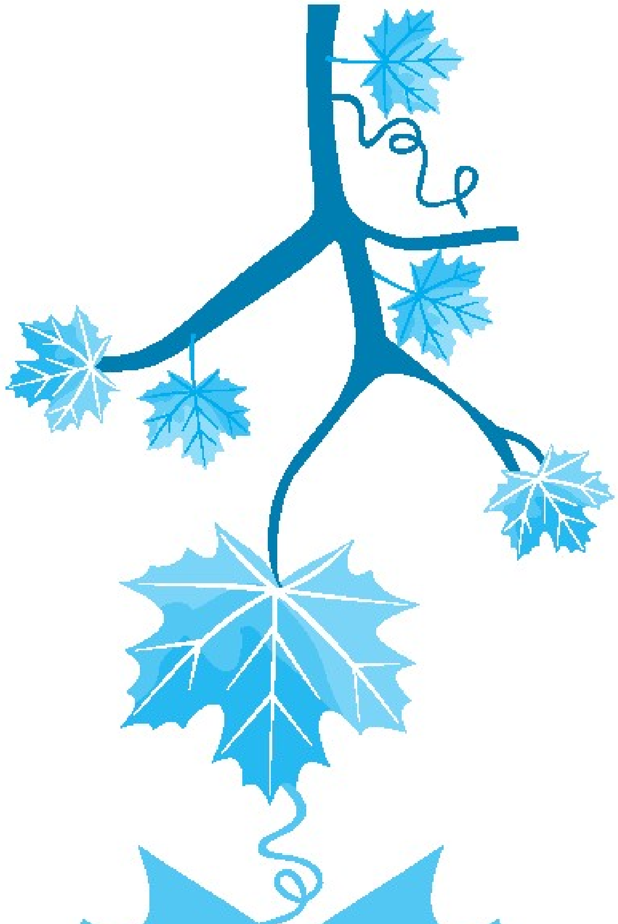
برگی از درخت المپیاد ریاضی و کامپیوتر

آنالیز ترکیبی

مؤلف

عباس ثروتی

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده وهریک
از کتاب های این پروژه برگی ازآن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است. امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بارواقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.

التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

- به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی شود المپیادهای علمی می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چرا که درآن سال ایران درگیر جنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جز، کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگراند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چند گزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و در دوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند(در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه خود در رقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سوال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی از این افراد راجع به موفقیت هایشان سوال می شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می دانند بنابرین فعالیت در یکی از زمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری از دانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته ی مورد علاقه ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که در نهایت به حل سوالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده در زندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی از شاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر از عهده آن ها برمی آیند.

٥. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال در یکی از المپیاد های علمی (حتی مدال برنز) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن در سایت های معتبر مخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف از جمله بنیاد ملی نخبگان در می آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضا را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخراست از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال وبا بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنوات نه چندان دور مدال آور یکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین وتألیف شود که درآن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب ازاین پروژه که دراختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است ازتمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و درنهایت نیز ازعوامل زحمت کش انتشارات اعم ازمشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیزکمال امتنان را دارم.

با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مولف

ریاضیات علمی جذاب و گسترده می‌باشد و شاخه‌های فراوانی دارد. یکی از زیباترین و مهم‌ترین شاخه‌های ریاضیات، ترکیبیات می‌باشد و آنالیز ترکیبی یکی از مباحث ترکیبیات است. در واقع آنالیز ترکیبی علم شمارش است و در آن به بررسی روش‌ها و ایده‌های حل مسائل شمارشی پرداخته می‌شود.

هدف از تدوین این کتاب، ارائه‌ی مجموعه‌ای آموزش‌محور جهت آشنایی با تعاریف، اصول، قضایا و از همه مهم‌تر ایده‌های حل مسائل آنالیز ترکیبی می‌باشد. بنابراین از ارائه‌ی آموزش‌های طولانی و پاسخ‌های مفصل برای مسائل اجتناب گردیده است و سعی شده تا دانش‌پژوهان از طریق حل مسائل، ایده‌ها و روش‌ها را فرا بگیرند. بر این اساس هر یک از فصل‌های این کتاب در ۶ بخش تدوین گردیده است:

- آموزش: این بخش به‌صورت مختصر و اجمالی ارائه گردیده است و تنها به بیان تعاریف، اصول و قضایا اکتفا شده است.

- مثال‌ها: در این بخش چند مثال ساده برای درک بهتر مطالب ارائه شده است.

- مسائل تشریحی: آموزش اصلی نکات، ایده‌ها و روش‌های حل مسائل در این بخش انجام می‌شود. در واقع تنها با حل این مسائل است که دانش‌پژوهان می‌توانند با سوالات و روش‌های حل آنها آشنا می‌شوند. ترتیب چینش این سوالات نیز بر پایه‌ی ایده‌ی حل آنها و نیز میزان دشواری آنهاست. بنابراین واضح است که سوالاتی که در پایان می‌آیند، دشوارتر باشند.

- مسائل تستی: در این بخش، کلیه‌ی مسائل مرتبط که در آزمون‌های مرحله‌ی اول المپیادهای ریاضی و کامپیوتر تا سال ۱۳۹۱ مطرح شده‌اند، جمع‌آوری و ارائه شده‌اند. دقت کنید که بعضی از این مسال گزینه ندارند و به‌صورت پاسخ کوتاه و یا بلی- خیر می‌باشند.

- پاسخ مسائل تشریحی: در این بخش از ارائه‌ی پاسخ‌های تشریحی و کامل اجتناب شده است و تنها پاسخ نهایی سوالات ارائه شده است تا دانش‌پژوهان سعی کنند خود پاسخ‌های مسائل را به‌دست آورند و تنها برای بررسی درستی پاسخ خود به این بخش مراجعه کنند. دقت کنید که برای برخی از مسائل که جواب عددی ندارند و نیاز به اثبات دارند، پاسخی ارائه نشده است.

- پاسخ مسائل تستی: جهت آماده‌سازی دانش‌پژوهان برای شرکت در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر و آشنایی با نحوه‌ی حل مسائل، پاسخ این سوالات به‌صورت تشریحی گردیده است.

در فصل دوم این کتاب، تنها به معرفی چند نمایه ریاضی پرداخته شده است، لذا شامل مثال و مسائل تستی نیست. در فصل سوم نیز مسائل تستی ارائه نشده است و تستهای مرتبط با آن در فصل چهارم ارائه شده‌اند. هم‌چنین در فصل‌های سیزدهم و چهاردهم این کتاب تنها به بیان برخی تعاریف و نیز جمع‌بندی مباحث ارائه شده در کتاب پرداخته شده است و بنابراین شامل مثال و مسائل تستی و تشریحی نمی‌باشد.

در اینجا بر خود لازم می‌دانم از زحمات خانم‌ها درنا کربلایی و فاطمه فرجی و آقای آرش کریمی که مسئولیت ویراستاری و نمونه‌خوانی این اثر را به عهده داشتند، سپاسگزاری نمایم. هم‌چنین از مدیریت محترم انتشارات خوشخوان آقای رسول حاجی‌زاده که زحمات فراوانی در جهت آماده‌سازی و چاپ این اثر کشیده‌اند کمال تشکر را دارم.

عباس ثروتی
تابستان ۹۲

فهرست مطالب

۱
اصول شمارش

آنالیز ترکیبی علم شمارش است. در واقع هدف این شاخه از ریاضی شمارش تعداد راه‌های انجام یک کار است. برای این کار یک روش این است که تمام راه‌های ممکن برای انجام کار را لیست کرده و تعداد آن‌ها را بشمریم. به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تعداد راه‌های انتخاب دو عدد متمایز یک رقمی فرد را بیابیم. یک روش برای حل این مسئله لیست کردن تمام انتخاب‌های ممکن است:

$$\{۱,۳\},\{۱,۵\},\{۱,۷\},\{۱,۹\},\{۳,۵\},\{۳,۷\},\{۳,۹\}\{۵,۷\},\{۵,۹\},\{۷,۹\}$$

می‌بینید که این کار به ۱۰ روش قابل انجام است. اما به نظر شما آیا این روش برای حل مسئله روش مناسبی است؟ اگر به جای دو عدد یک رقمی فرد خواسته‌ی مسئله یافتن تعداد روش‌های انتخاب دو عدد پنج‌رقمی بود، آیا باز هم به راحتی می‌توانستیم تمام حالات را لیست کنیم؟ (جالب است بدانید که برای این کار ۱۰۱۲۴۷۷۵۰۰ روش وجود دارد!) حتی اگر به اندازه‌ی کافی هم وقت داشته باشیم، ممکن است هنگام شمارش تعداد حالات لیست شده دچار اشتباه شویم و پاسخ نادرستی به‌دست آوریم. واضح است که این روش، روش مناسبی برای حل مسائل شمارش نیست. بنابراین هدف ما شمارش تعداد راه‌های انجام یک کار بدون نیاز به لیست کردن تمام حالت‌هاست.

مانند هر علم و مهارت دیگری، شمارش نیز دارای اصول اولیه‌ای است که پایه و اساس حل مسائل آن است که به آن‌ها «اصول شمارش» می‌گویند. قبل از بیان این اصول لازم است که در ابتدا یک اصل ابتدایی و بدیهی را بیان کنیم:

تعداد راه‌های انتخاب یک شیء از میان n شیء متمایز برابر است با n.

به عنوان مثال برای انتخاب یک نماینده برای یک کلاس ۲۴ نفره، ۲۴ روش مختلف وجود دارد. به متمایز بودن اشیاء دقت کنید. زیرا انتخاب یک شیء از میان چند شیء یکسان تنها به یک صورت ممکن است.

اکنون آماده‌ایم تا به بیان اولین اصل شمارش بپردازیم. این کار را با یک مثال شروع می‌کنیم. فرض کنید برای شام به یک رستوران می‌روید. در منوی این رستوران ۴ غذای خورشتی و ۳ غذای کبابی موجود است. به چند روش می‌توانید غذای خود را انتخاب کنید؟ واضح است که پاسخ برابر $۷ = ۳ + ۴$ می‌باشد. شما به ۴ روش می‌توانید غذای خورشتی انتخاب کنید و به ۳ روش غذای کبابی. چون این دو کار مستقل از یکدیگر هستند و فقط یکی از آن‌ها را باید انجام دهید، بنابراین تعداد حالت‌های انجام این دو کار را با هم جمع می‌کنیم. این اصل را «اصل جمع» می‌نامیم. یعنی اگر دو کار مختلف داشته باشیم و بخواهیم یکی از آن‌ها را انجام دهیم، تعداد روش‌های انجام این کار برابر است با مجموع تعداد روش‌های انجام هر کدام از کارها.

این اصل فقط محدود به دو کار نیست. به عنوان مثال اگر در رستوران علاوه بر غذاهای گفته شده، دو نوع پیتزا هم وجود داشته باشد، پاسخ برابر $۹ = ۲ + ۴ + ۳$ خواهد بود.

اصل جمع

n کار متمایز داریم. کار اول به $a_۱$ روش، کار دوم به $a_۲$ روش، ... و کار nام به a_n روش قابل انجام است. در این صورت تعداد راه‌های انجام یکی از این کارها برابر است با:

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$$

نکته ۱. از اصل جمع تنها زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم فقط یکی از چند کار مستقل موجود را انجام دهیم. به عبارت دیگر از کلمه‌ی «یا» بین انجام کارها استفاده کرده باشیم.

اکنون می‌خواهیم مثال دیگری را مطرح کنیم. فرض کنید دوباره برای صرف شام به یک رستوران رفته‌اید و می‌خواهید علاوه بر غذای اصلی، دسر هم سفارش دهید. در منوی رستوران ۴ نوع غذای اصلی و ۳ نوع دسر وجود دارد. به چند طریق می‌توانید غذای اصلی و دسر خود را سفارش دهید؟ در این مثال شما دو کار را هم‌زمان انجام می‌دهید: انتخاب غذای اصلی و انتخاب دسر. این بار پاسخ برابر $۱۲ = ۳ \times ۴$ می‌باشد. در واقع چون هر دو کار باید با هم انجام شوند، تعداد حالت‌های انجام آن‌ها را در هم ضرب کردیم. این همان چیزی است که آن را «اصل ضرب» می‌نامیم. به بیان دیگر تعداد روش‌های انجام هم‌زمان دو کار مستقل برابر حاصل‌ضرب تعداد روش‌های انجام هر کدام از آن‌هاست. همانند اصل

جمع، اصل ضرب نیز محدود به دو کار نیست و برای هر تعداد کار مستقل قابل بیان است. برای مثال اگر در منوی رستوران ۲ نوع پیش غذا، ۴ نوع غذای اصلی و ۳ نوع دسر وجود داشته باشد و شما تصمیم داشته باشید هر سه را سفارش دهید، پاسخ برابر $۲۴ = ۳ \times ۴ \times ۲$ خواهد بود.

اصل ضرب

n کار متمایز داریم. کار اول به $a_۱$ روش، کار دوم به $a_۲$ روش، ... و کار nام به a_n روش قابل انجام است. در این صورت تعداد راه‌های انجام همه‌ی این کارها با هم برابر است با:

$$a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_n$$

نکته ۲. از اصل ضرب تنها زمانی استفاده می‌کنیم که بخواهیم همه‌ی کارهای موجود را هم‌زمان انجام دهیم. به عبارت دیگر از کلمه‌ی «و» بین انجام کارها استفاده کرده باشیم.

اکنون به این مثال توجه کنید. فرض کنید به همان رستوران رفته‌اید و در منوی غذاها ۸ نوع غذا وجود دارد. اما سه تا از آن‌ها پیتزا هستند و شما علاقه‌ای به پیتزا ندارید. در این صورت به چند طریق می‌توانید غذای خود را سفارش دهید؟ بدیهی است که پاسخ برابر $۵ = ۳ - ۸$ می‌باشد. در این مثال شما حالات نامساعد را از کل حالات کم می‌کنید. این کار همان چیزی است که آن را «اصل متمم» یا «اصل تفریق» می‌نامیم.

اصل متمم (اصل تفریق)

تعداد روش‌های مطلوب انجام یک کار برابر است با تعداد کل روش‌های موجود منهای تعداد روش‌های نامطلوب.

همان طور که دیدید اصول شمارش بسیار ساده و بدیهی می‌باشند. اما کاربردهای فراوانی در حل مسائل دارند و مسائل بسیار دشواری نیز وجود دارند که تنها با استفاده از همین اصول قابل حل می‌باشند.

۱-۱ مثال‌ها

مثال ۱-۱ به چند طریق می‌توان چهار توپ در رنگ‌های مختلف را بین سه نفر توزیع کنیم؟

پاسخ: هر کدام از توپ‌ها را به سه روش می‌توان به یکی از افراد داد. بنابراین طبق اصل ضرب پاسخ برابر است با $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۸۱$.

مثال ۱-۲ در مثال قبل در چند حالت همه‌ی توپ‌ها به یک نفر نمی‌رسد؟

پاسخ: در یک حالت هر چهار توپ به نفر اول می‌رسند، در یک حالت همه به نفر دوم و در یک حالت همه به نفر سوم می‌رسند. بنابراین سه حالت نامطلوب داریم. در نتیجه طبق اصل متمم پاسخ برابر است با $۸۱ - ۳ = ۷۸$.

مثال ۱-۳ فرض کنید چهار توپ مختلف و ۵ کتاب مختلف داریم و می‌خواهیم یا کتاب‌ها را بین سه نفر تقسیم کنیم و یا توپ‌ها را. به چند روش می‌توان این کار را انجام داد؟

پاسخ: توزیع توپ‌ها به $۳^۴ = ۸۱$ روش ممکن است و توزیع کتاب‌ها به $۳^۵ = ۲۴۳$ روش. بنابراین طبق اصل جمع پاسخ برابر است با $۸۱ + ۲۴۳ = ۳۲۴$.

۱-۲ مسائل تشریحی

۱ آقای حاجی‌زاده سه پسر و دو دختر دارد. در شهر آن‌ها سه مدرسه‌ی پسرانه و چهار مدرسه‌ی دخترانه وجود دارد. او به چند طریق می‌تواند:

الف) یکی از فرزندان خود را به مدرسه بفرستد؟

ب) همه‌ی فرزندان خود را به مدرسه بفرستد؟

ج) یکی از پسران و یکی از دختران خود را به مدرسه بفرستد؟

د) همه‌ی پسران یا همه‌ی دختران خود را به مدرسه بفرستد؟

ه) همه‌ی فرزندان خود را به مدارس مختلف بفرستد؟

و) همه‌ی پسران یا همه‌ی دختران خود را به مدارس مختلف بفرستد؟

ز) یکی از پسران و همه‌ی دختران خود را به مدرسه بفرستد؟

ح) یکی از دختران و همه‌ی پسران خود را به مدارس مختلف بفرستد؟

۲ در یک سیرک ۲ ببر، ۵ پلنگ و ۳ مربی وجود دارد.

الف) به چند طریق می‌توان یک ببر، یک پلنگ و یک مربی را به صحنه فرستاد؟

ب) به چند طریق می‌توان یک حیوان با یک مربی به صحنه فرستاد؟

۳ ۶ نفر ایرانی، ۵ نفر آلمانی و ۹ نفر ایتالیایی داریم. به چند طریق می‌توان:

الف) سه نفر از کشورهای مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد؟

ب) دو نفر از کشورهای مختلف از میان آن‌ها انتخاب کرد؟

۴ به چند طریق می‌توان از میان ۷ زوج (زن و شوهر) یک مرد و یک زن انتخاب کرد به طوری که:

الف) همسر یکدیگر باشند؟

ب) همسر یکدیگر نباشند؟

۵ در یک بوتیک پیراهن‌هایی در سه رنگ، چهار اندازه و شش مدل وجود دارد. حداکثر چند نوع پیراهن در این بوتیک وجود دارد؟

۶ یک اتوبوس در ایستگاه مبدأ ۲۰ مسافر سوار کرده است و در ادامه ۵ ایستگاه وجود دارد. مسافران به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

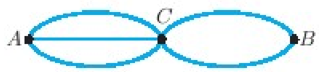
۷ آزمون المپیاد ریاضی شامل ۳۰ سؤال پنج گزینه‌ای می‌باشد. یک دانش‌آموز به چند طریق می‌تواند به سؤالات پاسخ دهد به طوری که:

الف) به همه‌ی سؤالات پاسخ دهد؟

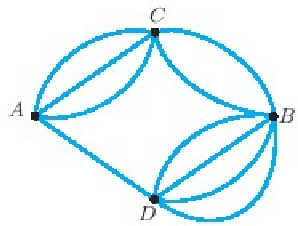
ب) پاسخ به همه‌ی سؤالات لازم نباشد؟

۸ در هر یک از اشکال زیر به چند طریق می‌توان با حرکت از روی خطوط و بدون عبور از نقطه‌ی تکراری، از A به B رفت؟

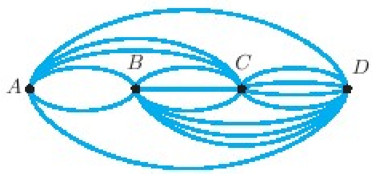
(الف)



(ب)



۹ در شکل زیر به چند طریق می‌توان بدون عبور از نقطه‌ی تکراری از A به D رسید به طوری که:



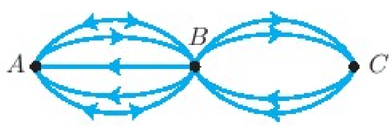
(الف) رو به جلو حرکت کنیم؟

(ب) شرط دیگری نداشته باشیم؟

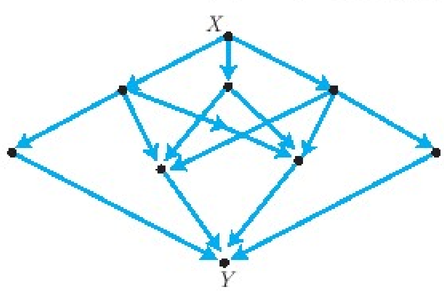
۱۰ **(الف)** در شکل زیر به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

(ب) به چند طریق می‌توان از A به C رفت و دوباره به A برگشت؟

(ج) به چند طریق می‌توان بدون عبور از مسیر تکراری از A به C رفته و به A برگشت؟

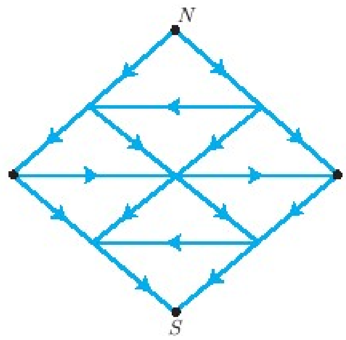


۱۱ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از X به Y رسید؟

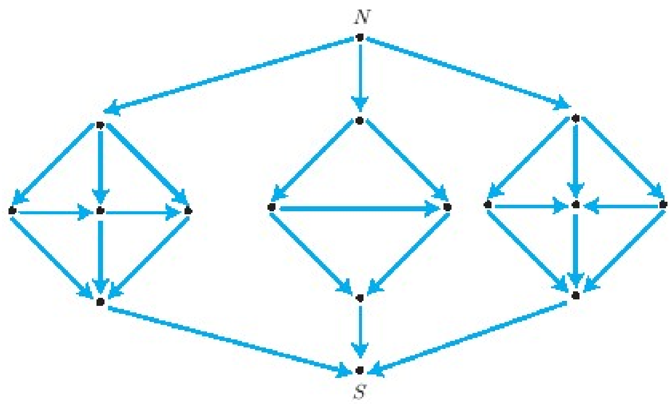


۱۲ در هر یک از نمودارهای زیر چند روش برای رسیدن از N به S وجود دارد؟

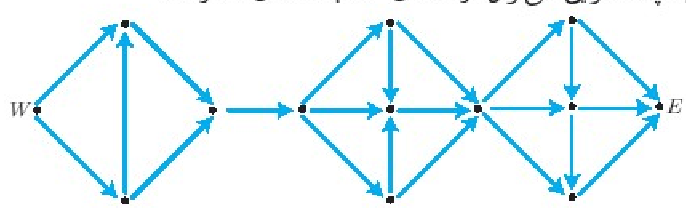
(الف)



(ب)



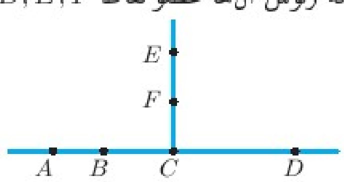
۱۳ در شکل زیر به چند طریق می‌توان از نقطه‌ی W به نقطه‌ی E رفت؟



۱۴ در شکل زیر $ABCD$ و EFC بر هم عمودند.

(الف) تعداد مثلث‌های قائم‌الزاویه XCY را بیابید که X و Y از بین نقاط A, B, D, E, F انتخاب شوند.

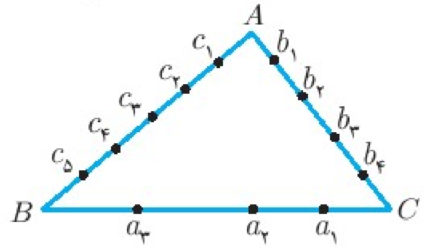
(ب) تعداد مثلث‌هایی را بیابید که رئوس آن‌ها عضو نقاط A, B, C, D, E, F باشند.



۱۵ شکل زیر دوازده نقطه را روی اضلاع مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ نشان می‌دهد:

(الف) چند پاره‌خط داریم که دو سرش عضو نقاط روی دو ضلع مختلف باشند؟

(ب) چند مثلث داریم که رئوس‌شان عضو نقاط روی سه ضلع مختلف باشند؟



۱۶ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر چند جمله‌ی متمایز خواهد داشت؟

(الف) $(a+b)(c+d+e)$

(ب) $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2)(c_1+c_2+c_3)$

(ج) $(a+b)(a+b+c+d+e)$

(د) $(a+b+c)^2$

۱۷ به چند طریق می‌توان در یک صفحه‌ی شطرنجی 8×8:

(الف) یک مهره‌ی رخ قرار دارد؟

(ب) دو مهره‌ی رخ متمایز قرار دارد؟

(ج) دو مهره‌ی رخ یکسان قرار داد؟

(د) دو مهره‌ی رخ متمایز قرار دارد که در یک سطر یا ستون نباشند؟

(ه) دو مهره‌ی رخ یکسان قرار دارد که در یک سطر یا ستون نباشند؟

۱۸ یک ساختمان ۸ طبقه و چهار رنگ مختلف داریم. به چند طریق می‌توان هر یک از طبقات این ساختمان را با این ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که:

(الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.

(ب) هیچ دو طبقه‌ی مجاوری هم‌رنگ نباشند.

۱۹ (الف) با حرکت دادن ۵ پرچم رنگی در بالای یک دکل علامت‌هایی داده می‌شود. اگر ذخیره‌ای نامحدود از پرچم‌هایی از ۷ رنگ مختلف وجود داشته باشد، چند علامت مختلف می‌توان ساخت؟

(ب) پاسخ قسمت قبل چه خواهد بود اگر در علامت‌هایی که داده می‌شود، پرچم‌های مجاور از یک رنگ نباشند؟

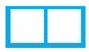
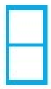
(ج) پاسخ چه خواهد بود اگر در علامت‌هایی که داده می‌شود، هر پنج پرچم رنگ‌های مختلف داشته باشند؟

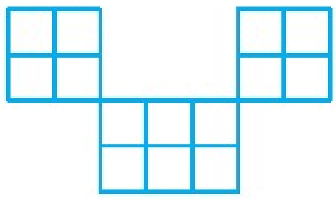
۲۰ یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم.

(الف) چند حالت مختلف ممکن است پدید آید؟

(ب) در چند حالت اعداد رو شده متمایزند؟

(ج) در چند حالت مجموع اعداد رو شده زوج است؟

۲۱ به چند طریق می‌توان شکل زیر را با مستطیل‌هایی به شکل  و  پر کرد؟



۲۲ **(الف)** در صفحه‌ی شطرنجی ۸ × ۸ چند مربع ۳ × ۳ وجود دارد؟

(ب) در صفحه‌ی شطرنجی ۸ × ۸ چند مربع وجود دارد؟

۲۳ به چند طریق ۱۰ نفر با شماره‌های ۱ تا ۱۰ می‌توانند وارد ۱۰ اتاق با شماره‌های ۱ تا ۱۰ شوند به طوری که هیچ فردی در اتاق هم‌شماره با خود نرود؟ (لازم نیست در هر اتاق فقط یک نفر وارد شود.)

۲۴ **(الف)** چند کلمه‌ی پنج حرفی با حروف الفبای انگلیسی می‌توان ساخت؟

(ب) در چند کلمه حرف تکراری نداریم؟

۲۵ **(الف)** چند کلمه‌ی چهار حرفی با حروف a، b، c، d، e و f می‌توان ساخت؟

(ب) در چند کلمه حروف مجاور متمایزند؟

(ج) در چند کلمه تمام حروف متمایزند؟

۲۶ **(الف)** به چند طریق می‌توان یک کلمه‌ی هشت حرفی با حروف p، q، r و s ساخت به طوری که دو حرف p و q و دو حرف r و s در هیچ جای کلمه کنار هم نباشند؟

(ب) در چند تا از کلمات بخش «الف» هیچ دو حرف مجاوری یکسان نیستند؟

۲۷ **(الف)** در چند کلمه‌ی ۶ حرفی با حروف انگلیسی حرف اول و آخر صدادارند؟

(ب) در چند تا از این کلمات فقط حرف اول و آخر صدادارند؟

۲۸ **(الف)** با حروف a، b، c، d و e چند کلمه می‌توان نوشت که حداقل سه و حداکثر پنج حرف داشته باشد؟

(ب) چند تا از آن‌ها حرف تکراری ندارند؟

۲۹ **(الف)** چند عدد سه رقمی داریم؟

(ب) چند تا از آن‌ها زوج هستند؟

(ج) چند تا از آن‌ها فرد هستند؟

(د) چند تا از آن‌ها مضرب ۵ هستند؟

(ه) چند تا از آن‌ها مضرب ۳ هستند؟

(و) چند تا از آن‌ها رقم تکراری ندارند؟

۳۰ چند عدد چهاررقمی وجود دارد به طوری که:

(الف) برای آن هیچ شرطی نداشته باشیم.

(ب) از رقم‌های مختلف تشکیل شده باشد.

(ج) زوج باشد.

(د) مجموع دو رقم اول و آخر آن ۱۰ و مجموع دو رقم دیگر آن نیز برابر ۱۰ باشد.

۳۱ عدد طبیعی b را که از وارون کردن ارقام عدد طبیعی a به‌دست می‌آید، مقلوب a می‌نامیم (مثلاً مقلوب ۲۰۳۸ عدد ۸۳۰۲ است). چند عدد از اعداد بین ۱ تا ۹۹۹۹۹ وجود دارند که مقلوب‌شان با خودشان برابر است؟

۳۲ **(الف)** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟

(ب) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد سه‌رقمی بدون رقم تکراری می‌توان ساخت؟

۳۳ **(الف)** با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد شش‌رقمی مضرب ۵ بین ۲۰۰۰۰۰ و ۴۰۰۰۰۰ با ارقام غیرتکراری می‌توان ساخت؟

(ب) با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ چند عدد شش‌رقمی مضرب ۵ با ارقام غیر تکراری می‌توان ساخت؟

۳۴ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۸، ۰ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت به طوری که:

(الف) هیچ محدودیتی نداشته باشیم.

(ب) اعداد با ارقام متمایز داشته باشیم.

(ج) اعداد زوج با ارقام متمایز داشته باشیم.

(د) اعداد مضرب ۹ با ارقام متمایز داشته باشیم.

۳۵ چند عدد ۷ رقمی با ارقام متمایز وجود دارد به طوری که:
(الف) هیچ شرط دیگری برای آن نداشته باشیم.
(ب) فرد باشد.
(ج) زوج باشد.

۳۶ در چند عدد ۵رقمی با ارقام متمایز رقم یکان فرد و دهگان بزرگ‌تر از ۴ است؟

۳۷ چند عدد چهاررقمی با ارقام متمایز مضرب ۵ هستند؟

۳۸ در چند عدد ۷رقمی، ۵ رقم متوالی برابر ۳ وجود دارد؟

۳۹ تعداد اعداد سه‌رقمی بزرگ‌تر از ۶۴۰ با ارقام متمایز چند تا است؟

۴۰ تعداد اعداد چهاررقمی کوچک‌تر از ۶۴۲۹ با ارقام متمایز چند تا است؟

۴۱ با ارقام ۳، ۶ و ۹ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که هر یک از آن‌ها رقم تکراری داشته باشند؟

۴۲ چند عدد فرد بین ۳۰۰۰ تا ۸۰۰۰ شامل رقم تکراری نیستند؟

۴۳ در چند عدد ۵رقمی حداقل یکی از سه رقم ۱، ۲ و ۳ وجود دارد؟

۴۴ در چند عدد چهار رقمی حداقل یک رقم فرد وجود دارد؟

۴۵ در چند عدد ۷رقمی، رقم تکراری وجود دارد؟

۴۶ در چند کلمه‌ی ۶ حرفی با حروف انگلیسی، حداقل یکی از دو حرف آخر کلمه صدادار است؟

۴۷ چند عدد چهاررقمی مربع کامل نیستند؟

۴۸ در چند عدد ۶رقمی، کوچک‌ترین رقم برابر ۳ است؟

۴۹ تعداد رشته‌های دودویی به طول ۷ که شامل ۱۰۱۰۱ باشند، چند تا است؟

۵۰ اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را روی کاغذ نوشته‌ایم. رقم ۳ چند بار نوشته شده است؟

۵۱ کلیه‌ی کلمات ۴ حرفی که با حروف a، b، c، d و e می‌توان ساخت را روی کاغذ نوشته‌ایم.
(الف) حرف a چند بار نوشته شده است؟
(ب) چند کلمه شامل حرف a هستند؟

۵۲ چند عدد چهاررقمی داریم که رقم هزارگان از ارقام دیگر کوچک‌تر نباشد؟

۵۳ عدد $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ داده شده است که در آن p_1، p_2، ...، p_k عوامل اول عدد n هستند. این عدد چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟

۵۴ (الف) عدد ۴۵۰ چند مقسوم‌علیه طبیعی دارد؟
(ب) چند تا از آن‌ها مضرب ۵ هستند؟

۵۵ چند مقسوم‌علیه از عدد $۵^۷ \times ۳^{۱۰} \times ۲^{۱۳}$ بر ۳۰۰ بخش‌پذیر نیستند؟

۵۶ کوچک‌ترین عدد طبیعی که ۳۹ مقسوم‌علیه مثبت دارد، چند است؟

۵۷ اعداد $۳۰^{۱۰}$ و $۲۰^{۱۵}$ چند مقسوم‌علیه مشترک مثبت دارند؟

۵۸ نشان دهید تعداد مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد $\underbrace{۱۱۱\cdots۱۱}_{\text{۹۶ رقم}}$ زوج است.

۵۹ تمام اعداد سه‌رقمی که رقم صفر ندارند را با هم جمع می‌کنیم. مجموع چقدر است؟

۶۰ مجموع تمام اعداد ۴ رقمی بدون رقم تکراری را بیابید.

۶۱ فرض کنید $A = \{۱, ۲, \cdots, ۳۰\}$.

الف) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد؟

ب) در چند زیرمجموعه از A، عدد ۲۰ بزرگ‌ترین عضو است؟

ج) در چند زیرمجموعه از A، عدد ۸ کوچک‌ترین عضو است؟

د) در چند زیرمجموعه از A، عدد ۲۰ بزرگ‌ترین عضو و عدد ۸ کوچک‌ترین عضو است؟

ه) در چند زیرمجموعه از A، عدد ۸ وجود دارد ولی عدد ۲۰ وجود ندارد؟

۶۲ مجموعه‌ی $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان دو زیرمجموعه‌ی A و B از X انتخاب کرد به طوری که:

الف) هیچ شرطی نداشته باشیم.

ب) $A \subset B$

ج) $A \neq B\ ,\ A \subset B$

د) $A \cup B = X$

ه) $A \cap B = \phi$

و) $|A \cap B| = ۱$

۶۳ به چند طریق می‌توان سه زیرمجموعه‌ی A، B و C از مجموعه‌ی $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ انتخاب کرد به طوری که:

الف) $A \subset B \subset C$

ب) $A \subset (B \cap C)$

ج) $A \subset (B \cup C)$

د) $A \cap C = \phi\ ,\ A \subset B$

ه) $(A \cup B) \subset C$

و) $(A \cap B) \subset C$

ز) $A \cup B \cup C = X$

ح) $A \cap B \cap C = \phi$

ط) $A \cap B = A \cap C = \phi$

ی) $C = \phi, A \cup B = X, A \cap B = \phi$

ک) $A \cup C = X\ ,\ A \cap B = \phi$

ل) $(A - B) \cap C = \phi$

۶۴ تعداد دنباله‌هایی مانند $(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ را بیابید به طوری که $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = X$.

۶۵ مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ای از $X = \{1, 2, \cdots, 100\}$ می‌باشد به طوری که مجموع هیچ دو عضو متمایزی از A برابر ۱۵۰ نمی‌باشد. به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی A را ساخت؟

۶۶ در زبانی تنها دو حرف وجود دارد. هیچ واژه‌ای از این زبان در آغاز واژه‌ی دیگری قرار نگرفته است. این زبان شامل ۳ واژه‌ی چهار حرفی، ۱۰ واژه‌ی پنج حرفی و ۳۰ واژه‌ی شش حرفی می‌باشد. حداکثر چند واژه‌ی هفت حرفی در این زبان داریم؟

۶۷ **(الف)** به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول 4×4 را با اعداد صفر و یک پر کرد به طوری که مجموع اعداد هر سطر و هر ستون زوج باشد؟

(ب) به چند طریق می‌توان اعداد صفر و یک را در خانه‌های یک جدول 15×10 قرار داد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟

(ج) به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول 15×10 را با اعداد ۱ تا ۶ پر کرد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر زوج و مجموع هر ۳ عدد متوالی در یک ستون بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

۶۸ به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدول $m \times n$ را با اعداد $+1$ و -1 پر کرد به طوری که حاصل‌ضرب اعداد هر سطر -1 و حاصل‌ضرب اعداد هر ستون نیز -1 باشد؟

۶۹ هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر که صورت و مخرج آن نسبت به هم اولند، نمایش داد. چند عدد گویا بین صفر و یک وجود دارد که حاصل‌ضرب صورت و مخرج نمایش کسری آن‌ها برابر $20!$ شود؟

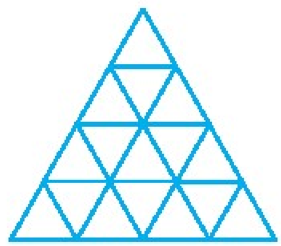
۷۰ به چند طریق می‌توان ۸ خانه از یک جدول 8×8 را سیاه کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی سیاهی در یک سطر یا ستون نباشند و در ضمن هیچ یک از چهار خانه‌ی واقع در گوشه‌های جدول سیاه نباشند؟

۷۱ در چند عدد چهاررقمی مجموع دو رقم سمت چپ با مجموع دو رقم سمت راست عدد برابر است؟

۷۲ به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی $\{1, 2, \cdots, 1361\}$ را به سه زیرمجموعه‌ی ناتهی افراز کرد به طوری که در هیچ یک دو عدد متوالی وجود نداشته باشد؟

۷۳ به چند طریق می‌توان تعدادی از خانه‌های یک جدول 8×8 را سیاه کرد به طوری که برای هر خانه‌ی سیاه تمام خانه‌های هم‌سطر یا تمام خانه‌های هم‌ستون آن نیز سیاه باشند؟

۷۴ به چند طریق می‌توان در ۱۶ مثلث شکل زیر اعداد ۰ یا ۱ را نوشت به طوری که مجموع اعداد موجود در مثلث‌های مجاور هر مثلث، زوج باشد؟ (دو مثلث مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند.)



۷۵ روی عرض رودخانه‌ای ۲۰ سنگ قرار دارد. یک خرگوش در یک طرف رودخانه قرار دارد و می‌خواهد با استفاده از پرش‌های خود روی سنگ‌ها خود را به طرف دیگر رودخانه برساند. این خرگوش در هر پرش می‌تواند به اندازه‌ی هر چند تا سنگ که بخواهد به جلو جهش کند. خرگوش به چند طریق می‌تواند به طرف دیگر رودخانه برسد؟

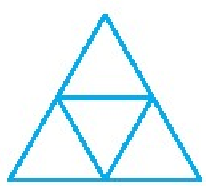
۷۶ به چند روش می‌توان در هر یک از خانه‌های یک جدول ۱۰×۱۰ یکی از دو عدد ۱ و ۲ را نوشت به طوری که مجموع عددهای نوشته شده در هر مربع ۲×۲ از جدول عددی زوج باشد؟

۷۷ مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۲۱, ۲۲, ۲۳\}$ چند زیرمجموعه دارد که هیچ یک از آن‌ها شامل سه عدد متوالی نیستند؟

۷۸ به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۸ را در یک ردیف نوشت به طوری که هیچ عددی از اعداد سمت چپ و سمت راستش بزرگ‌تر نباشد؟

۷۹ تعداد رشته‌های به طول ۸ از x و y که فاقد رشته‌ی $xxyy$ باشند چقدر است؟

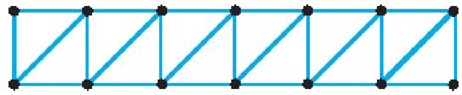
۸۰ به چند طریق می‌توان اضلاع شکل زیر را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هر سه ضلع هیچ مثلثی هم‌رنگ نباشند؟



۸۱ به چند طریق می‌توان ۷ خانه از یک جدول ۸×۲ را سیاه کرد به طوری که هیچ دو خانه‌ی علامت‌داری ضلع مشترک نداشته باشند؟

۸۲ **(الف)** به چند طریق می‌توان رأس‌های شکل زیر را با استفاده از چهار رنگ داده شده، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هر دو رأس که با یک پاره‌خط به هم وصل شده‌اند غیرهم‌رنگ باشند؟

(ب) در چند حالت از هر چهار رنگ استفاده شده است؟



۸۳ می‌خواهیم اعداد مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \cdots, ۲۰\}$ را با قرمز، آبی و سبز رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که هیچ دو عدد x و y که $x - y$ فرد است هم‌رنگ نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۸۴ به چند طریق می‌توان پاره‌خط‌های به طول واحد یک جدول $m \times n$ را با سه رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد، دو رنگ و هر کدام روی دو ضلع ظاهر شده باشند؟

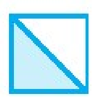
۸۵ به چند طریق می‌توان رئوس یک جدول $n \times n$ را با دو رنگ قرمز و آبی رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد دقیقاً دو رأس قرمز و دو رأس آبی داشته باشیم؟

۸۶ به چند طریق می‌توان رئوس یک جدول $n \times n$ را با چهار رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کرد به طوری که در هر مربع واحد از هر رنگ دقیقاً یک رأس داشته باشیم؟

۸۷ یک رنگ‌آمیزی از خانه‌های یک جدول با دو رنگ سیاه و سفید را پراکنده می‌گوییم اگر هیچ دو خانه‌ی سیاهی ضلع مشترک نداشته باشند. ثابت کنید تعداد رنگ‌آمیزی‌های پراکنده‌ی یک جدول ۱۰×۱۰ از $۱۰^{۱۵}$ بیش‌تر و از $۱۰^{۲۵}$ کم‌تر است.

۸۸ $A_۱A_۲ \cdots A_n$ یک n ضلعی محدب است. به چند طریق می‌توان سطح این چندضلعی را توسط $n - ۳$ قطر که هیچ دوتایی همدیگر را قطع نمی‌کنند به $n - ۲$ مثلث افراز کرد که هر مثلث حداقل در یک ضلع با n ضلعی مشترک باشد؟

۸۹ به چند طریق می‌توان یک مربع $n \times n$ را با کاشی‌هایی به شکل زیر و دوران‌های آن پوشاند به طوری که هر دو ضلع مجاور ناهم‌رنگ باشند؟



۹۰ یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع n به $n^۲$ مثلث واحد افراز شده است. $f(n)$ تعداد مسیرهایی از مثلث واحد در بالاترین سطر به مثلث میانی در پایین‌ترین سطر است به طوری که مثلث‌های متوالی روی مسیر در یک ضلع مشترک باشند و هیچ قسمتی از مسیر به سمت بالا نباشد و در ضمن هیچ مثلثی دو بار طی نشود. $f(n)$ را بیابید.

۹۱ فرض کنید $n = ۲^{۳۱} \times ۳^{۱۹}$. چه تعداد از مقسوم‌علیه مثبت $n^۲$ از n کوچک‌ترند اما مقسوم‌علیه n نیستند؟

۳-۱ مسائل تستی

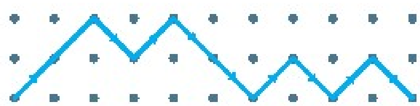
۱. چه تعداد از پاره‌خط‌های بین نقاط زیر، محور xها را قطع می‌کنند؟

$$(-۱۵,۶),(۷,۸),(۱۲,-۷),(۵,-۵),(۳,۲),(-۱,-۳),$$
$$(-۹,۱),(۵,۱۵),(۱۹,-۱۱),(۴,۹)$$

«المپیاد ریاضی ـ ۸۵»

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۱۶ د) ۲۱ هـ) ۲۴

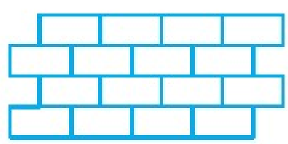
۲. شکل زیر یک جدول ۱۱×۳ با ۳۳ نقطه است. می‌خواهیم با استفاده از حرکت‌های مورب (مانند شکل زیر) از نقطه‌ی گوشه‌ی سمت چپ و پایین به نقطه‌ی گوشه‌ی سمت راست و پایین برویم. توجه کنید که با هر حرکت مورب فقط می‌توان به سمت راست شکل رفت. این کار به چند طریق ممکن است؟



«المپیاد کامپیوتر ـ ۷۸»

الف) $۳^۲ \times ۲^۴$ ب) $۳ \times \binom{۱۰}{۵}$ ج) $۲^۵$ د) $\binom{۱۰}{۵}$ هـ) $۲^۴$

۳. به چند طریق می‌توان آجرهای شکل زیر را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ دو آجر مجاوری هم‌رنگ نباشند؟



«المپیاد کامپیوتر ـ ۸۳»

الف) $۳^۴$ ب) ۳×۲^{۱۵} ج) ۳ د) $۳^۴ \times ۲^{۱۲}$ هـ) ۶

۴. تعداد رشته‌های به طول ۱۰ متشکل از A، T، C و G را بیابید که در آن‌ها A و T مجاور هم نباشند و C و G نیز مجاور هم نباشند و نیز هیچ دو حرف مجاوری یکسان نباشند.

«المپیاد کامپیوتر ـ ۷۸»

الف) ۲۰۴۸ ب) $۴^۹$ ج) $۴^{۱۰} - ۴ \times ۱۰ \times ۲^۸$

د) ۱۰۲۴ هـ) $۴^۶$

۵. مجموعه‌ی $\{۶,۷,۱۲,۱۳,۲۱,۲۵,۳۰,۳۱\}$ چند زیرمجموعه دارد که حاصل جمع اعداد آن زوج است؟
«المپیاد کامپیوتر ـ ۸۷»

الف) ۱۶ ب) ۳۲ ج) ۶۴ د) ۹۶ هـ) ۱۲۸

۶. چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که هیچ دو رقم متوالی آن یکی نباشد؟ «المپیاد ریاضی ـ ۸۵»

الف) ۶۴۸ ب) ۷۲۰ ج) ۷۲۹ د) ۸۱۰ هـ) ۹۰۰

۷. چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{۱,۲,۳,۴\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشند؟
«المپیاد کامپیوتر ـ ۸۳»

الف) $۲^{۱۳}$ ب) $۲^{۱۵}$ ج) $۲^{۱۱}$ د) ۳×۲^{۱۱} هـ) ۴×۳^{۱۱}

۸. به چند طریق می‌توان اعداد ۰ و ۱ را در خانه‌های یک جدول ۱۵×۱۰ قرار داد به طوری که مجموع هر ۴ عدد متوالی در یک سطر یا یک ستون عددی زوج باشد؟ «المپیاد کامپیوتر ـ ۷۸»

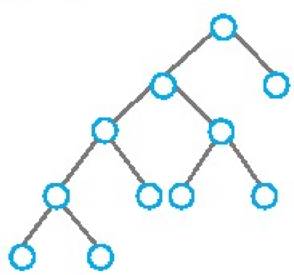
الف) صفر ب) ۵۱۲ ج) $۲^{۱۶}$ د) $\binom{۱۵}{۴}\binom{۱۰}{۴}$ هـ) $\frac{۲^{۱۵۰}}{\binom{۱۵}{۴}\binom{۱۰}{۴}}$

۹. یک جدول ۱۲×۱۰ داریم. مختصات خانه‌ی بالا سمت چپ $(۰,۰)$، و مختصات خانه‌ی پایین سمت راست $(۹,۱۱)$ است. چند زیرجدول (زیرمستطیل از خانه‌ها)، شامل خانه‌ی $(۷,۵)$ است؟ (بدیهی است که خانه‌ی $(۷,۵)$ به تنهایی و کل جدول، هرکدام یک زیرجدول محسوب می‌شوند.)
«المپیاد کامپیوتر ـ ۸۶»

الف) ۷۳۵ ب) ۱۱۲۰ ج) ۱۰۰۸ د) ۱۲۶۰ هـ) ۱۲۰۰

۱۰. در شکل زیر، می‌خواهیم دایره‌ها را با ۳ رنگ آبی، قرمز و سبز رنگ‌آمیزی کنیم، به طوری که رنگ هر دایره و دو دایره‌ی زیر آن، که به آن متصل‌اند (اگر وجود داشته باشد)، با هم برابر باشد و یا رنگ هر سه آن‌ها متفاوت باشد. به چند طریق می‌توان این رنگ‌آمیزی را انجام داد؟

«المپیاد کامپیوتر ـ ۸۶»



الف) ۲۴۳
ب) ۷۲۸
ج) ۷۲۹
د) ۱۴۵۸
هـ) ۲۰۴۸