آموزش و کتاب کار

حسابان (۱) پایه یازدهم

(ویژه‌ی مهندس‌ها)

مؤلفان:

حسین شفیع‌زاده، پیمان جلیلی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

به نام بخشنده‌ی گل

نمی‌دونم نوشته رو از کجا شروع کنم، یه مقدار نوشته‌ام شاید غمگین باشه.

ولی دلم خواست که بنویسم.

تولد و مرگ، واژه‌ای که همه مون زیاد شنیدیم، زیاد نوشتیم و زیاد گفتیم. گاهی آرزوی به دنیا اومدن کسی رو داشتیم و گاهی خدایی نکرده آرزوی مرگ خودمون یا دشمن‌مون رو داشتیم.

واقعاً آرزوی اولی که قشنگه شاید خودمون هم دوست داشته باشیم چند بار به دنیا بیاییم و دوران کودکی رو تجربه کنیم، البته اگر دوران کودکی خوبی داشته باشیم. یه پرانتز باز کنم بگم کودکانی هستن که شاید روزهایی که باید آرزوی کودکی کردن رو داشته باشن آروزهایی دارن که من نمی تونم برای یه کودک به زبون هم بیارم (آرزوی داشتن غذا و ...، باید فاتحه‌ی اون دنیا رو خوند).

بگذریم! هدفم از گفتن تولد و مرگ بیشتر کلمه‌ی مرگ، مردن، یا بهتر بگم از دست دادن بود. تا این جای زندگی ممکنه خیلی‌هامون خیلی چیزهای مادی رو از دست داده باشیم، از اون پاک‌کنی بگیر که وقتی می‌افتاد روی زمین نیست و نابود می‌شد تا گم کردن یه هدیه ارزشمند و ...، ولی امیدوارم چیزهای معنوی زیادی از دست نداده باشین مثل عزیزان و دوستان. ای کاش می‌شد مرگ رو از زندگی خط زد؛ ولی گاهی همین مرگ یا از دست دادن‌هاست که زندگی رو متفاوت‌تر می‌کنه، گاهی قوی‌ترمون می‌کنه و گاهی خدایی نکرده شکننده‌تر.

امیدوارم همه‌مون قوی‌تر بشیم.

آدم‌های زیادی تو زندگی‌مون میان و میرن دوست، معلم، مدیر، همکار و ... (البته بسته به شخصیت‌مون ممکنه کم باشن یا زیاد) بعضی هاشون اونقدر ارزشمندن که حتی فکر کردن به نبودنشون دل آدم رو می‌رنجونه (پدر و مادر، یه دوست درجه یک، همسر، فرزند و ...).

شاید بگید شعاره، ولی واقعا وقتی آدم یه انسان ارزشمند یا دوست داشتنی از زندگیش کم میشه (مسافرت، مهاجرت و خدایی نکرده مرگ) گاهی قدر اون آدم رو می‌فهمه.

شاید بعضیا بگن به‌خاطر احساس ندامت باشه یا فراق. ولی، گاهی جای خالی یه قاب روی دیوار آدم رو ناراحت می‌کنه چه برسه نبود آدمی که چند روزی رو با هم در غم و شادی سپری کردیم. شاید بگید چرا از مرگ، فراق و از دست دادن نوشتم؟!

نوشتم چون دوری از یه دوست خوب من رو به خاطرات مشترک برد. چقدر دوری یا از دست دادن می‌تونه سخت باشه. گاهی یه جمله توی دل آدم سال‌ها می‌مونه و آدم رو می‌رنجونه. اون دوست عزیز سال‌ها پیش از بین ما رفت و امروز گاهی در گوشه‌های خاطراتمون زندگی می‌کنه و می‌خنده ولی ...

جمله‌های گفته و ناگفته بینمون، قهرها و آشتی‌ها و ...، آرزوی گفتن حرف‌های خوب، آرزوی نگفتن جمله‌هایی که شاید رنجشی به دلمون گذاشت و ...

رفت و خاطرش موند.

بازم جمله‌ی کلیشه‌ای که ما تو دنیا مسافریم.

یه روز سوار می‌شیم و یه روز شاید در اوج آرزوهامون پیادمون می‌کنن. حواسمون به مسافرایی که تو مترو و قطار ایستادن یا نشستن کنارمون باشه. حواسمون به اونایی که تو ایستگاه جدید سوار می‌شن، حواسمون به اونایی که تو ایستگاه بعدی ممکنه یا قرار پیاده شن. ممکنه خطمون رو عوض کنیم از یه دوست سال‌ها جدا بمونیم،

ولی...

امیدوارم قطارهامون از هم جدا نشه، امیدوارم قطارهامون از خط خارج نشه.

قدر خودتون و اطرافیانتونو بدونید. قدر پدر و مادر، قدر دوست، قدر برادر و خواهر، قدر گلدون، قدر حیوون خونگیتون، قدر قاب عکساتون، قدر گربه‌ی محلتون، قدر کبوتری که گوشه‌ی پنجره لونه کرده، قدر بارون پاییزی، قدر برگ خشک روی زمین، قدر شکوفه‌ی بهاری، قدر برف، قدر دریا و ...

بیاد مسافرهایی که تو یه ایستگاه همسفرمون شدن، تو یه ایستگاه دیگه خطشون رو عوض کردن و بیاد دوست عزیزم که قصد سفری دیگر کرد و ما را در ایستگاه دنیا جا گذاشت با یک جمله‌ی ناگفته.

بیاد علی یوسفی دوست و همکار عزیزم که در تألیف کتاب حسابان دوره‌ی پیش در کنارمان بود.

چندجمله‌ای در باب کتاب، این کتاب به همت دو تن از دبیران برجسته ایران زمین نوشته شده است دوست و بردارم آقای شفیع‌زاده و دوست و همکار جوانم آقای جلیلی، با علم و با تجربه. این دو عزیز در طی یک سال اخیر و با توجه به تغییرات سیستم آموزشی و کنکور این کتاب را تألیف کردند، کتابی مفهومی و پر از تمرین. کتابی که می‌تواند شما دوست عزیز را برای حسابان (۱)، کنکور و حسابان (۲) آماده کند.

ان شاء الله بتوانیم با شناخت نیازهای نسل شما و تجربه‌ای به دست آمده از سال‌های تدریس دوستان، استرس و دلهره را از دوش تک‌تکتان برداریم و نسلی شاداب و پر انرژی را، نه تنها برای ساختن آینده‌ی این مرز و بوم بلکه دنیا تربیت کنیم. لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند به ویژه دو مؤلف عزیز کمال تشکر را داشته باشم و از شما دوست عزیز نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم.

رسول حاجی‌زاده
مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

به نام خدا

کتابی که پیش روی شماست، ترکیبی از کتاب آموزش و کتاب‌کار است که با درس‌نامه‌ی جامع شامل مثال‌های تشریحی و تستی نوشته شده است. پشتوانه‌ی نگارش این کتاب، تألیف کتاب‌های کمک آموزشی متعدد و تدریس در مدارس برتر کشور از جمله دبیرستان انرژی اتمی، مدارس علامه حلی و فرزانگان تهران، شعب مدارس سلام و ... است. خوانندگان مدنظر نویسندگان، دانش‌آموزانی هستند که قصد دارند تقریباً به تمام سؤال‌های حسابان (۱) کنکور پاسخ درست بدهند و با پایه‌ی قوی خود را برای یادگیری درس حسابان (۲) آماده سازند.

در نوشتن درس‌نامه به سرفصل کتاب حسابان (۱) جدید وفادار بوده‌ایم و فقط موارد کمی را به عنوان بیشتر بدانیم به برخی فصل‌ها اضافه کرده‌ایم. در عین تطباق با سرفصل‌های کتاب درسی، حل برخی از مسائل کتاب، به پشتکار و تمرین بیشتری نیاز دارد. حل این سؤالات علاوه بر این که عمق یادگیری و تسلط شما را افزایش می دهد، نوعی ورزش ذهنی محسوب می‌شود.

همان‌طور که در تمرینات یک فوتبالیست کار با وزنه نیز وجود دارد!

برای استفاده‌ی بهتر از کتاب، توجه به نکات زیر نیز مفید است:

۱. بخش اول هر فصل، درس‌نامه‌ی جامع همراه با حل مثال‌های تشریحی و تست‌های مرتبط است. در مجموع در درس‌نامه‌ی این کتاب، ۱۲۶ مثال تشریحی و ۲۱۴ تست خواهید دید. حل تست‌ها، دید اولیه‌ی مناسبی به دانش‌آموز می‌دهد ولی برای تسلط کامل می‌توانید از کتاب تست حسابان (۱) انتشارات خوشخوان استفاده کنید.

۲. بخش دوم هر فصل، مسائل تشریحی است که حلشان در همان فصل آورده شده است. در مجموع در کتاب، ۴۴۰ مسئله حل شده وجود دارد. توصیه می‌کنیم قبل از مراجعه به پاسخ تشریحی، خودتان تلاش کنید سؤالات را حل کنید.

۳. بخش سوم هر فصل، تمرینات انتهای فصل است که در داخل کتاب برای حلشان جای کافی در نظر گرفته‌ایم. در مورد سؤالات با پاسخ عددی، جواب نهایی در انتهای کتاب نوشته شده است.

به عنوان نویسندگان کتاب، از تمام معلمان و اساتید دوران تحصیل خود، همکاران گرامی که تجربه‌ی خود را به من منتقل کردند، کادر اجرایی انتشارات و ویراستارها و به‌طور ویژه از جناب آقای رسول حاجی‌زاده سپاسگزاریم و این کتاب را به دانش‌آموزان ممتاز کشور تقدیم می‌کنیم.

همواره از شنیدن نظر و انتقاد خوانندگان استقبال می‌کنیم

مهر ۱۳۹۷

با آرزوی موفقیت و سربلندی میهن

حسین شفیع‌زاده

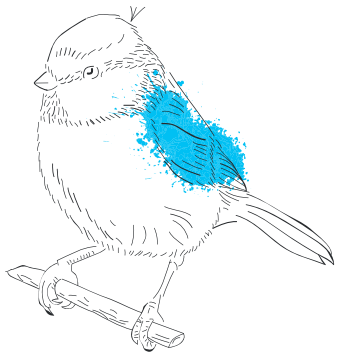
پیمان جلیلی

فهرست مطالب

فصل اول	جبر و معادله	۱
فصل دوم	تابع	۹۹
فصل سوم	توابع نمایی و لگاریتمی	۱۶۳
فصل چهارم	مثلثات	۱۹۱
فصل پنجم	حد و پیوستگی	۲۳۷

فصل سوم

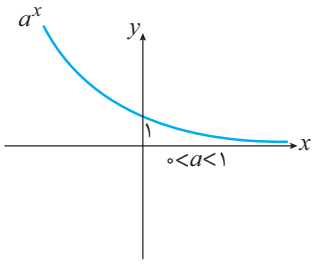
توابع نمایی و لگاریتمی

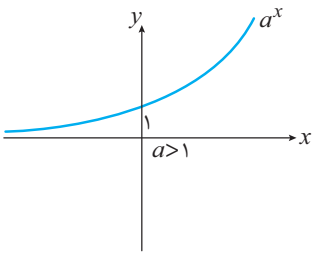


تابع نمایی

تعریف هر تابع با ضابطه‌ی $f(x)=a^x$ را که در آن a عددی مثبت و مخالف ۱ است، یک تابع نمایی می‌نامیم.

نمودار این تابع به یکی از دو صورت زیر است:





تست ۱. به ازای چند مقدار صحیح k، تابع $y=(5-k^2)^x$ یک تابع نمایی است؟

۱) ۵ مقدار ۲) ۴ مقدار ۳) ۳ مقدار ۴) ۲ مقدار

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به تعریف تابع نمایی باید $5-k^2$، مثبت و مخالف ۱ باشد.

$$\begin{cases} 5-k^2>0 \Rightarrow k^2<5 \\ 5-k^2\neq 1 \Rightarrow k^2\neq 4 \end{cases} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=0,\pm 1$$

مثال ۱ یک توده معین از باکتری در هر دقیقه، دو برابر می‌شود. اگر در ابتدا ۲۰ باکتری موجود باشد. جرم توده پس از t دقیقه چقدر است؟

پاسخ: چگونگی افزایش تعداد باکتری‌ها به صورت الگوی زیر است:

t برحسب دقیقه	۰	۱	۲	۳	....
تعداد باکتری	۲۰	20×2	20×2^2	20×2^3	....

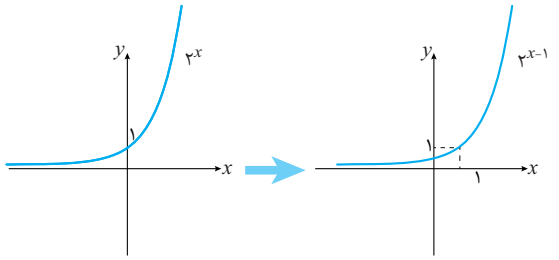
طبق این الگو، پس از t دقیقه، تعداد باکتری‌ها برابر 20×2^t است، که به صورت تابع $f(t)=5\times 2^{t+2}$ قابل بیان است.

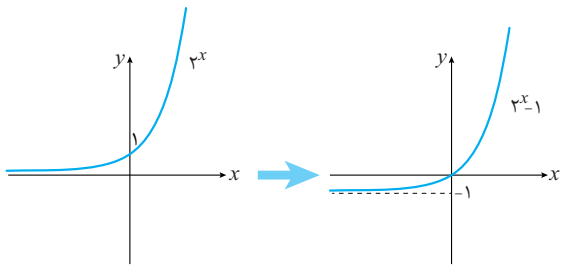
تذکر یک تابع به صورت $y=ka^x$ $(k\neq 0, a\neq 1, a>0)$ رفتار نمایی دارد. مانند $y=3^{x-1}$ و $y=\frac{2}{5}\times 3^x$

مثال ۲ نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

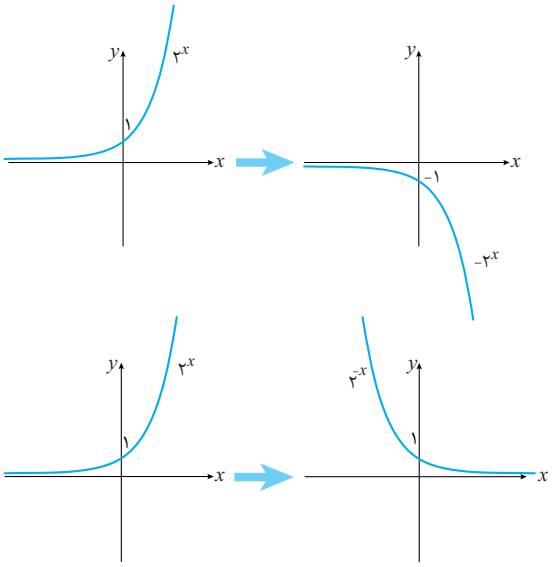
۱) $y=2^{x-1}$ ۲) $y=2^x-1$ ۳) $y=-2^x$ ۴) $y=2^{-x}$

پاسخ: برای رسم $f(x-1)$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. برای رسم $f(x)-1$، نمودار $f(x)$ را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. برای رسم $-f(x)$، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. برای رسم $f(-x)$، نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.





انتشارات خوشخوان



تذکر

الف) برای رسم $y=a^{-x}$ دو گونه می‌توان رفتار کرد.

۱) نمودار $y=(\frac{۱}{a})^x$ را رسم کنیم.

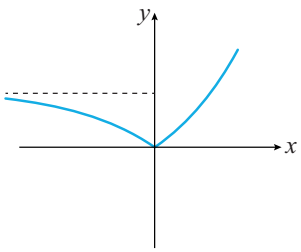
۲) نمودار $y=a^x$ را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

ب) برای رسم $y=a^{x+k}$ دو گونه می‌توان رفتار کرد.

۱) نمودار $y=a^x$ را k واحد به چپ (یا راست) منتقل کنیم.

۲) نمودار $y=a^x$ را به اندازه‌ی ضریب a^k، در جهت محور y ها منبسط یا منقبض کنیم.

تست ۲. نمودار کدام تابع زیر به صورت مقابل است؟



۱) $y=۱-۲^{|x|}$

۲) $y=۱-۲^{-x}$

۳) $y=|۲^{-x}-۱|$

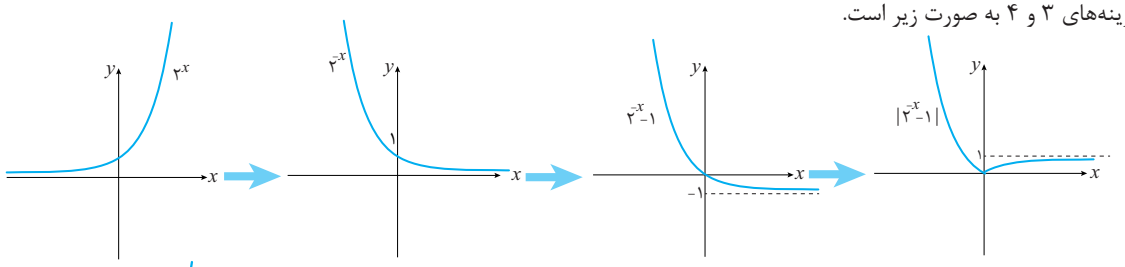
۴) $y=|۲^x-۱|$

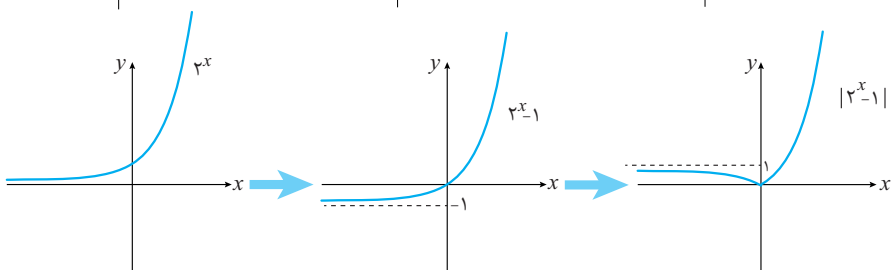
پاسخ: ۱ ۲ ۳ **۴**

رد گزینه‌ی ۱: $x=۱\Rightarrow y<۰$

رد گزینه‌ی ۲: $x=-۱\Rightarrow y<۰$

نمودار گزینه‌های ۳ و ۴ به صورت زیر است.





پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.

خواص تابع نمایی

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند آن‌گاه:

۱) $a^{\circ}=1$

۲) $a^{-x}=(\frac{1}{a})^x=\frac{1}{a^x}$

۳) $(a^x)^y=a^{xy}=(a^y)^x$

۴) $a^x.a^y=a^{x+y}$

۵) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

۶) $(ab)^x=a^xb^x$

۷) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$

۸) $a^x>0$

تست ۳. نمودارهای دو تابع $f(x)=4^x$ و $g(x)=\frac{3}{2}+(\frac{1}{2})^{2x}$ در نقطه‌ی A متقاطع‌اند. فاصله‌ی A از مبدأ چقدر است؟

۱) $\sqrt{17}$

۲) $\frac{\sqrt{17}}{2}$

۳) $\sqrt{13}$

۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

برای یافتن نقاط برخورد، معادله‌ی $f(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 4^x=\frac{3}{2}+(\frac{1}{2})^{2x}\Rightarrow (2^2)^x=\frac{3}{2}+\frac{1}{2^{2x}}\Rightarrow 2^{2x}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2^{2x}}$$

با تغییر متغیر $2^{2x}=t$ ، معادله را حل می‌کنیم.

$$t=\frac{3}{2}+\frac{1}{t}\Rightarrow 2t^2-3t-2=0\xrightarrow{t>0}t=2\Rightarrow 2^{2x}=2\Rightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow f(\frac{1}{2})=2$$

پس نقطه‌ی برخورد، $A(\frac{1}{2},2)$ است که فاصله‌ی آن از مبدأ برابر $\sqrt{\frac{1}{4}+4}=\frac{\sqrt{17}}{2}$ است.

نکته با توجه به نمودار توابع نمایی، گزاره‌های زیر برقرار است:

۱) دامنه‌ی تابع $y=a^x$ ، $\mathbb{R}$ و برد آن اعداد حقیقی مثبت است.

۲) توابع نمایی یک به یک هستند.

۳) در تابع $y=a^x$ ، اگر $a>1$ ، با افزایش مقدار x ، مقدار y افزایش می‌یابد (گوییم تابع در این حالت صعودی است).

۴) در تابع $y=a^x$ ، اگر $0<a<1$ ، با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد (گوییم تابع در این حالت نزولی است).

نتیجه:

۱) $x<y\xleftrightarrow{a>1}a^x<a^y$

۲) $x<y\xleftrightarrow{0<a<1}a^x>a^y$

مثال ۳ نامعادله‌ی $4^{x+1}<(\frac{1}{2})^{1-x^2}$ را حل کنید.

پاسخ: ابتدا نامعادله را کمی ساده می‌کنیم و سپس آن را حل می‌کنیم.

$$(\frac{1}{2})^{1-x^2}<4^{x+1}\Rightarrow (2^{-1})^{1-x^2}<(2^2)^{x+1}\Rightarrow 2^{x^2-1}<2^{2x+2}\Rightarrow x^2-1<2x+2$$

$$\Rightarrow x^2-2x-3<0\Rightarrow -1<x<3$$

تست ٤. اگر $f(x)=1-(\frac{1}{2})^x$ آن‌گاه دامنه‌ی تابع $f=\sqrt{x\,f(x)}$ کدام است؟

۱) $[0,+\infty)$

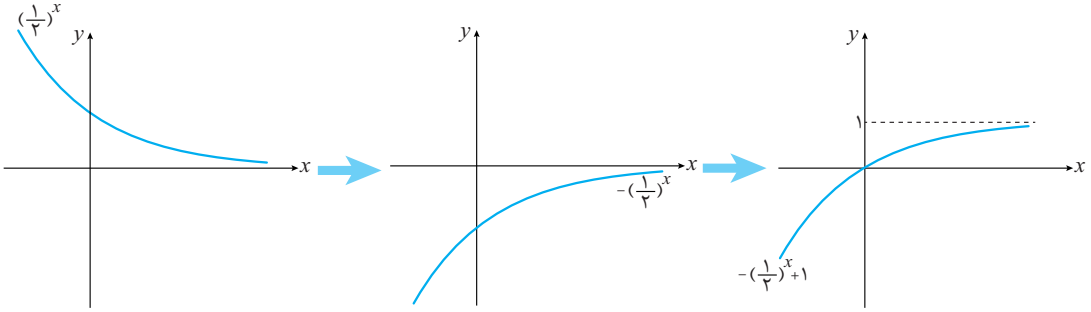
۲) $(-\infty,0]$

۳) $(-\infty,+\infty)$

۴) $[-1,1]$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

روش اول: نمودار تابع $f(x)$ را طی مراحل زیر، رسم می‌کنیم.



نمودار تابع $f(x)$ از ناحیه‌ی اول و سوم (و مبدأ) عبور می‌کند. پس داریم:

$$\begin{cases} x \geq 0 \xrightarrow{\text{ناحیه اول}} f(x) \geq 0 \Rightarrow x f(x) \geq 0 \\ x < 0 \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} f(x) < 0 \Rightarrow x f(x) \geq 0 \end{cases}$$

در واقع تمام اعداد حقیقی عضو دامنه هستند.

روش دوم: با توجه به ویژگی‌های تابع نمایی داریم:

$$g = x f(x) = x\left(1-(\tfrac{1}{2})^x\right) = \frac{x(2^x-1)}{2^x}$$

اگر $x>0$ آن‌گاه $2^x>1$ پس حاصل g همواره مثبت است. یعنی کل اعداد مثبت عضو دامنه‌اند.

اگر $x<0$ آن‌گاه $2^x<1$ پس مجدداً حاصل g همواره مثبت است. یعنی کل اعداد منفی عضو دامنه‌اند.

بدیهی است که $x=0$ نیز عضو دامنه است. بنابراین دامنه برابر $\mathbb{R}$ است.

لگاریتم و تابع لگاریتمی

تابع نمایی $y=a^x$ یک تابع یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. وارون تابع نمایی را تابع لگاریتمی می‌نامیم.

تعریف اگر $x>0$ و $a>0$ و $a\neq 1$ آن‌گاه

$$y=\log_a^x \Leftrightarrow x=a^y$$

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$2^3=8 \Rightarrow \log_2^8=3$$

$$10^{-2}=0/01 \Rightarrow \log_{10}^{0/01}=-2$$

$$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \Rightarrow \log_2^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

تذکر

منظور از $\log_b^a$ آن است که b به توان چه عددی برسد تا برابر a گردد. به‌طور مثال منظور از $\log_2^{64}$ آن است که ۲، به توان چند برسد برابر ۶۴ می‌شود که جواب آن ۶ است پس $\log_2^{64}=6$. و یا منظور از $\log_{10}^{100}$ آن است که ۱۰، به توان چند برسد برابر ۱۰۰ می‌شود که جواب آن ۲ است پس $\log_{10}^{100}=2$.

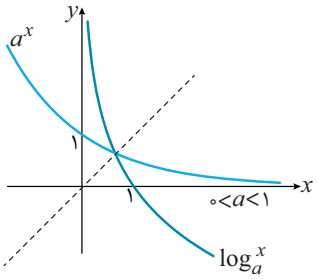
تذکر

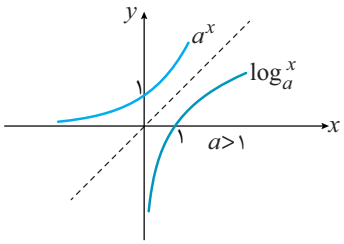
لگاریتمی که پایه آن ۱۰ باشد را به صورت $\log x$ نشان می‌دهیم.

انتشارات خوشخوان

نمودار تابع لگاریتمی

نمودار تابع $y=\log_a^x$ و معکوس آن یعنی $y=a^x$ نسبت به نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم قرینه‌اند. بنابراین نمودار تابع لگاریتمی، به یکی از دو صورت زیر است:





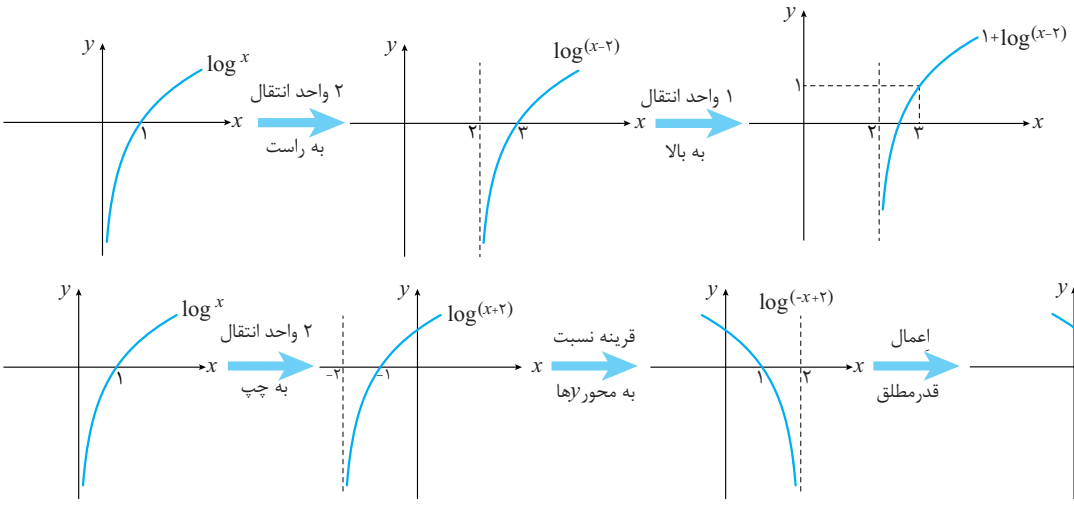
مثال ٤ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

۱) $y=1+\log(x-2)$ ۲) $y=|\log(2-x)|$

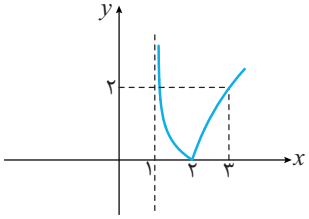
پاسخ: برای رسم نمودار تابع $f(-x)$، کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم.

برای رسم نمودار تابع $-f(x)$، کافی است نمودار $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه کنیم.

به مراحل رسم توجه کنید:



تست ۵. نمودار تابع $y=a|\log_2^{(x+b)}|$ به صورت مقابل است. حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به نمودار $y=\log_a^x$، به ازای $x=1$ مقدار y برابر صفر است، پس داریم:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 0=a|\log_2^{(2+b)}| \Rightarrow \log_2^{(2+b)}=0 \Rightarrow 2+b=1 \Rightarrow b=-1$$

به ازای $x=3$ مقدار y برابر ۲ است، پس داریم:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow 2=a|\log_2^{(3-1)}| \Rightarrow 2=a|\log_2^2| \Rightarrow 2=a$$

بنابراین $a+b=1$ است.

با توجه به نمودار لگاریتم، می‌توانیم به نتایج زیر برسیم:

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a^{x_1} > \log_a^{x_2}$	$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a^{x_1} < \log_a^{x_2}$
$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a^x > 0$	$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a^x < 0$
$x > 1 \Rightarrow \log_a^x < 0$	$x > 1 \Rightarrow \log_a^x > 0$
تابع $y = \log_a^x$ یک به یک است.	تابع $y = \log_a^x$ یک به یک است.

نکته اگر $x > 0$ آن‌گاه:

$$\log_a^x < b \Rightarrow \begin{cases} x < a^b & a > 1 \\ x > a^b & 0 < a < 1 \end{cases}$$

تست ۶. دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ **کدام است؟**

۱) $[-2, 0) \cup (3, 5]$
۲) $[-2, 0] \cup (3, 5)$
۳) $[-2, 3)$
۴) $(0, 5]$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

شرط اول آن است که $x^2 - 3x > 0$ باشد پس $x < 0$ یا $x > 3$ است.

شرط دوم آن است که $1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0$ باشد. با توجه به نکته‌ی بالا داریم:

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 3x \leq 10^1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 5$$

دامنه برابر اشتراک جواب نامساوی‌های ($x < 0$ یا $x > 3$) با نامساوی‌های $-2 \leq x \leq 5$ است.

$D_f = [-2, 0) \cup (3, 5]$

ویژگی‌های لگاریتم

برخی از ویژگی‌های لگاریتم را در جدول زیر مشاهده می‌کنید. دقت کنید در هر کدام از ویژگی‌ها، عبارتی نظیر $\log_b^a$ زمانی تعریف شده است که $a > 0$ ، $b > 0$ و $b \neq 1$ باشد.

۱	$\log_a^1 = 0$	۲	$\log_a^a = 1$
۳	$\log_a^{bc} = \log_a^b + \log_a^c$	۴	$\log_a^{\frac{b}{c}} = \log_a^b - \log_a^c$
۵	$\log_b^{a^n} = n \log_b^a$	۶	$\log_{b^m}^a = \frac{1}{m} \log_b^a$
۷	$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} = \frac{\log a}{\log b}$	۸	$a^{\log_a^b} = b$
۹	$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$	۱۰	$a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a}$
۱۱	$\log_b^{\frac{1}{a}} = -\log_b^a$		

مثال ۵ **با فرض $a=\log ۲$ و $b=\log ۳$، حاصل عبارات زیر را بیابید.**

۱) $\log ۵$ ۲) $\log ۰/۷۵$ ۳) $\log ۳۶\sqrt{۲}$

پاسخ: به کمک ویژگی‌های لگاریتم، هر یک از عبارات را محاسبه می‌کنیم شماره‌ی ویژگی به کار رفته، در بالای تساوی‌ها نوشته شده است.

۱) $\log ۵=\log \frac{۱۰}{۲} \overset{۴}{=} \log ۱۰-\log ۲ \overset{۲}{=} ۱-a$

۲) $\log ۰/۷۵=\log \frac{۷۵}{۱۰۰}=\log \frac{۳}{۴} \overset{۴}{=} \log ۳-\log ۴=\log ۳-\log ۲^{۲} \overset{۵}{=} \log ۳-۲\log ۲=b-۲a$

۳) $\log ۳۶\sqrt{۲}=\log(۳^{۲}\times ۲^{\frac{۵}{۲}}) \overset{۳}{=} \log ۳^{۲}+\log ۲^{\frac{۵}{۲}} \overset{۵}{=} ۲\log ۳+\frac{۵}{۲}\log ۲=۲b+\frac{۵}{۲}a$

تست ۷. با فرض $a=\log ۳$ و $b=\log ۱۸$ مقدار $\log ۲۴$ کدام است؟

۱) $۵b-۳a$ ۲) $۳b-۵a$ ۳) $۳b+۵a$ ۴) $۵b+۳a$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

ابتدا سعی می‌کنیم $\log ۲$ را برحسب a و b به‌دست آوریم:

$$b=\log ۱۸=\log(۳^{۲}\times ۲)=\log ۳^{۲}+\log ۲=۲\log ۳+\log ۲=۲a+\log ۲$$

پس $\log ۲=b-۲a$ و حالا $\log ۲۴$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\log ۲۴=\log(۲^{۳}\times ۳)=\log ۲^{۳}+\log ۳=۳\log ۲+\log ۳=۳(b-۲a)+a=۳b-۵a$$

تست ۸. اگر $\log_y^x=۲$ و $\log_z^x=۳$، حاصل $\log_{yz}^x$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۶}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطه‌ی $\log_b^a=\frac{۱}{\log_a^b}$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\log_y^x=۲\Rightarrow \log_x^y=\frac{۱}{۲}\\ \log_z^x=۳\Rightarrow \log_x^z=\frac{۱}{۳}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع}}\log_x^y+\log_x^z=\frac{۵}{۶}\Rightarrow \log_x^{yz}=\frac{۵}{۶}$$

بنابراین $\log_{yz}^x=\frac{۶}{۵}$ است.

تست ۹. اگر $y=\log x$ باشد، حاصل $x^{\log ۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}y$ ۲) $۲y$ ۳) $y^{۲}$ ۴) ۲^{y}

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

$$y=\log x\Rightarrow x=۱۰^{y}$$

در عبارت $x^{\log ۲}$، به‌جای x، ۱۰^{y} را جایگزین می‌کنیم:

$$x^{\log ۲}=(۱۰^{y})^{\log ۲}=۱۰^{y\log ۲}=۱۰^{\log ۲^{y}}=۲^{y}$$

دقت کنید که در تساوی آخر از فرمول $a^{\log_a^b}=b$ استفاده کردیم.

تست ۱۰. در دنباله‌ای با جمله‌ی عمومی $a_n=\log_3^{\frac{2n-1}{2n+1}}$**، مجموع چند جمله‌ی اول برابر ۳- است؟**

۱) ۱۳ ۲) ۱۴ ۳) ۱۶ ۴) ۱۷

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

n جمله‌ی اول دنباله را می‌نویسیم و باهم جمع می‌کنیم.

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\log_3^{\frac{1}{3}}+\log_3^{\frac{3}{5}}+\log_3^{\frac{5}{7}}+\cdots+\log_3^{\frac{2n-1}{2n+1}}=$$

$$=(\log 1-\underbrace{\log_3^3)+(\log_3^3}_{\text{جمع}=0}-\underbrace{\log_3^5)+(\log_3^5}_{\text{جمع}=0}-\underbrace{\log_3^7)+\cdots+\log_3^{(2n-1)}}_{\text{جمع}=0}-\log_3^{(2n+1)}$$

$$=\log 1-\log_3^{(2n+1)}=-\log_3^{(2n+1)}$$

پس $-\log_3(2n+1)=-3$ است و از آن‌جا $2n+1=3^3$ و در نتیجه $n=13$ است.

نکته تعداد ارقام عدد طبیعی n برابر $[\log n]+1$ است.

مثال ۶ با فرض $\log 2=0/301$ **تعیین کنید که** 2^{500} **چند رقمی است.**

پاسخ:

روش اول: مطابق فرمول بالا داریم:

$$\text{تعداد ارقام}=\left[\log 2^{500}\right]+1=[500\log 2]+1=[500\times 0/301]+1=151$$

روش دوم: این روش همان اساس اثبات فرمولی است که در نکته‌ی بالا بیان کردیم. فرض کنید 2^{500} یک عدد n رقمی باشد پس 2^{500} بین دو عدد 10^{n-1} و 10^n است (مثلاً یک عدد دو رقمی بین 10^1 و 10^2 است).

$$10^{n-1}\le 2^{500}<10^n \xrightarrow{\log \text{ می گیریم}} \log 10^{n-1}\le\log 2^{500}<\log 10^n$$

$$\Rightarrow n-1\le 500\log 2<n$$

$$\Rightarrow n-1\le 500\times 0/301<n$$

$$\Rightarrow n-1\le 150/5<n$$

تنها عدد طبیعی که در رابطه‌ی بالا صدق می‌کند، $n=151$ است.

معادلات لگاریتمی

معادلات لگاریتمی، معادلاتی هستند که در یک طرف یا در طرفین تساوی، لگاریتم قرار دارد. به دلیل یک به یک بودن تابع $y=\log_a^x$، برای حل معادلات لگاریتمی، از نکته‌ی زیر استفاده می‌کنیم.

نکته $\log_a^x=\log_a^y\Leftrightarrow x=y \quad a>0,\ a\neq 1$

در حل معادلات لگاریتمی، حتماً به دامنه‌ی تعریف توجه کنید.

مثال ۷ معادله‌ی $\log_3(x^2-1)=1+\log_3(x+3)$ **را حل کنید.**

پاسخ: ابتدا تمام لگاریتم‌ها را به یک طرف تساوی منتقل می‌کنیم:

$$\log_3(x^2-1)-\log_3(x+3)=1\Rightarrow\log_3\frac{x^2-1}{x+3}=1\Rightarrow\frac{x^2-1}{x+3}=3^1$$

$$\Rightarrow x^2-3x-10=0\Rightarrow x=5,-2$$

با آزمایش جواب‌ها در معادله‌ی اولیه، معلوم می‌شود که هر دو جواب قابل قبول است زیرا داخل لگاریتم‌ها منفی نمی‌شود.

انتشارات خوشخوان

تست ۱۱. **اگر** $\log(x-1)=3\log 2-\log(x-3)$، **حاصل** $\log_3(x-2)$ **کدام است؟**

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۱- ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به ویژگی‌های لگاریتم، سمت راست تساوی را ساده می‌کنیم:

$$\log(x-1)=3\log 2-\log(x-3)=\log 2^3-\log(x-3)=\log\frac{8}{x-3}$$

حال با حذف log از دو طرف تساوی داریم:

$$x-1=\frac{8}{x-3}\Rightarrow x^2-4x+3=8\Rightarrow (x-2)^2=9$$

از دو طرف تساوی log در پایه ۳ می‌گیریم:

$$\log_3^{(x-2)^2}=\log_3^9\Rightarrow 2\log_3^{(x-2)}=2\Rightarrow \log_3^{(x-2)}=1$$

تست ۱۲. **ریشه‌ی مثبت معادله‌ی** $x+2=\log_2^{(4^x+3)}$ **کدام است؟**

۱) ۱ ۲) $\log_2^3$ ۳) ۳ ۴) $2\log_2^3$

پاسخ: ۱ **۲** ۳ ۴

با توجه به تعریف لگاریتم داریم:

$$\log_2^{(4^x+3)}=x+2\Rightarrow 4^x+3=2^{x+2}\Rightarrow (2^x)^2+3=4\times 2^x \xrightarrow{t=2^x}$$

$$t^2+3=4t\Rightarrow t^2-4t+3=0\Rightarrow \begin{cases} t=1\Rightarrow 2^x=1\Rightarrow x=0\\ t=3\Rightarrow 2^x=3\Rightarrow x=\log_2^3\end{cases}$$

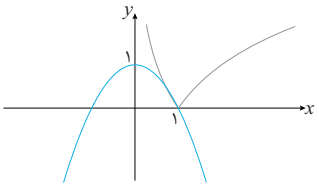
تذکر

برای حل بعضی از معادلات لگاریتمی می‌توانیم از روش هندسی (رسم نمودار) استفاده کنیم.

مثال ۸ **معادله‌ی** $x^2+|\log_2^x|=1$ **چند جواب دارد؟**

پاسخ: ابتدا معادله را به صورت $|\log_2^x|=1-x^2$ می‌نویسیم، سپس دو طرف تساوی را رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، دو تابع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند پس معادله دو جواب دارد. (جواب‌ها برابر $x=1$ و $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ است که البته از روی نمودار، جواب $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$، قابل محاسبه نیست.)



مثال‌های کاربردی

در برخی مدل‌سازی‌ها، مانند محاسبه‌ی شدت زلزله، محاسبه‌ی نیمه عمر عناصر رادیواکتیو و پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه به یک معادله‌ی لگاریتمی می‌رسیم. در این قسمت نمونه‌هایی از این مسائل را حل می‌کنیم.

مسأله زلزله

برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه از مقیاس ریشتر استفاده می‌کنند که میزان انرژی آزاد شده در زلزله را نشان می‌دهد.

اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر و انرژی آزاد شده برابر E در مقیاس ارگ (Erg) باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\log E=11/8+1/5M$$

تست ۱۳. اگر E_1 انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی ۸ ریشتری و E_2 انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی ۶ ریشتری باشد آن‌گاه $\frac{E_1}{E_2}$ **کدام است؟**

۱) 10^2 ۲) 10^3 ۳) 10^4 ۴) 10^5

پاسخ: ۱ ۲ ۳ ۴

با توجه به رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{cases}\log E_1 = 11/8 + 1/5M_1 = 11/8 + 1/5\times 8 = 23/8\\ \log E_2 = 11/8 + 1/5M_2 = 11/8 + 1/5\times 6 = 20/8\end{cases}$$

$$\Rightarrow \log E_1 - \log E_2 = 3 \Rightarrow \log\frac{E_1}{E_2} = 3 \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 10^3 = 1000$$

تذکر

هر یک ارگ تقریباً 10^{-7} ژول است.

مسأله‌ی نیمه‌ی عمر

مدت زمانی که طول می‌کشد تا جرم یک ماده هسته‌ای نصف شود را نیمه‌ی عمر آن ماده می‌نامند. به طور مثال اگر نیمه‌ی عمر ماده‌ای ۵ سال و جرم اولیه‌ی آن ۱۰۰ میلی‌گرم باشد آن‌گاه بعد از ۵ سال جرم آن ۵۰ میلی‌گرم خواهد بود.

اگر جرم اولیه‌ی ماده‌ای m_0 و نیمه‌ی عمر آن T باشد، آن‌گاه جرم آن پس از مدت زمان t، برابر است با:

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

تست ۱۴. **از یک جسم فسیل ۲۸/۷ درصد از کربن معمولی آن باقی‌مانده است. اگر نیمه‌ی عمر کربن ۵/۵ قرن باشد، قدمت این جسم فسیلی چند قرن است؟** $(\log 2/87 = 0/4582\ ,\ \log 2 = 0/301)$

۱) ۹/۹ ۲) ۱۰/۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱

اگر m_0 کربن اولیه باشد آن‌گاه $m(t) = \frac{28/7}{100}m_0$

$$m(t) = m_0 \times 2^{\frac{-t}{5/5}} \Rightarrow \frac{28/7}{100}m_0 = m_0 \times 2^{\frac{-t}{5/5}}$$

$$\Rightarrow 0/2587 = 2^{\frac{-t}{5/5}} \xrightarrow{\text{می‌گیریم log}} \log 0/2587 = \log 2^{-\frac{t}{5/5}}$$

$$\Rightarrow \log\frac{2/87}{10} = -\frac{t}{5/5}\log 2 \Rightarrow \log 2/87 - 1 = -\frac{t}{5/5}\log 2$$

$$0/4582 - 1 = -\frac{t}{5/5}\times 0/301 \Rightarrow t = \frac{5/5\times 0/5418}{0/301} = 9/9$$

مسائل حل شده‌ی فصل (۳)

۱. شخصی ده میلیون تومان پول دارد. این شخص هر ماه، ۱۰ درصد از پول خود را خرج می‌کند، تابعی بنویسید که مقدار پول باقی‌مانده برای او را پس از x ماه برحسب میلیون تومان بیان کنید.

۲. تابع $y=۲^x$ را رسم کنید و به کمک نمودار آن روی محور yها به‌طور تقریبی، نقاطی به عرض‌های $\sqrt[۴]{۸}$ و $۲^{\sqrt{۲}}$ را علامت بزنید.

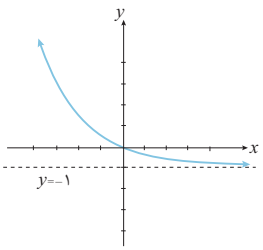
۳. نمودار توابع $f(x)=۲^x$ ، $g(x)=\sqrt{۲}^x$ و $h(x)=۴^x$ را به صورت تقریبی در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

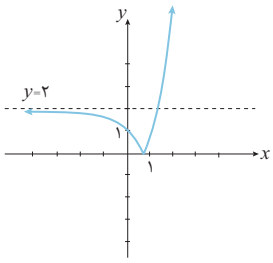
الف) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$ ب) $y=|۲^x-۱|$ ج) $y=۲^{|x|}+۱$

۵. در هر مورد، پارامترهای مجهول را به‌دست آورید.

الف) $y=a(\frac{۱}{۲})^x-b$



ب) $y=|a^x+b|$



۶. حدود a را طوری تعیین کنید که تابع $y=(\frac{a-۳}{a+۱})^x$ یک تابع نمایی با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ باشد.

۷. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۳^{x+۴}-۳^{x+۲}=۸$

ب) $۹^x+۳^x=۹۰$

ج) $۲^{x+۱}+۲^{۴-x}=۱۲$

د) $(\frac{۲}{۳})^x+(\frac{۳}{۲})^x=\frac{۱۳}{۶}$

و) $(\sqrt{۲+\sqrt{۳}})^x+(\sqrt{۲-\sqrt{۳}})^x=۲$

ه) $۵^x+۱۲^x=۱۳^x$

۸. فاصله‌ی نقاط برخورد نمودار دو تابع $y=۲^{x+۲}-۱۳$ و $y=۴-(\frac{۱}{۲})^{x-۲}$ از هم چقدر است؟

۹. برد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۳^{۴x-۲}-۲$

ب) $y=۱-\sqrt{۳^{(۲-x)}}$

ج) $y=۴^x-۲^{x+۱}$

۱۰. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۴^{x^۲}\le ۲۵۶$ ب) $(۰/۱۲۵)^{۵-x}>۴$

ج) $۴^x+۲^{x+۱}-۸>۰$ د) $\frac{۳^{\sqrt{x}}-۳}{۱-۳^{\sqrt{x}}}\le ۰$

ه) $۲^{x-[x]}\le ۱$

۱۱. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\sqrt{۰/۰۶۲۵^x-۴}$

ب) $y=\sqrt{۲^x-۳^x}$

ج) $y=\sqrt{x-\frac{x}{۲^x}}$

۱۲. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد نمودار وارون تابع $f(x)=۳\times ۲^{۱-۲x}-۲$ با محور طول‌ها از نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم چقدر است؟

۱۳. تابع وارون توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۳^{۱-x}+۲$

ب) $y=۳\times(\frac{۱}{۲})^{۲x-۱}+۴$

ج) $y=\sqrt{۲^{۲x}-۳}$

د) $y=\log_۳^{۴-۲x}$

ه) $y=۲\log_۲^{x^۳}-۱$

و) $y=(\log_۲^x-۱)^۳$

۱۴. اگر توابع $y=۳^{-x+a}+b$ و $y=۱+c\log_d^{x-۲}$ وارون هم باشند، مقادیر a، b، c و d را به‌دست آورید.

۱۵. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۳\log_{۲}^{۴x-۱}$

ب) $y=\log_{۰/۱}^{۳-x^۲}+۴x-۵$

ج) $y=۳^{\log\frac{x-۱}{x+۱}}$

د) $y=\sqrt{۱-\log_{۲}^{(x^۲-۱۴)}}$

۱۶. توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x+۲}$ ب) $y=\log_{۲}^{-x}+۱$

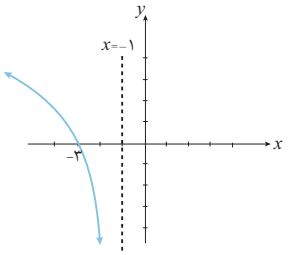
ج) $x-۱=(\frac{۱}{۳})^{y}$ د) $y=|\log_{۲}^{x}|$

ه) $y=log_{۲}^{|x|}$

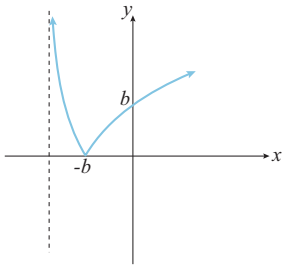
۱۷. توابع $f(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{x}$ و $g(x)=\log_{\frac{۱}{۳}}^{x}$ را با هم در یک دستگاه مختصات رسم کنید. (رسم دقیق لازم نیست)

۱۸. در هر مورد مقادیر a و b را بیابید.

الف) $y=\log_{b}^{(a-x)}+a$



ب) $y=|\log_{(a^۲+۱)}^{(x+a^۲+۱)}|$



۱۹. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log\frac{۲\sqrt{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۴}}$ ب) $\log\frac{\frac{۱}{۱۶}}{\frac{۱}{۳۲}}$

ج) $\log\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}$ د) $\log\frac{(\sqrt{۲}+۱)^{-\frac{۲}{۵}}}{۳+۲\sqrt{۲}}$

ه) $\log\frac{(\log\sqrt{۲۷})}{\sqrt{۲۷}}$

۲۰. مشخص کنید هر یک از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرند.

الف) $\log_{۳}^{۷۰۰}$ ب) $\log_{۰/۱}^{۰/۰۱۲}$ ج) $\log_{(\frac{۱}{۳})}^{۱۱۲}$

۲۱. اگر $\log_{b}^{a}=۵$، حاصل $\log_{a^۲}^{\sqrt{b}}$ را به‌دست آورید.

۲۲. اگر $x=\frac{۱+\sqrt{۳۷}}{۲}$، حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{\sqrt{۳}}^{۳x^۲-۳x}$ ب) $\log_{x^۲-۹}^{\frac{۱+\sqrt{۳۷}}{۲}}$

۲۳. ثابت کنید تابع زیر معکوس‌پذیر است و ضابطه‌ی تابع معکوس آن را به‌دست آورید.

$$y=\frac{۳^x-۳^{-x}}{۳^x+۳^{-x}}$$

۲۴. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{\sqrt{۲}^۷}^{۴^۳}$

ب) $۳^{۴+\log_{۳}^{۴}}$

ج) $\log_{۳}^{\frac{۷}{۱۱}}-\log_{۳}^{\frac{۲۱}{۲۲}}+\log_{\sqrt{۳}}^{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}$

د) $\log_{۱۵}^{۱۶}\times\log_{۱۴}^{۱۵}\times....\times\log_{۳}^{۴}\times\log_{۲}^{۳}$

ه) $\sqrt{۲۵^{log_{\sqrt{۵}}^{۴}-۲}}$

و) $\log_{\sqrt{۲}}^{\tan۱^\circ}+\log_{\sqrt{۲}}^{\tan۲^\circ}+\log_{\sqrt{۲}}^{\tan۳^\circ}+\cdots+\log_{\sqrt{۲}}^{\tan۸۹^\circ}$

۲۵. اگر $n\in\mathbb{N}$، توابع $f(x)=\log_{۳}^{x^n}$ و $g(x)=n\log_{۳}^{x}$ به ازای چه مقادیری از n، باهم مساویند؟

۲۶. اگر $\log_{۳}^{x}+\log_{۳}^{y}=۲$ و $x^۲+y^۲=۴۶$ حاصل $\log_{۴}^{(x+y)}$ چند است؟

۲۷. اگر $۲^{x-y}\times۴^{y+۴}=۱۶^۵$ و $\log y=۲\log\sqrt{۳}+\log x$ مقدار $\log_{۳۶}^{(y-x)}$ را به‌دست آورید.

۲۸. اگر $\log_{۸}^{\sqrt[۳]{۰/۲۵}}=A$، حاصل $\log_{۴}^{\frac{۱-A}{A}}$ را بیابید.

۲۹. اگر $\log_{y}^{x}=\frac{۲}{۵}$ و $y^{\log_{x}^{z}}=۳^{۱۰}$ مقدار z را بیابید.

۳۰. اگر $\log_{۵}^{۱۶}=a$، حاصل عبارت $\log۲۵^{a+۱}-۶\log۲$ را به‌دست آورید.

۳۱. اگر $\log xy^۲=۴۷$ ، $\log x^۳z=۱۹$ و $\log y^۲z^۳=۳۴$ حاصل $\log xyz$ را به‌دست آورید.

۳۲. اگر $\log_{۴}^{a+b}-\frac{۱}{۲}\log_{۲}^{a-b}=\log_{۲}^{b+۳a}-\log_{۲}^{۹}=۱$ مقادیر a و b را بیابید.

۳۳. اگر $۷^{a}=۲۴۵$ و $۵^{b}=۱۷۵$، حاصل عبارت $\frac{۱}{a-۱}+\frac{۱}{b-۱}$ را به‌دست آورید.

۳۴. اگر $\log ۲=a$ و $\log ۳=b$، حاصل عبارات زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log ۱۲$ ب) $\log ۱۵$ ج) $\log_{\sqrt{۸}}^{۲۷}$ د) $\log_{\sqrt{۷۵}}^{۲۴}$

۳۵. اگر $\log ۴=a$ و $\log ۱۸=b$، حاصل $\log ۱۵$ را برحسب a و b بنویسید.

۳۶. اگر $a^{۲}+b^{۲}=۱۴ab$ و $a,b>۰$، ثابت کنید:

$$\log\frac{a+b}{۴}=\frac{\log a+\log b}{۲}$$

۳۷. اگر $\log ۵=۰/۶۹۹$، تعداد ارقام اعداد $۵^{۹۶}$ و $۲^{۵۰۰}$ را بیابید.

۳۸. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۳}^{۳x-۱}=۴$

ب) $\log_{x}^{x^{۴}-۲}=۲$

ج) $\log_{۲}^{\log_{۳}^{(x-۱)}}=۴$

د) $\log_{۵}^{۲x-۱}+\log_{۵}^{۳x-۵}=۱$

ه) $\log(۲x-۴)-\frac{۱}{۲}\log(x+۱)=\log ۲$

و) $۳^{\log(۲x)}+(۲x)^{\log ۳}=۱۶۲$

ز) $(\log_{۴}^{x})^{۲}-\log_{۴}^{x^{۵}}+۴=۰$

ح) $۱۰^{\log x^{۲}}=x^{۴}$

ط) $x^{\log x-۲}=۱۰۰۰$

۳۹. اگر $۲\log(x+۱)=\log(۲x+۱۰)$ حاصل $\log_{\frac{۱}{x}}^{x\sqrt{۳}}$ را به‌دست آورید.

۴۰. اگر عددی ۷ برابر شده و ۲ واحد به آن اضافه کنیم، لگاریتم آن در مبنای ۲، ۳ واحد اضافه می‌شود آن عدد را بیابید.

۴۱. حدود m را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $\log(m-۲)-\log x=\log(۲m-x)$، دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

۴۲. اگر a و b ریشه‌های معادله‌ی $x^{۲}-۳۲x+۱۰=۰$ باشند، حاصل $\log a+\log b-\log_{۲}^{(a+b)}$ را بیابید.

۴۳. اگر $x>\sqrt{۲}$، حاصل عبارت زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$A=\log_{x^{۲}-۱}^{x^{۲}+۲x+۱}+\log_{\sqrt{x^{۲}-۱}}^{x^{۳}-x^{۲}-x+۱}$$

۴۴. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{۱}{۲}}^{۵x-۱}<-\frac{۱}{۲}$ ب) $\log_{۲}^{x^{۲}}-۳\geq\log_{۲}^{۲x}$

۴۵. نمودار تابع $y=\log_{۴}^{(x-۲)}+۲$ در بازه‌ی (a,b) از نمودار تابع $y=\log_{۲}^{x}$ بالاتر است. حداکثر $b+a$ را به‌دست آورید.

۴۶. برد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=۳\log_{۰/۳}^{(۴-x)}-۲$

ب) $y=\log_{۲}^{(x^{۲}+۴)}$

ج) $y=\log_{۲}^{(-x^{۲}-۲x+۱)}+۲$

۴۷. اگر شخصی a تومان در یک بانک سرمایه‌گذاری کند، میزان پول به همراه سودش از فرمول $y=a(\frac{۲۰۰۱}{۲۰۰۰})^{x}$ محاسبه می‌شود که در آن x، روزهای گذشته از افتتاح حساب و y میزان پول وی پس از x روز است. این شخص چند روز صبر کند تا پولش دو برابر شود؟

$$(\log_{۲}^{\frac{۲۰۰۱}{۲۰۰۰}}\simeq۰/۰۰۰۷۲)$$

۴۸. اگر M میزان بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شده در مقیاس ارگ (E) از رابطه‌ی $\log E=۱۱/۸+۱/۵M$ به‌دست می‌آید.

الف) میزان انرژی یک زلزله‌ی چند ریشتری برابر $۱۰^{۲۲}$ ارگ است؟

ب) انرژی یک زلزله‌ی ۷ ریشتری حدوداً چند برابر انرژی یک زلزله‌ی ۶ ریشتری است؟

۴۹. نیمه‌ی عمر یک عنصر رادیواکتیو ۶ ماه است. اگر جرم اولیه این عنصر ۲۴ گرم باشد، پس از حدود چند ماه جرم این عنصر به ۲ گرم می‌رسد؟

$$\log_{۳}^{۲}\simeq۰/۶۳$$

۵۰. جمعیت کشوری در سال ۱۳۰۰، ۲۰ میلیون نفر بوده است. اگر درصد رشد جمعیت این کشور یک درصد در سال بوده باشد، تابعی بنویسید که جمعیت این کشور (y) را برحسب سال‌های گذشته از ۱۳۰۰ (x) بیان کند. درچه سالی جمعیت این کشور به ۳۰ میلیون نفر رسیده است؟

$$\log_{۱/۰۱}^{۲/۲۵}\simeq۸۱/۴۸$$

۵۱. در مبحث شدت صدا، دسی‌بل صدا (D) از رابطه‌ی $D=۱۰\log\frac{I}{I_{۰}}$ به‌دست می‌آید که در آن I شدت صداست و $I_{۰}=۱۰^{-۱۲}$ است. دسی‌بل صدا یا شدت $۳/۶\times۱۰^{-۹}$ چقدر است؟ $(\log ۶=۰/۷۸)$

پاسخ مسائل حل شده‌ی فصل (۳)

۱. پول این شخص در آخر هر ماه، دنباله‌ی زیر را تشکیل می‌دهد.

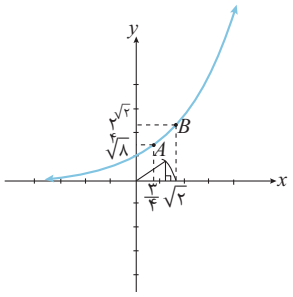
$۱۰\times۰/۹, ۱۰\times۰/۹^{۲}, ۱۰\times۰/۹^{۳}, \ldots$

میزان پول وی پس از x ماه: $y=۱۰\times۰/۹^{x}$

۲. نمودار $y=۲^{x}$ را به کمک جدول زیر رسم می‌کنیم.

x	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴

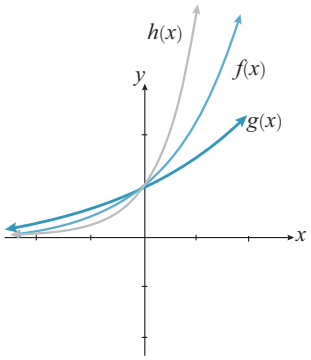
فرض می‌کنیم نقاط A و B به ترتیب با عرض‌های $\sqrt[۴]{۸}$ و $۲^{\sqrt{۲}}$ برروی نمودار هستند.



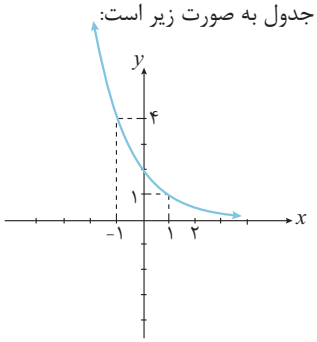
$$y_A=\sqrt[۴]{۸}=۲^{\frac{۳}{۴}}\Rightarrow x_A=\frac{۳}{۴}$$

$$y_B=۲^{\sqrt{۲}}\Rightarrow x_B=\sqrt{۲}$$

۳.

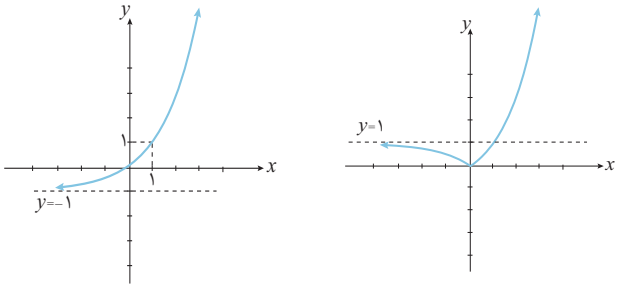


۴. الف) می‌توانیم نمودار تابع $y=(\frac{۱}{۲})^{x}$ را یک واحد به سمت راست منتقل کنیم. روش دیگر، استفاده از جدول به صورت زیر است:

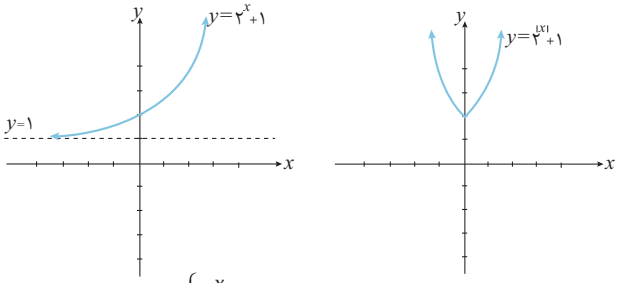


x	-۱	۰	۱	۲
y	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$

ب) نمودار $y=۲^{x}$ را یک واحد به سمت پایین جابه‌جا می‌کنیم. پس در نمودار حاصل، قسمت‌های زیر محور xها را نسبت به آن محور قرینه می‌کنیم.



ج) ابتدا نمودار $y=۲^{x}+۱$ را رسم می‌کنیم. سپس قسمت‌های سمت چپ محور yها را حذف نموده و قرینه‌ی قسمت‌های سمت راست محور y را (با حذف خود آن قسمت) نسبت به آن محور رسم می‌کنیم.



البته می‌توان تابع دو ضابطه‌ای $y=\begin{cases}۲^{x}+۱ & x\geq ۰\\ ۲^{-x}+۱ & x<۰\end{cases}$ را نیز رسم کرد.

۵. الف) با بزرگ‌تر شدن x، نمودار به سمت خط $y=-۱$ نزدیک می‌شود پس $b=۱$ یعنی $y=a(\frac{۱}{۲})^{x}-۱$ حال نقطه‌ی $(۰,۰)$ را در ضابطه‌ی تابع جاگذاری می‌کنیم.

$$۰=a(\frac{۱}{۲})^{۰}-۱\Rightarrow a-۱=۰\Rightarrow a=۱$$

ب) با کوچک‌تر شدن x، نمودار به سمت خط $y=۲$ نزدیک می‌شود. حال با توجه این‌که b عددی است منفی، $b=-۲$، پس $y=|a^{x}-۲|$ حال نقطه‌ی $(۰,۱)$ را جاگذاری می‌کنیم.

$$|a-۲|=۱\Rightarrow\begin{cases}a-۲=۱ & \Rightarrow a=۳\\ a-۲=-۱\Rightarrow a=۱ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$a=۱$ قابل قبول نیست چون پایه‌ی تابع نمایی باید مخالف عدد ۱ باشد.

۶. پایه‌ی تابع نمایی باید عددی مثبت و مخالف ۱ باشد.

همواره برقرار است $\frac{a-۳}{a+۱}\neq ۱\Rightarrow a-۳\neq a+۱$

$$\frac{a-۳}{a+۱}>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}a<-۱ \text{ یا } a>۳$$

انتشارات خوشخوان

۷. الف)
$$۸۱\times ۳^x - ۹\times ۳^x = ۸ \Rightarrow ۷۲\times ۳^x = ۸$$
$$\Rightarrow ۳^x = \frac{۱}{۹} \Rightarrow x = -۲$$

ب) تعریف می‌کنیم: $۳^x = a$
$$a^۲ + a - ۹۰ = ۰ \Rightarrow (a-۹)(a+۱۰) = ۰$$
$$a = -۱۰ \Rightarrow ۳^x = -۱۰ \quad \text{غ ق ق}$$
$$a = ۹ \Rightarrow ۳^x = ۹ \Rightarrow x = ۲$$

ج) تعریف می‌کنیم : $۲^x = A$، در نتیجه:
$$۲A + \frac{۱۶}{A} = ۱۲ \xrightarrow{\times \frac{A}{۲}} A^۲ + ۸ = ۶A$$
$$\Rightarrow A^۲ - ۶A + ۸ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} A = ۲ \\ A = ۴ \end{cases}$$
$$۲^x = ۲ \Rightarrow x = ۱$$
$$۲^x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$

د) تعریف می‌کنیم: $(\frac{۲}{۳})^x = A$، در نتیجه:
$$A + \frac{۱}{A} = \frac{۱۳}{۶} \xrightarrow{\times ۶A} ۶A^۲ - ۱۳A + ۶ = ۰$$
$$\Delta = ۱۶۹ - ۴\times ۶\times ۶ = ۲۵$$
$$A = \frac{۱۳ \pm ۵}{۱۲} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{۲}{۳} \\ A = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$
$$A = \frac{۲}{۳} \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^x = \frac{۲}{۳} \Rightarrow x = ۱$$
$$A = \frac{۳}{۲} \Rightarrow (\frac{۲}{۳})^x = \frac{۳}{۲} \Rightarrow x = -۱$$

ه) اعداد $۲ + \sqrt{۳}$ و $۲ - \sqrt{۳}$، معکوس هم هستند.
$$(۲+\sqrt{۳})^x = A$$
$$A + \frac{۱}{A} = ۲ \xrightarrow{\times A} A^۲ - ۲A + ۱ = ۰$$
$$\Rightarrow (A-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow A = ۱ \Rightarrow (۲+\sqrt{۳})^x = ۱ \Rightarrow x = ۰$$

و)
$$۵^x + ۱۲^x = ۱۳^x \Rightarrow (\frac{۵}{۱۳})^x + (\frac{۱۲}{۱۳})^x = ۱$$

اعداد ۵ ، ۱۲ و ۱۳ اعداد فیثاغورسی هستند. یعنی $x = ۲$ یکی از ریشه‌های معادله است. حال در اعداد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از ۲، به دنبال جواب می‌گردیم.

$$x > ۲ \Rightarrow (\frac{۵}{۱۳})^x < (\frac{۵}{۱۳})^۲$$
$$+ (\frac{۱۲}{۱۳})^x < (\frac{۱۲}{۱۳})^۲$$
$$(\frac{۵}{۱۳})^x + (\frac{۱۲}{۱۳})^x < ۱$$

یعنی به ازای x های بزرگ‌تر از ۲، تساوی برقرار نیست.

$$x < ۲ \Rightarrow (\frac{۵}{۱۳})^x > (\frac{۵}{۱۳})^۲$$
$$+ (\frac{۱۲}{۱۳})^x > (\frac{۱۲}{۱۳})^۲$$
$$(\frac{۵}{۱۳})^x + (\frac{۱۲}{۱۳})^x > ۱$$

یعنی به ازای x های کوچک‌تر از ۲ نیز تساوی برقرار نیست. پس $x = ۲$ تنها ریشه‌ی معادله است.

۸. برای پیدا کردن نقطه‌ی برخورد باید معادله‌ی $۴ - (\frac{۱}{۲})^{x-۲} = ۲^{x+۲} - ۱۳$ را حل کنیم.
$$۲^{x+۲} + (\frac{۱}{۲})^{x-۲} - ۱۷ = ۰ \Rightarrow ۲^{x+۲} + ۲^{۲-x} - ۱۷ = ۰$$
$$\xrightarrow{۲^x = A} ۴A + \frac{۴}{A} - ۱۷ = ۰$$
$$\xrightarrow{\times A} ۴A^۲ - ۱۷A + ۴ = ۰$$
$$\Delta = ۱۷^۲ - ۴\times ۴\times ۴ = ۲۲۵$$
$$A = \frac{۱۷ \pm ۱۵}{۸} \Rightarrow \begin{cases} A = ۴ \\ A = \frac{۱}{۴} \end{cases}$$
$$A = ۴ \Rightarrow ۲^x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$
$$A = \frac{۱}{۴} \Rightarrow ۲^x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow x = -۲$$

اعداد به‌دست آمده را در یکی از معادله‌ها جاگذاری می‌کنیم تا عرض‌های نقاط نیز به‌دست آیند.
$$y = ۲^{۲+۲} - ۱۳ = ۳ \qquad y = ۲^{-۲+۲} - ۱۳ = -۱۲$$

مختصات نقاط برخورد عبارت است از :
$(۲,۳)$ و $(-۲,-۱۲)$

فاصله‌ی دو نقطه $= \sqrt{(۲+۲)^۲ + (-۱۲-۳)^۲} = \sqrt{۲۴۱}$

۹. الف)
$$۳^{۴x-۲} > ۰ \Rightarrow ۳^{۴x-۲} - ۲ > -۲$$
$$\Rightarrow R = (-۲, +\infty)$$

ب)
$$\sqrt{۳}^{۲-x} > ۰ \Rightarrow -\sqrt{۳}^{۲-x} < ۰$$
$$\Rightarrow ۱ - \sqrt{۳}^{۲-x} < ۱ \Rightarrow R = (-\infty, ۱)$$

ج) ضابطه‌ی تابع را بازنویسی می‌کنیم:
$$y = (۲^x)^۲ - ۲(۲^x) + ۱ - ۱ = (۲^x - ۱)^۲ - ۱$$
$$\Rightarrow (۲^x - ۱)^۲ \geq ۰ \Rightarrow (۲^x - ۱)^۲ - ۱ \geq -۱$$
$$\Rightarrow R = [-۱, +\infty)$$

۱۰. الف)
$$۴^{x^۲} \leq ۴^۴ \xrightarrow{۴>۱} x^۲ \leq ۴$$
$$\Rightarrow x \in [-۲, ۲]$$

ب)
$$۰/۱۲۵ = \frac{۱۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۸} = ۲^{-۳}$$
$$(۲^{-۳})^{۵-x} > ۴ \Rightarrow ۲^{-۱۵+۳x} > ۲^۲ \xrightarrow{۲>۱}$$
$$-۱۵ + ۳x > ۲ \Rightarrow ۳x > ۱۷ \Rightarrow x > \frac{۱۷}{۳}$$

ج) $(۲^x)^۲ + ۲(۲^x) - ۸ > ۰ \xrightarrow{A=۲^x}$

$A^۲ + ۲A - ۸ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} A < -۴ \text{ یا } A > ۲$

$A < -۴ \Rightarrow ۲^x < -۴$ غیرممکن

$A > ۲ \Rightarrow ۲^x > ۲^۱ \Rightarrow x > ۱$

د) $۳^{\sqrt{x}} = A \Rightarrow \frac{A-۳}{۱-A} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

$۱ < A \leq ۳ \Rightarrow ۳^۰ < ۳^{\sqrt{x}} \leq ۳^۱ \Rightarrow ۰ < \sqrt{x} \leq ۱$

$\Rightarrow x \in (۰, ۱]$

ه) $۲^{x-[x]} \leq ۲^۰ \Rightarrow x - [x] \leq ۰$

از طرفی می‌دانیم $x - [x] \geq ۰$ بنابراین این نامساوی و نامساوی فوق لازم است که $x - [x] = ۰$ و این به ازای $x \in \mathbb{Z}$ برقرار است.

۱۱. الف) $۰/۰۶۲۵ = \frac{۶۲۵}{۱۰۰۰} = \frac{۱}{۱۶}$

$۰/۰۶۲۵^x \geq ۴ \Rightarrow (\frac{۱}{۱۶})^x \geq ۴ \Rightarrow (\frac{۱}{۴})^{۲x} \geq (\frac{۱}{۴})^{-۱}$

$\xrightarrow{\frac{۱}{۴}<۱} ۲x \leq -۱ \Rightarrow x \leq -\frac{۱}{۲} \Rightarrow D = \left(-\infty, -\frac{۱}{۲}\right]$

ب) با توجه به مقایسه‌ی نمودارهای توابع $y = ۲^x$ و $y = ۳^x$، مشخص است که به ازای xهای منفی، مقدار ۲^x از ۳^x بزرگ‌تر است.

$۲^x - ۳^x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ \Rightarrow D = (-\infty, ۰]$

ج) $x - \frac{x}{۲^x} \geq ۰ \Rightarrow x(۱ - \frac{۱}{۲^x}) \geq ۰ \Rightarrow$

$\frac{x(۲^x - ۱)}{۲^x} \geq ۰$

$x = ۰$ ریشه‌ی عبارت $۲^x - ۱$ است.

x	$-\infty$	۰	$+\infty$
x	$-$	۰	$+$
$۲^x - ۱$	$-$	۰	$+$
۲^x	$+$		$+$
$\frac{x(۲^x-۱)}{۲^x}$	$+$	۰	$+$

$\Rightarrow D = \mathbb{R}$

۱۲. نقطه‌ی برخورد نمودار وارون تابع f با محور طول‌ها معادله‌ی نقطه‌ی برخورد نمودار تابع f با محور عرض‌هاست یعنی جایی که $x = ۰$

$x = ۰ \Rightarrow f(۰) = ۳ \times ۲^۱ - ۲ = ۴$

نقطه‌ی موردنظر $(۰, ۴)$ است.

فاصله‌ی $(۰, ۴)$ از خط $y = x$

$\frac{|۴ - ۰|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲}$

۱۳. الف) $۳^{۱-x} = y - ۲ \Rightarrow ۱ - x = \log_۳^{y-۲}$

$\Rightarrow x = ۱ - \log_۳^{y-۲} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y, x \text{ را عوض}}$

وارون تابع : $y = ۱ - \log_۳^{x-۲}$

ب) $(\frac{۱}{۲})^{۲x-۱} = \frac{y-۴}{۳} \Rightarrow ۲x - ۱ = \log_{(\frac{۱}{۲})}^{\frac{y-۴}{۳}}$

$\Rightarrow x = \frac{\log_{(\frac{۱}{۲})}^{\frac{y-۴}{۳}} + ۱}{۲} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y, x \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون $y = \frac{\log_{(\frac{۱}{۲})}^{\frac{x-۴}{۳}} + ۱}{۲}$

ج) برخلاف موارد «الف» و «ب»، برد این تابع کل اعداد حقیقی نیست. ابتدا برد آن را تعیین می‌کنیم: $۲^{۲x} - ۳ \geq ۰ \Rightarrow \sqrt{۲^{۲x} - ۳} \geq ۰ \Rightarrow y \geq ۰$

یعنی دامنه‌ی تابع وارون، بازه‌ی $[۰, +\infty)$ است.

$y^۲ = ۲^{۲x} - ۳ \Rightarrow ۲^{۲x} = y^۲ + ۳ \Rightarrow ۲x = \log_۲^{y^۲+۳}$

$\Rightarrow x = \frac{۱}{۲}\log_۲^{y^۲+۳} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y, x \text{ را عوض}}$

وارون تابع : $y = \frac{۱}{۲}\log_۲^{x^۲+۳}$, $x \geq ۰$

د) $۴ - ۲x = ۳^y \Rightarrow ۲x = ۴ - ۳^y \Rightarrow$

$x = ۲ - \frac{۱}{۲} \times ۳^y \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y, x \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون : $y = ۲ - \frac{۱}{۲} \times ۳^x$

ه) $۲\log_۲^{x^۳} = y + ۱ \Rightarrow \log_۲^{x^۳} = \frac{y+۱}{۲}$

$\Rightarrow x^۳ = ۲^{\frac{y+۱}{۲}} \Rightarrow x = \sqrt[۳]{۲^{\frac{y+۱}{۲}}} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y, x \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون : $y = \sqrt[۳]{۲^{\frac{x+۱}{۲}}}$

و) $\log_۲^x = \sqrt[۳]{y} + ۱ \Rightarrow x = ۲^{\sqrt[۳]{y}+۱} \xrightarrow[\text{می‌کنیم}]{\text{جای } y, x \text{ را عوض}}$

ضابطه‌ی وارون: $y = ۲^{\sqrt[۳]{x}+۱}$

۱۴. وارون یکی از توابع مثلاً تابع نمایی را به‌دست می‌آوریم:

$y = ۳^{-x+a} + b \Rightarrow ۳^{-x+a} = y - b \Rightarrow$

$-x + a = \log_۳^{y-b} \Rightarrow x = a - \log_۳^{y-b}$

ضابطه‌ی وارون : $y = a - \log_۳^{x-b}$

با مقایسه‌ی این تابع با تابع $y = ۱ + c\log_d^{x-۲}$ می‌فهمیم که:

$a = ۱, b = ۲, c = -۱, d = ۳$

انتشارات خوشخوان

۱۵. الف) $۴x-۱>۰ \Rightarrow D=(\frac{۱}{۴},+\infty)$

ب) $۳-x^۲>۰ \Rightarrow x^۲<۳ \Rightarrow D=(-\sqrt{۳},\sqrt{۳})$

ج) $\frac{x-۱}{x+۱}>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

د) $D=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

$۱-\log_۲^{(x^۲-۱۴)} \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq \log_۲^{(x^۲-۱۴)}$

$۲^۱ \geq x^۲-۱۴ \Rightarrow x^۲ \leq ۱۶ \Rightarrow -۴ \leq x \leq ۴$

از طرفی باید $x^۲-۱۴>۰$

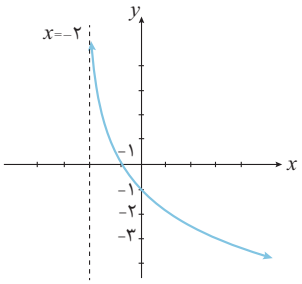
$x^۲-۱۴>۰ \Rightarrow x^۲>۱۴ \Rightarrow \boxed{x>\sqrt{۱۴}}\ (I)$ یا $\boxed{x<-\sqrt{۱۴}}\ (II)$

$(I)\cap(II) \Rightarrow \begin{cases} ۴ \geq x > \sqrt{۱۴} \\ -\sqrt{۱۴} > x \geq -۴ \end{cases}$

$D=[-۴,-\sqrt{۱۴})\cup(\sqrt{۱۴},۴]$

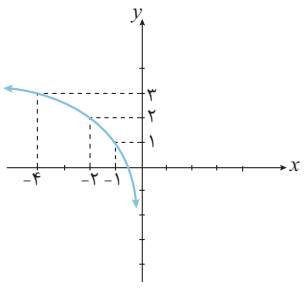
۱۶. الف) $D=(-۲,+\infty)$

x	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	۰	۲
y	۱	۰	-۱	-۲



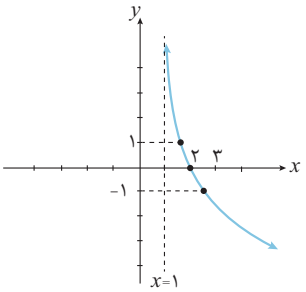
ب) $D=(-\infty,۰)$

x	$-\frac{۱}{۲}$	-۱	-۲	-۴
y	۰	۱	۲	۳

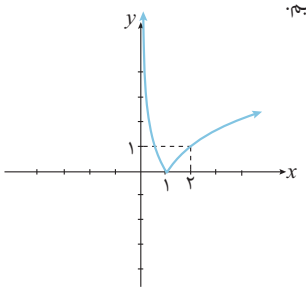


ج) $x-۱=(\frac{۱}{۲})^y \Rightarrow y=\log_{\frac{۱}{۲}}^{(x-۱)} \quad (x>۱)$

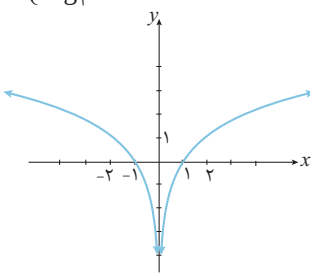
x	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
y	۱	۰	-۱



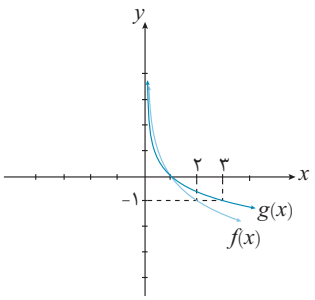
د) کافیست قسمت‌های زیر محور xها در نمودار $y=\log_۲^x$ را نسبت به آن محور قرینه کنیم.



ه) کافیست تابع دو ضابطه‌ای $y=\begin{cases} \log_۲^x & x>۰ \\ \log_۲^{-x} & x<۰ \end{cases}$ را رسم کنیم.



۱۷.



۱۸. الف) دامنه‌ی تابع برابر $(-\infty,-۱)$ است پس عدد -۱، ریشه‌ی $(a-x)$ است.

$a+۱=۰ \Rightarrow a=-۱$

$y=\log_b^{(-x-۱)}-۱$

حال مختصات $(-۳,۰)$ را جاگذاری می‌کنیم:

$۰=\log_b^{(-(-۳)-۱)}-۱ \Rightarrow ۱=\log_b^۲ \Rightarrow \boxed{b=۲}$

د) ابتدا نقطه‌ی $(۰,b)$ را در معادله قرار می‌دهیم.

$y=|\log_{a^۲+۱}^{a^۲+x+۱}| \xrightarrow[x=۰]{y=b} b=|\log_{a^۲+۱}^{a^۲+۱}|$

می‌دانیم که $\log_M^M$ برابر ۱ است. بنابراین $\boxed{b=1}$

حال نقطه‌ی $(-b, 0)$ را داخل معادله قرار می‌دهیم:

$$0=|\log_{a^2+1}^{a^2-b+1}| \Rightarrow (a^2+1)^0 = a^2-b+1 \Rightarrow a^2-b+1=1$$

$$\xrightarrow{b=1} a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1$$

۱۹. الف)

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{2\sqrt{2}} = a \Rightarrow (\frac{\sqrt{2}}{4})^a = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$(2^{\frac{1}{2}-2})^a = 2\times 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{-\frac{3a}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -\frac{3a}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a=-1$$

ب)

$$\log_{\frac{1}{32}}^{\frac{1}{16}} = a \Rightarrow (\frac{1}{32})^a = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{-5a} = 2^{-4}$$

$$\Rightarrow -5a=-4 \Rightarrow a=\frac{4}{5}$$

ج)

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\log_{\sqrt{2-\sqrt{3}}}^{2+\sqrt{3}} = a \Rightarrow (\sqrt{2-\sqrt{3}})^a = 2+\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1}{2+\sqrt{3}}}^a = 2+\sqrt{3} \Rightarrow (2+\sqrt{3})^{-\frac{a}{2}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow a=-2$$

د)

$$(\sqrt{2}+1)^2 = 2+1+2\sqrt{2} = 3+2\sqrt{2}$$

$$\log_{(\sqrt{2}+1)^2}^{(\sqrt{2}+1)^{-\frac{2}{5}}} = a \Rightarrow (\sqrt{2}+1)^{2a} = (\sqrt{2}+1)^{-\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow 2a=-\frac{2}{5} \Rightarrow a=-\frac{1}{5}$$

ه)

$$\log_{\sqrt{3}}^{\sqrt{27}} = b \Rightarrow \sqrt{3}^b = \sqrt{27}$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{b}{2}} = 3\sqrt{3} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow b=3$$

$$\log_{\sqrt[3]{27}} = a \Rightarrow \sqrt{27}^a = 3 \Rightarrow 3^{\frac{3a}{2}} = 3^1 \Rightarrow a=\frac{2}{3}$$

۲۰. الف)

$$243<700<739 \Rightarrow \xrightarrow{\log_3}$$

$$\log_3^{243} < \log_3^{700} < \log_3^{739} \Rightarrow 5<\log_3^{700}<6$$

ب)

$$0/01<0/012<0/1 \Rightarrow \xrightarrow{\log_{0/1}}$$

$$\log_{0/1}^{0/01} > \log_{0/1}^{0/012} > \log_{0/1} \Rightarrow 2>\log_{0/1}^{0/012}>1$$

ج)

$$(\frac{1}{3})^{-4} = 3^4 = 81$$

$$(\frac{1}{3})^{-5} = 3^5 = 243$$

$$81<112<243 \Rightarrow (\frac{1}{3})^{-4}<112<(\frac{1}{3})^{-5} \Rightarrow -5<\log_{\frac{1}{3}}^{112}<-4$$

۲۱.

$$\log_b^a = 5 \Rightarrow a=b^5 \Rightarrow a^2=b^{10}$$

$$\log_{a^2}^{\sqrt{b}} = \log_{b^{10}}^{\sqrt{b}} = c \Rightarrow b^{10c} = b^{\frac{1}{2}} \Rightarrow c=\frac{1}{20}$$

۲۲.

$$x=\frac{1+\sqrt{37}}{2} \Rightarrow 2x=1+\sqrt{37} \Rightarrow 2x-1=\sqrt{37}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} 4x^2-4x+1=37 \Rightarrow 4x^2-4x=36$$

$$\Rightarrow x^2-x=9 \qquad (I)$$

الف)

$$\log_{\sqrt[3]{3}}^{3x^2-3x} \overset{(I)}{=} \log_{\sqrt{3}}^{3\times 9} = \log_{\sqrt[3]{3}}^{27} = 6$$

ب)

$$(I) \Rightarrow x^2-9=x \Rightarrow \log_{x^2-9}^{\frac{1+\sqrt{37}}{2}} = \log_x^x = 1$$

۲۳. اگر بتوانیم x را برحسب y بنویسیم، تابع معکوس‌پذیر است.

$$y=\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \frac{3^x-\frac{1}{3^x}}{3^x+\frac{1}{3^x}} = \frac{\frac{3^{2x}-1}{3^x}}{\frac{3^{2x}+1}{3^x}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} \Rightarrow y\times 3^{2x}+y=3^{2x}-1$$

$$\Rightarrow y+1=3^{2x}(1-y) \Rightarrow 3^{2x}=\frac{y+1}{1-y} \Rightarrow 2x=\log_3^{\frac{y+1}{1-y}}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}\log_3^{\frac{y+1}{1-y}} \Rightarrow$$ تابع وارون‌پذیر است.

ضابطه‌ی وارون : $y=\frac{1}{2}\log_3^{\frac{x+1}{1-x}} \xrightarrow{\text{جای } y,x \text{ را عوض می‌کنیم}}$

۲۴. الف)

$$\log_{\sqrt{2}^7}^{4^3} = \frac{3}{7}\log_{\sqrt{2}}^4 = \frac{3}{7}\times\log_{2^{\frac{1}{2}}}^{2^2}$$

$$=\frac{3}{7}\times 2\times\frac{2}{1}=\frac{12}{7}$$

ب)

$$3^{4+\log_3^4} = 3^4\times 3^{\log_3^4} = 3^4\times 4^{\log_3^3}$$

$$=3^4\times 4^1 = 324$$

ج)

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}^{2} = \log_{\frac{(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2}} = \log_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}}$$

د)

$$\log_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{11}} - \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{21}{22}} + \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{7}{11}\times\frac{22}{21}\times\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$\log_b^a \times \log_c^b = \frac{\log_b^a}{\log_c^b} = \log_c^a$$

$$\log_{15}^{16}\times\log_{14}^{15}\times\ldots\times\log_3^4\times\log_2^3 =$$

$$\log_{14}^{16}\times\log_{13}^{14}\times\ldots\times\log_2^3 =$$

$$\log_{13}^{16}\times\log_{12}^{13}\times\ldots\times\log_2^3 = \ldots. =$$

$$\log_3^{16}\times\log_2^3 = \log_2^{16} = 4$$

هـ) $\sqrt{۲۵^{\log_{\sqrt{۵}}^{۴}-۲}}=\sqrt{\frac{۲۵^{\log_{\sqrt{۵}}^{۴}}}{۲۵^{۲}}}=\sqrt{\frac{۴^{\log_{\sqrt{۵}}^{۲۵}}}{۲۵^{۲}}}$

$=\sqrt{\frac{۴^{۴}}{۲۵^{۲}}}=\frac{۴^{۲}}{۲۵}=\frac{۱۶}{۲۵}$

و) عبارت $=\log \frac{\tan ۱^\circ\times\tan ۲^\circ\times\ldots\times\tan ۸۹^\circ}{\sqrt{۲}}$

$\tan ۱^\circ\times\tan ۸۹^\circ=\tan ۱^\circ\times\cot ۱^\circ=۱$

$\tan ۲^\circ\times\tan ۸۸^\circ=\tan ۲^\circ\times\cot ۲^\circ=۱$

$\tan ۴۴^\circ\times\tan ۴۶^\circ=\tan ۴۴^\circ\times\cot ۴۴^\circ=۱$

$\tan ۴۵^\circ=۱$

$\Rightarrow$ عبارت $=\log_{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}۰$

۲۵. $g(x)=n\log_{۳}^{x}$

$x>۰\Rightarrow D_g=(۰,+\infty)$

$f(x)=\log_{۳}^{x^n}$

اگر n فرد باشد: $x^n>۰\Rightarrow x>۰\Rightarrow D_f=(۰,+\infty)$

اگر n زوج باشد: $x^n>۰\Rightarrow x\neq ۰\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

یعنی در حالتی که عدد فرد است، D_f و D_g مساویند.

اگر n فرد باشد: $f(x)=\log_{۳}^{x^n}=n\log_{۳}^{x}=g(x)$

۲۶. $\log_{۳}^{x}+\log_{۳}^{y}=۲\Rightarrow\log_{۳}^{xy}=۲$

$\Rightarrow xy=۹\Rightarrow ۲xy=۱۸\quad (I)$

$x^۲+y^۲=۴۶\xrightarrow{(I)}x^۲+y^۲+۲xy=۴۶+۱۸=۶۴$

$\Rightarrow (x+y)^۲=۶۴$

$\log_{۴}^{x+y}=\frac{۱}{۲}\log_{۴}^{(x+y)^۲}=\frac{۱}{۲}\log_{۴}^{۶۴}=\frac{۱}{۲}\times ۳=\frac{۳}{۲}$

۲۷. $۲^{x-y}\times ۴^{y+۴}=۱۶^۵\Rightarrow ۲^{x-y}\times ۲^{۲y+۸}=۲^{۲۰}$

$\Rightarrow x-y+۲y+۸=۲۰\Rightarrow x+y=۱۲\qquad (I)$

$\log y=۲\log\sqrt{۳}+\log x=\log ۳x$

$\Rightarrow y=۳x\qquad (II)$

$\xrightarrow{(I),(II)}\begin{cases}x+y=۱۲\\ y=۳x\end{cases}\Rightarrow y=۹\ \text{و}\ x=۳$

$\log_{۳۶}^{y-x}=\log_{۳۶}^{۶}=\frac{۱}{۲}$

۲۸. $A=\log_{۸}^{۲\sqrt[۳]{۰/۲۵}}=\log_{۸}^{۲\times(\frac{۱}{۴})^{\frac{۱}{۳}}}=\log_{۸}^{۲\times۲^{-\frac{۲}{۳}}}$

$=\log_{۲^۳}^{۲^{\frac{۱}{۳}}}\Rightarrow ۲^{۳A}=۲^{\frac{۱}{۳}}\Rightarrow A=\frac{۱}{۹}$

$\frac{۱-A}{A}=\frac{۱}{A}-۱=۹-۱=۸\Rightarrow\log_{۴}^{\frac{۱-A}{A}}=\log_{۴}^{۸}=\log_{۲^۲}^{۲^۳}=\frac{۳}{۲}$

۲۹. $\log_{y}^{x}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow\log_{x}^{y}=\frac{۵}{۲}\qquad (I)$

$y^{\log_{x}^{z}}=z^{\log_{x}^{y}}=۳^{۱۰}\xrightarrow{(I)}z^{\frac{۵}{۲}}=۳^{۱۰}$

$\Rightarrow z=(۳^{۱۰})^{\frac{۲}{۵}}=۳^۴=۸۱$

۳۰. $\log_{۵}^{۱۶}=a\Rightarrow ۵^a=۱۶$

$۲۵^{a+۱}=۲۵^a\times ۲۵=(۵^a)^۲\times ۲۵=۱۶^۲\times ۲۵$

$\log ۲۵^{a+۱}-۶\log ۲=\log ۱۶^۲\times ۲۵-\log ۶۴=$

$\log\frac{۱۶^۲\times ۲۵}{۶۴}=\log ۱۰۰=\log_{۱۰}^{۱۰^۲}=۲$

۳۱. $\log y^۲z^۳+\log x^۳z+\log xy^۲=۳۴+۱۹+۴۷=۱۰۰$

$\Rightarrow\log x^۴y^۴z^۴=۱۰۰\Rightarrow ۴\log xyz=۱۰۰$

$\Rightarrow\log xyz=۲۵$

۳۲. $\log_{۲}^{b+۳a}-\log_{۲}^{۹}=\log_{۲}^{۲}\Rightarrow\frac{b+۳a}{۹}=۲$

$b+۳a=۱۸\qquad (I)$

$\log_{۴}^{a+b}-\log_{۴}^{a-b}=۱\Rightarrow\log_{۴}^{\frac{a+b}{a-b}}=۱\Rightarrow$

$a+b=۴a-۴b\Rightarrow ۳a=۵b\qquad (II)$

$(I),(II)\Rightarrow\left.\begin{matrix}۳a=۵b\\ b+۳a=۱۸\end{matrix}\right\}\Rightarrow b=۳,a=۵$

۳۳. $a=\log_{۷}^{۲۴۵}\Rightarrow a-۱=\log_{۷}^{۲۴۵}-\log_{۷}^{۷}=\log_{۷}^{۳۵}$

$\Rightarrow\frac{۱}{a-۱}=\log_{۳۵}^{۷}$

$b=\log_{۵}^{۱۷۵}\Rightarrow b-۱=\log_{۵}^{۱۷۵}-\log_{۵}^{۵}=\log_{۵}^{۳۵}$

$\Rightarrow\frac{۱}{b-۱}=\log_{۳۵}^{۵}$

$\frac{۱}{a-۱}+\frac{۱}{b-۱}=\log_{۳۵}^{۷}+\log_{۳۵}^{۵}=\log_{۳۵}^{۳۵}=۱$

۳۴. الف) $\log ۱۲=\log ۲^۲\times ۳=۲\log ۲+\log ۳$

$=۲a+b$

ب) $\log ۱۵=\log ۵+\log ۳$

$=\log ۱۰-\log ۲+\log ۳=۱-a+b$

ج) $\log_{\sqrt{۸}}^{۲۷}=\frac{\log ۲۷}{\log\sqrt{۸}}=\frac{\log ۳^۳}{\log ۲^{\frac{۳}{۲}}}=\frac{۳\log ۳}{\frac{۳}{۲}\log ۲}$

$=\frac{۳b}{\frac{۳}{۲}a}=\frac{۲b}{a}$

د) $\log_{\sqrt{۷۵}}^{۲۴}=\frac{\log ۲۴}{\log\sqrt{۷۵}}=\frac{\log ۲^۳+\log ۳}{\frac{۱}{۲}(\log ۵^۲+\log ۳)}=$

$\frac{۳\log ۲+\log ۳}{\frac{۱}{۲}(۲\log ۵+\log ۳)}=\frac{۳a+b}{\frac{۱}{۲}(۲(۱-a)+b))}=\frac{۶a+۲b}{b-۲a+۲}$

۳۵. $\log ۴ = a \Rightarrow \log ۲ = \frac{a}{۲}$

$\log ۱۸ = b \Rightarrow \log ۳^۲ + \log ۲ = b$

$\Rightarrow ۲\log ۳ + \frac{a}{۲} = b \Rightarrow \log ۳ = \frac{b}{۲} - \frac{a}{۴}$

$\log ۱۵ = \log ۵ + \log ۳ = \log ۱۰ - \log ۲ + \log ۳$

$= ۱ - \frac{a}{۲} + \frac{b}{۲} - \frac{a}{۴} = ۱ + \frac{b}{۲} - \frac{۳a}{۴}$

۳۶. $a^۲ + b^۲ + ۲ab = ۱۶ab \Rightarrow (a+b)^۲ = ۱۶ab$

$(\frac{a+b}{۴})^۲ = ab \xrightarrow{\log} \log(\frac{a+b}{۴})^۲ = \log ab$

$۲\log \frac{a+b}{۴} = \log a + \log b$

$\log \frac{a+b}{۴} = \frac{\log a + \log b}{۲}$

۳۷. $\log ۵ \simeq ۰/۶۹۹ \Rightarrow ۵ \simeq ۱۰^{۰/۶۹۹} \Rightarrow$

$۵^{۹۶} \simeq (۱۰^{۰/۶۹۹})^{۹۶} = ۱۰^{۶۷/۱۰۴}$

در نتیجه $۵^{۹۶}$، ۶۸ رقم دارد.

$\log ۲ = ۱ - \log ۵ = ۱ - ۰/۶۹۹ = ۰/۳۰۱$

$\Rightarrow ۲ \simeq ۱۰^{۰/۳۰۱} \Rightarrow ۲^{۵۰۰} \simeq (۱۰^{۰/۳۰۱})^{۵۰۰}$

$\Rightarrow ۲^{۵۰۰} \simeq ۱۰^{۱۵۰/۵}$

در نتیجه $۲^{۵۰۰}$، ۱۵۱ رقم دارد.

۳۸. الف) $\log_۳^{۳x-۱} = ۴ \Rightarrow ۳x - ۱ = ۸۱ \Rightarrow ۳x = ۸۲$

$\Rightarrow x = \frac{۸۲}{۳}$

ب) $\log_x^{x^۴ - ۲} = ۲ \Rightarrow x^۴ - ۲ = x^۲ \Rightarrow$

$x^۴ - x^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow (x^۲ - ۲)(x^۲ + ۱) = ۰$

$\Rightarrow x^۲ - ۲ = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۲}$ یا $x = -\sqrt{۲}$ غ ق ق

$-\sqrt{۲}$ غیر قابل قبول است چون مبنا نمی‌تواند منفی باشد.

ج) $\log_۳^{(x-۱)} = ۲^۴ \Rightarrow \log_۳^{x-۱} = ۱۶ \Rightarrow x - ۱ = ۳^{۱۶}$

$x = ۳^{۱۶} + ۱$

د) $\log_۵^{(۲x-۱)(۳x-۵)} = ۱ \Rightarrow (۲x-۱)(۳x-۵) = ۵$

$\Rightarrow ۶x^۲ - ۱۳x + ۵ = ۵ \Rightarrow x(۶x - ۱۳) = ۰$

$\Rightarrow x = ۰$ و غ ق ق $x = \frac{۱۳}{۶}$

ه) $\log(۲x-۴) - \log\sqrt{x+۱} = \log ۲ \Rightarrow$

$\frac{۲x-۴}{\sqrt{x+۱}} = ۲ \Rightarrow ۲x - ۴ = ۲\sqrt{x+۱} \Rightarrow x - ۲ = \sqrt{x+۱}$

$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲ - ۴x + ۴ = x + ۱ \Rightarrow x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$

$\Delta = ۲۵ - ۴ \times ۳ = ۱۳$

$x = \frac{۵ + \sqrt{۱۳}}{۲}$ $\quad x = \frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲}$ غ ق ق

به ازای $x = \frac{۵ - \sqrt{۱۳}}{۲}$، مبنای $۲x - ۴$ منفی خواهد شد چون

$۲x - ۴ = ۵ - \sqrt{۱۳} - ۴ = ۱ - \sqrt{۱۳}$

و) $۳^{\log ۲x} + (۲x)^{\log ۳} = ۳^{\log ۲x} + ۳^{\log ۲x}$

$= ۲ \times ۳^{\log ۲x} \Rightarrow ۲ \times ۳^{\log ۲x} = ۱۶۲$

$\Rightarrow ۳^{\log ۲x} = ۸۱ \Rightarrow \log ۲x = ۴ \Rightarrow ۲x = ۱۰^۴$

$\Rightarrow x = ۵۰۰۰$

ز) $(\log_۴^x)^۲ - \log_۴^{x^۵} + ۴ = ۰$

$\Rightarrow (\log_۴^x)^۲ - ۵\log_۴^x + ۴ = ۰$

$\xrightarrow{\log_۴^x = a} a^۲ - ۵a + ۴ = ۰ \Rightarrow (a-۱)(a-۴) = ۰$

$a = ۱ \Rightarrow \log_۴^x = ۱ \Rightarrow x = ۴$

$a = ۴ \Rightarrow \log_۴^x = ۴ \Rightarrow x = ۲۵۶$

ح) $۱۰^{\log x^۲} = x^۴ \Rightarrow \log x^۲ = k$

$x^۲ = ۱۰^k \Rightarrow x^۴ = ۱۰^{۲k}$

معادله‌ی اصلی را برحسب k می‌نویسیم:

$۱۰^k = ۱۰^{۲k} \Rightarrow k = ۲k \Rightarrow k = ۰$

$\log x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱$ یا -۱

ط) $x^{\log x - ۲} = ۱۰۰۰ \Rightarrow \log x = k \Rightarrow x = ۱۰^k$

معادله را برحسب k می‌نویسیم:

$(۱۰^k)^{k-۲} = ۱۰۰۰ \Rightarrow ۱۰^{k(k-۲)} = ۱۰^۳ \Rightarrow$

$k^۲ - ۲k - ۳ = ۰ \Rightarrow (k+۱)(k-۳) = ۰$

$k = -۱ \Rightarrow \log x = -۱ \Rightarrow x = \frac{۱}{۱۰}$

$k = ۳ \Rightarrow \log x = ۳ \Rightarrow x = ۱۰۰۰$

۳۹. $۲\log(x+۱) = \log(۲x+۱۰)$

$\Rightarrow \log(x+۱)^۲ = \log(۲x+۱۰)$

$\Rightarrow x^۲ + ۲x + ۱ = ۲x + ۱۰ \Rightarrow x^۲ = ۹$

$x = ۳$ یا $x = -۳$ (زیرا $(x+۱)$ نمی‌تواند منفی باشد) غ ق ق

$x = ۳ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{x}}^{x\sqrt{۳}} = \log_{\frac{۱}{۳}}^{۳\sqrt{۳}} = \log_{۳^{(-۱)}}^{۳^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{۳}{۲}$

۴۰. $\log_۲^{۷x+۲} = \log_۲^x + ۳$

$\Rightarrow \log_۲^{۷x+۲} = \log_۲^x + \log_۲^۸ \Rightarrow ۷x + ۲ = ۸x \Rightarrow x = ۲$

۴۱. $\log \frac{m-۲}{x} = \log ۲m - x \Rightarrow \frac{m-۲}{x} = ۲m - x$

$\Rightarrow m - ۲ = ۲mx - x^۲$

$\Rightarrow x^۲ - ۲mx + (m-۲) = ۰$

$\Delta = ۴m^۲ - ۴(m-۲) = ۴(m^۲ - m + ۲)$

برای وجود دو ریشه، باید $\Delta > ۰$

$m^۲ - m + ۲ > ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

$m < -۱$ یا $m > ۲$

انتشارات خوشخوان

$m<-۱$ قابل قبول نیست چون باید $m-۲$ مثبت باشد. محدوده‌ی m:

$m>۲$

۴۲. a و b ریشه‌های معادله هستند.

$$a+b=\frac{-(-۳۲)}{۱}=۳۲$$

$$ab=\frac{۱۰}{۱}=۱۰$$

$$\log a+\log b-\log_{۲}^{(a+b)}=\log ab-\log_{۲}^{a+b}$$

$$=\log ۱۰-\log_{۲}^{۳۲}=۱-۵=-۴$$

۴۳.

$$A=\log_{x^۲-۱}^{(x+۱)^۲}+\log_{\sqrt{x^۲-۱}}^{(x-۱)^۲(x+۱)}$$

$$=\log_{\sqrt{x^۲-۱}}^{|x+۱|}+\log_{\sqrt{x^۲-۱}}^{(x-۱)^۲(x+۱)}$$

$x>\sqrt{۲}\Rightarrow$ عددی مثبت است. $x+۱\Rightarrow |x+۱|=x+۱$

$$\Rightarrow A=\log_{\sqrt{x^۲-۱}}^{(x-۱)^۲(x+۱)^۲}=\log_{\sqrt{x^۲-۱}}^{(x^۲-۱)^۲}=۴$$

۴۴. الف)

$$\log_{\frac{۱}{۲}}^{۵x-۱}<-\frac{۱}{۲}\xrightarrow{\frac{۱}{۲}<۱}۵x-۱>(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$$

$$\Rightarrow ۵x-۱>\sqrt{۲}\Rightarrow ۵x>\sqrt{۲}+۱\Rightarrow x>\frac{\sqrt{۲}+۱}{۵}$$

ب)

$$\log_{۲}^{x^۲}-\log_{۲}^{۸}\geq\log_{۲}^{۲x}\Rightarrow\frac{x^۲}{۸}\geq ۲x$$

$$\Rightarrow x^۲-۱۶x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۰\quad \text{یا}\quad x\geq ۱۶$$

$x\leq ۰$ غیر قابل قبول است. پس $x\geq ۱۶$

۴۵.

$$\log_{۴}^{(x-۲)}+۲>\log_{۲}^{x}$$

$$\Rightarrow\log_{۴}^{x-۲}+\log_{۴}^{۱۶}>\log_{۴}^{x^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۶(x-۲)>x^۲\Rightarrow x^۲-۱۶x+۳۲<۰$$

$$\Delta=۲۵۶-۴\times ۳۲=۱۲۸\Rightarrow x=\frac{۱۶\pm\sqrt{۱۲۸}}{۲}$$

$$=۸\pm۴\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}۸-۴\sqrt{۲}<x<۸+۴\sqrt{۲}$$

با توجه به شرط دامنه‌ها باید $x>۲$ و این شرط برقرار است.

$$a=۸-۴\sqrt{۲},\ b=۸+۴\sqrt{۲}\Rightarrow a+b=۱۶$$

۴۶. الف) برد تابع لگاریتمی درجه اول، کل اعداد حقیقی است. $R=\mathbb{R}$

ب)

$$x^۲\geq ۰\Rightarrow x^۲+۴\geq ۴\Rightarrow\log_{۲}^{x^۲+۴}\geq\log_{۲}^{۴}\Rightarrow y\geq ۲$$

ج) باید $-x^۲-۲x+۱>۰$ حال مقدار بیشینه‌ی $-x^۲-۲x+۱$ را به‌دست می‌آوریم:

$$-x^۲-۲x+۱=-(x^۲-۲x+۱)+۲=-(x-۱)^۲+۲\leq ۲$$

$$-x^۲-۲x+۱\leq ۲\xrightarrow{\log_{۲}}\log_{۲}^{-x^۲-۲x+۱}\leq\log_{۲}^{۲}$$

$$\Rightarrow\log_{۲}^{-x^۲-۲x+۱}+۲\leq ۳\Rightarrow y\leq ۳$$

۴۷. پول شخص پس از دو برابر شدن به $۲a$ می‌رسد یعنی $y=۲a$

$$۲a=a(\frac{۲۰۰۱}{۲۰۰۰})^x\Rightarrow(\frac{۲۰۰۱}{۲۰۰۰})^x=۲\Rightarrow$$

$$x=\log_{\frac{۲۰۰۱}{۲۰۰۰}}^{۲}=\frac{۱}{\log_{۲}^{\frac{۲۰۰۱}{۲۰۰۰}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۰/۰۰۰۷۲}\simeq ۱۳۸۸/۹$$

یعنی باید ۱۳۸۹ روز صبر کند.

۴۸. الف)

$$E=۱۰^{۲۲}\Rightarrow\log ۱۰^{۲۲}=۱۱/۸+۱/۵M\Rightarrow$$

$$۲۲=۱۱/۸+۱/۵M\Rightarrow ۱/۵M=۱۰/۲$$

$$\Rightarrow M\simeq ۶/۸\ \text{ریشتر}$$

ب)

$$\log E_۲=۱۱/۸+۱/۵\times ۷=۲۲/۳$$

$$\log E_۱=۱۱/۸+۱/۵\times ۶=۲۰/۸$$

$$\log\frac{E_۲}{E_۱}=\log E_۲-\log E_۱=۱/۵\Rightarrow$$

$$\frac{E_۲}{E_۱}=۱۰^{۱/۵}\simeq ۳۱/۶$$

۴۹. می‌توان y (جرم ماده) را برحسب x (تعداد ماه‌ها) به صورت زیر نوشت:

$$y=۲۴\times ۲^{-\frac{x}{۶}}\xrightarrow{y=۲}۲=۲۴\times ۲^{-\frac{x}{۶}}\Rightarrow$$

$$۲^{\frac{x}{۶}}=۱۲\Rightarrow\frac{x}{۶}=\log_{۲}^{۱۲}=\log_{۲}^{۴}+\log_{۲}^{۳}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{۶}=۲+\frac{۱}{۰/۶۳}\Rightarrow x=۱۲+\frac{۶}{۰/۶۳}\Rightarrow x\simeq ۲۱/۵$$

۵۰. رشد جمعیت، ۱ درصد در سال بوده است یعنی جمعیت هر سال ۱/۰۱ برابر جمعیت سال قبل بوده است.

$$y=۲۰\times ۱/۰۱^x$$

$$۳۰=۲۰\times ۱/۰۱^x\Rightarrow ۱/۰۱^x=۱/۵$$

$$x=\log_{۱/۰۱}^{۱/۵}=\log_{۱/۰۱}^{\sqrt{۲/۲۵}}=\frac{۱}{۲}\log_{۱/۰۱}^{۲/۲۵}$$

$$\simeq\frac{۱}{۲}\times ۸۱/۴۸=۴۰/۷۴$$

جمعیت کشور در سال ۱۳۴۱، به سی میلیون رسیده است.

۵۱.

$$I=۳/۶\times ۱۰^{-۹}=۳۶\times ۱۰^{-۱۰}$$

$$D=۱۰\log\frac{I}{I_۰}=۱۰\log\frac{۳۶\times ۱۰^{-۱۰}}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$=۱۰\log ۳۶۰۰=۱۰\log ۶۰^۲=۲۰\log ۶۰$$

$$=۲۰(\log ۱۰+\log ۶)=۲۰(۱+۰/۷۸)$$

$$=۲۰\times ۱/۷۸=۳۵/۶$$

تمرینات فصل سوم

۱. نمره‌ی تراز یک دانش‌آموز در اولین آزمون آزمایشی سال برابر ۴۸۰۰ بوده است. اگر این دانش‌آموز در هر آزمون ۵ درصد عملکرد بهتری نسبت به آزمون قبل داشته باشد (ترازش ۵ درصد افزایش یابد) تابعی بنویسید که نمره‌ی تراز او (y) را برحسب شماره‌ی آزمون (x) بیان کند. در آزمون هشتم تراز این دانش‌آموز حدوداً چند خواهد شد؟

۲. تابع $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را رسم کنید و به کمک نمودار آن، روی محور yها به‌طور تقریبی، نقاطی به عرض‌های $\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}$ و $(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ را علامت بزنید.

۳. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=۳^{۱-x}-۱$

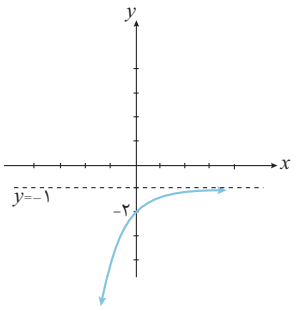
ب) $y=(\frac{۱}{۲})^{\sqrt{x^۲}}$

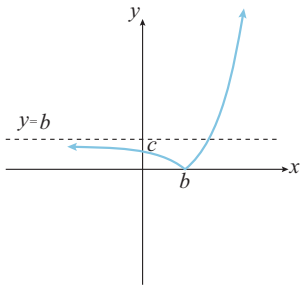
ج) $y=\frac{x\times ۲^x}{|x|}$

٤. در هر مورد پارامترهای مجهول را به‌دست آورید.

الف) $y=a(\frac{۱}{۳})^{x-b}+a$

ب) $y=|a^{x-۱}-۲|$





۵. به ازای چه مقادیری از k، تابع $y=(k-k^۳)^{x-k}+k$ یک تابع نمایی یا دامنه‌ی $\mathbb{R}$ است؟

۶. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^{x+۳}+\sqrt{۲}^{۱-x}=۱۰$

ب) $۱۶^x-۵\times ۴^x+۴=۰$

ج) $۸^{x-۱}=۲^{x^۲+x-۵}$

د) $۴\times ۲^{۲x}-۶^x=۱۸\times ۳^{۲x}$

هـ) $\left[۲^x\right]=۰$

۷. حدود k را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $۴^x-۳\times ۲^x+k=۰$ دقیقاً یک ریشه داشته باشد.

۸. به کمک رسم نمودار، تعداد ریشه‌های معادله‌ی زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲^{x-۳}+۱=x$

ب) $|x|-۳^x=۲$

۹. نمودار توابع $y=۲^{۲x-۲}-۱$ و $y=۷-۲^x$ همدیگر را در چه نقاطی قطع می‌کنند؟

۱۰. برد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=\sqrt{۳}^{\sqrt{۳}x-۱}-\sqrt{۳}$

ب) $y=|-۱-۳^{x-۱}|$

ج) $y=۲^x+۲^{-x}+۱$

انتشارات خوشخوان

۱۱. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲^{x^۲-x+۱} \leq ۸$

ب) $(۰/۰۱)^x + (۰/۱)^{x+۱} > ۱۰۰۱۰$

ج) $\frac{۲^{x+۱} - ۲^x - ۷}{۲^x - ۴} \leq ۲$

د) $\frac{\sqrt{۲}}{۲} < \left[۳^x \right] \leq ۲\sqrt{۲}$

۱۲. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \sqrt{۳^{x-۱} - \sqrt{۳}}$

ب) $y = \sqrt{۴^x + ۲^x - ۶}$

ج) $y = \sqrt{۲^x + ۱ - x}$

د) $y = \frac{[x]}{۲[x]-۱}$

۱۳. تابع وارون توابع زیر را بیابید.

الف) $y = (\frac{۱}{۲})^{۲-x} - ۱$

ب) $y = |۲^{x-۴}|$

ج) $y = \sqrt[۳]{۱ - ۳^x}$

د) $y = ۲\log_{۵}^{(x+۱)}$

ه) $y = \sqrt{\log_{۲}^{x} - ۳}$

و) $y = \log \frac{۳-x}{۲x+۱}$

۱۴. اگر توابع $f(x) = \sqrt[۳]{a + ۲^x} - ۲$ و $g(x) = \log_b^{(x^۳ + cx^۲ + ۱۲x + ۷)}$ باهم مساوی باشند. مقدار $a+b+c$ را بیابید.

۱۵. دامنه‌ی توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = x\log_{۲}^{\frac{۱}{x-۲}}$

ب) $y = \log_{۴}^{(x^۲ + ۴x + ۴)}$

ج) $y = \sqrt{۱ - \log_{۳}^{\log_{۲}^{(-x)}}}$

۱۶. رسم کنید.

الف) $y = \log_{\frac{۱}{۲}}^{۱-x}$

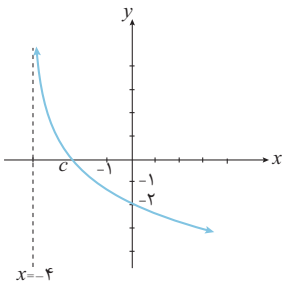
ب) $۲^y = ۳ - ۲x$

ج) $\log_{۲}^{y} = \log_{۴}^{x}$

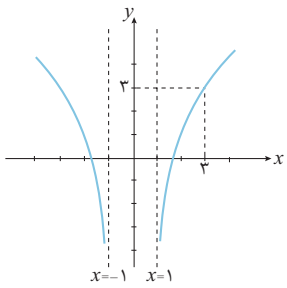
د) $y = |\log_{(\frac{۱}{۲})}^{۲x} - ۲|$

۱۷. در هر مورد با توجه به شکل، مقادیر مجهول را به‌دست آورید.

الف) $y=\log_b^{(x+a)}$



ب) $y=\log_b^{(x^۲-a)}$



۱۸. تعداد ریشه‌های معادلات زیر را به کمک رسم نمودار مشخص کنید.

الف) $\log_۲^x=\log_{\frac{۱}{۳}}^{۱-x}$

ب) $\sqrt{x}-|\log_۲^x|=۱$

ج) $\log_۳^x=۳^x$

۱۹. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۹\sqrt{۳}}^{۲۷\sqrt{۳}}$

ب) $\log_{\frac{۱}{۱۲۸}}^{\sqrt[۳]{۲}}$

ج) $\log_{\log ۱۷}^{\log ۱۰}$

د) $\log_{۵-۲\sqrt{۶}}^{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}$

۲۰. مشخص کنید هریک از اعداد زیر بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار می‌گیرند.

الف) $\log_۳^{۱۰۰۰}$

ب) $\log_۲^{۰/۱۵}$

ج) $\log_{۰/۲}^{\sqrt{۳۴۰}}$

۲۱. اگر $\log_b^a=۴$ و $\log_a^۸=b$، حاصل $b^{۲b}$ را بیابید.

۲۲. اگر $\log_a^{۳a}=۴$، حاصل $\log_{a^۹}^{۳a^۶}$ را بیابید.

۲۳. اگر $x=\frac{-۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۸-x-x^۲}^{x^۲+x}$

ب) $\log_{۶۴}^{۵x-x^۳}$

۲۴. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۹\times ۱۰^{-۱۰}}^{۲۷\times ۱۰^{-۱۵}}$

ب) $۶۲۵^{\log_{\sqrt{۵}}^۲}\div ۸۱^{\log_۳^۲}$

ج) $\log_۳^{۲۵}\log_۴^۹-\log_{\sqrt{۲}}^{\frac{۵}{۲\sqrt{۲}}}$

د) $۹^{\frac{\log_۷^۸}{\log_۷^۳}}$

ه) $(\log_{۴۲}^۶)^۲+\frac{\log_{۴۲}^۷}{\log_{۴۵۲}^۶}$

انتشارات خوشخوان

۲۵. اگر $۳^a = A$، حاصل $\log_{۳}^{۹A^۲}$ را بیابید.

۲۶. اگر $\log_{\sqrt{۳}}^{a} = \frac{۴}{۳}$ حاصل $\log_{۸}^{(a^۳+۷)}$ چقدر است؟

۲۷. اگر $\log ۲ = k$، حاصل عبارت زیر را برحسب k بیابید.

$$\log(۶-۲\sqrt{۵}) + ۲\log(۱+\sqrt{۵})$$

۲۸. اگر $۲y^۲ - ۴x^۲ = ۲۰$ و $\log_{۴}^{x^۲} = \log_{۴}^{y^۲} + ۱$ مقادیر x و y را بیابید.

۲۹. اگر $۲^x \times ۴^{y-۱} = ۴$ و $\log_{۲}^{x^۲} + \log_{۲}^{y} = ۲$ مقادیر x و y را با فرض گویا بودن بیابید.

۳۰. اگر $\log_{yz}^{x^۲y} = ۳$ و $\log_{y}^{xz} = ۴$ حاصل $\log_{x}^{z}$ را به‌دست آورید.

۳۱. اگر $\log x^۲y = ۰/۵$ و $\log x^۴yz = ۰/۳$ و $\log xy^۳z^۲ = ۱/۱$، حاصل $\log xyz$ را بیابید.

۳۲. اگر $\log_{n}^{۲۵} = \log_{۲n}^{۱۲۵}$، حاصل $\log_{۲}^{n}$ را بیابید.

۳۳. اگر $\log_{a}^{x}, \log_{b}^{x}, \log_{c}^{x}$ جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، ثابت کنید $c^۲ = (ac)^{\log_{a}^{b}}$

۳۴. اگر $\log ۳ = a$ و $\log ۵ = b$، حاصل عبارات زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log ۴۵$

ب) $\log \frac{۹}{۵}$

ج) $\log_{۲۷}^{\sqrt{۵}}$

د) $\log_{۶}^{\sqrt[۳]{۷۵}}$

۳۵. اگر $\log ۲۴ = a$ و $\log ۱۸ = b$، حاصل $\log_{۴۸}^{۳۰}$ را برحسب a و b بنویسید.

۳۶. اگر $\log \frac{a+b}{۳} = \frac{\log a + \log b}{۲}$ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A = \frac{a^۲ + b^۲ + ۵ab}{a^۲ + b^۲ - ab}$$

۳۷. اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$، تعداد ارقام عدد $۵^{۴۸}$ و تعداد صفرهای پس از ممیز عدد $۲^{-۹۶}$ را بیابید.

۳۸. معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{7}}^{1-x^2} = -1$

ب) $\log_{4}^{\log_{3}^{x^8}} = 1$

ج) $\log_{x}^{12-x} = 2$

د) $\log_{5}^{\frac{x+2}{2x-3}} + \log_{5}^{x} = 1$

ه) $2(\log_{16}^{x})^2 + \log_{16}^{x^3} = 5$

و) $\log_{x}^{3} \times \log_{x}^{2} + \log_{x}^{\frac{2}{27}} = 3$

ز) $9^{\log_{3}^{3x}} = x^2$

ح) $x^{\log_{5}^{x}+1} = 5^6$

۳۹. اگر $2 = \log_{6}^{2x-4} + \log_{6}^{x+5}$، حاصل $\log_{\frac{1}{x}}^{x+12}$ چقدر است؟

۴۰. اگر عددی را معکوس کنیم به لگاریتم آن در مبنای ۴، ۸ واحد اضافه می‌شود لگاریتم آن عدد در مبنای $\sqrt{32}$ چقدر است؟

۴۱. m را طوری تعیین کنید که معادله‌ی زیر دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

$$(\log_{2}^{x})^2 + m = \frac{4}{\log_{x}^{2}}$$

۴۲. اگر $x > 1$ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A = \log_{\frac{x+2}{x-1}}^{\frac{x^2+3x+2}{x^2-1}} + \log_{\frac{x+2}{x-1}}^{\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}}$$

۴۳. نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{6}}^{x^2-x} \geq -1$

ب) $(2\log_{2}^{x}-1)^2 < 4$

ج) $2(\log_{3}^{x})^2 + |\log_{3}^{x}| - 3 \leq 0$

د) $\left[\log_{x}^{4}\right]^2 < \log_{8}^{7}$

۴۴. نمودار تابع $f(x) = \log_{8}^{x}$ در بازه‌ی $(a, +\infty)$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}^{x} + 4$ است. حداقل مقدار a چقدر است؟

۴۵. برد توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۲}\log_{۵}^{(۳-x)}$

ب) $g(x)=\frac{۱}{\log_{۲}^{x}}$

ج) $h(x)=(\log_{۲}^{x})^{۲}+\log_{۲}^{x^{۲}}$

د) $k(x)=\log_{\frac{۱}{۲}}^{(۴x-x^{۲})}+۱$

۴۶. اگر $f(x)=\log(\frac{x-۱}{x+۱})$، نمودار تابع $y=f(x)+f(-x)$ را رسم کنید.

۴۷. اگر با نرخ بهره‌ی ۲۴ درصد در سال، پایان هر ماه سود را به سرمایه اضافه کنند، پس از ۵ سال سرمایه چند برابر می‌شود؟

$\log ۳۲۸=۲/۵۱۶\ ,\ \log ۱۰۲=۲/۰۰۸۶$

۴۸. از یک جسم فسیلی ۲۸/۷ درصد از کربن معمولی آن باقی‌مانده است. اگر نیم عمر کربن ۵/۵ قرن باشد، قدمت این جسم فسیلی چند قرن است؟

$\log ۲=۰/۳۰۱\ ,\ \log ۲/۸۷=۰/۴۵۸۲$

۴۹. اگر جمعیت به‌طور نمایی با ضریب ثابت ۲ درصد در سال رشد کند، پس از چند سال این جمعیت ۳/۱ برابر می‌شود؟

$\log ۳۱=۱/۴۹۰۲\ ,\ \log ۱/۰۲=۰/۰۰۸۶$

۵۰. بزرگی زلزله در مقیاس ریشتر (M) برحسب انرژی آزاد شده برحسب ارگ (E) از رابطه‌ی $M=\frac{۲}{۳}(\log E-۱۱/۸)$ به‌دست می‌آید. میزان انرژی آزاد شده در یک زلزله‌ی چند ریشتری برابر $۱۰^{۲۳/۵}$ ارگ است؟

۵۱. براساس آزمایش‌های متعدد مشخص شده که اگر a نفر مبتلا به نوع خاصی از ویروس در جامعه‌ای که درمانی برای آن ندارد، حضور داشته باشند تعداد افراد مبتلا به ویروس (y) برحسب روزهای گذشته از شروع بیماری (x) از رابطه‌ی $y=a\times ۱/۴^{x}$ به‌دست می‌آید. پس از چند روز کامل تعداد مبتلایان به بیماری، بیش از ۱۱ برابر خواهد شد؟

$\log ۱۱=۱/۰۴۲\ ,\ \log ۱/۹۶=۰/۲۹۲۲$