٔ زاویهٔ مرکزی برابر کمان روبه‌رو می‌باشد.



$$\alpha = A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB}$$

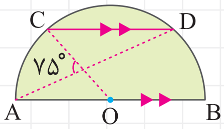


- **کمان:** هر دو نقطه از دایره مانند A، B، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی دایره مشخص می‌کند و معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچک‌ترِ مشخص شده توسط A و B است.
- **اندازه کمان:** همان اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.
- **طول کمان:** با توجه به اینکه محیط دایره یک کمان 360° است. طول کمان از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

FORMUL

$$\frac{\text{طول کمان } \overset{\frown}{AB}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان } \overset{\frown}{AB}}{360^\circ}$$

46 در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل CD با قطر موازی است. اندازهٔ کمان CD چقدر است؟ *(تمرین کتاب درسی)*



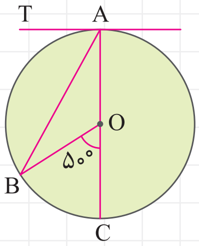
۱) ۷۵°

۲) ۶۰°

۳) ۸۰°

۴) قابل محاسبه نیست.

47 در شکل مقابل O مرکز دایره و AT بر دایره مماس است. زاویهٔ TAB چقدر است؟



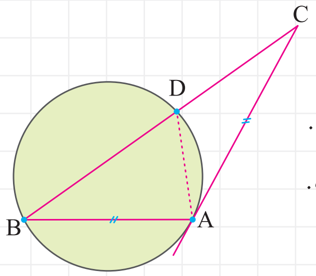
۱) ۸۰°

۲) ۵۰°

۳) ۱۰۰°

۴) ۶۵°

48 در شکل روبه‌رو AC بر دایره مماس است و AB = AC. کدام نتیجه‌گیری درست است؟



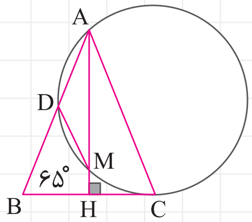
۱) مثلث ABD قائم‌الزاویه است.

۲) مثلث ABD متساوی‌الساقین است.

۳) مثلث ADC متساوی‌الساقین است.

۴) BD قطر دایره است.

49 در شکل زیر AB = AC و دایره در نقطهٔ C بر BC مماس است. اگر ارتفاع AH دایره را در M قطع کند، زاویهٔ AMD چقدر است؟



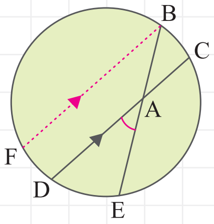
۱) ۱۰°

۲) ۱۲°

۳) ۱۵°

۴) ۱۸°

50 در دایرهٔ شکل مقابل BF∥CD و $\overset{\frown}{DE} = ۳۴^\circ$ و $\overset{\frown}{DF} = ۱۸^\circ$ اندازهٔ زاویهٔ DAE چقدر است؟



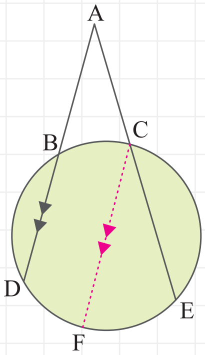
۱) ۳۵°

۲) ۱۷°

۳) ۲۶°

۴) ۴۰°

51 با توجه به شکل BD∥CF و $\overset{\frown}{DF} = ۲۵^\circ$ و $\overset{\frown}{EF} = ۱۰۵^\circ$ زاویهٔ $\hat{A}$ چقدر است؟ *(فعالیت کتاب درسی)*



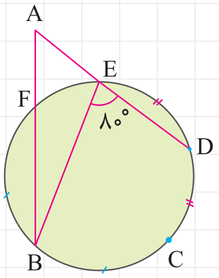
۱) ۶۵°

۲) $۵۲/۵^\circ$

۳) ۴۰°

۴) ۲۵°

52 در شکل زیر نقاط B و D وسط کمان‌های CF و CE هستند. زاویهٔ A چقدر است؟



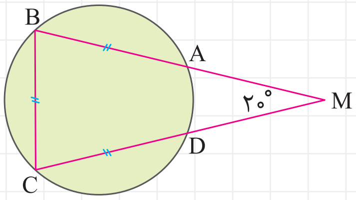
۱) ۴۰°

۲) ۵۰°

۳) ۶۰°

۴) ۷۰°

53 در شکل مقابل اگر AB = BC = CD باشد، کمان $\overset{\frown}{AD}$ چقدر است؟



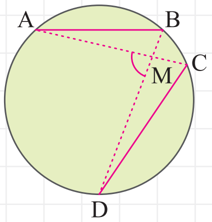
۱) ۶۰°

۲) ۴۰°

۳) ۲۰°

۴) ۸۰°

54 در شکل روبه‌رو اگر AB=R و $CD = \sqrt{۳}R$ زاویهٔ $\hat{M}$ چقدر است؟



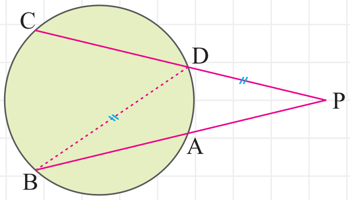
۱) ۹۰°

۲) ۷۵°

۳) ۱۰۰°

۴) ۶۰°

55 در شکل مقابل اگر $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ و BD=PD زاویهٔ $\hat{P}$ چقدر است؟



۱) $\frac{۱۸۰}{۵}$

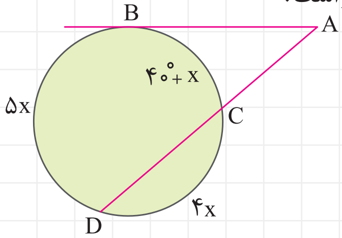
۲) $\frac{۱۸۰}{۱۰}$

۳) $\frac{۱۸۰}{۷}$

۴) $\frac{۱۸۰}{۹}$

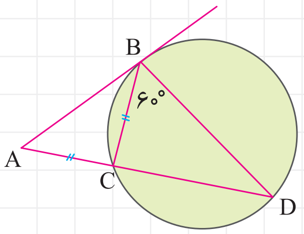
درس 1
TEST

56 در شکل مقابل AB بر دایره مماس است با توجه به اندازهٔ کمان‌های داده شده زاویهٔ A چقدر است؟



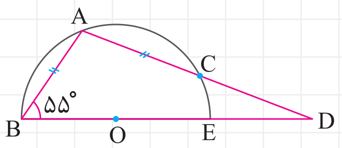
۱) ۴۴°
۲) ۳۶°
۳) ۴۵°
۴) ۵۴°

57 در شکل مقابل AB بر دایره مماس است و AC = BC زاویهٔ A چقدر است؟



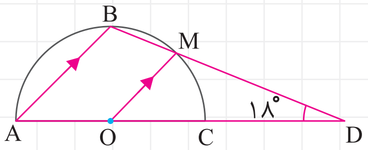
۱) ۳۰°
۲) ۵۰°
۳) ۴۵°
۴) ۴۰°

58 در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل اگر AB = AC زاویهٔ $\hat{D}$ چقدر است؟



۱) ۱۸°
۲) ۱۵°
۳) ۲۲/۵°
۴) ۲۰°

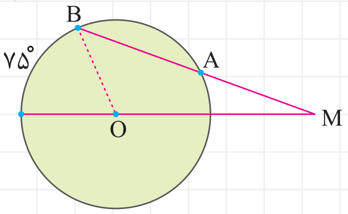
59 در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل AB∥OM زاویهٔ A کدام است؟



۱) ۳۶°
۲) ۴۸°
۳) ۴۰°
۴) ۵۴°

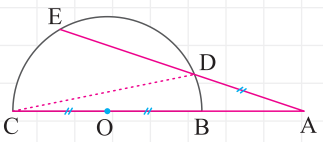
60 مطابق شکل اگر MA با شعاع دایره برابر باشد، زاویهٔ M چقدر است؟ (O مرکز دایره است)

(مشابه تمرین کتاب درسی)



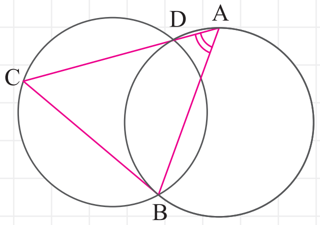
۱) ۳۷/۵°
۲) ۳۰°
۳) ۱۵°
۴) ۲۵°

61 در نیم‌دایرهٔ شکل مقابل AD با شعاع برابر است اگر $A\hat{C}D = 10^\circ$ اندازهٔ کمان CE چقدر است؟



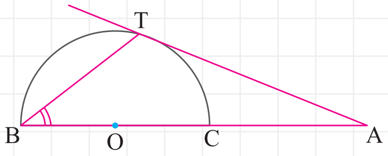
۱) ۴۰°
۲) ۷۰°
۳) ۶۰°
۴) ۵۰°

62 در شکل مقابل دو دایره برابرند و AC از نقطهٔ D می‌گذرد اگر $A\hat{B}C = 80^\circ$ زاویهٔ BAC کدام است؟



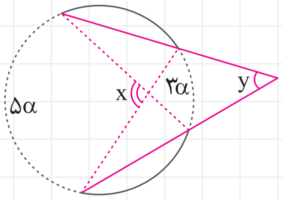
۱) ۶۰°
۲) ۴۰°
۳) ۵۰°
۴) ۸۰°

63 در شکل مقابل AT بر نیم‌دایره مماس است. اگر $\hat{B} = 2\hat{A}$ اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{CT}$ چقدر است؟



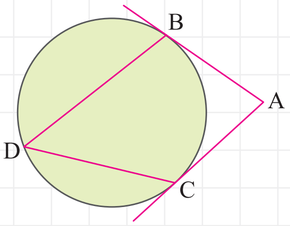
۱) ۵۴°
۲) ۸۰°
۳) ۶۰°
۴) ۷۲°

64 در شکل زیر زاویهٔ x چند برابر زاویهٔ y است؟



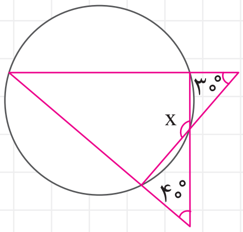
۱) $\frac{5}{3}$
۲) ۴
۳) ۲
۴) ۳

65 در شکل مقابل AB و AC بر دایره مماس هستند. اگر مجموع دو زاویهٔ $\hat{D}$ و $\hat{A}$ برابر ۱۵۰° باشد. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ کدام است؟



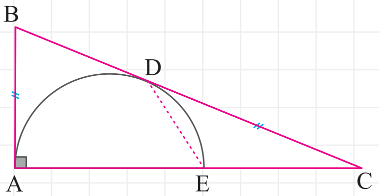
۱) ۸۰°
۲) ۷۲°
۳) ۶۰°
۴) ۹۰°

66 در شکل زیر x کدام است؟



۱) ۱۲۵°
۲) ۱۲۰°
۳) ۱۱۵°
۴) ۱۱۰°

67 در شکل نیم‌دایره درون مثلث ABC محاط شده و AB و BC بر نیم‌دایره مماس هستند. اگر AB = CD زاویهٔ $C\hat{E}D$ چقدر است؟



۱) ۱۵۰°
۲) ۱۲۰°
۳) ۹۰°
۴) ۱۳۵°

1 | 54

نقشهٔ راه: وترهایی که اندازهٔ آنها نسبتی با شعاع دایره دارد کمان‌های خاص دارند. اگر $AB = R$ آنگاه $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$ و در حالتی که $CD = \sqrt{۳}R$ آنگاه $\overset{\frown}{CD} = ۱۲۰^\circ$ پس داریم:

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{۲} = \frac{۶۰^\circ + ۱۲۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow A\hat{M}D = ۹۰^\circ$$

3 | 55

تحلیل و محاسبه: کمان‌های برابر متناظر با وترهای مساوی هستند. یعنی اگر $\overset{\frown}{AD} = x$ آنگاه داریم:

$$BD = PD \Rightarrow \hat{B} = \hat{P} = \frac{x}{۲} \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{x}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۲x$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{AB} = ۲x$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD} = ۷x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = \frac{۳۶۰^\circ}{۷}$$

$$\Rightarrow \hat{P} = \frac{x}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۷}$$

1 | 56

تحلیل و محاسبه: می‌دانیم مجموع کل کمان‌های دایره برابر ۳۶۰° است پس:

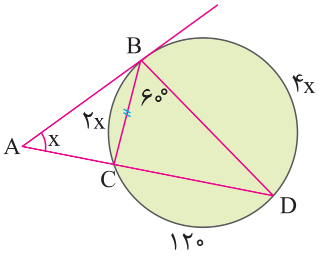
$$۵x + ۴x + x + ۴۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۳۲^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۷۲^\circ}{۲} = ۴۴^\circ$$

4 | 57

تحلیل و محاسبه: کمان‌ها را برحسب زاویهٔ A می‌نویسیم و از زاویه‌های ظلی و بیرون از دایره استفاده می‌کنیم. اگر $\hat{A} = x$ پس $A\hat{B}C = x$ زاویهٔ ظلی است و $\overset{\frown}{BC} = ۲x$

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{BC}}{۲} = x \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = ۴x$$



کمان $\overset{\frown}{CD}$ نیز دو برابر $D\hat{B}C$ است پس:

$$\overset{\frown}{CD} = ۱۲۰^\circ$$

مجموع کمان‌های دایره ۳۶۰° است یعنی:

$$۲x + ۴x + ۱۲۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

2 | 58

تحلیل و محاسبه: زاویهٔ B محاطی است و کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{AC}$ برابرند.

$$\hat{B} = ۵۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ACE} = ۱۱۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۷۰^\circ = \overset{\frown}{AC}$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{CE} = ۱۱۰^\circ - ۷۰^\circ = ۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CE}}{۲} = \frac{۷۰^\circ - ۴۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

2 | 59

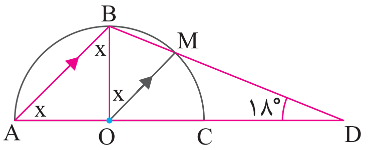
نقشهٔ راه: با توجه به موازی بودن AB و OM و تساوی پاره‌خط‌های OA و OB اگر از O به B وصل کنیم می‌توانیم از این اطلاعات استفاده کنیم پس از O به B وصل می‌کنیم اگر $\hat{A} = x$ داریم:

$$\hat{A} = A\hat{B}O = B\hat{O}M = x \Rightarrow \overset{\frown}{BM} = x \Rightarrow \overset{\frown}{MC} = x$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۸۰^\circ - ۲x$$

$$\hat{D} = ۱۸^\circ = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MC}}{۲} \Rightarrow ۱۸^\circ = \frac{۱۸۰^\circ - ۲x - x}{۲}$$

$$\Rightarrow ۳x = ۱۴۴^\circ \Rightarrow x = ۴۸^\circ$$

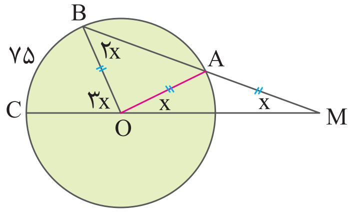


4 | 60

نقشهٔ راه: از مرکز دایره به A وصل می‌کنیم تا بتوانیم از تساوی MA با شعاع دایره استفاده کنیم پس با توجه به شکل اگر $\hat{M} = x$ داریم:

$$MA = AO = BO \Rightarrow A\hat{O}M = x, O\hat{A}B = O\hat{B}A = ۲x$$

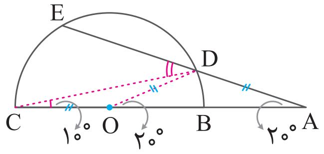
$$\Rightarrow B\hat{O}C = ۳x = ۷۵^\circ \Rightarrow x = ۲۵^\circ$$



3 | 61

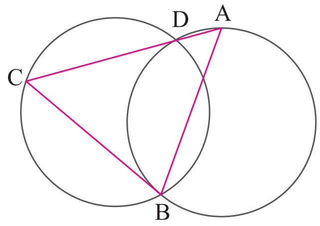
نقشهٔ راه: برای استفاده از تساوی AD با شعاع دایره نقطهٔ O را به D وصل می‌کنیم:

$$AD = DO = OC \Rightarrow C\hat{D}E = ۳A\hat{C}D = ۳۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CE} = ۶۰^\circ$$



3 | **62**

نقشهٔ راه: در حالتی که دو دایرهٔ متقاطع با هم برابرند کمان‌های نظیر وتر مشترک دو دایره برابرند، یعنی زاویه‌های محاطی روبه‌رو به آنها برابرند:



$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{۱۸۰^\circ - \hat{B}}{۲} = ۵۰^\circ$$

4 | **63**

تحلیل و محاسبه: اندازهٔ زاویه‌ها و کمان‌ها را برحسب زاویهٔ A می‌نویسیم. اگر $\hat{A} = x$ پس $\hat{B} = ۲x$ یعنی $\overset{\frown}{CT} = ۴x$ از طرفی:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BT} - \overset{\frown}{CT}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BT} = ۶x$$

$$\overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{CT} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۸^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CT} = ۷۲^\circ$$

2 | **64**

تحلیل و محاسبه: اندازهٔ زاویه‌های درون و بیرون دایره همانند زاویه‌های x و y برحسب کمان‌ها به‌صورت زیر است:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{۵\alpha + ۳\alpha}{۲} = ۴\alpha \\ y = \dfrac{۵\alpha - ۳\alpha}{۲} = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۴y$$

3 | **65**

تحلیل و محاسبه: زاویه‌های بیرون دایره و محاطی را برحسب کمان‌ها می‌نویسیم پس:

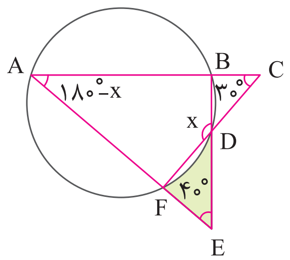
$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BDC} - \overset{\frown}{BC}}{۲}, \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

$$\hat{A} + \hat{D} = \frac{\overset{\frown}{BDC}}{۲} = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BDC} = ۳۰۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - ۳۰۰^\circ = ۶۰^\circ$$

1 | **66**

تحلیل و محاسبه: زاویه‌های محاطی در دایره را برحسب کمان‌ها می‌نویسیم. زاویه‌های روبه‌رو در دایره مکمل هم هستند پس:



$$\hat{A} = ۱۸۰^\circ - x$$

زاویهٔ $E\hat{F}D$ زاویهٔ خارجی برای مثلث ACF است پس:

$$E\hat{F}D = ۳۰^\circ + ۱۸۰^\circ - x$$

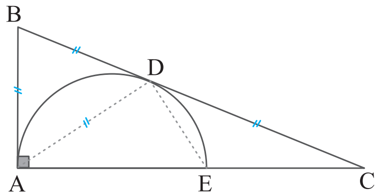
مجموع زاویه‌های مثلث DEF را می‌نویسیم:

$$۴۰^\circ + (۳۰^\circ + ۱۸۰^\circ - x) + (۱۸۰^\circ - x) = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲۵^\circ$$

2 | **67**

نقشهٔ راه: اگر از یک نقطه بر دایره مماس رسم کنیم طول این مماس‌ها با هم برابر است و نقطهٔ D وسط وتر مثلث قائم‌الزاویه است بنابراین اگر از A به D وصل کنیم میانهٔ وارد بر وتر بوده و نصف وتر است یعنی:

$$BD = BA = DC = AD$$

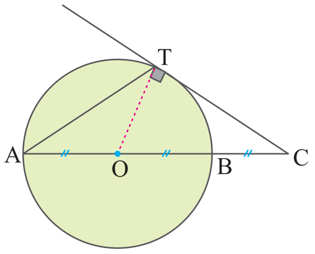


پس $\hat{C} = ۳۰^\circ, \hat{B} = ۶۰^\circ$ بنابراین $\overset{\frown}{DE} = ۶۰^\circ, \overset{\frown}{BD} = ۱۲۰^\circ$

$$\Rightarrow C\hat{D}E = \frac{\overset{\frown}{DE}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow D\hat{E}C = ۱۲۰^\circ$$

1 | **68**

نقشهٔ راه: از T به مرکز دایره وصل می‌کنیم تا از تساوی‌ها و اطلاعات داده شده استفاده شود مثلث OTC قائم‌الزاویه است و ضلع روبه‌رو به زاویهٔ C نصف وتر است پس:



$$\hat{C} = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{O}T = ۱۲۰^\circ$$

$$\Rightarrow O\hat{A}T = O\hat{T}A = ۳۰^\circ$$

3 | **69**

تحلیل و محاسبه: زاویه‌های B و C را برحسب کمان‌های دایره می‌نویسیم و روابط را با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} = ۸۰^\circ = \dfrac{\overset{\frown}{PNMQ} - \overset{\frown}{PQ}}{۲} \\ \hat{C} = ۷۰^\circ = \dfrac{\overset{\frown}{MQPN} - \overset{\frown}{MN}}{۲} \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع}} ۱۵۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{PNMQ} - \overset{\frown}{MN} + \overset{\frown}{MQPN} - \overset{\frown}{PQ}}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱۵۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{PN} + \overset{\frown}{MQ} + \overset{\frown}{PN} + \overset{\frown}{MQ}}{۲} \Rightarrow ۱۵۰^\circ = \overset{\frown}{PN} + \overset{\frown}{MQ}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{PN} + \overset{\frown}{MQ}}{۲} = ۷۵^\circ$$

1 | **70**

نقشهٔ راه: وتری که با شعاع برابر باشد متناظر با کمان ۶۰° است و وتری که به طول $\sqrt{۲}R$ باشد متناظر با کمان ۹۰° است بنابراین:

$$\overset{\frown}{AB} = ۹۰^\circ, \overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = ۳۰^\circ$$

CHAPTER 3

روابط طولی در مثلث

3.4 LESSON

قضیهٔ هرون (محاسبهٔ ارتفاع‌ها و مساحت مثلث)

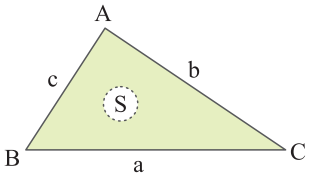
در این درس ما دو قضیهٔ اساسی و پرکاربرد در محاسبهٔ مساحت را یاد می‌گیریم یکی محاسبهٔ مساحت به وسیلهٔ قضیهٔ معروفی به نام قضیهٔ هرون و دیگری محاسبهٔ مساحت با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی:

PART 1 قضیهٔ هرون

در مثلث ABC، اگر طول اضلاع a و b و c و p نصف محیط باشد، مساحت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

FORMUL

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



دقت کنید که $p = \frac{a+b+c}{۲}$ می‌باشد! (همان نصف محیط) و در واقع می‌توانیم مساحت مثلث را مستقیماً به اضلاع ارتباط دهیم. حال برای این‌که انسجام بیشتری به مطالب بدهیم مسائل مطرح شده و قابل طرح در قضیهٔ هرون را می‌توان به چند تیپ عمده تقسیم می‌کنیم:

اضلاع غیر رادیکالی و متفاوتند

به‌طور کلی وقتی از قضیه هرون برای محاسبهٔ مساحت استفاده می‌کنیم که اضلاع رادیکالی نباشند و همهٔ اعداد متفاوت باشند. به مثال زیر دقت کنید:

EXAMPLE

31. مساحت مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ چقدر است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

۱) ۴۲ ۲) ۸۴ ۳) ۲۱ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ (۲)

نقشهٔ راه: برای محاسبهٔ مساحت به کمک هرون ابتدا مقدار ۲P یعنی محیط و آن‌گاه P یعنی نصف محیط را محاسبه می‌کنیم و سپس از قاعدهٔ هرون استفاده می‌کنیم:

$$۲P = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ = ۴۲ \Rightarrow P = ۲۱ \Rightarrow S = \sqrt{۲۱ \times (۲۱-۱۳)(۲۱-۱۴)(۲۱-۱۵)}$$

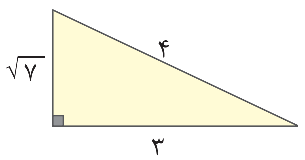
$$\Rightarrow S = \sqrt{۲۱ \times ۸ \times ۷ \times ۶} = \sqrt{۷^۲ \times ۳^۲ \times ۲^۴} = ۷ \times ۳ \times ۴ = ۸۴$$

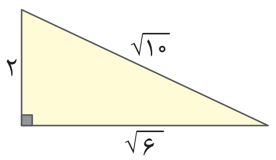
اضلاع رادیکالی و متفاوت

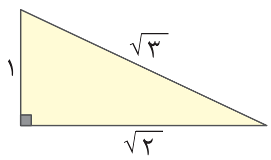
اگر طول هر سه ضلع مثلث داده شده و حداقل یک ضلع رادیکالی باشد با دو مدل مسأله مواجه‌ایم یکی حالتی که اعداد داده شده در رابطهٔ فیثاغورس صدق کنند و دیگری حالتی که اعداد فیثاغورسی نباشند:

اعداد در رابطهٔ فیثاغورس صدق می‌کنند.

اگر سه ضلع مثلثی را داشتیم که بعضی از آنها اعداد رادیکالی بودند، رابطهٔ فیثاغورس را برای آنها چک می‌کنیم، اگر صدق کردند، دیگری نیازی به راه‌های دیگر نیست و مساحت به راحتی به‌دست می‌آید:







EXAMPLE

32. در مثلثی به اضلاع ۴ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۶}$ مساحت چقدر است؟

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) $\sqrt{۱۵}$

۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $\sqrt{۵}$

پاسخ: گزینهٔ (۲)

تحلیل و محاسبه: چون $\sqrt{۶} < \sqrt{۱۰} < ۴$ است و $(\sqrt{۶})^۲ + (\sqrt{۱۰})^۲ = ۴^۲$ بنابراین مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times \sqrt{۱۰} \times \sqrt{۶} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۶۰} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲^۲ \times ۳ \times ۵} = \sqrt{۱۵}$$

اعداد در رابطهٔ فیثاغورس صدق نمی‌کنند.

اگر اعداد رادیکالی بودند (حتی یکی) ولی در رابطهٔ فیثاغورس صدق نکردند، با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها، کسینوس یک زاویه را به‌دست می‌آوریم [اگر عدد معروف به‌دست نیامد از رابطهٔ $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ مقدار $\sin x$ را پیدا می‌کنیم] و سپس زاویه را پیدا کرده و از رابطهٔ زیر مساحت را به‌دست می‌آوریم:

FORMUL

$$S = \frac{۱}{۲} b \times c \times \sin\hat{A}$$

در صفحات آینده این رابطه را به طور مفصل‌تری مورد بحث قرار می‌دهیم.

EXAMPLE

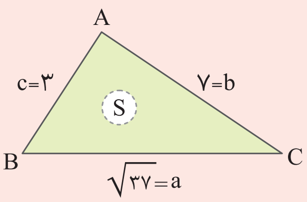
33. مساحت مثلثی به اضلاع ۳ و ۷ و $\sqrt{۳۷}$ چند برابر $\sqrt{۳}$ است؟

۱) $\frac{۱۷}{۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۴}$

۳) $\frac{۲۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۹}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ (۲)

نقشهٔ راه: چون $(۳)^۲ + (\sqrt{۳۷})^۲ \neq ۷^۲$ بنابراین اعداد داده شده در رابطهٔ فیثاغورس صادق نیستند، بنابراین ابتدا از قضیهٔ کسینوس‌ها استفاده می‌کنیم و کسینوس رو به ضلع رادیکالی را پیدا می‌کنیم و به کمک آن سینوس آن زاویه را به دست می‌آوریم:



$$a^۲ = b^۲ + c^۲ - ۲b.c.\cos\hat{A} \Rightarrow ۳۷ = ۴۹ + ۹ - ۲ \times ۳ \times ۷ \times \cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{A} = \frac{۲۱}{۴۲} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = ۶۰^\circ \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

بنابراین مساحت مثلث ABC به راحتی قابل محاسبه است:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} b.c.\sin\hat{A} = \frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۷ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۲۱}{۴}\sqrt{۳}$$

! اگر در این مدل از دستور هرون استفاده کنیم عبارت‌های زیر رادیکال بسیار پیچیده خواهد بود و باید منتظر محاسبات صعب‌العبوری باشید.

دو ضلع از سه ضلع برابرند.

اگر دو ضلع از سه ضلع مثلث برابر باشند مثلث متساوی‌الساقین است. در این حالت اصلاً به هرون یا راه‌های دیگر فکر نمی‌کنیم و بی‌درنگ ارتفاع وارد بر قاعده (ضلع متفاوت با دو تای دیگر) را رسم می‌کنیم و با فیثاغورس طول ارتفاع را به‌دست می‌آوریم، سپس از رابطهٔ زیر مساحت را به‌دست می‌آوریم:

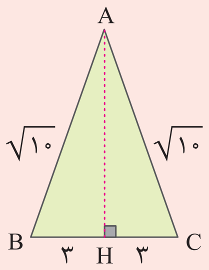
FORMUL

$$S = \frac{۱}{۲} a h_a$$

EXAMPLE

34. مساحت مثلثی به اضلاع ۶ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۰}$ چقدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۹



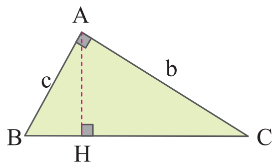
پاسخ: گزینهٔ (۱)

نقشهٔ راه: چون مثلث متساوی‌الساقین است ارتفاع AH را رسم می‌کنیم؛ این ارتفاع میانه نیز هست و ضلع مقابل را نصف می‌کند، حال به کمک فیثاغورس طول ارتفاع را به‌دست می‌آوریم و سپس به محاسبه مساحت می‌پردازیم:

$$AH = \sqrt{۱۰ - ۹} = ۱ \Rightarrow S = \frac{۱}{۲} AH \times BC = \frac{۱}{۲} \times ۱ \times ۶ = ۳$$

هرون در مثلث قائم‌الزاویه

به راحتی می‌توان ثابت کرد در مثلث‌های قائم‌الزاویه رابطهٔ زیر برقرار است:



FORMUL

$$p(p-a) = (p-b)(p-c)$$

بنابراین به این نتیجه می‌رسیم که طبق فرمول هرون مساحت مثلث قائم‌الزاویه برابر است با:

FORMUL

$$S = p(p-a) = (p-b)(p-c)$$

EXAMPLE

35. در یک مثلث قائم‌الزاویه طول کوچک‌ترین میانه ۵ و محیط مثلث ۲۴ است مساحت مثلث چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

پاسخ: گزینهٔ (۱)

نقشهٔ راه: می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است، بنابراین اندازهٔ وتر برابر است با $a = ۲m_a = ۱۰$ و از طرفی محیط مثلث یعنی $۲p = ۲۴$ است بنابراین $p = ۱۲$ خواهد بود و حال طبق هرون در قائم‌الزاویه داریم:

$$S = p(p-a) = ۱۲ \times (۱۲ - ۱۰) = ۲۴$$

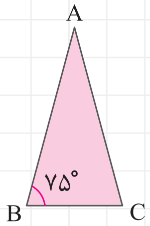
محاسبهٔ ارتفاع مثلث

به کمک رابطهٔ هرون توانستیم مساحت مثلث را به‌دست آوریم. بنابراین می‌توانیم اندازهٔ ارتفاع را نیز محاسبه کنیم. البته مدل‌های مختلفی را باید در نظر بگیریم:

150 مساحت مثلث ABC با $AB = ۱۰$ و $AC = ۶$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ کدام است؟ *(تمرین کتاب درسی)*

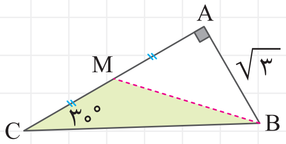
۱) $۱۵\sqrt{۳}$
۲) $۳۰\sqrt{۳}$
۳) ۳۰
۴) ۱۵

151 در شکل روبه‌رو $AB = AC$ اگر $S_{ABC} = ۱۸$ طول ضلع AB کدام است؟



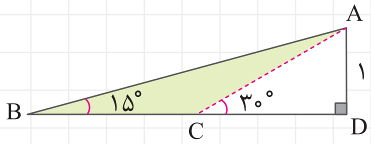
۱) ۳
۲) $۳\sqrt{۲}$
۳) ۶
۴) $۶\sqrt{۲}$

152 در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل زیر M وسط AC است مساحت مثلث BCM کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

153 در شکل زیر مساحت مثلث ABC کدام است؟

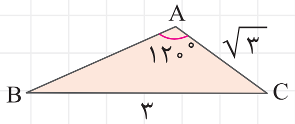


۱) $\sqrt{۳}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) $\sqrt{۶}$

154 در یک مثلث متساوی‌الساقین که زاویهٔ ۱۲۰° دارد اندازهٔ بزرگ‌ترین ضلع برابر ۶ است. مساحت این مثلث چقدر است؟

۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۳\sqrt{۳}$
۳) $۴\sqrt{۳}$
۴) $۶\sqrt{۳}$

155 مساحت مثلث در شکل مقابل چقدر است؟



۱) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$
۲) $\frac{۲\sqrt{۶}}{۳}$
۳) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$
۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$

156 مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ است. اگر $b = ۸$ و $c = ۵$ اندازهٔ ضلع a کدام است؟

۱) ۵
۲) ۶
۳) $۶\sqrt{۲}$
۴) $۳\sqrt{۶}$

157 مساحت مثلثی با اضلاع a و $۲\sqrt{۳}$ و ۶ برابر با $۳\sqrt{۳}$ است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱) $۲\sqrt{۲۱}$
۲) ۶
۳) ۴
۴) $\sqrt{۳۸}$

158 در مثلث ABC با $\hat{A} = ۳۰^\circ$ اگر $b^۲ + c^۲ = ۸S_{ABC}$ زاویهٔ B کدام است؟

۱) ۶۰°
۲) ۹۰°
۳) ۴۵°
۴) ۷۵°

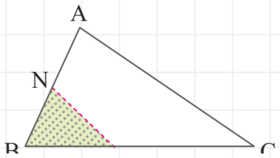
159 در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC اگر $a + h_a = b + h_b$ کدام گزینه درست است؟

۱) $\hat{A} = \hat{B} + ۳۰^\circ$
۲) $\hat{C} = ۶۰^\circ$
۳) $\hat{A} = ۶۰^\circ$
۴) $\hat{C} = ۹۰^\circ$

160 در مثلث ABC اگر $\sqrt{۳}(h_a + h_b) = a + b$ مقدار sinC کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$
۲) $\frac{۲}{۳}$
۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$

161 در شکل زیر M وسط AB است و $۳BM = ۲MC$. نسبت $\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$
۲) $\frac{۱}{۴}$
۳) $\frac{۲}{۵}$
۴) $\frac{۱}{۵}$

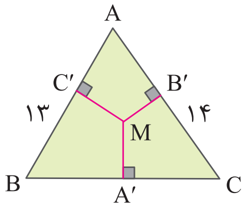
درس 4
TEST

مساحت مثلث را می‌توانیم بر حسب شعاع‌های دایره‌های محاطی به‌دست آوریم:

$$S=\sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}=\sqrt{\frac{۴}{۳}\times ۳\times ۳\times ۱۲}=۱۲$$

3 149

نقشهٔ راه: نقطهٔ M روی نیمساز $\hat{A}$ است پس:



$$MB'=MC'=x$$

ابتدا مساحت را با هرون به‌دست می‌آوریم:

$$p=\frac{۱۳+۱۴+۱۵}{۲}=۲۱\Rightarrow S_{ABC}=\sqrt{۲۱\times ۸\times ۷\times ۶}=۸۴$$

$$S_{ABC}=\frac{MA'\cdot BC}{۲}+\frac{MB'\cdot AC}{۲}+\frac{MC'\cdot AB}{۲}$$

$$\Rightarrow ۸۴\times ۲=۰/۴\times ۱۵+۱۳x+۱۴x\Rightarrow ۱۶۲=۲۷x\Rightarrow x=۶$$

1 150

نقشهٔ راه: چون اندازهٔ زاویه معلوم است مساحت را به روش سینوسی محاسبه می‌کنیم:

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}AB\times AC\times \sin A$$

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times ۶\times \frac{\sqrt{۳}}{۲}=۱۵\sqrt{۳}$$

4 151

نقشهٔ راه: مثلث متساوی‌الساقین است بنابراین:

$$\hat{B}=\hat{C}=۷۵^\circ\Rightarrow \hat{A}=۳۰^\circ$$

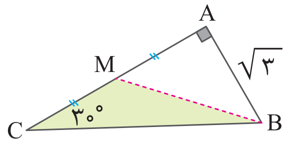
از مساحت به روش سینوسی استفاده می‌کنیم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB\cdot AC\cdot \sin A$$

$$۱۸=\frac{۱}{۲}(AB)^۲\times \frac{۱}{۲}\Rightarrow AB=\sqrt{۷۲}=۶\sqrt{۲}$$

4 152

نقشهٔ راه: با توجه به زاویهٔ ۳۰° در مثلث ABC داریم:

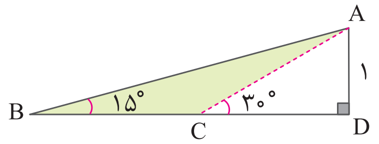


$$AC=۳\Rightarrow S_{ABC}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$$

$$S_{BCM}=\frac{۱}{۲}S_{ABC}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

2 153

نقشهٔ راه: با توجه به $AD=۱$ می‌توانیم طول AC را به‌دست آوریم:



$$AC=۲$$

همچنین زاویهٔ $B\hat{A}C$ برابر ۱۵° است پس $BC=۲$

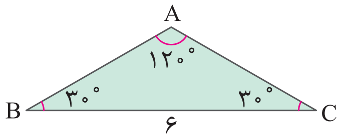
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC\cdot AD=۱$$

2 154

نقشهٔ راه: ابتدا از قضیه سینوس‌ها شروع می‌کنیم:

$$\frac{BC}{\sin ۱۲۰^\circ}=\frac{AC}{\sin ۳۰^\circ}\Rightarrow \frac{۶}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{AC}{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow AC=۲\sqrt{۳}$$

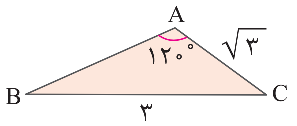
در این مثلث طول اضلاع AB و AC به کمک قضیهٔ سینوس‌ها برابر $۲\sqrt{۳}$ است پس:



$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AB.AC.\sin ۱۲۰^\circ=۳\sqrt{۳}$$

4 155

نقشهٔ راه: ابتدا به کمک قضیهٔ سینوس‌ها و معلوم بودن طول ضلع AC مقدار زاویهٔ B را به‌دست می‌آوریم:



$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{\sin B}=\frac{۳}{\sin ۱۲۰^\circ}$$

$$\Rightarrow \sin B=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \hat{B}=\hat{C}=۳۰^\circ$$

حالا می‌توانیم مساحت مثلث را به روش سینوسی به‌دست آوریم:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AC\cdot BC\cdot \sin ۳۰=\frac{۱}{۲}\times ۳\times \sqrt{۳}\times \frac{۱}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$$

1 156

نقشهٔ راه: ابتدا سینوس زاویه بین دو ضلع b و c را پیدا می‌کنیم:

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}b\times c\times \sin A=۱۲$$

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}\times ۸\times ۵\times \sin A=۱۲\Rightarrow \sin A=\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \cos A=\pm\frac{۴}{۵}$$

$$(I)\ \cos A=\frac{۴}{۵}\Rightarrow a=\sqrt{c^۲+b^۲-۲bc\cos A}$$

$$a=\sqrt{۲۵+۶۴-۲\times ۵\times ۸\times \frac{۴}{۵}}=۵$$

$$(II)\ \cos A=\frac{-۴}{۵}$$

$$\Rightarrow a=\sqrt{۲۵+۶۴+۲\times ۵\times ۸\times \frac{۴}{۵}}=\sqrt{۱۵۳}$$

پاسخنامه 139-156

1 **157**

نقشهٔ راه: ابتدا سینوس A را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{\Delta} = \frac{۱}{۲} b \times c \times \sin A = ۳\sqrt{۳}$$

$$S_{\Delta} = \frac{۱}{۲} \times ۲\sqrt{۳} \times ۶ \times \sin A = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow \sin A = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \cos A = \pm \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$(\mathrm{I})\ \cos A = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۲bc\cos A} = ۲\sqrt{۳}$$

$$(\mathrm{II})\ \cos A = \frac{-\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow a = ۲\sqrt{۲۱}$$

4 **158**

نقشهٔ راه: با توجه به $\hat{A} = ۳۰^{\circ}$ داریم:

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} b.c.\sin ۳۰^{\circ} = \frac{۱}{۴} bc \Rightarrow b^{۲} + c^{۲} = ۲bc$$

$$\Rightarrow (b-c)^{۲} = ۰ \Rightarrow b = c$$

پس زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در این مثلث ۷۵° هستند.

4 **159**

نقشهٔ راه: طبق رابطهٔ مساحت داریم:

$$h_a = \frac{۲S}{a}\ ,\ h_b = \frac{۲S}{b} \Rightarrow a + \frac{۲S}{a} = b + \frac{۲S}{b}$$

$$\Rightarrow a - b = ۲S(\frac{a-b}{ab}) \Rightarrow ۲S = ab$$

اگر مساحت را به روش سینوسی بنویسیم داریم:

$$۲S = a.b.\sin C \Rightarrow \sin C = ۱ \Rightarrow C = ۹۰^{\circ}$$

3 **160**

نقشهٔ راه: ابتدا از نسبت ضلع و ارتفاع شروع می‌کنیم:

$$h_a = \frac{۲S}{a}\ ,\ h_b = \frac{۲S}{b} \Rightarrow \sqrt{۳}(\frac{۲S}{a} + \frac{۲S}{b}) = a + b$$

$$\Rightarrow \sqrt{۳}\,\frac{۲S(a+b)}{ab} = a + b \Rightarrow ۲S = \frac{\sqrt{۳}}{۳} ab$$

با توجه به مساحت سینوسی داریم:

$$۲S = ab.\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

4 **161**

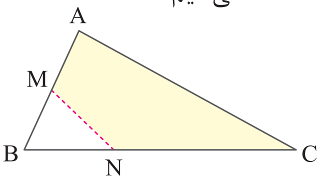
نقشهٔ راه: مساحت را به روش سینوسی می‌نویسیم:

$$S_{BMN} = \frac{۱}{۲} BM \cdot BN \cdot \sin B = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲} AB)(\frac{۲}{۵} BC)\sin B$$

$$\Rightarrow S_{BMN} = \frac{۱}{۵} S_{ABC}$$

4 **162**

نقشهٔ راه: از مساحت سینوسی استفاده می‌کنیم:



$$\frac{S_{BMN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{۱}{۲} BM \cdot BN \cdot \sin B}{\frac{۱}{۲} AB \cdot BC \cdot \sin B} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow \frac{S_{AMNC}}{S_{ABC}} = \frac{۵}{۶}$$

2 **163**

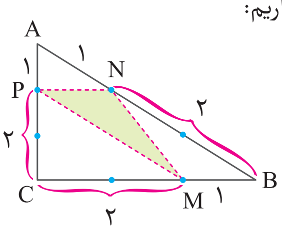
نقشهٔ راه: مساحت قسمت هاشورخورده با مساحت مثلث ABC برابر است:

$$\hat{A} = ۱۸۰ - ۷۵ - ۷۵ = ۳۰^{\circ}$$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \cdot AC \cdot \sin ۳۰ = ۱$$

4 **164**

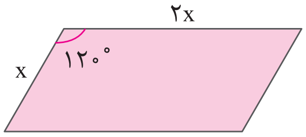
نقشهٔ راه: طبق نکتهٔ شگفت‌انگیز داریم:



$$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{۱ \times ۱ \times ۲ + ۲ \times ۲ \times ۱}{۳ \times ۳ \times ۳} = \frac{۶}{۲۷} = \frac{۲}{۹}$$

2 **165**

نقشهٔ راه: با مساحت سینوسی شروع می‌کنیم:



$$S = (۲x)(x)\sin ۱۲۰^{\circ}$$

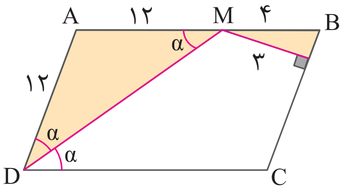
$$\Rightarrow ۴\sqrt{۳} = ۲x^{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = ۲$$

پس طول اضلاع برابر ۲ و ۴ است و محیط برابر ۱۲ است.

2 **166**

نقشهٔ راه: طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب $A\widehat{M}D = \alpha$ به‌دست می‌آید و در نتیجه مثلث AMD متساوی‌الساقین خواهد شد بنابراین داریم:



$$\sin B = \frac{۳}{۴} \Rightarrow S = ۱۶ \times ۱۲ \times \frac{۳}{۴} = ۱۴۴$$