آموزش و کتاب کار

هندسه (۲) پایه یازدهم

(ویژه‌ی مهندس‌ها)

مؤلفین:

نادر حاجی‌زاده، سیدمحمدرضا حسینی‌فرد، محمدجمال صادقی

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

به نام خالق رؤیاهای دیروز و واقعیت‌های آینده

سرمو روی بالش گذاشتم خیره شدم به سقف. همش تو ذهنم این بود که یه کتاب جدید دیگه داره چاپ می‌شه، باید به مراحل آخر کار فکر کنم؛ یعنی کاغذش رو با چه قیمتی باید تهیه کنم، چاپخونه رو باید چی‌کار کنم، قیمت کتاب رو چطور محاسبه کنم؟ اونم تو این روزایی که خیلی‌ها سخت نون شبشونو تهیه می‌کنن. آخه کتاب کمک آموزشی رو می‌خوان چی‌کار؟

دیدم اگه بخوام به این موضوعات فکر کنم تا صبح باید غصه مشکلات خودمو دیگران رو بخورم.

بعد یهو یادم افتاد که مقدمه‌ی این کتاب رو هم هنوز ننوشتم، گفتم الان بهترین وقته که به این فکر کنم که تو مقدمه در مورد چی می‌خوام صحبت کنم. داشتم به این فکر می‌کردم که خب بهتره در مورد مشوق بودن صحبت کنم. مشوق خودتون باشید!

اولین کسی باشید که خودتون رو به خاطر رسیدن به هدفتون تشویق می‌کنید و اولین کسی باشید که خودتون رو به خاطر اشتباهتون سرزنش می‌کنید. خواستم بگم زیاد خودتون رو تشویق نکنید که مغرور نشید و زیاد خودتون رو سرزنش یا تنبیه نکنید که اعتماد به نفس‌تون خدای نکرده کم بشه. تو همین فکرا بودم که یهو فکرم دوباره رفت سمت کاغذ و زینک، که گرونیشون به دلیل این‌که از خارج وارد می‌شن و قیمتشون به دلار بستگی داره و به خاطر همین تحریم‌ها و دلایل دیگه هی گرون‌تر می‌شن. تو این فکرا بودم که یهو صدای در اومد،

- بابا بیدار نمی‌شی؟!

- چرا الان بلند می‌شم عزیزم.

- راستی بابا می‌دونم اول صبحه، ولی پمپ چاه آب کار نمی‌کنه، اگر یه فکری براش زودتر نکنیم محصولات خراب می‌شن.

- باشه عزیزم، نمازمو بخوونم می‌رم ببینم باید چی‌کار کرد.

بلند شدم دست و صورتمو شستم و وضو گرفتم و نماز صبح رو خوندم. هنوز خورشید بالا نیومده، چند تا آچار برداشتم رفتم سراغ پمپ. هوا گرگ و میش بود، خنکی هوای صبح قشنگ زیر پوست آدم نفوذ می‌کرد، این خنکای هوای رو به هیچی نمی‌دم، همین‌طور که داشتم قدم زنان می‌رفتم گوشیم زنگ خورد.

- سلام آقا!! (با صدای خنده) صبحونه نخورده کجا رفتی؟

- سلام خانم، زود برمی‌گردم، ریحانه گفت پمپ مشکل داره، دارم میرم ببینم می‌شه کاریش کرد؟!

- باشه آقای مهندس، ولی زیاد فشار به خودت نیار، برای صبحونه منتظرت می‌مونیم.

- باشه عزیزم، فعلا خداحافظ.

شبنم همه جا رو گرفته بود، رفتم تو اتاقک پمپ. چند بار کلید رو زدم، سیم‌ها رو چک کردم، برق داشتن، ولی پمپ کار نمی‌کرد. دست به آچار شدم پمپ رو باز کردم، شفت رو تا چرخوندم، فهمیدم که پمپ گریپاژ کرده. بخشی از پمپ رو باز کردم راه افتادم سمت خونه.

وقتی در اتاق رو باز کردم بوی نون داغ و گل محمدی داخل چای فضای خونه رو پر کرده بود.

- سلام

- آقا مهندس تا دست تو بشوری صبحونه رو آوردم.

- سلام، چشم عزیزم، بازم پمپ گریپاژ کرده.

- بابا ای کاش به‌جای رشته‌ی الانت می‌رفتی مهندسی می‌خوندی، این‌طوری که تو دست به آچار و پیگیر هستی، شاید می‌تونستی کاری بکنی که این همه دچار مشکل نباشیم، تا هر روز بخوای هر چیزی رو با لوازم یدکی درجه چندم بدرد نخور جایگزین کنی.

تو این فکر بودم که مگه من مهندسی نخوندم؟! دخترم داره چی می‌گه، من که کلی تلاش کردم برم رشته‌ی ریاضی و مهندسی بخونم. دیدم داره صدای دخترم میاد.

- بابا بلند شو، نمازت قضا نشه؟!

چشمام رو وقتی باز کردم فهمیدم تو خواب بودم. صدای دزدگیر ماشین همسایه تو اون موقع صبح، یادم انداخت که تو روستا نیستم قشنگ دارم تو دل تهران زندگی می‌کنم. بلند شدم رفتم صورتمو آب بزنم و وضو بگیرم که دخترم اومد پشتم.

- صبح بخیر آقا معلم

از تو آیینه دیدم که چادر نمازش سرشه و یه خنده‌ی شیطنت‌آمیزی روی صورتش. هر وقت این‌طوری صدام می‌کنه یه جایی تو کارای مدرسه‌اش گیره.

- سلام دخترم، صبحت بخیر. چی شده خورشید نزده، قشنگ معلومه کارت گیره.

- آره بابا، معلممون گفته در مورد یه سری شغل به دلخواه تحقیق کنیم ببریم مدرسه. بابا یه سوال؟

- جانم؟

- تو الان معلمی، مهندسی یا مدیر؟ اینا چه فرقی دارن؟ چرا نرفتی دکتر بشی؟

با خنده گفتم:

- تو که خوب بلدی از اینترنت استفاده کنی، خب یه سرچ بزنی اطلاعات خوبی اونجا هست.

- بله، درسته بابا، خب وقتی تو هستی چه کاریه آخه؟ مهندسی چیه؟ الان تو مهندس هستی بابا یا نه؟! یا فقط یه عنوانه؟

یهو یاد خوابم افتادم، مهندس کیه؟ مهندسا کجان؟ یه عمره داریم دانش‌آموز پرورش می‌دیم که به جامعه‌ی خودشون بتونن کمک کنن. چقدر تو این زمینه موفق بودیم؟ چقدر تونستیم استقلال صنعتی برای کشور ایجاد کنیم؟ چرا وقتی به اینستا نگاه می‌کنم باید غصه بخورم که خیلی از شاگردهای دیروزم که مهندس‌های امروزن به‌جای این‌که عکس‌های دورهمی‌شونو تو ایران بذارن، از جمع‌هاشون تو کشورهای دیگه عکس می‌ذارن؟ چرا برای ادامه تحصیل و زندگی خارج رو ترجیح می‌دن؟ تو این چراها بودم که باز صدای دخترم منو از فکر و خیال درآورد.

- بابا لطفا امروز اگه می‌شه زودتر بیا که تو این تکلیف کمکم کنی. گفتم باشه دخترم ...

امیدوارم روز مهندس به یه روز تولد خواجه نصیر الدین طوسی (۵ اسفند) در سال ختم نشه. مهندس‌ها هستن که می‌تونن در کنار تکنسین‌ها و کارگرهای ماهر کشورو رو به جلو ببرن. امیدوارم که گام‌های مهندس‌هامون رو محکم کنیم تا گام‌های آینده‌ی کشورمون استوارتر بشن.

لازم می‌دونم قبل از هر چیز از تک‌تک عزیزانی که برای این کتاب زحمت کشیدن تشکر کنم. تشکر از دوست عزیزم آقای حسن محمدبیگی، که قبول زحمت کردن و سرپرستی هیئت تألیف این کتاب رو بر عهده گرفتن، بردار عزیزم آقای نادر حاجی‌زاده که تجربیاتشون رو در اختیار ما قرار دادن و از دبیر گرانقدر و فارغ‌التحصیل سال‌های ابتدایی تدریسم در دبیرستان امام صادق (ع) آقای حسینی‌فرد که ما را از ایده‌های پویاشون بهره‌مند کردند و از شاگرد قدیم و دوست و همکار امروزم آقای دکتر محمدجمال صادقی که می‌دونم چقدر برای این کتاب زحمت کشیدن.

کتاب حاضر برای دانش‌آموز علاقه‌مند به هندسه تألیف شده، و بارهای بار تمام سطرها و مسائل آن بررسی شد تا حتی‌المقدور خالی از اشکال باشد. کتاب با آخرین ویرایش کتاب درسی منطبق است. این کتاب با نگاه ویژه به دانش‌آموزان ممتاز و تیزهوش تألیف شده است، ولی می‌تواند برای تمام دانش‌آموزان مشتاق به هندسه مفید باشد.

خدا را شاکرم به‌خاطر تمام الطافش. که سایه مهرش را از من دریغ نکرده. در هر پستی و بلندی یارم بوده و حضور نگاهش را در جای جای زندگیم احساس می‌کنم.

بهترین‌ها را برای شما و خودم از خداوند خواستارم.

لازم می‌دانم از تمامی کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند کمال تشکر را داشته باشم و از شما دوست عزیز نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم. از شما مخاطب گرامی انتظار می‌رود عیوب و ایرادات کار را به ما ارجاع دهید تا در چاپ‌های بعدی مورد توجه قرار گیرد.

رسول حاجی‌زاده

مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

درس هندسه

نخست عشقی ست سبز
و عشق، درقلب سرخ
و قلب، در سینه‌یِ پرنده‌ای می‌تپد
که با دل و عشق خویش
همیشه را خرّم است.
پرنده بر ساقه‌ای‌ست
و ساقه بر شاخه‌ای
درخت در بیشه‌ای
و بیشه در ابر و مِه
و ابر و مِه گوشه‌ای زعالم اعظم است.
کنون به دست آورید
مساحت عشق را
که چندها برابر عالم است.

"هندسه‌ی عشق - محمدرضا شفیعی کدکنی"

به نام خدا

انسان سال‌هاست که متوجه شده است به محاسبه‌ی طول پاره‌خط، محیط و مساحت شکل‌ها و حجم شکل‌های فضایی احتیاج دارد و همواره در پی پیدا کردن روش‌های نوین و کارآمد برای این اندازه‌گیری‌هاست.

هندسه را می‌توان علم اندازه‌گیری طول نامید و به کمک آن می‌توان به محاسبات مورد نیاز در صنعت و معماری و ساخت و سازهای مختلف پرداخت.

در این کتاب در فصل اول به بررسی دایره و خصوصیات آن اشاره می‌شود، دایره به عنوان ساده‌ترین و شاید پرکاربردترین شکل هندسی که می‌توانید استفاده‌ی آن را در اطراف خود ببینید.

در فصل دوم به تبدیل‌های هندسی که در دوره‌ی اول دبیرستان با آن‌ها آشنا شده‌اید مثل انتقال، بازتاب و دوران و کاربرد آن‌ها در حل مسائل می‌پردازیم.

و در فصل سوم به رابطه‌هایی می‌رسیم که بین اجزای اصلی و فرعی مثلث برقرار است و یاد می‌گیریم با داشتن سه ضلع مثلث مساحت، طول نیمساز، طول میانه، طول ارتفاع و اندازه‌ی زاویه‌های مثلث را به دست آوریم.

ما سعی کرده‌ایم با در نظر گرفتن همه ی مطالب کتاب درسی و ارائه مناسب آن‌ها و حل مسائل مختلف در تعمیق و یادگیری شما دانش‌آموز عزیز به همیاری شما بیاییم. با بررسی آنچه در کتاب آمده و حل مسائل با وقت گذاشتن، خود را در مسیر راه‌حل‌ها قرار دهید. تا لذت حل مسئله را ببرید.

در انتهای هر فصل مسائل مختلف با درجه‌ی سختی مناسب همه‌ی گروه‌های دانش‌آموزی فصل را کامل کرده‌ایم. حتما مسائل را با حوصله و توجه حل کنید تا به خوبی به هدف ما که یادگیری مطلوب است برسید.

در پایان لازم است از مدیریت محترم انتشارات خوشخوان جناب آقای رسول حاجی‌زاده و تمامی اعضای محترم انتشارات خوشخوان به ویژه آقای وزیرزاده تشکر و قدردانی نماییم.

و نیز لازم می‌دانیم از شما دانش‌آموز گرامی و همکاران محترم بخواهیم که با پیشنهادات خود ما را در رفع نواقص احتمالی کمک کرده تا در چاپ‌های بعدی کتاب آن‌ها را تصحیح نماییم.

امیدواریم این کتاب کمکی هر چند ناچیز در ارتقاء سطح علمی شما داشته باشد و مطالعه‌ی هندسه را برایتان لذت بخش‌تر کند.

ان شاء الله.

و من الله توفیق

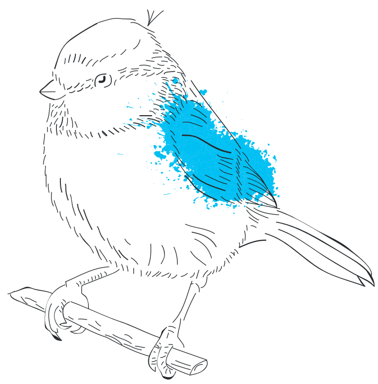
گروه مؤلفان

تابستان ۱۳۹۸

فهرست مطالب

فصل اول

دایره

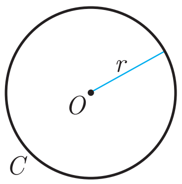


درس اول

مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

مفاهیم اولیه

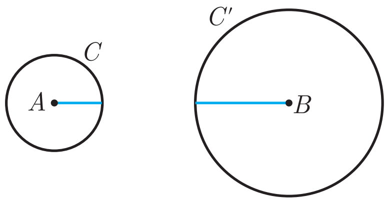
یکی از مباحث مهم و کاربردی در هندسه، مبحث «دایره» است که در سال‌های گذشته به صورت جسته و گریخته با برخی از موضوعات آن آشنا شدید. در این کتاب تلاش و هدف ما آن است که مفاهیم و قضایای مربوط به «دایره» را به‌طور زیر بنایی مطرح کرده و شما را به سمت حل مسائل مربوط به آن سوق دهیم.



تعریف: دایره مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی از صفحه است که از نقطه‌ی ثابتی مانند O در آن صفحه، به فاصله‌ی ثابت r باشند. به عبارت دیگر هر نقطه روی دایره فاصله‌اش از O برابر r است و هر نقطه‌ای که فاصله‌اش از O برابر r باشد روی دایره قرار دارد.

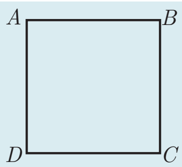
نقطه‌ی ثابت O را **مرکز** و فاصله‌ی ثابت r را **شعاع دایره** می‌گوییم. معمولاً این دایره را با نماد $C(O\,,r)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱ پاره‌خط AB به طول ۵ سانتی‌متر مفروض است. دایره‌های $C(A\,,۱)$ و $C'(B\,,۲)$ را رسم کنید.

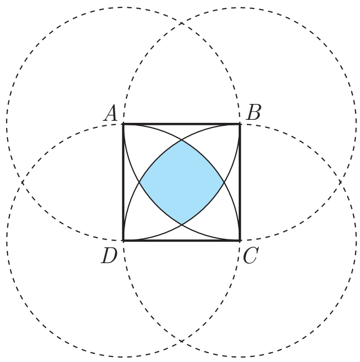


حل: دایره‌ی $C(A\,,۱)$ دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۱ و دایره‌ی $C'(B\,,۲)$ دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۲ است. در شکل مقابل آن‌ها رسم شده‌اند.

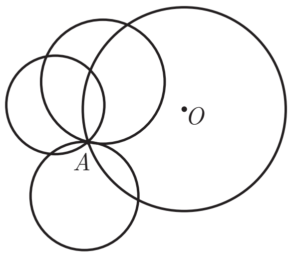
مثال ۲ مربع $ABCD$ به ضلع ۲ را در نظر بگیرید به مراکز رأس‌های این مربع و شعاع ۲، دایره‌هایی رسم کنید. قسمت مشترک بین هر چهار دایره را مشخص کنید.



حل: با رسم دایره‌ها به مراکز A، B، C و D و شعاع ۲ شکل مقابل ایجاد می‌شود به طوری‌که قسمت رنگی قسمت مشترک بین آن‌ها است.



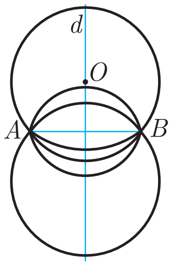
مثال ۳ از نقطه‌ی مفروض A چند دایره در صفحه می‌گذرد؟



حل: از نقطه‌ی دلخواه O به A وصل می‌کنیم دایره به مرکز O به شعاع OA از نقطه‌ی A می‌گذرد. بنابراین به مرکز هر نقطه از صفحه به جز A می‌توان دایره‌ای گذرنده از نقطه‌ی A رسم کرد پس بی‌شمار دایره‌ی گذرنده از A وجود دارد.

مثال ۴ از دو نقطه‌ی متمایز A و B چند دایره می‌گذرد؟

حل: عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. می‌دانیم هر نقطه روی این عمودمنصف از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله است. پس به مرکز هر نقطه روی عمودمنصف AB مثل O و شعاع OA و OB دایره‌ای رسم می‌کنیم، این دایره از نقاط A و B می‌گذرد. بنابراین، از این دو نقطه بی‌شمار دایره می‌گذرد و مراکز دایره‌هایی که از این دو نقطه می‌گذرند روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.



مثال ۵ کوچک‌ترین دایره‌ی گذرنده از دو نقطه‌ی متمایز A و B کدام است؟

۱) دایره به مرکز A وشعاع AB ۲) دایره به قطر AB

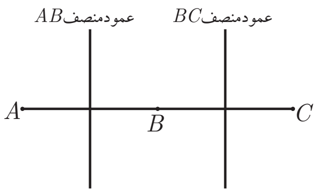
۳) دایره به مرکز M وسط AB و شعاع AB ۴) دایره به مرکز B و شعاع AB

حل: می‌دانیم از دو نقطه‌ی متمایز A و B بی‌شمار دایره عبور می‌کند که مرکز این دایره‌ها روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. مسلماً دایره به قطر AB کوچک‌ترین این دایره خواهد بود زیرا وسط پاره‌خط AB به نقاط A و B از سایر نقاط روی عمودمنصف AB به نقاط A و B نزدیک‌تر است. پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال ۶ از سه نقطه‌ی متمایز A، B و C که روی یک خط قرار دارند چند دایره عبور می‌کند؟

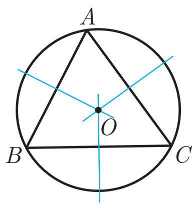
۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

حل: گزینه ۱ صحیح است. از سه نقطه‌ی A، B و C که روی یک خط قرار دارند دایره‌ای عبور نمی‌کند زیرا نقطه‌ای نمی‌توان پیدا کرد که از A، B و C به یک فاصله باشد. زیرا می‌دانیم نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف AB واقع‌اند و نقاطی که از B و C به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف BC واقع‌اند. و این دو عمودمنصف چون بر یک خط عمودند (خط AC) با هم موازی می‌شوند پس نقطه‌ای که از نقاط A، B و C به یک فاصله باشد وجود ندارد بنابراین دایره‌ای که از این نقاط عبور کند وجود ندارد.



مثال ۷ دایره‌ای رسم کنید که از سه رأس مثلث ABC عبور کند.

حل: می‌دانیم عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند و نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC از سه رأس آن به یک فاصله‌اند. اگر O نقطه‌ی تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ABC باشد آن‌گاه دایره به مرکز O و شعاع OA، دایره‌ای است که از سه رأس مثلث ABC می‌گذرد.



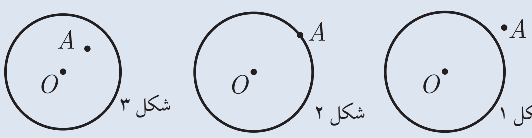
نتیجه: *از سه نقطه‌ی A، B و C که روی یک خط قرار ندارند، دقیقاً یک دایره عبور می‌کند.*

نکته ۱ **(اوضاع نسبی یک نقطه و یک دایره). نقطه‌ی A و دایره‌ی $C(O, r)$ یکی از سه وضعیت زیر را نسبت به هم دارند:**

الف) نقطه‌ی A بیرون دایره است. در این حالت: $OA > r$ (شکل ۱) (فاصله‌ی A تا مرکز دایره بزرگ‌تر از شعاع دایره است)

ب) نقطه‌ی A روی دایره است. در این حالت: $OA = r$ (شکل ۲)

پ) نقطه‌ی A درون دایره است. در این حالت: $OA < r$ (شکل ۳)

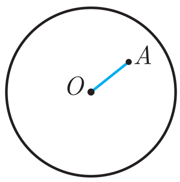


شکل ۳ شکل ۲ شکل ۱

مثال ۸ دایره‌ی $C(O\,,۱۳)$ مفروض است. نقطه‌ی A از مرکز O به فاصله‌ی $۳m-۵$ قرار دارد اگر A درون دایره باشد m کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۷ ‏ ۲) ۶ ‏ ۳) ۴/۵ ‏ ۴) ۵

حل: گزینه‌ی ۳ صحیح است. نقطه‌ی A درون دایره قرار دارد پس $OA<r$. بنابر فرض، سؤال شعاع دایره برابر ۱۳ و $OA=۳m-۵$ است و داریم:



$$۳m-۵<۱۳\Rightarrow ۳m<۱۸\Rightarrow m<۶$$

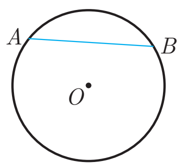
از طرف دیگر فاصله عدد مثبتی است پس باید $۳m-۵>۰$ یعنی $m>\frac{۵}{۳}$. بنابراین $\frac{۵}{۳}<m<۶$.

در بین گزینه‌ها تنها عدد ۴/۵ در این فاصله قرار دارد.

یادآوری چند مفهوم دایره

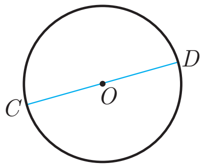
شعاع دایره: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشد.

وتر دایره: پاره‌خطی است که دو سر آن روی دایره باشد. (مانند وتر AB در شکل روبه‌رو)

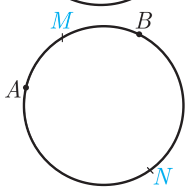


قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد قطر نام دارد.

قطر دایره بزرگ‌ترین وتر دایره است و اندازه‌ی آن دو برابر شعاع دایره است. $(CD=۲r)$

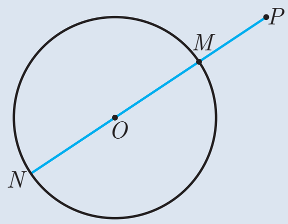


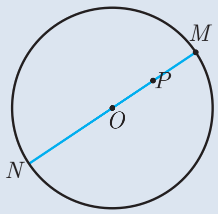
کمان: کمان دایره شامل دو نقطه روی دایره و تمام نقاط بین آن دو نقطه است. هر دو نقطه از دایره مانند A و B دو کمان AB را روی دایره مشخص می‌کنند. برای مشخص کردن آن‌ها می‌توان از نقطه‌ی دیگری روی هر کمان استفاده کرد. (مانند کمان‌های AMB و ANB در شکل مقابل)



معمولاً منظور از کمان AB، کمان کوچک‌تر مشخص شده توسط A و B است.

نکته ۲ **نزدیک‌ترین و دورترین نقطه‌ی دایره‌ی $C(O\,,r)$ نسبت به نقطه‌ی ثابت P، دو سر قطری از دایره است که از P می‌گذرد. (یا امتداد آن از P می‌گذرد.) در شکل مقابل، M نزدیک‌ترین نقطه و N دورترین نقطه‌ی دایره تا P است.**

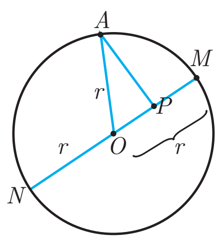




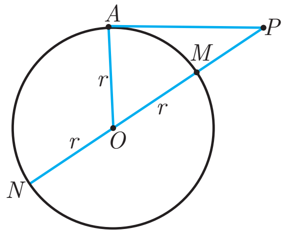
اثبات: فرض کنیم A نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد؛ می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$PM\le PA\le PN$$

در صورتی که P درون یا بیرون دایره باشد، آن‌گاه از A به O وصل می‌کنیم. بنابر نامساوی مثلثی در مثلث AOP داریم:



$$AO+OP>AP\Rightarrow r+OP>AP\Rightarrow NP>AP$$



$$AP>|OP-AO|\Rightarrow AP>|OP-r|\Rightarrow AP>PM$$

مثال ۹ نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره‌ی $C(O,r)$ نسبت به نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۴ و ۱۰ واحد از آن قرار دارند، شعاع دایره را بیابید.

حل: دو حالت ممکن است. اگر A خارج از دایره باشد آن‌گاه $OA+r$ بیش‌ترین و $OA-r$ کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره تا A هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} AO+r=۱۰ \\ AO-r=۴ \end{cases} \xrightarrow{-} r=۳$$

اگر A درون دایره باشد، آن‌گاه $OA+r$ بیش‌ترین و $r-OA$ کم‌ترین فاصله‌ی نقاط دایره تا A هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} r-AO=۴ \\ r+AO=۱۰ \end{cases} \xrightarrow{+} r=۷$$

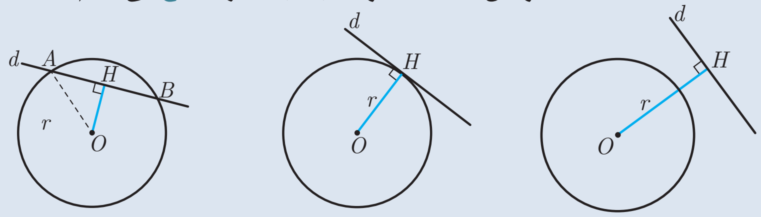
نکته ۳

(اوضاع نسبی یک خط و یک دایره). خط d و دایره‌ی $C(O,r)$ یکی از سه حالت زیر را نسبت به هم دارند:
(H پای عمودی است که از نقطه‌ی O بر خط d رسم می‌شود)

الف) خط d و دایره‌ی $C(O,r)$ نقطه‌ی اشتراک ندارند. در این حالت گوییم خط d و دایره‌ی C متخارج‌اند. $r<OH$ (شکل ۱) (فاصله‌ی خط d از مرکز دایره از شعاع دایره بزرگ‌تر است)

ب) خط d و دایره‌ی $C(O,r)$ تنها در یک نقطه مشترک‌اند. در این حالت گوییم خط d بر دایره‌ی C مماس است. $r=OH$ (شکل ۲)

پ) خط d و دایره‌ی $C(O,r)$ در دو نقطه‌ی A و B مشترک‌اند. در این حالت گوییم خط d و دایره‌ی C متقاطع‌اند. $r>OH$ (شکل ۳) (در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم)



شکل ۳   شکل ۲   شکل ۱

مثال ۱۰ خط d به فاصله‌ی $\sqrt{۱۰}$ از مرکز دایره‌ی $C(O,\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$ قرار دارد. خط d با دایره چند نقطه‌ی مشترک دارد؟

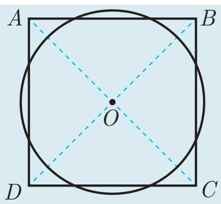
حل: باید شعاع دایره و فاصله‌ی مرکز تا خط را مقایسه کنیم:

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۳} \;\square\; \sqrt{۱۰} \Rightarrow (\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲} \;\square\; ۱۰ \Rightarrow ۲+۳+۲\sqrt{۶} \;\square\; ۱۰ \Rightarrow ۲\sqrt{۶} \;\square\; ۵ \Rightarrow \sqrt{۲۴} \;\square\; ۵$$

توجه کنیم که ۵ از $\sqrt{۲۴}$ بزرگ‌تر است یعنی فاصله‌ی خط تا مرکز دایره از شعاع دایره بیش‌تر است، پس خط با دایره نقطه‌ی مشترک ندارد.

مثال ۱۱ دایره‌ای به مرکز O و شعاع r اضلاع مربع $ABCD$ به طول ضلع a را در ۸ نقطه قطع می‌کند نشان دهید:

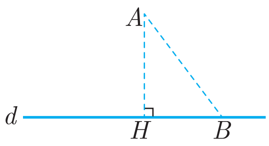
$$\frac{a}{۲}<r<\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$



حل: چون ضلع مربع، دایره را قطع می‌کند پس باید شعاع دایره از نصف ضلع مربع بیش‌تر باشد. همچنین، راس مربع بیرون از دایره است بنابراین، باید AO از شعاع دایره بیش‌تر باشد پس $\frac{AB}{۲}<r<OA$ یعنی داریم:

$$\frac{a}{۲}<r<\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

یادآوری: *فاصله‌ی نقطه از خط: فرض کنیم d خط موردنظر و A نقطه‌ی موردنظر غیرواقع بر d و نقطه‌ی H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود. اندازه‌ی پاره‌خط AH همان فاصله‌ی نقطه‌ی A از خط d است.*



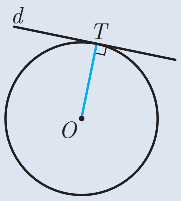
بدیهی است که فاصله‌ی نقطه‌ی A از سایر نقاط خط d، از AH بزرگ‌تر است. $(AB > AH)$

نتیجه: *اگر فاصله‌ی نقطه‌ای مانند H روی خط d از A، از فاصله‌ی بقیه‌ی نقاط روی خط d از A کوچک‌تر باشد. AH بر d عمود است.*

حال اگر خط d در نقطه‌ی T بر شعاع OT عمود باشد، از آن‌جایی که فاصله‌ی تمام نقاط دیگر خط d تا O بزرگ‌تر از OT است، می‌توان نتیجه گرفت که تمام نقاط خط d غیر از T در بیرون دایره قرار دارند در نتیجه خط d با دایره فقط یک نقطه‌ی تماس دارد و بنابراین بر دایره مماس است.

نتیجه: *یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه‌ی تماس با دایره بر شعاع گذرنده از آن نقطه عمود باشد.*

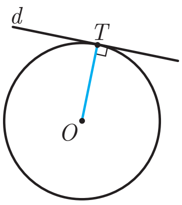
نکته ۴ **اگر خط d در نقطه‌ی T بر دایره‌ی $C(O, r)$ مماس باشد آن‌گاه شعاع OT بر خط d عمود است.**



اثبات: T نزدیک‌ترین نقطه‌ی خط d به نقطه‌ی O است. زیرا بقیه‌ی نقاط خط d بیرون دایره قرار دارند و فاصله‌اشان از O بیش‌تر از r است ولی فاصله‌ی T تا O، r است. پس با توجه به نتیجه‌ی قبل OT بر d عمود است.

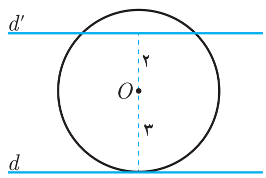
مثال ۱۲ نقطه‌ی T روی دایره‌ی $C(O, r)$ واقع است. در نقطه‌ی T خط مماس بر دایره را رسم کنید.

حل: خط مماس بر شعاع OT عمود است بنابراین ابتدا شعاع OT را رسم می‌کنیم. سپس در نقطه‌ی T خط d را عمود بر OT می‌کشیم. خط d جواب این مثال خواهد بود، یعنی خط d در نقطه‌ی T بر دایره مماس است.

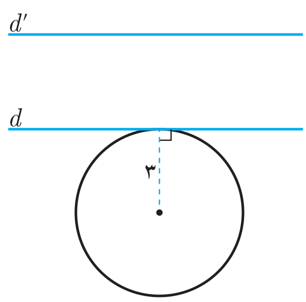


مثال ۱۳ دو خط موازی به فاصله‌ی ۵ سانتی‌متر و دایره‌ی $C(O, ۳)$ مفروض‌اند اگر دایره بر یکی از دو خط موازی مماس باشد وضعیت دایره و خط دیگر را مشخص کنید.

حل: دو حالت ممکن است. دایره و خط d' یا متخارج و یا متقاطع‌اند.



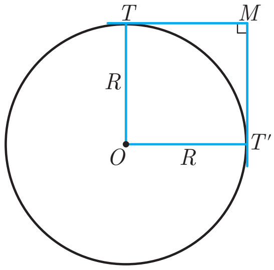
دایره و d' متقاطع‌اند.



دایره و d' متخارج‌اند.

مثال ۱۴ دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ی $C(O, ۱۲\sqrt{۲})$ در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. طول OM برابر کدام است؟

۱) ۱۶   ۲) ۱۸   ۳) ۲۰   ۴) ۲۴



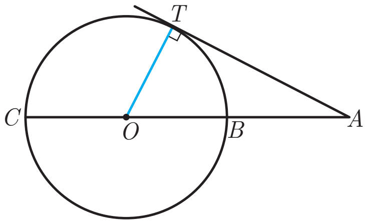
حل: در نظر بگیرید مماس‌های MT و MT' بر هم عمودند اگر از مرکز O به نقاط T و T' وصل کنیم آن‌گاه مربع $OTMT'$ به ضلع R به‌دست می‌آید. پس OM قطر این مربع بوده و مساوی $R\sqrt{۲}$ است. بنابراین:

$$OM = R\sqrt{۲} \xrightarrow{R=۱۲\sqrt{۲}} OM = ۲۴$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

مثال ۱۵ نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره‌ی $C(O,R)$ نسبت به نقطه‌ی A بیرون دایره به فاصله‌ی ۱۸ و ۳۲ واحد از آن قرار دارند. از A، مماس AT را بر دایره رسم می‌کنیم اندازه‌ی AT چقدر است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) $۱۶\sqrt{۲}$ ۴) $۹\sqrt{۳}$



حل: در مسائلی که خط مماس مطرح است یکی از خطوط اضافه‌ای که می‌تواند به حل مسئله کمک کند این است که از مرکز دایره به نقطه‌ی تماس وصل کنیم و از زاویه‌ی قائمه‌ی تشکیل شده استفاده کنیم. از A به O وصل می‌کنیم تا دایره را در B قطع کند و امتداد آن دایره را در C قطع کند. B نزدیک‌ترین و C دورترین نقطه‌ی دایره نسبت به A است. داریم:

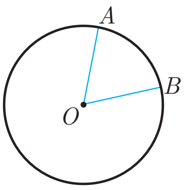
$$\left.\begin{matrix} AB = ۱۸ \\ AB + ۲R = ۳۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{-} ۲R = ۱۴ \Rightarrow R = ۷$$

از O به T وصل می‌کنیم و می‌دانیم $O\hat{T}A = ۹۰^\circ$ بنابراین:

$$AT^۲ = AO^۲ - OT^۲ = ۲۵^۲ - ۷^۲ = (۲۵-۷)(۲۵+۷) = ۱۸\times۳۲ = ۹\times۶۴ \Rightarrow AT = ۳\times۸ = ۲۴$$

زاویه‌ها در دایره:

زاویه‌ی مرکزی: زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن دو شعاع دایره باشند. (مانند زاویه‌ی AOB در شکل مقابل)

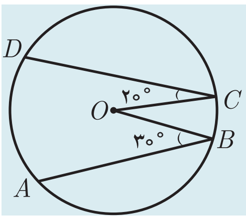


نکته ۵

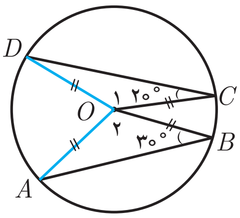
اندازه‌ی کمان همان اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابلش تعریف می‌شود و واحد آن درجه است.

مثلاً در شکل بالا: $\overset{\frown}{AB} = A\hat{O}B$، یعنی اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی AOB برابر اندازه‌ی کمان AB است.

مثال ۱۶ در شکل O مرکز دایره است حاصل $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$ را بیابید.



حل: از O به A و D وصل می‌کنیم و از مثلث‌های متساوی‌الساقین تشکیل شده استفاده می‌کنیم:



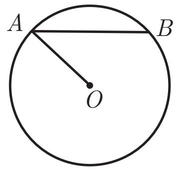
$$OD = OC \Rightarrow \hat{D} = \hat{C} = ۲۰^\circ \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۲۰^\circ - ۲۰^\circ = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{DC} = ۱۴۰^\circ$$

$$OA = OB \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} = ۳۰^\circ$$

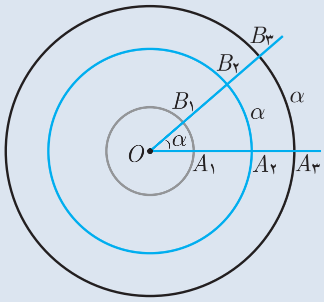
$$\hat{O}_۲ = ۱۸۰^\circ - ۳۰^\circ - ۳۰^\circ = ۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{AB} = ۳۶۰^\circ - ۱۴۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۱۰۰^\circ$$

ایده: معمولاً در مسائلی که قسمتی از شکل به این صورت است، رسم شعاع دیگر و استفاده از مثلث متساوی‌الساقین تشکیل شده می‌تواند مفید باشد.



نکته ۶ **اندازه‌ی کمان با طول کمان متفاوت است. اندازه‌ی کمان برحسب درجه است و طول کمان برحسب سانتی‌متر، متر و ... است توجه داریم که اندازه‌ی کمان، به کوچکی یا بزرگی شعاع دایره بستگی ندارد. در شکل دایره‌ها به مرکز O هستند و اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{A_۱B_۱}$، $\overset{\frown}{A_۲B_۲}$ و $\overset{\frown}{A_۳B_۳}$ در سه دایره با α برابرند.**



$$\overset{\frown}{A_۱B_۱}=\overset{\frown}{A_۲B_۲}=\overset{\frown}{A_۳B_۳}=\alpha$$

در صورتی که طول این کمان‌ها با هم برابر نیستند.

طول کمان $\overset{\frown}{A_۳B_۳}$ > طول کمان $\overset{\frown}{A_۲B_۲}$ > طول کمان $\overset{\frown}{A_۱B_۱}$

نکته ۷ **با توجه به این‌که محیط یک دایره به شعاع R کمانی به اندازه‌ی ۳۶۰ درجه است پس می‌توان طول یک کمان را برحسب اندازه‌ی زاویه‌ی کمان، به‌صورت زیر به‌دست آورد:**

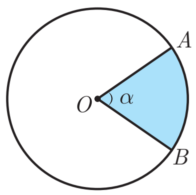
$$\frac{\text{طول کمان } AB}{۲\pi R}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}$$

مثال ۱۷ در دایره‌ای به شعاع ۴ سانتی‌متر طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{۲}$ سانتی‌متر است. اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟

حل: بین طول کمان و اندازه‌ی کمان رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{۲\pi R}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AB}}{۳۶۰^\circ}=\frac{\frac{\pi}{۲}}{۸\pi}\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\frac{۳۶۰^\circ}{۱۶}=۲۲/۵^\circ$$

قطاع دایره: ناحیه‌ای از درون و دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند.



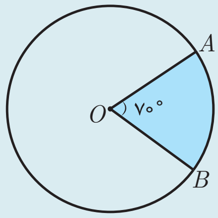
نکته ۸ **اگر زاویه‌ی مرکزی قطاعی از دایره‌ی $C(O,R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد طول کمان AB برابر است با: $L=\frac{\pi R}{۱۸۰^\circ}\alpha$ و مساحت قطاع برابر است با: $s=\frac{\pi R^۲}{۳۶۰^\circ}\alpha$**

اثبات:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \frac{L}{۲\pi R}=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow L=\frac{۲\pi R\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{\pi R}{۱۸۰^\circ}\alpha$$

$$\frac{\text{مساحت قطاع}}{\text{مساحت دایره}}=\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \frac{s}{\pi R^۲}=\frac{\alpha}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow s=\frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$$

مثال ۱۸ در دایره‌ی $C(O,۳۶)$، مساحت قطاع مشخص شده و طول کمان AB را بیابید.



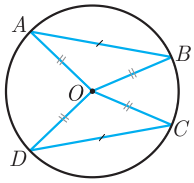
حل: اگر s مساحت قطاع و L طول کمان AB باشد، داریم:

$$s=\frac{\pi R^{۲}\alpha}{۳۶۰^\circ}=\frac{\pi(۳۶^{۲})۷۰^\circ}{۳۶۰^\circ}=\pi(۳۶)۷=۲۵۲\pi$$

$$L=\frac{\pi R\alpha}{۱۸۰^\circ}=\frac{\pi(۳۶)۷۰^\circ}{۱۸۰^\circ}=\pi(۲)۷=۱۴\pi$$

مسئله ۱ در دایره‌ی $C(O,r)$ وترهای AB و CD هم‌اندازه‌اند. ثابت کنید کمان‌های نظیر AB و CD نیز هم‌اندازه هستند.

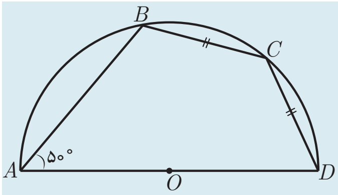
اثبات: نقطه‌ی O یعنی مرکز دایره را به دو سر وترها وصل می‌کنیم.



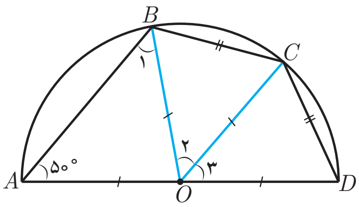
$$\left.\begin{array}{l} OA=OC=r \\ OB=OD=r \\ AB=CD \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌ض‌ض})} \overset{\Delta}{OAB}\cong\overset{\Delta}{OCD}\Rightarrow A\hat{O}B=C\hat{O}D$$

و چون این دو زاویه، مرکزی هستند پس کمان‌های مقابلشان یعنی $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ نیز برابرند. حال خودتان عکس این مسئله را اثبات کنید.

مثال ۱۹ در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره است، اندازه‌ی زاویه‌ی CDA را بیابید.



حل: شعاع‌های OB و OC را رسم می‌کنیم و از مثلث‌های متساوی‌الساقین تشکیل شده استفاده می‌کنیم.

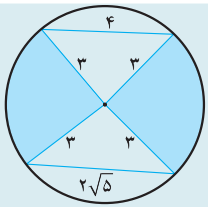


$$OA=OB\Rightarrow \hat{B}_{۱}=\hat{A}=۵۰^\circ\Rightarrow B\hat{O}D=۵۰^\circ+۵۰^\circ=۱۰۰^\circ$$

$$BC=CD\Rightarrow \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}\Rightarrow \hat{O}_{۲}=\hat{O}_{۳}\Rightarrow \hat{O}_{۲}=\hat{O}_{۳}=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$$

$$OC=OD\Rightarrow \hat{D}=\frac{۱۸۰^\circ-۵۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

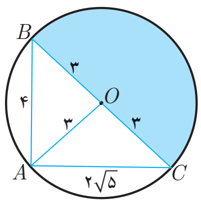
مثال ۲۰ با توجه به شکل مجموع مساحت‌های رنگی چقدر است؟



۱) ۹π ۲) $\frac{۹}{۲}\pi$ ۳) ۶π ۴) ۳π

حل: مثلث کوچک‌تر را به مثلث بزرگ‌تر می‌چسبانیم. بنا بر عکس قضیه‌ی فیثاغورس مثلث ABC در رأس A قائمه است $\left(۴^{۲}+(۲\sqrt{۵})^{۲}=۶^{۲}\right)$. یعنی B، O و C روی یک خط قرار دارند و BC قطر دایره است.

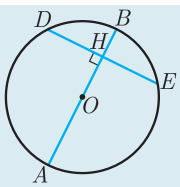
در نتیجه مساحت ناحیه‌ی رنگی برابر است با:

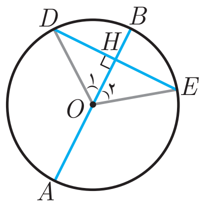


$$\frac{r^{۲}\pi}{۲}=\frac{۳^{۲}\times\pi}{۲}=\frac{۹}{۲}\pi$$

مسئله ۲ ثابت کنید در هر دایره قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند. یعنی:

$$AB\perp DE\Rightarrow DH=HE\ ,\ \overset{\frown}{DB}=\overset{\frown}{BE}\ ,\ \overset{\frown}{DA}=\overset{\frown}{EA}$$





اثبات: مرکز دایره را به نقاط D و E وصل می‌کنیم: $OD = OE = R$

پس مثلث ODE متساوی‌الساقین است در نتیجه ارتفاع وارد بر قاعده یعنی خط OH، میانه و نیم‌ساز نیز است یعنی:

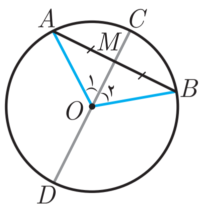
$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \quad \text{و} \quad DH = HE$$

از طرفی چون زاویه‌های $O_۱$ و $O_۲$ زاویه‌ی مرکزی هستند پس کمان‌های مقابل آن‌ها نیز باهم، هم‌اندازه‌اند یعنی:

$$\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{BE}$$

و چون $\overset{\frown}{ADB} = \overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{BE}$ پس $\overset{\frown}{DA} = \overset{\frown}{EA}$.

مسئله ۳ ثابت کنید در هر دایره، خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود بوده و کمان متناظر با آن وتر را نیز نصف می‌کند.



اثبات: فرض کنید نقطه‌ی M وسط وتر AB باشد. مثلث OAB متساوی‌الساقین است. $(OA = OB = R)$

بنابراین میانه‌ی وارد بر قاعده‌ی آن یعنی OM، ارتفاع و نیم‌ساز نیز است. در نتیجه:

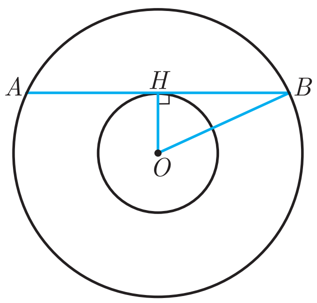
$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ \hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AC} \\ \hat{O}_۲ = \overset{\frown}{CB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$$

چون OM ارتفاع مثلث است پس: $OM \perp AB$

تمرین: اگر قطر CD از دایره‌ای کمان AB را نصف کند. ثابت کنید CD بر AB عمود است و آن را نصف می‌کند.

مثال ۲۱ دو دایره‌ی $C(O,۲)$ و $C'(O,۵)$ مفروض‌اند. طول وتری از دایره‌ی بزرگ‌تر که بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس است برابر است با:

۱) $\sqrt{۱۹}$ ۲) $\sqrt{۲۱}$ ۳) $۲\sqrt{۲۱}$ ۴) $۲\sqrt{۱۹}$



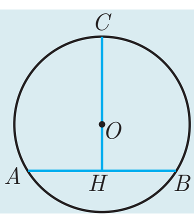
حل: توجه کنید مرکز دو دایره یکی است پس دو دایره هم‌مرکز هستند.

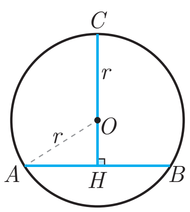
اگر وتر AB از دایره بزرگ‌تر در نقطه‌ی H بر دایره‌ی کوچک‌تر مماس باشد آن‌گاه شعاع OH عمود بر AB خواهد شد. حال در مثلث OBH از قضیه‌ی فیثاغورس استفاده کرده می‌نویسیم:

$$OB^۲ = OH^۲ + BH^۲ \xrightarrow[OH=۲]{OB=۵} ۵^۲ = ۲^۲ + BH^۲ \Rightarrow BH^۲ = ۲۱ \Rightarrow BH = \sqrt{۲۱}$$

می‌دانیم اگر از مرکز دایره بر وتر آن وتر عمود کنیم آن وتر نصف می‌شود. بنابراین، H وسط وتر AB قرار دارد پس $AB = ۲BH = ۲\sqrt{۲۱}$، پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

مثال ۲۲ در شکل، O مرکز دایره است. با فرض $CH = ۱۸$ و $AB = ۱۲$ شعاع دایره را بیابید.





حل: عمود OH وتر $AB = ۱۲$ را نصف می‌کند پس: $AH = BH = ۶$

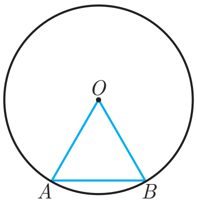
از فیثاغورس در مثلث AOH استفاده می‌کنیم:

$$OH = ۱۸ - r \;,\; AH = ۶ \;,\; AO = r$$

$$OA^۲ = AH^۲ + OH^۲ \Rightarrow r^۲ = ۶^۲ + (۱۸ - r)^۲ \Rightarrow r = ۱۰$$

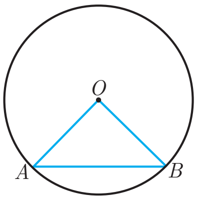
مسئله ۴ در دایره‌ای به شعاع r اگر طول وتر AB برابر r باشد آن‌گاه اندازه‌ی کمان AB را به‌دست آورید و سپس همین مثال را در صورتی که $AB=\sqrt{۲}r$ و $AB=\sqrt{۳}r$ باشد حل کنید.

حل: اگر $AB=r$ باشد آن‌گاه $OA=OB=AB=r$ پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است یعنی:



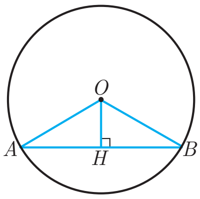
$$\hat{O}=۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$$

در حالت دوم اگر $AB=\sqrt{۲}r$، آن‌گاه داریم:



$$OA=OB=r \text{ و } AB=\sqrt{۲}r \Rightarrow OA^{۲}+OB^{۲}=AB^{۲} \Rightarrow A\hat{O}B=۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۹۰^\circ$$

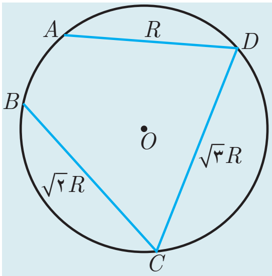
و اگر $AB=\sqrt{۳}r$، آن‌گاه عمود OH را رسم می‌کنیم که AB را نیز نصف می‌کند.



$$OA=r \text{ و } AH=\frac{\sqrt{۳}}{۲}r \Rightarrow A\hat{O}H=۶۰^\circ$$

به همین ترتیب : $B\hat{O}H=۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B=۱۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۲۰^\circ$

مثال ۲۳ شعاع دایره‌ی شکل زیر برابر R است و O مرکز دایره است. اندازه‌ی کمان AB را بیابید.

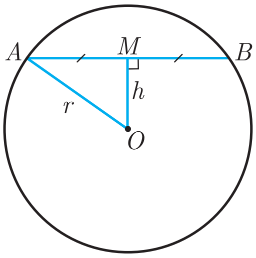


حل: می‌دانیم کمانی که نظیر وتر به طول R باشد برابر ۶۰° است و کمان نظیر وتر به طول $\sqrt{۳}R$ برابر ۱۲۰° است، هم‌چنین کمان نظیر وتر به طول $\sqrt{۲}R$ برابر ۹۰° است (به مسئله ۴ توجه کنید)، پس:

$$\overset{\frown}{AD}=۶۰^\circ \text{ و } \overset{\frown}{CD}=۱۲۰^\circ \text{ و } \overset{\frown}{BC}=۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-۶۰^\circ-۱۲۰^\circ-۹۰^\circ=۹۰^\circ$$

مسئله ۵ در دایره‌ی $C(O,r)$ وتری به طول l رسم می‌کنیم. فاصله‌ی مرکز دایره از این وتر را بیابید. $(l \le ۲r)$

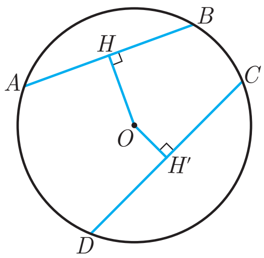
حل: می‌دانیم اگر از مرکز دایره به یک وتر عمود کنیم آن وتر را نصف می‌کند.



$$\left.\begin{array}{l} AM=MB=\frac{l}{۲} \\ \overset{\Delta}{OMA}: OA^{۲}=OM^{۲}+AM^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow r^{۲}=h^{۲}+\frac{l^{۲}}{۴} \Rightarrow h^{۲}=r^{۲}-\frac{l^{۲}}{۴} \Rightarrow h=\sqrt{r^{۲}-\frac{l^{۲}}{۴}}$$

یکی از نتایج مهم این مسئله، مسئله‌ی زیر است.

مسئله ۶ در هر دایره، از دو وتر نابرابر، آن که بزرگ‌تر باشد به مرکز دایره نزدیک‌تر است.



اثبات: در شکل روبه‌رو فرض کنید: $AB = l_1$ و $CD = l_2$ و نیز فرض کنید: $l_2 > l_1$ طبق مسئله‌ی بالا داریم:

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{l_1^2}{4}} \quad , \quad OH' = \sqrt{r^2 - \frac{l_2^2}{4}}$$

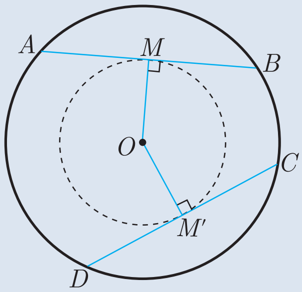
با توجه به این‌که $l_2 > l_1$ نتیجه می‌گیریم: $OH' < OH$ یعنی وتر CD به مرکز دایره نزدیک‌تر از وتر AB به مرکز دایره است.

مسئله ۷ در هر دایره، از دو وتر نابرابر آن‌که به مرکز دایره نزدیک‌تر است، از وتر دیگر بزرگ‌تر است.

اثبات: اثباتی مانند اثبات بالا ارائه دهید.

نکته ۹ **در دایره‌ی $C(O,r)$ بی‌شمار وتر به طول l وجود دارد $(l \leq 2r)$ که فاصله‌ی تمام آن‌ها از مرکز دایره $\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$ است، تمامی این وترها بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$ مماس خواهند بود.**

$$OM = OM' = \sqrt{r^2 - \frac{l^2}{4}}$$



نکته ۱۰ **اگر دو وتر از یک دایره هم‌اندازه باشند آن‌گاه فاصله‌ی آن‌ها از مرکز دایره یکسان است و برعکس.**

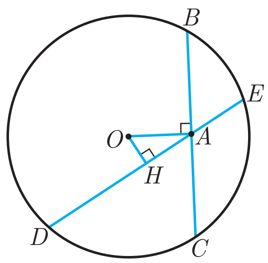
مسئله ۸ نقطه‌ی A درون دایره‌ی $C(O, R)$ قرار دارد. کوتاه‌ترین و بلندترین وتر مرسوم از نقطه‌ی A را مشخص کنید.

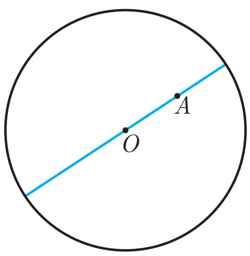
حل: واضح است که بلندترین وتر، قطر گذرنده از A است.

ثابت می‌کنیم کوتاه‌ترین وتر مرسوم از A، وتری است که بر امتداد OA عمود است، برای این منظور وتر BC را عمود بر امتداد OA از نقطه‌ی A رسم می‌کنیم و وتر دلخواه DE را نیز از A می‌کشیم. از نقطه‌ی O عمود OH را بر DE وارد می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه OHA داریم: $OH < OA$ پس طبق مسئله‌ی قبل نتیجه می‌گیریم:

$$BC < DE$$

یعنی BC کوتاه‌ترین وتر گذرنده از A است.

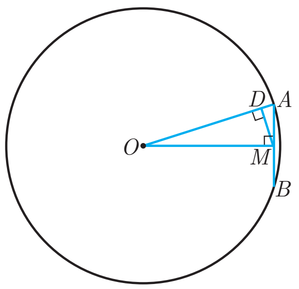




مثال ۲۴ در دایره‌ی $C(O, r)$ طول وتر AB نصف شعاع است از M وسط AB عمود MD را بر OA رسم می‌کنیم طول AD را برحسب شعاع دایره بیابید.

حل: چون M وسط وتر AB است. پس خطی که از مرکز O به M وسط AB وصل می‌شود بر وتر AB عمود است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAM ارتفاع وارد بر وتر MD رسم شده است از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه استفاده می‌کنیم:

$$AM^2 = AD \cdot AO \xrightarrow{AM = \frac{AB}{2} = \frac{r}{4}} \left(\frac{r}{4}\right)^2 = AD \cdot r \Rightarrow \frac{r}{16} = AD$$



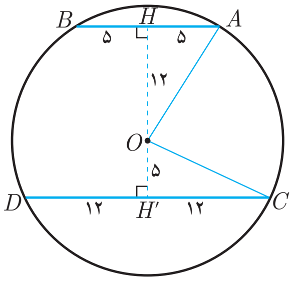
مثال ۲۵ در دایره‌ی $C(O\,,۱۳)$ دو وتر موازی به طول‌های ۱۰ و ۲۴ رسم شده‌اند فاصله‌ی این دو وتر را بیابید.

حل: دو حالت ممکن است. اگر مرکز دایره بین دو وتر باشد (شکل ۱) داریم:

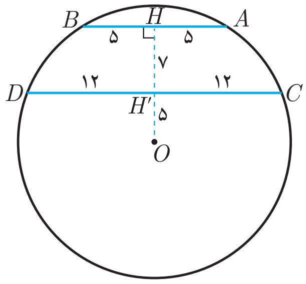
$$\left.\begin{array}{l} OH = \sqrt{۱۳^۲ - ۵^۲} = ۱۲ \\ OH' = \sqrt{۱۳^۲ - ۱۲^۲} = ۵ \end{array}\right. \Rightarrow HH' = ۱۲ + ۵ = ۱۷$$

اگر مرکز دایره یک طرف دو وتر باشد (شکل ۲) داریم:

$$HH' = ۱۲ - ۵ = ۷$$

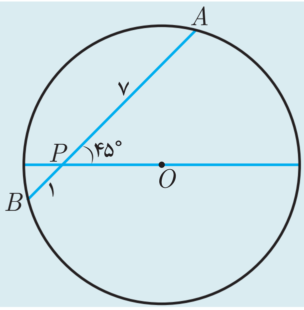


شکل (۱)

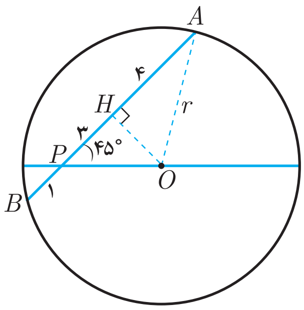


شکل (۲)

مثال ۲۶ در شکل زیر شعاع دایره را به‌دست آورید. (O مرکز دایره است.)



حل: از نقطه‌ی O عمود OH را بر وتر رسم می‌کنیم. نقطه‌ی H وسط AB است پس:



$$BH = AH = \frac{۷+۱}{۲} = ۴ \Rightarrow PH = ۳$$

از طرف دیگر مثلث OPH مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است، بنابراین:

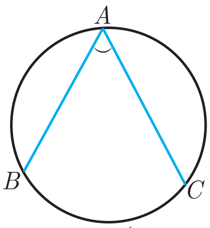
$$OH = PH = ۳$$

در نتیجه در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAH می‌نویسیم:

$$OA = \sqrt{OH^۲ + AH^۲} = ۵$$

تمرین: در دایره‌ی $C(O\,,R)$ اگر H پای ارتفاع وارد از O بر وتر AB باشد ثابت کنید $AB = ۲\sqrt{R^۲ - OH^۲}$

زاویه‌ی محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. (مانند زاویه‌ی BAC در شکل)

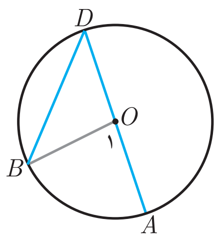


قضیه ۱

اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر با نصف اندازه‌ی کمان مقابلش است.

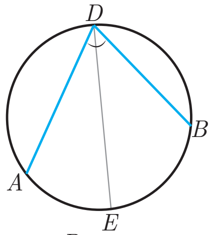
اثبات: قضیه را در سه حالت زیر حل می‌کنیم:

الف) یکی از اضلاع زاویه یعنی AD قطر دایره باشد. در این حالت نقطه‌ی B را به O یعنی مرکز دایره وصل می‌کنیم:



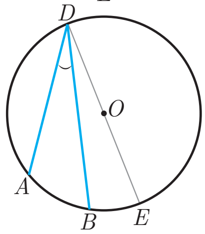
$$\left.\begin{array}{l} OD = OB \Rightarrow \hat{D} = \hat{B} \\ \text{زاویه خارجی}\ \hat{O}_۱ \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{B} + \hat{D} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۲\hat{D}$$

و چون $\hat{O}_۱$ زاویه‌ی مرکزی روبه‌رو به کمان AB است پس: $\hat{O}_۱ = \overset{\frown}{AB}$ در نتیجه $\hat{D} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$



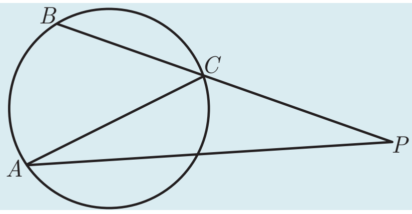
ب) دو ضلع زاویه‌ی محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد. در این حالت از قسمت (الف) کمک می‌گیریم. قطر گذرنده از D را رسم می‌کنیم. پس دو زاویه‌ی ADE و BDE مانند قسمت (الف) هستند، پس:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{D}E = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{۲} \\ B\hat{D}E = \dfrac{\overset{\frown}{EB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{D}B = A\hat{D}E + B\hat{D}E = \dfrac{\overset{\frown}{AE}}{۲} + \dfrac{\overset{\frown}{EB}}{۲} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



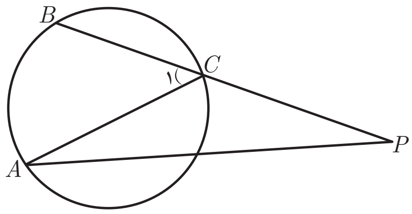
ج) اضلاع زاویه‌ی محاطی در یک طرف مرکز دایره باشند. قطر گذرنده از D را رسم کرده و با توجه به شکل و با استفاده از قسمت (الف) اثبات را کامل کنید.

مثال ۲۷ اگر زاویه‌ی P برابر ۲۳ درجه باشد و مثلث ACP متساوی‌الساقین باشد آن‌گاه کمان AB چند درجه است؟



۱) ۶۹　　۲) ۷۴　　۳) ۸۶　　۴) ۹۲

حل: مثلث ACP متساوی‌الساقین است پس $\hat{A} = \hat{P} = ۲۳^\circ$ در نتیجه زاویه‌ی خارجی $\hat{C}_1$ مساوی $\hat{A} + \hat{P} = ۴۶^\circ$ است. چون $\hat{C}_1$ زاویه‌ی محاطی است داریم:



$$\hat{C}_1 = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow ۴۶^\circ = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = ۹۲^\circ$$

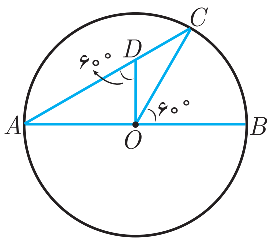
پس گزینه‌ی ۴ صحیح است.

مثال ۲۸ در دایره‌ی $C(O, r)$ قطر AB و نیز وتر AC را رسم می‌کنیم. نقطه‌ی D را روی وتر AC چنان انتخاب می‌کنیم که:

$O\hat{D}A = C\hat{O}B = ۶۰^\circ$ و $DO = ۵cm$

اندازه‌ی پاره خط DC را به‌دست آورید.

حل: بنابر داده‌های مثال، شکل مقابل را خواهیم داشت. از رابطه‌های مربوط به زاویه‌ی مرکزی، زاویه‌ی محاطی و زاویه‌ی خارجی در مثلث استفاده می‌کنیم.



$$B\hat{O}C = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۳۰^\circ$$

$$B\hat{O}C = \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow ۶۰^\circ = ۳۰^\circ + \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = ۳۰^\circ$$

$$A\hat{D}O = D\hat{O}C + \hat{C} \Rightarrow ۶۰^\circ = D\hat{O}C + ۳۰^\circ \Rightarrow D\hat{O}C = ۳۰^\circ \Rightarrow$$

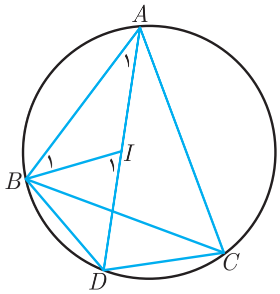
در نتیجه مثلث ODC متساوی‌الساقین است و بنابراین $DC = DO$ یعنی طول پاره خط DC نیز $۵cm$ است.

مسئله ۹ امتداد نیمساز A از مثلث ABC، دایره‌ی گذرنده از سه رأس مثلث را در D قطع می‌کند اگر I محل همرسی نیمسازها باشد ثابت کنید.

$DI = DB = DC$

حل: می‌دانیم نیمساز زاویه‌ی A کمان مقابلش را نصف می‌کند زیرا زاویه‌ی محاطی نصف می‌شود پس کمان مقابلش نیز نصف می‌شود پس: $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC}$ پس وترهای آن‌ها نیز اندازه‌هایی برابر دارند یعنی:

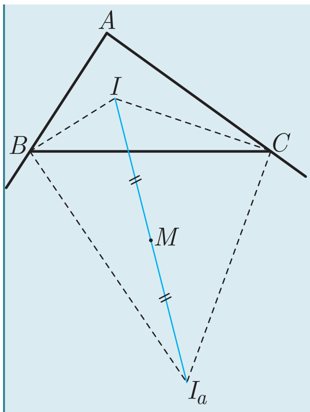
$BD = DC$



$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABI}: \hat{I}_۱ = \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ = \dfrac{\hat{A}}{۲} + \dfrac{\hat{B}}{۲} \\ I\hat{B}D = I\hat{B}C + C\hat{B}D = \dfrac{\hat{B}}{۲} + \dfrac{\hat{A}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{I}_۱ = I\hat{B}D \Rightarrow ID = BD \Rightarrow DI = DB = DC$$

دقت کنید که $C\hat{B}D = \dfrac{\overset{\frown}{DC}}{۲} = \dfrac{\hat{A}}{۲}$

مثال ۲۹ در شکل زیر نقاط I و I_a محل برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای B و C هستند. ثابت کنید دایره‌ای که از رئوس مثلث ABC می‌گذرد از وسط پاره‌خطی که I را به I_a وصل می‌کند، می‌گذرد.



حل: اگر M محل برخورد دایره‌ی گذرنده از A، B و C با پاره‌خطی که I را به I_a وصل می‌کند، باشد مطابق مسئله‌ی قبل ثابت کردیم:

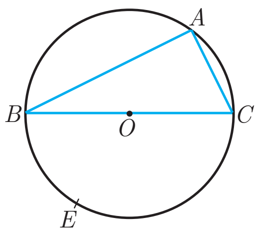
$$BM = MC = MI$$

از طرف دیگر نیمساز داخلی و خارجی یک رأس مثلث برهم عمودند یعنی $I\hat{C}I_a = ۹۰^\circ$ و $I\hat{B}I_a = ۹۰^\circ$. پس در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی IBI_a و ICI_a چون پاره‌خط‌های BM و CM میانه‌ی وارد بر وتر هستند، پس نصف وتر هستند، بنابراین:

$$BM = MC = MI = MI_a$$

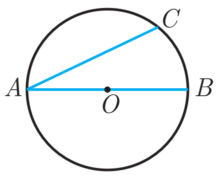
مسئله ۱۰ ثابت کنید هر زاویه‌ی روبه‌روی قطر یک دایره، قائمه است.

اثبات: چون قطر دایره، آن را نصف می‌کند پس:

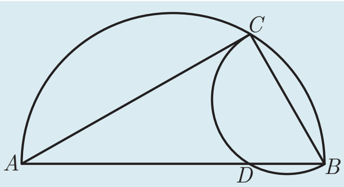


$$\left.\begin{array}{l} B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BEC}}{۲} \\ \overset{\frown}{BEC} = \dfrac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}C = ۹۰^\circ$$

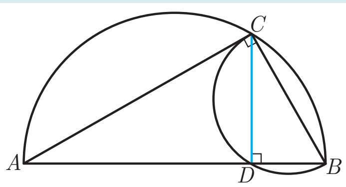
ایده: معمولاً در مسائلی که قسمتی از شکل به این صورت است و O مرکز دایره است. از C به B وصل می‌کنیم و از این‌که زاویه‌ی ACB قائمه است استفاده می‌کنیم.



مثال ۳۰ در شکل نیم‌دایره‌هایی با قطر AB و BC رسم شده‌اند. اگر $AD = ۶$ و $BD = ۲$ باشد اندازه‌ی زاویه‌ی B را بیابید.



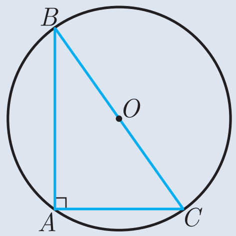
حل: از C به D وصل می‌کنیم با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$CD^۲ = AD \cdot DB \Rightarrow CD^۲ = ۶ \times ۲ = ۱۲ \Rightarrow CD = \sqrt{۱۲} = ۲\sqrt{۳}$$

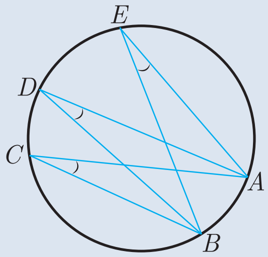
$$\tan B = \frac{CD}{DB} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ$$

نکته ۱۱ **اگر در مثلث قائم الزاویه‌ای، دایره‌ای به قطر وتر مثلث رسم کنیم، رأس قائمه حتماً روی این دایره خواهد بود.**



نکته ۱۲ **در یک دایره تمام زاویه‌های محاطی مقابل به یک کمان باهم برابرند.**

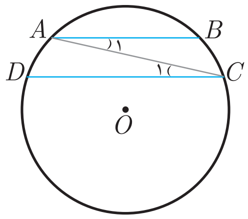
$$\hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$



نکته ۱۳ **در یک دایره وترهای AB و CD باهم موازی‌اند. حتما کمان‌های محصور بین این دو وتر باهم برابرند.**

اثبات: نقطه‌ی A را به C وصل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} AB \parallel CD \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۱ = \hat{A}_۱ \qquad (۱)$$



از طرفی زاویه‌های $C_۱$ و $A_۱$ محاطی‌اند یعنی:

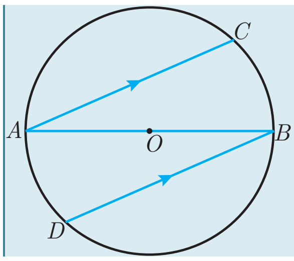
$$\hat{A}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \text{ و } \hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$

توجه کنید عکس این نکته درست نیست (چرا؟).

مثال ۳۱ در شکل مقابل AB قطر دایره است و $AC \parallel BD$، ثابت کنید

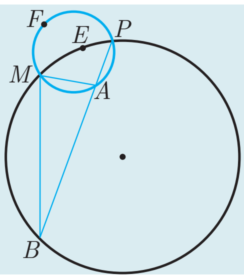
$$AC = BD$$



حل:

$$AC \parallel BD \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$$
$$\Rightarrow ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{AD} = ۱۸۰^\circ - \overset{\frown}{BC}$$
$$\Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{AC} \Rightarrow BD = AC$$

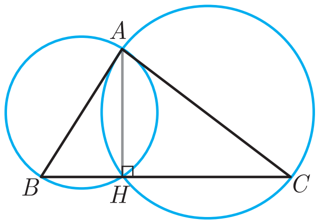
مثال ۳۲ در دایره‌های شکل مقابل داریم: $\overset{\frown}{PAM} = ۱۰۰^\circ$ و $\overset{\frown}{PEM} = ۴۰^\circ$ اندازه‌ی زاویه‌ی AMB چند درجه است؟



حل: از رابطه‌های زاویه‌ی محاطی و زاویه‌ی خارجی در مثلث استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} P\hat{B}M = \dfrac{\overset{\frown}{PEM}}{۲} = \dfrac{۴۰^\circ}{۲} = ۲۰^\circ \\ P\hat{A}M = \dfrac{\overset{\frown}{PFM}}{۲} = \dfrac{۳۶۰^\circ - \overset{\frown}{PAM}}{۲} = \dfrac{۳۶۰^\circ - ۱۰۰^\circ}{۲} = ۱۳۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMB} : P\hat{A}M = P\hat{B}M + A\hat{M}B \Rightarrow ۱۳۰^\circ = ۲۰^\circ + A\hat{M}B \Rightarrow A\hat{M}B = ۱۱۰^\circ$$

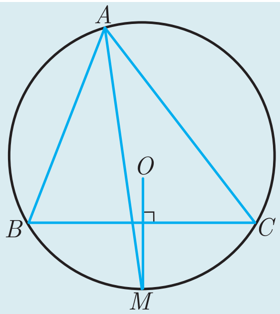
مثال ۳۳ در مثلث ABC دو دایره به قطرهای اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم. ثابت کنید دو دایره یکدیگر را روی ضلع BC یا امتداد آن قطع می‌کنند.



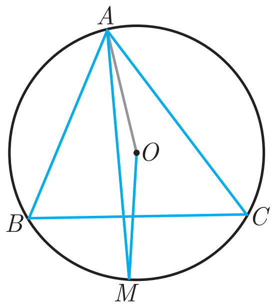
حل: ارتفاع AH در این مثلث را رسم می‌کنیم. می‌دانیم دایره‌ی به قطر AB و نیز دایره‌ی به قطر AC از نقطه‌ی H می‌گذرند. (مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی AHB و AHC را در نظر بگیرید.) پس این دو دایره یکدیگر را در نقطه‌ی H که روی ضلع BC است، قطع می‌کنند.

توجه کنید اگر ارتفاع AH بیرون مثلث باشد آن‌گاه دو دایره‌ی مذکور یکدیگر را در امتداد ضلع BC قطع خواهند کرد.

مثال ۳۴ در شکل روبه‌رو O مرکز دایره و M وسط کمان BC است ثابت کنید $A\hat{M}O = \dfrac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$



حل: روش اول: از A به O وصل می‌کنیم.



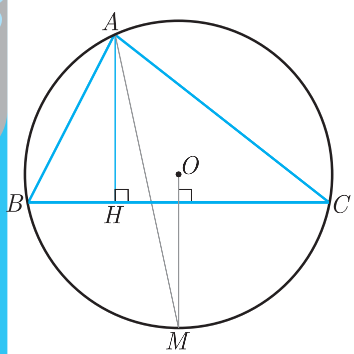
$$AO = OM \Rightarrow A\hat{M}O = M\hat{A}O = x$$

$$\text{مرکزی}\ A\hat{O}M = \overset{\frown}{ABM} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BM} = ۲\hat{C} + \hat{A} = ۲\hat{C} + (۱۸۰^\circ - \hat{B} - \hat{C}) = ۱۸۰^\circ - \hat{B} + \hat{C}$$

$$x = \frac{۱۸۰^\circ - A\hat{O}M}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \hat{B} + \hat{C})}{۲} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$$

شکل با فرض $\hat{B} > \hat{C}$ رسم شده است. در نتیجه در حالت کلی داریم:

$$A\hat{M}O = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$$



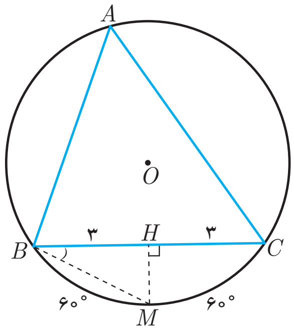
روش دوم: می‌دانیم AM نیمساز زاویه‌ی A و OM عمودمنصف ضلع BC است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم.

می‌دانیم زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز داخلی نظیر رأس $\hat{A}$ برابر با $\dfrac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$ است:

$$\left.\begin{array}{l} M\hat{A}H = \dfrac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲} \\ OM \parallel AH \ \text{و مورب}\ AM \end{array}\right\} \Rightarrow A\hat{M}O = M\hat{A}H = \frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{۲}$$

مثال ۳۵ در مثلث ABC اگر $BC = ۶cm$ و $\hat{A} = ۶۰^\circ$ فاصله‌ی محل برخورد نیمساز A و عمودمنصف BC را تا B بیابید.

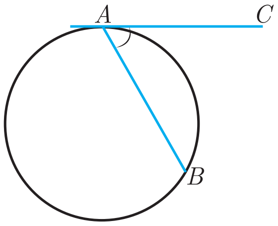
حل: واضح است که محل برخورد نیم‌ساز A و عمودمنصف BC وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ از دایره است و داریم:



$$M\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{MC}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{BH}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{BM} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow BM = ۲\sqrt{۳}$$

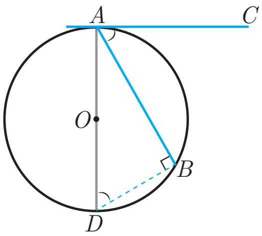
زاویه‌ی ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن شامل وتر دایره و ضلع دیگر آن مماس بر دایره باشد. در شکل مقابل $B\hat{A}C$ یک زاویه‌ی ظلی است.



قضیه ۲

اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر با نصف اندازه‌ی کمان مقابلش است.

اثبات: قطر گذرنده از A را رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند.



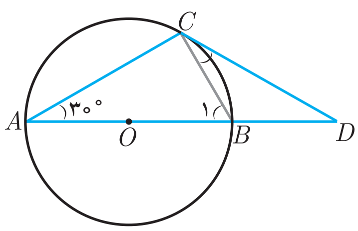
$$\left.\begin{array}{l} D\hat{B}A = ۹۰^\circ \ (\text{روبه‌رو به قطر}) \\ D\hat{A}C = ۹۰^\circ \ (\text{طبق نکته ی ۴}) \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{D}A = B\hat{A}C = ۹۰^\circ - D\hat{A}B$$

از طرفی چون $B\hat{D}A$ محاطی است پس: $B\hat{D}A = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ در نتیجه: $B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ در حالتی که مرکز دایره درون زاویه‌ی ظلی باشد با رسم قطر گذرنده از رأس زاویه ظلی، آن را به یک زاویه قائمه و یک زاویه محاطی تقسیم کرده و حکم به سادگی اثبات می‌شود، و در حالتی که مرکز روی وتر زاویه‌ی ظلی باشد حکم بدیهی است.

مثال ۳۶

در دایره‌ی $C(O, r)$ قطر AB با وتر AC زاویه‌ی ۳۰ درجه می‌سازد. مماس در نقطه‌ی C بر دایره، امتداد قطر AB را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. نشان دهید مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

حل: بنابر فرض سؤال شکل مقابل را داریم، نقاط B و C را به هم وصل می‌کنیم:



$$D\hat{C}B = B\hat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow D\hat{C}B = ۳۰^\circ$$

از طرفی چون $\overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ بنابراین: $\hat{B}_۱ = ۶۰^\circ$

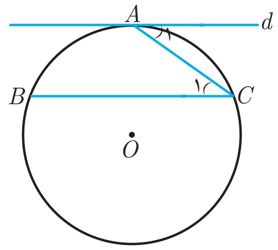
در مثلث CBD زاویه‌ی $B_۱$ زاویه‌ی خارجی است، پس:

$$\hat{B}_۱ = D\hat{C}B + \hat{D} \Rightarrow ۶۰^\circ = ۳۰^\circ + \hat{D} \Rightarrow \hat{D} = ۳۰^\circ$$

در نتیجه چون مثلث ACD دو زاویه‌ی برابر دارد پس متساوی‌الساقین است.

مثال ۳۷

خط d در نقطه‌ی A بر دایره‌ای مماس است. وتر BC از دایره را موازی d رسم کرده‌ایم ثابت کنید: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC}$

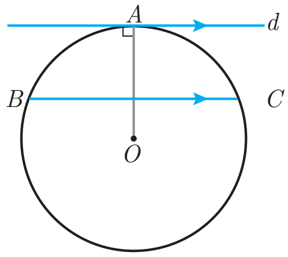


حل: روش اول: از A به C وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی A_1 ظلی و زاویه‌ی C_1 محاطی است بنابراین:

$$\hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \quad و \quad \hat{C}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

از طرف دیگر می‌توان نوشت:

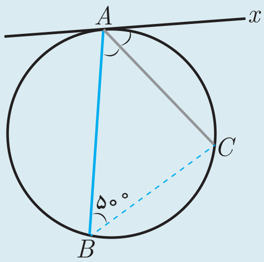
$$\left.\begin{array}{l} d \parallel BC \\ \text{مورب } AC \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1=\hat{C}_1 \Rightarrow \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}$$



روش دوم: از O به A وصل می‌کنیم. می‌دانیم شعاع OA بر خط d عمود است. از طرفی چون $d \parallel BC$ است. شعاع OA بر BC نیز عمود است. در نتیجه کمان BC را نصف می‌کند و داریم: $\overset{\frown}{BA}=\overset{\frown}{AC}$

مثال ۳۸

در شکل مقابل Ax بر دایره مماس بوده و AC نیمساز زاویه‌ی $x\hat{A}B$ است. اگر $A\hat{B}C$ برابر ۵۰ درجه باشد آن‌گاه کمان AB چند درجه است؟



حل: از ویژگی‌های زاویه‌های محاطی و ظلی استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{B}C=۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۱۰۰^\circ \\ x\hat{A}C=\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow x\hat{A}C=\frac{۱۰۰^\circ}{۲}=۵۰^\circ$$

چون AC نیمساز است پس:

$$B\hat{A}C=x\hat{A}C=۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۰۰^\circ$$

یعنی:

$$\overset{\frown}{BCA}=۱۰۰^\circ+۱۰۰^\circ=۲۰۰^\circ$$

در نتیجه:

$$\overset{\frown}{AB}=۳۶۰^\circ-۲۰۰^\circ=۱۶۰^\circ$$

چند زاویه‌ی دیگر در دایره:

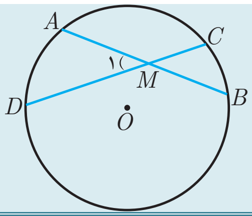
حال به بررسی زاویه‌هایی می‌پردازیم که رئوس آن‌ها درون و یا بیرون یک دایره هستند و اضلاعشان کمان‌هایی روی دایره جدا می‌کنند.

زاویه‌ی بین دو وتر (محل برخوردشان درون دایره است.)

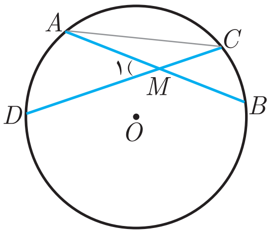
مسئله ۱۱

در شکل دو وتر AB و CD در نقطه‌ی M درون دایره متقاطع هستند ثابت کنید:

$$\hat{M}_1=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

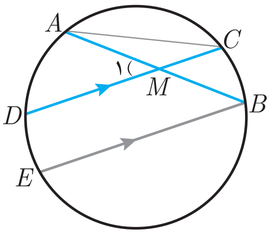


اثبات: A را به C وصل می‌کنیم و از زاویه‌ی خارجی و زاویه‌ی محاطی استفاده می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{AMC}: \hat{M}_1=\hat{A}+\hat{C} \\ \hat{A}=\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \quad و \quad \hat{C}=\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1=\frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AD}}{۲}$$

اثبات دیگر: از نقطه‌ی B خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا دایره را در E قطع کند.



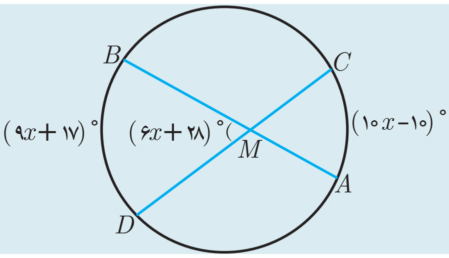
$$DC \parallel EB \Rightarrow \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{CB} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} DM \parallel EB \\ \text{مورب } MB \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B} \Rightarrow \hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AE}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DE}}{۲} \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{و}(۲)} \hat{M}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}}{۲}$$

نکته ۱۴ **اگر دو وتر از یک دایره درون دایره متقاطع باشند آن‌گاه زاویه‌ی بین آن‌ها برابر با نصف مجموع کمان‌های مقابل آن زاویه است.**

مثال ۳۹ با توجه به شکل اندازه‌ی زاویه‌ی BMD چند درجه است؟



حل: زاویه‌ی BMD زاویه‌ی بین دو وتر متقاطع است، پس:

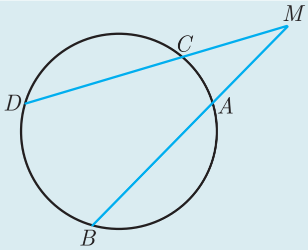
$$(۶x+۲۸)^\circ = \frac{(۱۰x-۱۰)^\circ + (۹x+۱۷)^\circ}{۲} \Rightarrow (۱۲x+۵۶)^\circ = (۱۹x+۷)^\circ \Rightarrow$$

$$(۷x)^\circ = ۴۹^\circ \Rightarrow x = ۷^\circ \Rightarrow B\hat{M}D = (۶x+۲۸)^\circ = (۶\times۷+۲۸)^\circ = ۷۰^\circ$$

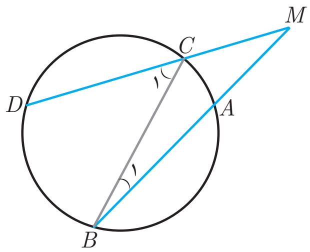
زاویه‌ی بین دو وتر (محل برخوردشان بیرون دایره است.)

مسئله ۱۲ در شکل دو وتر BA و DC در نقطه‌ی M بیرون دایره متقاطع هستند ثابت کنید:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$$



اثبات: نقاط B و C را به هم وصل می‌کنیم خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{BCM}: \hat{C}_۱ = \hat{M} + \hat{B}_۱ \Rightarrow \hat{M} = \hat{C}_۱ - \hat{B}_۱ \qquad \text{(زاویه‌ی خارجی)}$$

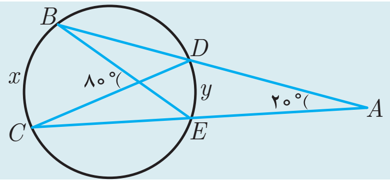
از طرفی زاویه‌های $C_۱$ و $B_۱$ محاطی‌اند. پس: $\hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}$ و $\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}$ داریم:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$$

اثبات دیگر: مانند اثبات دیگر مسئله‌ی قبل نیز می‌توان این مسئله را اثبات کرد.

نکته ۱۵ **اگر امتداد دو وتر از یک دایره، بیرون دایره متقاطع باشند آن‌گاه زاویه‌ی بین آن‌ها برابر با نصف قدرمطلق تفاضل کمان‌های مقابل آن زاویه است.**

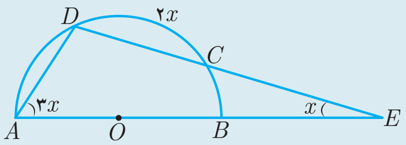
مثال ۴۰ با توجه به شکل اندازه‌های x و y را به‌دست آورید.



حل: زاویه‌ی ۲۰° بین دو وتر متقاطع در بیرون دایره و زاویه‌ی ۸۰° زاویه‌ی بین دو وتر متقاطع درون دایره است بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۲۰^\circ = \dfrac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y = ۴۰^\circ \\ ۸۰^\circ = \dfrac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۱۶۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ \text{ و } y = ۶۰^\circ$$

مثال ۴۱ در شکل، AB قطر و O مرکز نیم دایره است. اگر $\overset{\frown}{DC} = ۲x$، $\hat{E} = x$ و $\hat{A} = ۳x$، آن‌گاه x را به‌دست آورید.



حل: با توجه به نکات گفته شده می‌نویسیم:

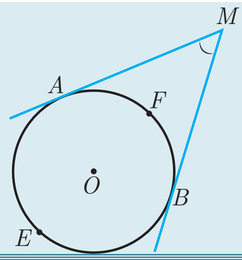
$$\left.\begin{array}{l} \hat{E} = \dfrac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۳x = \dfrac{۲x + \overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۴x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \dfrac{\overset{\frown}{AD} - ۴x}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۶x$$

از طرفی:

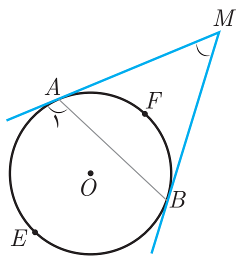
$$\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۶x + ۲x + ۴x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

زاویه‌ی بین دو مماس بر دایره:

مسئله ۱۳ در شکل ثابت کنید زاویه‌ی بین دو مماس MA و MB برابر $\dfrac{\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{AFB}}{۲}$ است.



اثبات: از A به B وصل می‌کنیم:

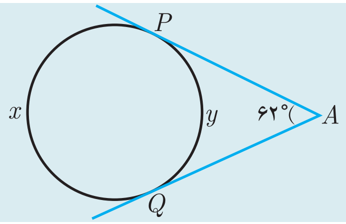


$$\left.\begin{array}{ll} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_۱ - \hat{B}_۱ & \text{زاویه‌ی خارجی} \\ \hat{A}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AEB}}{۲} \text{ و } \hat{B}_۱ = \dfrac{\overset{\frown}{AFB}}{۲} & \text{زاویه ظلی} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{AEB} - \overset{\frown}{AFB}}{۲}$$

توجه: *زاویه‌ی بین دو مماس مرسوم از نقطه‌ی M بر دایره را زاویه‌ی دید از M گوییم. مثلاً اگر $\hat{M} = ۶۰^\circ$ آن‌گاه می‌گوییم، دایره از نقطه‌ی M به زاویه‌ی ۶۰ درجه دیده می‌شود.*

نکته ۱۶ **اگر از نقطه‌ای دو مماس بر دایره رسم کنیم، آن‌گاه زاویه‌ی بین آن دو مماس برابر با نصف قدرمطلق تفاضل کمان‌های مقابل آن زاویه است.**

مثال ۴۲ با توجه به شکل اندازه‌های کمان‌های x و y را مشخص کنید.



حل: زاویه‌ی A، زاویه‌ی بین دو مماس است بنابراین:

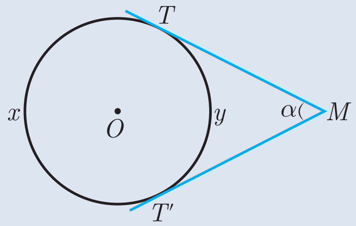
$$62^\circ = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 124^\circ$$

در ضمن داریم: $x+y=360^\circ$ پس: $y=118^\circ$ و $x=242^\circ$

نکته ۱۷ **در صورتی که MT و MT' بر دایره‌ای به مرکز O مماس باشند و α زاویه‌ی بین این دو مماس باشد آن‌گاه نتیجه می‌گیریم:**

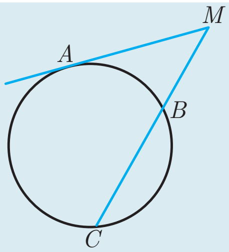
$$x=180^\circ+\alpha$$

$$y=180^\circ-\alpha$$



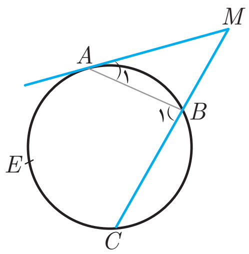
زاویه‌ی بین خط مماس و خط قاطع:

مسئله ۱۴ در شکل MA بر دایره مماس است. ثابت کنید: $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$



اثبات: نقاط A و B را به هم وصل می‌کنیم:

$$\overset{\Delta}{MAB}: \hat{B}_1=\hat{A}_1+\hat{M} \Rightarrow \hat{M}=\hat{B}_1-\hat{A}_1$$



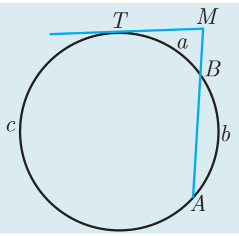
در ضمن با توجه به روابط زاویه‌های محاطی و ظلی داریم:

$$\hat{B}_1=\frac{\overset{\frown}{AEC}}{2} \quad \text{و} \quad \hat{A}_1=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

بنابراین: $\hat{M}=\dfrac{\overset{\frown}{AEC}-\overset{\frown}{AB}}{2}$

نکته ۱۸ **اگر از نقطه‌ای یک مماس و یک قاطع بر یک دایره رسم کنیم آن‌گاه زاویه‌ی بین آن‌ها برابر با نصف قدرمطلق تفاضل کمان‌های مقابل آن زاویه است.**

مثال ۴۳ در شکل اگر بین اندازه‌های کمان‌های a، b و c رابطه‌ی $a=\dfrac{b}{4}=\dfrac{c}{7}$ برقرار باشد و MT بر دایره مماس باشد، آن‌گاه اندازه‌ی زاویه‌ی M چند درجه است؟



حل: از نکته‌ی بالا استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=۳۶۰^\circ \\ a=\dfrac{b}{۴}=\dfrac{c}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow a+(۴a)+(۷a)=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۲a=۳۶۰^\circ$$

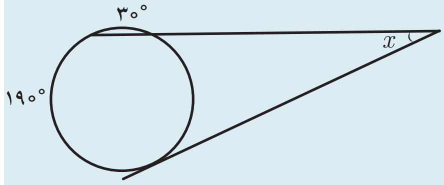
پس:

$$\Rightarrow a=۳۰^\circ \text{ و } b=۱۲۰^\circ \text{ و } c=۲۱۰^\circ$$

در نتیجه:

$$\hat{M}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۲۱۰^\circ-۳۰^\circ}{۲}=۹۰^\circ$$

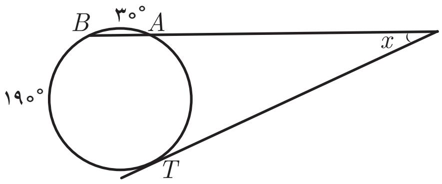
مثال ۴۴ اندازه‌ی زاویه‌ی x در شکل مقابل کدام است؟



۱) ۲۰° ۲) ۲۵°

۳) ۴۰° ۴) ۴۵°

حل: ابتدا در شکل داده شده اندازه‌ی کمان AT را به‌دست می‌آوریم.



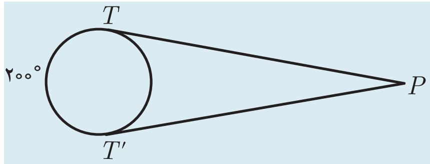
$$\overset{\frown}{AT}=۳۶۰^\circ-(۱۹۰^\circ+۳۰^\circ)=۱۴۰^\circ$$

حال زاویه‌ی x را می‌توانیم به‌دست آوریم.

$$x=\frac{\overset{\frown}{BT}-\overset{\frown}{AT}}{۲}=\frac{۱۹۰^\circ-۱۴۰^\circ}{۲}=\frac{۵۰^\circ}{۲}=۲۵^\circ$$

پس گزینه‌ی ۲ صحیح است.

مثال ۴۵ در شکل مقابل زاویه‌ی بین مماس‌های PT و PT' برابر کدام است؟



۱) ۳۰° ۲) ۲۰°

۳) ۵۰° ۴) ۴۰°

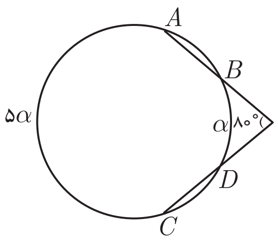
حل: گزینه‌ی ۲ صحیح است. زیرا کمان کوچک‌تر TT' برابر $۳۶۰^\circ-۲۰۰^\circ=۱۶۰^\circ$ است بنابراین داریم:

$$\hat{P}=\frac{۲۰۰^\circ-۱۶۰^\circ}{۲}=\frac{۴۰^\circ}{۲}=۲۰^\circ$$

مثال ۴۶ در دایره‌ای امتداد دو وتر هم‌اندازه‌ی AB و CD در بیرون آن، زاویه‌ی ۸۰° می‌سازد و کمان‌های داخل این زاویه به نسبت ۱ و ۵ هستند. اندازه‌ی کمان AB چقدر است؟

۱) ۵۰° ۲) ۵۵° ۳) ۶۰° ۴) ۶۵°

حل: بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت:



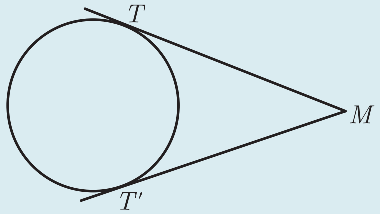
$$\frac{۵\alpha-\alpha}{۲}=۸۰^\circ \Rightarrow ۴\alpha=۱۶۰^\circ \Rightarrow \alpha=۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۲۰۰^\circ$$

$$AB=CD \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\frac{۳۶۰^\circ-۲۰۰^\circ-۴۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$$

پس گزینه‌ی ۳ صحیح است.

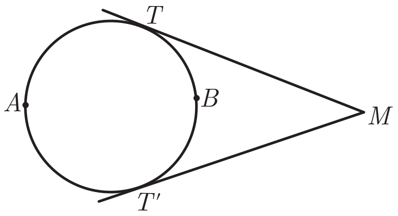
مثال ۴۷

در دایره‌ی شکل مقابل زاویه‌ی بین مماس‌های MT و MT' برابر ۴۰° است. از نقطه‌ی M چه کسری از محیط دایره دیده می‌شود؟



۱) $\frac{۷}{۱۸}$ ‏ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ‏ ۳) $\frac{۸}{۱۹}$ ‏ ۴) $\frac{۳}{۸}$

حل: اندازه‌ی زاویه‌ی M برابر است با $\frac{\widehat{TAT'}-\widehat{TBT'}}{۲}$ بنابراین داریم:



$$۴۰^\circ = \frac{\widehat{TAT'}-\widehat{TBT'}}{۲} \Rightarrow \widehat{TAT'}-\widehat{TBT'} = ۸۰^\circ$$

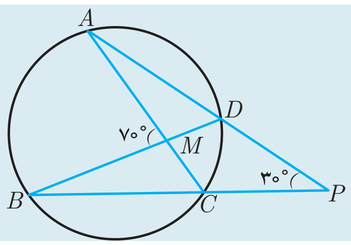
از طرف دیگر $\widehat{TAT'}+\widehat{TBT'} = ۳۶۰^\circ$ پس می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{TAT'}-\widehat{TBT'} = ۸۰^\circ \\ \widehat{TAT'}+\widehat{TBT'} = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} ۲\widehat{TBT'} = ۲۸۰^\circ \Rightarrow \widehat{TBT'} = ۱۴۰^\circ$$

کمان $\widehat{TBT'}$ معادل $\frac{۷}{۱۸} = \frac{۱۴۰^\circ}{۳۶۰^\circ}$ کل دایره است پس از نقطه‌ی M معادل $\frac{۷}{۱۸}$ دایره دیده می‌شود. بنابراین، گزینه‌ی ۱ صحیح است.

مثال ۴۸

در دایره‌ی $C(O,۵)$ طول کمان AB را به‌دست آورید.



حل: ابتدا اندازه‌ی کمان AB را بر حسب درجه به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{P} = ۳۰^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AB}-\widehat{CD}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB}-\widehat{CD} = ۶۰^\circ$$

$$\hat{M} = ۷۰^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AB}+\widehat{CD}}{۲} = ۷۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB}+\widehat{CD} = ۱۴۰^\circ$$

با جمع دو تساوی به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم:

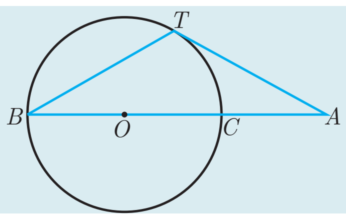
$$۲\widehat{AB} = ۲۰۰^\circ \Rightarrow \widehat{AB} = ۱۰۰^\circ$$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$$\frac{\text{اندازه‌ی کمان } AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{۲\pi R} \Rightarrow \frac{۱۰۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{۲\pi(۵)} \Rightarrow \text{طول کمان } AB = \frac{۱۰۰}{۳۶}\pi = \frac{۲۵}{۹}\pi$$

مثال ۴۹

با توجه به شکل، نقطه‌ی O مرکز دایره و اندازه‌ی مماس AT برابر اندازه‌ی وتر BT است. اندازه‌ی زاویه‌ی A را بیابید.



حل: روش اول: شعاع OT را رسم می‌کنیم و می‌دانیم OT بر TA عمود است. فرض کنیم $\hat{A} = x$ در نتیجه داریم: