

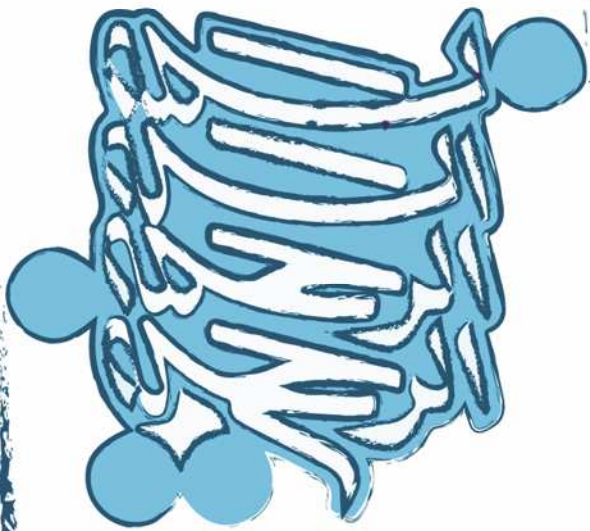


یازدهم ریاضی پایا

(رشته تجربی)

حمیدرضا بیات • سعید بیاتی • مرتضی خمایی ابدی • کیان کریمی خراسانی

- درسنامه
- پرسش‌های چهارگزینه‌ای (تألیفی و کنکور)
- پاسخ‌نامه تشریحی با نکته‌های کلیدی
- برای داوطلبان رشته‌های برتر دانشگاه‌های مشهور



دانش آموزان گرامی

بسیار خرسندیم که کتاب ریاضی یازدهم را در اختیار شما قرار می‌دهیم. این کتاب‌ها که از مجموعه کتاب‌های «اقیانوس تست و نکته» به حساب می‌آید، موفقیت تحصیلی شما را تضمین می‌کند. کتاب **ریاضی یازدهم پایا (ریاضی ۲- رشته تجربی)** شما را برای شرکت در مسابقات، امتحانات و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها در درس ریاضی آماده می‌کند.

مؤلفان کتاب ریاضی، پس از ارائه درسی‌نامه مختصر، بانک سؤال کاملی را در اختیار شما قرار می‌دهند که شامل پرسش‌های چهارگزینه‌ای کنکور گروه آزمایشی علوم تجربی، مسائل مسابقات معتبر ریاضی (با توجه به استفاده طراحان کنکور از آن‌ها در سال‌های اخیر) و پرسش‌های تألیفی است. این پرسش‌ها براساس فصل‌ها و بخش‌های کتاب درسی طبقه‌بندی شده‌اند.

مطالعه پاسخ‌نامه تشریحی همراه با نکته‌های کلیدی و آموزنده، موفقیت شما را تسهیل خواهد کرد.

در پایان، وظیفه خود می‌دانیم از مؤلفان محترم این کتاب، آقایان: حمیدرضا بیات، سعید بیاتی، مرتضی خمایی ابدی و کیان کریمی خراسانی و آقای مهندس هادی عزیززاده، که کتاب زیر نظر ایشان تألیف شده است، تشکر کنیم.

همچنین از خانم لیلا مهرعلی‌پور که زحمت حروفچینی و صفحه‌آرایی، خانم سارا لطفی مقدم که زحمت ترسیم شکل‌ها، و خانم بهاره خدای که زحمت طراحی کتاب را برعهده داشته‌اند، بسیار ممنونیم و برای همه این عزیزان آرزوی موفقیت می‌کنیم.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی

درس اول: تابع نمایی و ویژگی‌های آن	۲۰۰
درس دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن	۲۰۶
درس سوم: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی	۲۱۳
آزمون فصل ۵	۲۱۹
پاسخ‌نامه تشریحی	۲۲۱
پاسخ آزمون فصل ۵	۲۳۰

فصل ششم: حد و پیوستگی

درس اول: فرایندهای حدی	۲۳۴
درس دوم: محاسبه حد توابع	۲۳۸
درس سوم: پیوستگی	۲۴۵
آزمون فصل ۶	۲۵۰
پاسخ‌نامه تشریحی	۲۵۳
پاسخ آزمون فصل ۶	۲۶۲

فصل هفتم: آمار و احتمال

درس اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل	۲۶۶
درس دوم: آمار توصیفی	۲۷۳
آزمون فصل ۷	۲۸۱
پاسخ‌نامه تشریحی	۲۸۳
پاسخ آزمون فصل ۷	۲۸۹

آزمون‌ها

آزمون سراسری سال ۹۶	۲۹۲
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۶	۲۹۴
آزمون سراسری سال ۹۷	۲۹۸
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۷	۳۰۰
آزمون سراسری سال ۹۸	۳۰۳
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۸	۳۰۷
آزمون سراسری سال ۹۹	۳۱۰
پاسخ‌نامه تشریحی آزمون سراسری سال ۹۹	۳۱۴

فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

درس اول: هندسه تحلیلی	۸
درس دوم: تابع درجه ۲ و معادله درجه دوم	۱۵
درس سوم: معادلات گویا و معادلات رادیکالی	۲۸
آزمون فصل ۱	۳۳
پاسخ‌نامه تشریحی	۳۵
پاسخ آزمون فصل ۱	۵۰

فصل دوم: هندسه

درس اول: ترسیم‌های هندسی	۵۴
درس دوم: استدلال و قضیه تالس	۶۷
درس سوم: تشابه مثلث‌ها	۷۸
آزمون فصل ۲	۸۹
پاسخ‌نامه تشریحی	۹۳
پاسخ آزمون فصل ۲	۹۹

فصل سوم: تابع

درس اول: آشنایی با برخی از انواع تابع	۱۱۲
درس دوم: وارون یک تابع و تابع یک به یک	۱۲۷
درس سوم: اعمال جبری روی توابع	۱۳۵
آزمون فصل ۳	۱۴۱
پاسخ‌نامه تشریحی	۱۴۳
پاسخ آزمون فصل ۳	۱۵۷

فصل چهارم: مثلثات

درس اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه	۱۶۲
درس دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی	۱۶۶
درس سوم: توابع مثلثاتی	۱۷۷
آزمون فصل ۴	۱۸۲
پاسخ‌نامه تشریحی	۱۸۵
پاسخ آزمون فصل ۴	۱۹۶

فصل اول: تحلیل و جبر
هندسه

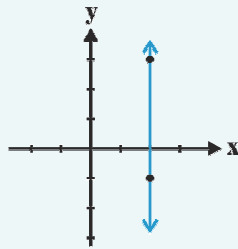
معادله خط

معادله خط در صفحه به یکی از دو فرم $y = mx + h$ و یا $ax + by + c = 0$ نوشته می‌شود. در حالتی که $y = mx + h$ است، m را شیب (ضریب زاویه) خط و h را عرض از مبدأ خط می‌نامیم. عرض از مبدأ در واقع عرض نقطه تقاطع خط با محور y ها است. و در حالتی که خط به فرم $ax + by + c = 0$ است شیب خط برابر $m = -\frac{a}{b}$ است. با مشخص کردن دو نقطه دلخواه از خط می‌توان نمودار آن را در دستگاه محورهای مختصات رسم کرد.

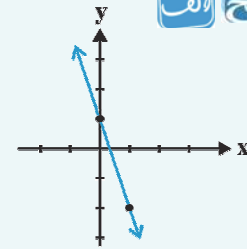
مثال نمودار خطوط با معادلات $y = -3x + 1$ ، $x = 2$ و $y = -3$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.

پاسخ اول

$$x = 2 \quad \begin{array}{c|cc} x & 2 & 2 \\ y & -1 & 3 \end{array}$$



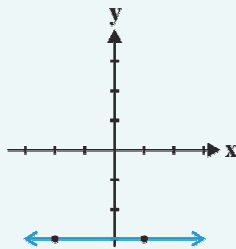
$$y = -3x + 1 \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & 0 \\ y & -2 & 1 \end{array}$$



در این حالت به ازای همه y ها همواره $x = 2$ است. این خط موازی محور y ها است.

ع

$$y = -3 \quad \begin{array}{c|cc} x & 1 & -2 \\ y & -3 & -3 \end{array}$$



در این حالت به ازای همه x ها همواره $y = -3$ است. این خط موازی محور x ها است.

تعیین معادله خط

با داشتن مختصات یک نقطه از خط مانند $A(x_1, y_1)$ و شیب خط (m) معادله خط را به صورت مقابل می‌نویسیم: $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-2, 1)$ گذشته و شیبش برابر -3 باشد.

$$y - 1 = -3(x - (-2)) \Rightarrow y - 1 = -3x - 6 \Rightarrow y = -3x - 5$$

پاسخ

با داشتن مختصات دو نقطه متمایز از خط می‌توان معادله خط را نوشت. شیب خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$

می‌گذرد برابر $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ است. در این حالت معادله خط به صورت مقابل مشخص می‌شود:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $A(-1, 2)$ و $B(3, 4)$ می‌گذرد.

$$\text{شیب خط} : m = \frac{4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

پاسخ

$$\text{معادله خط} : y - 2 = \frac{1}{2}(x - (-1)) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

مثال معادله خطی را بنویسید که طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن به ترتیب ۳- و ۲ باشند.

پاسخ طول از مبدأ، طول نقطه تقاطع خط با محور x ها و عرض از مبدأ، عرض نقطه تقاطع خط با محور y ها است، پس باید معادله خطی را بنویسیم که از دو نقطه $A \left| \begin{matrix} -3 \\ 0 \end{matrix} \right.$ و $B \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right.$ می‌گذرد.

$$m = \frac{2-0}{0-(-3)} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{معادله خط: } y-0 = \frac{2}{3}(x-(-3)) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x+2$$

نکته اگر p و q به ترتیب طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطی باشند معادله خط را می‌توان به صورت زیر نوشت: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \xrightarrow{\times 2} -\frac{2}{3}x + y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 2$$

در مثال قبل معادله خط را می‌توان به صورت زیر بنویسیم:

شرط موازی و عمود بودن دو خط

- دو خط $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$ با هم موازیند، هرگاه شیب آن‌ها با هم برابر باشند، یعنی $m = m'$.
- دو خط غیرموازی با محورهای مختصات با شیب‌های m و m' بر هم عمودند، هرگاه شیب هر کدام عکس و قرینه شیب دیگری باشد. به بیان دیگر حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر -1 باشد، یعنی $mm' = -1$.

مثال اگر خط گذرنده از نقاط $A(1,2)$ و $B(-2,a)$ موازی خط $y = 3ax + 5$ باشد، مقدار a کدام است؟

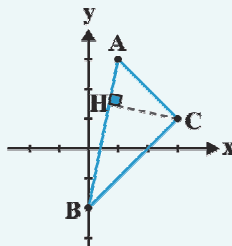
پاسخ

$$\left. \begin{aligned} \text{شیب خط گذرنده از نقاط } A \text{ و } B &= m = \frac{2-a}{1-(-2)} = \frac{2-a}{3} \\ y = 3ax + 5 &\Rightarrow \text{شیب خط} = m' = 3a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2-a}{3} = 3a \Rightarrow 2-a = 9a \Rightarrow 10a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

مثال اگر نقاط $A(1,3)$ و $B(0,-2)$ و $C(3,1)$ سه رأس مثلثی باشند، معادله ارتفاع CH را بنویسید.

$$m_{AB} = \frac{-2-3}{0-1} = 5$$

پاسخ ابتدا شیب خط AB را به دست می‌آوریم:



چون ارتفاع CH بر ضلع AB عمود است پس شیب CH عکس و قرینه شیب AB است. یعنی $m_{CH} = -\frac{1}{5}$.

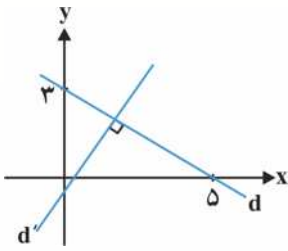
$$y - y_C = -\frac{1}{5}(x - x_C) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{5}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

پس معادله ارتفاع CH عبارت است از:

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

- خط گذرنده از نقطه $(4,-1)$ و موازی با خط $y - 3x = 4$ ، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟
 (۱) -8 (۲) -9 (۳) -10 (۴) -13
- خط گذرنده از دو نقطه $(1,3)$ و $(-5,7)$ ، نیمساز ناحیه دوم و چهارم را با کدام عرض قطع می‌کند؟
 (۱) 6 (۲) 8 (۳) 9 (۴) 11
- به ازای کدام مقدار a سه خط $x + y = 3$ ، $5x - 2y = 1$ و $a^2x + ay = -1$ از یک نقطه می‌گذرند؟
 (۱) 1 (۲) -1 (۳) 2 (۴) -2

۴. در شکل روبه‌رو، مجموع شیب‌های دو خط d و d' کدام است؟



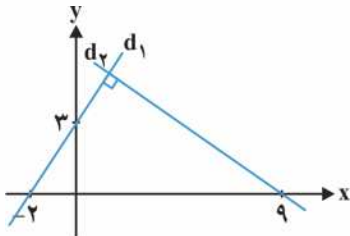
(۲) $\frac{15}{34}$

(۱) $\frac{34}{15}$

(۴) $\frac{15}{16}$

(۳) $\frac{16}{15}$

۵. **مسئله** با توجه به شکل مقابل، معادله خط d_2 کدام است؟



(۱) $3y + 2x = 18$

(۲) $2y + 3x = 18$

(۳) $3y - 2x = 18$

(۴) $-2y + 3x = 18$

۶. خط d از نقطه $A(2, 3)$ می‌گذرد و عمود بر خط گذرنده از نقاط $B(6, 1)$ و $C(4, -1)$ است. خط محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) ۶

(۳) ۵

(۲) ۲

(۱) ۱

۷. **مسئله** سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ و $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟

(سراسری قارچ از کشور تبریز - ۱۹۰)

(۴) $3y + 2x = 9$

(۳) $3y - 2x = 7$

(۲) $9y - 6x = 17$

(۱) $6y - 4x = 15$

۸. مثلث ABC با سه رأس $A(1, 4)$ ، $B(2, -1)$ و $C(2, 7)$ مفروض است. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، مختصات نقطه H کدام است؟

(۴) $(3, 6)$

(۳) $(3, 3)$

(۲) $(2, 5)$

(۱) $(2, 4)$

۹. **مسئله** اگر سه نقطه $(2, 0)$ ، $(3, K)$ و $(6, K^2 + 3)$ روی یک خط راست باشند، مقدار K کدام است؟

(۴) ۱ و ۴

(۳) ۲ و ۴

(۲) ۱ و ۳

(۱) ۲ و ۳

۱۰. **مسئله** دو خط به معادلات $y = 2x - 3$ و $y = ax + b$ متقارن نسبت به خط $x = 1$ هستند، b کدام است؟

(سنجش ریاضی - ۹۳)

(۴) -۲

(۳) -۱

(۲) ۲

(۱) ۱

۱۱. **مسئله** معادله یک ضلع مستطیل، $2x + 5y = 4$ است. کدام خط نمی‌تواند معادله یکی از سه ضلع دیگر باشد؟

(۴) $4x + 10y = 11$

(۳) $5x + 2y = 3$

(۲) $5y + 2x = 11$

(۱) $5x - 2y = 9$

۱۲. نقطه $A(0, -1)$ یکی از رأس‌های یک لوزی است که یک قطر آن روی خطی به معادله $x + 3y = 3$ قرار دارد. قطر دیگر لوزی روی کدام خط زیر قرار دارد؟

(۴) $y = -\frac{x}{3} - 1$

(۳) $y = \frac{x}{3} - 1$

(۲) $y = -3x - 1$

(۱) $y = 3x - 1$

۱۳. **مسئله** مساحت مثلث محدود به سه خط $x + y = 2$ و $x - y = 0$ و $y + 1 = 0$ کدام است؟

(۴) ۴/۵

(۳) ۴

(۲) ۳/۵

(۱) ۳

۱۴. **مسئله** نقاط $A(0, 3)$ و $B(3, 0)$ و $C(3, 4)$ سه رأس یک مثلث هستند. مختصات نقطه تلاقی ارتفاع‌های آن مثلث کدام است؟

(۴) $(3, 2)$

(۳) $(2, 1)$

(۲) $(2, 3)$

(۱) $(3, 1)$

هندسه مختصاتی (فاصله دو نقطه - نقطه وسط پاره خط - فاصله نقطه از خط)

فاصله دو نقطه

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

نتیجه با توجه به رابطه قبل داریم:

۱ فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ تا مبدأ مختصات (O) برابر است با:

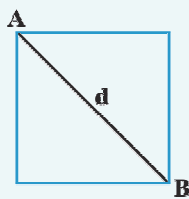
$$|OA| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

۲ اگر A و B دو نقطه هم طول در صفحه باشند، آن گاه:

$$|AB| = |y_B - y_A|$$

۳ اگر C و D دو نقطه هم عرض در صفحه باشند، آن گاه:

$$|CD| = |x_C - x_D|$$



مثال مساحت مربعی که نقاط $A(-1, 4)$ و $B(1, 2)$ دو سر قطری از آن باشند را به دست آورید.

$$\text{پاسخ} \quad d = |AB| = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{8})^2 = 4 \quad \text{پس: } S = \frac{1}{2}d^2 \text{ به دست می آید.}$$

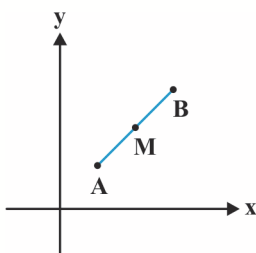
مثال شعاع دایره‌ای که مرکزش $O(2, 1)$ بوده و از مبدأ مختصات بگذرد را بیابید.

$$R = |OA| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

پاسخ چون فاصله مرکز دایره تا هر نقطه روی دایره برابر شعاع دایره است، پس:

نقطه وسط پاره‌خط

مختصات نقطه وسط پاره‌خط AB عبارت است از:



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

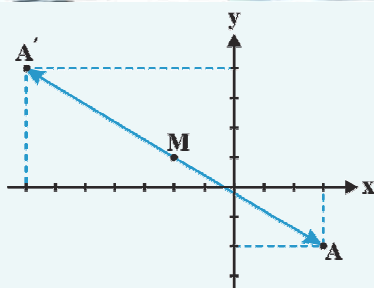
مثال اگر نقاط $A(4, -5)$ و $B(-2, -3)$ دو سر قطری از دایره باشند، مختصات مرکز دایره کدام است؟

$$\text{پاسخ} \quad \text{مرکز دایره وسط قطر دایره است، پس:} \quad O\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-3+(-5)}{2}\right) = (1, -4)$$

مثال اگر نقاط $A(-2, 3)$ و $B(2, 0)$ و $C(0, -2)$ سه رأس از مثلث ABC باشند، طول میانه AM کدام است؟

پاسخ میانه AM خطی است که از رأس A به وسط ضلع BC وصل می‌شود. پس ابتدا مختصات نقطه M وسط ضلع BC را به دست می‌آوریم، سپس طول پاره‌خط AM را تعیین می‌کنیم:

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{0+(-2)}{2}\right) = (1, -1) \rightarrow |AM| = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$



مثال قرینه نقطه $A(3, -2)$ نسبت به نقطه $M(-2, 1)$ را به دست آورید.

پاسخ اگر $A'(\alpha, \beta)$ قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، داریم:

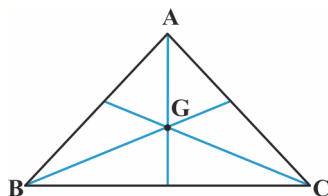
$$M = \left(\frac{x_A + x_{A'}}{2}, \frac{y_A + y_{A'}}{2}\right) \Rightarrow (-2, 1) = \left(\frac{3 + \alpha}{2}, \frac{-2 + \beta}{2}\right)$$

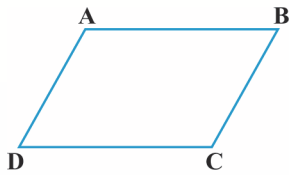
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3 + \alpha}{2} = -2 \Rightarrow \alpha = -4 - 3 = -7 \\ \frac{-2 + \beta}{2} = 1 \Rightarrow \beta = 2 + 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow A'(-7, 4)$$

نکته مختصات مرکز ثقل مثلث ABC که محل تلاقی میانه‌های مثلث است،

عبارت است از:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$





در متوازی‌الاضلاع ABCD شکل مقابل داریم:

$$x_A + x_C = x_D + x_B$$

$$y_A + y_C = y_D + y_B$$

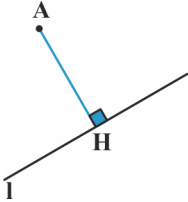
مثال اگر نقاط $A(-1, 3)$ و $C(2, -1)$ و $D(1, -1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشند مختصات رأس B کدام است؟

$$-1 + 2 = 1 + x_B = x_B = 0$$

$$3 + (-1) = -1 + y_B \Rightarrow y_B = 3 \Rightarrow B(0, 3)$$

پاسخ با توجه به نکته بالا داریم:

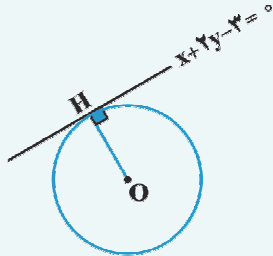
فاصله نقطه از خط



فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر خط l رسم می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = |AH| = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال خط $x + 2y = 3$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, -1)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.



پاسخ با توجه به این که خط مماس بر دایره در نقطه تماس عمود است، پس باید فاصله مرکز تا خط مماس را به دست آوریم:

$$R = |OH| = \frac{|1 + 2(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

مثال اگر فاصله نقطه A واقع بر نیمساز ناحیه اول از خط به معادله $x + 3y - 2 = 0$ برابر $\sqrt{10}$ باشد. طول نقطه A کدام است؟

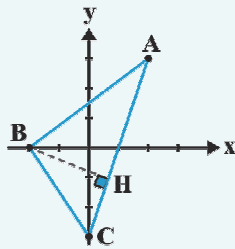
پاسخ معادله نیمساز ناحیه اول به صورت $y = x$ است پس مختصات نقطه A واقع بر آن به صورت (x, x) می‌باشد و داریم:

$$|AH| = \frac{|x + 3x - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{|4x - 2|}{\sqrt{10}} = \sqrt{10} \Rightarrow |4x - 2| = 10$$

$$\Rightarrow 4x - 2 = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \text{ قابل قبول} \\ 4x = -8 \Rightarrow x = -2 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

چون نقطه A باید در ناحیه اول باشد.

مثال اگر نقاط $A(2, 3)$ و $B(-2, 0)$ و $C(0, -3)$ سه رأس مثلث ABC باشند، اندازه ارتفاع BH را به دست آورید.



پاسخ ابتدا معادله ضلع AC را می‌نویسیم:

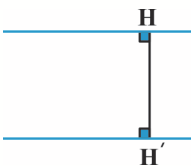
$$m_{AC} = \frac{3 - (-3)}{2 - 0} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \text{معادله ضلع AC}$$

$$y - 3 = 3(x - 2) \Rightarrow 3x - y - 3 = 0$$

سپس فاصله نقطه B تا ضلع AC که همان اندازه ارتفاع BH است را می‌یابیم:

$$|BH| = \frac{|3(-2) - 0 - 3|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{10}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}$$

فاصله بین دو خط موازی

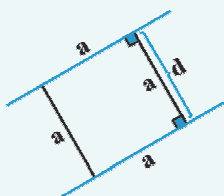


فاصله بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = |HH'| = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال معادلات اضلاع مربعی به صورت $2x - 3y + 1 = 0$ و $4x - 6y - 3 = 0$ هستند. مساحت مربع را به دست آورید.

پاسخ چون دو خط داده شده موازیند لذا معادله دو ضلع مقابل مربع هستند و فاصله بین این دو خط موازی در واقع طول ضلع مربع را مشخص می کند.



برای استفاده از فرمول بالا باید ضرایب x و y در دو معادله یکسان باشند، پس:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y + 1 = 0 \xrightarrow{\times 2} 4x - 6y + 2 = 0 \\ 4x - 6y - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{|-3 - 2|}{\sqrt{16 + 36}} = \frac{5}{\sqrt{52}} \quad \text{طول ضلع مربع} \Rightarrow S = \left(\frac{5}{\sqrt{52}}\right)^2 = \frac{25}{52}$$

نکته معادله خطی که با دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ موازی باشد و از آن‌ها به فاصله برابر باشد عبارت

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

است از:

مثال معادله خطی را که از دو خط $2x + y - 3 = 0$ و $y = -2x - 1$ به یک فاصله باشد بنویسید.

پاسخ

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + y + \frac{-3 + 1}{2} = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$$

پیش‌ساز چهارگزینده

۱۵. خط به معادله $y = 4x - 6$ نیمساز ناحیه اول را در نقطه A قطع می کند. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۴ (۴) ۲

۱۶. دایره‌ای به مرکز $O(-4, 3)$ از نقطه $(8, 8)$ می گذرد. شعاع دایره کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۹ (۳) ۱۳ (۴) ۱۷

۱۷. **مسئله** در مثلثی با رئوس $A(2, 4)$ ، $B(0, 1)$ و $C(4, 0)$ معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟

- (۱) $3y = x + 3$ (۲) $3y = x - 2$ (۳) $y = 3x - 6$ (۴) $y = 3x + 6$

۱۸. **مسئله** معادله عمودمنصف پاره خط واصل بین دو نقطه $(2, 5)$ و $(0, -1)$ کدام است؟

- (۱) $2y - x = 3$ (۲) $x + 3y = 5$ (۳) $3y + x = 7$ (۴) $3y + 2x = 8$

۱۹. **رئوس** a و b دو عدد حقیقی متمایز هستند. دو نقطه $P(a, b)$ و $Q(2-b, 2-a)$ مفروض‌اند. معادله خط عمودمنصف PQ کدام است؟

- (۱) $y = -x + 1$ (۲) $y = -x + 2$ (۳) $y = -x - 1$ (۴) $y = -x - 2$

۲۰. یک روستا دارای دو دبستان است که مختصات یکی از آن‌ها $(2, 9)$ است. خطی رسم کرده‌ایم که روستا را به دو قسمت تقسیم کرده

است که به کمک آن هر دانش‌آموز به نزدیک‌ترین مدرسه نسبت به خانه خود می‌رود. اگر معادله این خط به صورت $y = 2x - 5$

باشد، مختصات دبستان دیگر کدام است؟

- (۱) $(10, 5)$ (۲) $(5, 10)$ (۳) $(6, 16)$ (۴) $(16, 6)$

۲۱. نقاط $A(1, 2)$ ، $B(0, 5)$ و $C(3, 4)$ سه رأس از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مختصات رأس D کدام است؟

- (۱) $(4, 1)$ (۲) $(1, 4)$ (۳) $(2, 3)$ (۴) $(3, 2)$

۲۲. نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می‌باشند.

مختصات تقاطع قطره‌های آن کدام است؟

- (۱) $(1, 5)$ (۲) $(3, 4)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $(4, 3)$

(سراسری تجربی - ۹۰)

۲۳. فاصله دو خط موازی $d: 3x + 4y + 8 = 0$ و $d': 6x + (a+2)y + a = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

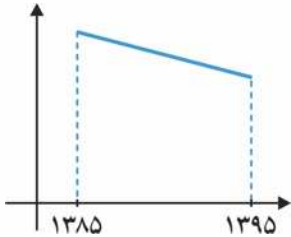
۲۴. اگر قرینه نقطه $A(3,5)$ نسبت به نقطه $M(a, 2-a)$ در ناحیه سوم قرار گیرد، حدود a کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}$ (۲) $\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$ (۳) $\frac{3}{2} < a < \frac{7}{2}$ (۴) $\frac{5}{2} < a < \frac{9}{2}$

۲۵. سود سالانه یک شرکت بر حسب میلیون تومان در سال‌های ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ به شکل مقابل است. اگر سود شرکت در سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰ به ترتیب ۷۳ و ۶۱ میلیون تومان باشد، سود این شرکت در سال ۱۳۹۵ کدام است؟

(کتاب درسی)

- (۱) ۶۷ (۲) ۶۱ (۳) ۴۹ (۴) ۵۲



۲۶. دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8,5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

(سراسری قارج از کشور تهری - ۹۰)

- (۱) ۷,۲ (۲) ۹,۶ (۳) ۱۱,۴ (۴) ۱۲,۸

۲۷. نقطه $A(3,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

(سراسری قارج از کشور تهری - ۹۳)

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

۲۸. نقاط $A(3,3)$ ، $B(-1,1)$ و $O(0,0)$ سه رأس یک مستطیل هستند. مساحت این مستطیل چه قدر است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۹ (۴) ۱۲

۲۹. مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2,5)$ ، $B(3,0)$ و $C(0,2)$ کدام است؟

(سراسری قارج از کشور تهری - ۹۲)

- (۱) ۶ (۲) ۶,۵ (۳) ۷ (۴) ۷,۵

۳۰. دایره‌ای به شعاع ۱ بر خط $d: 3x - 4y = 0$ مماس است. اگر مرکز این دایره روی نیمساز ربع اول و سوم باشد، مختصات مرکز کدام است؟

- (۱) $(4,4)$ یا $(-4,-4)$ (۲) $(5,5)$ یا $(-5,-5)$
(۳) $(6,6)$ یا $(-6,-6)$ (۴) $(7,7)$ یا $(-7,-7)$

۳۱. نقطه A روی خط $2y = x$ قرار دارد. نقطه $B(9,-10)$ مفروض است. اگر $AB = 13$ ، آن‌گاه مختصات A کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(2,1)$ (۲) $(4,2)$ (۳) $(6,3)$ (۴) $(8,4)$

۳۲. دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

(کنکور سراسری تهری - ۸۹)

- (۱) ۹ و ۱۵ (۲) ۱۱ و ۱۵ (۳) ۱۱ و ۱۵ (۴) ۹ و ۱۱

۳۳. نقاط $A(0,0)$ ، $B(4\sqrt{3},4)$ دو رأس از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC هستند. اگر رأس C در ربع چهارم باشد، مختصاتش کدام است؟

(کتاب درسی)

- (۱) $(\sqrt{3}, -1)$ (۲) $(4\sqrt{3}, -4)$ (۳) $(8, -2\sqrt{3})$ (۴) $(4, -4\sqrt{3})$

۳۴. نقاط $(2,5)$ و $(-1,2)$ و $(0,0)$ سه رأس مثلث اند، مساحت مثلث کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{9}{2}$ (۳) ۷ (۴) ۹

۳۵. شعاع دایره گذرا بر سه نقطه $(0,0)$ ، $(2,1)$ و $(1,-2)$ ، برابر کدام است؟

(کنکور سراسری تهری - ۹۳)

- (۱) $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

روش تغییر متغیر برای حل معادله

معادلات بسیاری وجود دارند که مستقیماً معادله درجه ۲ نیستند، ولی با تغییر متغیر مناسب قابل تبدیل به معادله درجه دوم هستند. مثلاً برای حل معادله $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ که یک معادله دو مجذوری است، می‌توان به جای x^2 متغیر جدیدی مانند u قرار داد و معادله را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. به صورت مقابل:

سپس این معادله را به یکی از روش‌های حل معادله درجه دوم حل می‌کنیم:

با مقادیر به دست آمده برای u براحتی می‌توانیم ریشه‌های معادله را بیابیم:

$$x^2 = u \Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

$$(u-1)(u-4) = 0 \Rightarrow u = 1 \text{ یا } u = 4$$

$$\begin{cases} u = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \\ u = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

معادله ۴ ریشه دارد \Rightarrow

به این روش حل معادله روش تغییر متغیر می‌گویند.

مثال معادله‌های زیر را حل کنید.

الف $(x + \frac{1}{x})^2 + (x + \frac{1}{x}) = 6$

ب $(x^2 + x + 1)^2 + x^2 + x - 1 = 0$

پاسخ الف با در نظر گرفتن تغییر متغیر $x + \frac{1}{x} = u$ معادله را حل می‌کنیم:

$$x + \frac{1}{x} = u \Rightarrow u^2 + u - 6 = 0 \Rightarrow (u-2)(u+3) = 0$$

$$\begin{cases} u = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{یا} \\ u = -3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 = 5 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ \text{یا} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

پس معادله ۳ ریشه دارد.

ب با در نظر گرفتن تغییر متغیر $x^2 + x = u$ معادله را حل می‌کنیم:

$$(u+1)^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow u^2 + 2u + 1 + u - 1 = 0 \Rightarrow u^2 + 3u = 0$$

$$\Rightarrow u(u+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = 0 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -1 \\ \text{یا} \\ u = -3 \Rightarrow x^2 + x = -3 \Rightarrow x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 12 < 0 \end{cases}$$

پس معادله ۲ ریشه دارد.

پرش‌های چهارگزینده

۳۶. معادله $x^4 + 6x^2 - 7 = 0$ چند ریشه دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(کتاب درسی)

۴ (۴) $x^4 - 3x^2 = 0$

۳ (۳) $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$

۲ (۲) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

۱ (۱) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

۳۷. کدام معادله دارای چهار جواب متمایز است؟

(کتاب درسی)

۴ (۴) $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$

۳ (۳) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$

۲ (۲) $x^4 + 5x^2 = 0$

۱ (۱) $x^4 - 5x^2 = 0$

۳۸. کدام معادله دارای دقیقاً یک جواب است؟

۳۹. حاصل جمع ریشه‌های معادله $(x^2 - 6x)^2 + 13(x^2 - 6x) + 40 = 0$ کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۲ (۳)

۸ (۲)

۴ (۱)

۴۰. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{7})x - 2 = 0$ باشند، به طوری که $\alpha > \beta$ ، مقدار $\frac{\beta}{\alpha}$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) -۴

۴۱. مجموع ریشه‌های معادله $4(x-2)^4 - 5(x-2)^2 + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

کتاب درسی

۴۲. **مسئله** تعداد جواب‌های معادله $2x^5 + 5x^{10} - 3 = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) هیچ

۴۳. معادله $0 = 4 - 3(x^2 + x + 1)^2 + (x^2 + x + 1)^4$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- (۱) چهار ریشه (۲) دو ریشه
(۳) دو ریشه متفاوت و یک ریشه مضاعف (۴) دو ریشه مضاعف

۴۴. **رسواری** حدود a کدام باشد تا معادله $0 = 3 + 4(x^2 - a) + (x^2 - a)^2$ دارای دو جواب باشد، کدام است؟

- (۱) $1 < a < 3$ (۲) $a < 1$ (۳) $-3 < a < -1$ (۴) $a < -1$

۴۵. **رسواری** اگر $8 = \frac{3}{x} + 3x + \frac{1}{x^2} + x^2$ ، آن‌گاه حاصل $x + \frac{1}{x}$ کدام است؟

- (۱) ۵ یا ۲ (۲) -۲ یا ۵ (۳) ۲ یا -۵ (۴) -۲ یا -۵

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم

یادآوری فرم کلی معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) است. در این معادله Δ را به صورت $\Delta = b^2 - 4ac$ تعریف می‌کنیم. با توجه به علامت Δ داریم:

- معادله ۲ ریشه حقیقی متمایز دارد $\Rightarrow \Delta > 0$ اگر
- معادله ۱ ریشه مضاعف دارد (معادله ۱ ریشه حقیقی دارد) $\Rightarrow \Delta = 0$ اگر
- معادله ریشه حقیقی ندارد $\Rightarrow \Delta < 0$ اگر

در حالتی که $\Delta > 0$ است، ریشه‌های معادله درجه دوم از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند:

توجه اگر ضرایب a و c مختلف‌العلامت باشند، همواره $\Delta > 0$ و معادله ۲ ریشه حقیقی متمایز دارد.

و در حالتی که $\Delta = 0$ است، ریشه مضاعف معادله برابر است با:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله به صورت زیر است:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \alpha \cdot \beta = P = \frac{c}{a}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x + 1 = 0$ باشند، مقدار عبارات زیر را بیابید.

الف) $\alpha^2 + \beta^2$ ب) $\alpha^3 + \beta^3$ ج) $|\alpha - \beta|$ د) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

پاسخ چون α و β ریشه‌های معادله‌اند، داریم:

برای محاسبه عبارات داده شده باید هر عبارت را بر حسب S و P بنویسیم. به صورت زیر:

الف) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = (-3)^2 - 2(1) = 7$

ب) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS = (-3)^3 - 3(1)(-3) = -18$

ع $A = |\alpha - \beta|^2$ طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow A^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\beta$

$$\Rightarrow A^2 = S^2 - 4P = (-3)^2 - 4(1) = 5 \Rightarrow A = |\alpha - \beta| = \sqrt{5}$$

ر $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{-3}{1} = -3$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت‌های $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ و $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ را بیابید.

پاسخ با توجه به این که α و β ریشه‌های معادله‌اند، داریم:

$$\alpha + \beta = S = -\frac{-5}{1} = 5, \alpha\beta = P = \frac{1}{1} = 1$$

الف $A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow A^2 = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = S + 2\sqrt{P} \Rightarrow A^2 = 5 + 2\sqrt{1} = 7 \Rightarrow A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{7}$

ب $A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم $\rightarrow A^2 = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}}$

$$\Rightarrow A^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} + 2 = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{S^2 - 2P}{P} + 2 \Rightarrow A^2 = \frac{25 - 2}{1} + 2 = 25 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = 5$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 5x - 3 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\beta^2(\alpha - 3)$ را بیابید.

پاسخ چون α ریشه معادله است، پس در خود معادله صدق می‌کند. یعنی:

$$\alpha^2 + 5\alpha - 3 = 0 \Rightarrow 5\alpha - 3 = -\alpha^2$$

$$\Rightarrow \beta^2(\alpha - 3) = \beta^2(-\alpha^2) = -\beta^2\alpha^2 = -(\beta\alpha)^2 = -(P)^2 = \frac{c}{a} = -3 \Rightarrow -(-3)^2 = -9$$

پرسش‌های چهارگزینگی

۴۶. اگر α و β جواب‌های معادله $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ کدام است؟

(۱) ۲۷ (۲) -۲۷ (۳) ۸ (۴) -۸

۴۷. ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + m = 0$ عددی طبیعی هستند. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴) ۹

۴۸. در معادله $2x^2 - 16x + C = 0$ ، یکی از ریشه‌ها از دو برابر دیگری یک واحد کم‌تر است. مقدار C کدام است؟ (کتاب درسی)

(۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

۴۹. در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است، مجموع دو ریشه مثبت کدام است؟

(۱) ۳٫۵ (۲) ۴ (۳) ۴٫۵ (۴) ۵

۵۰. به ازای کدام مقدار K در معادله درجه دوم $2x^2 - x + K = 0$ بین ریشه‌ها رابطه $x_1 + 2x_2 = 3$ برقرار است؟

(۱) -۱۲ (۲) -۱۰ (۳) ۸ (۴) ۶

۵۱. α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 6x - 1 = 0$ هستند. حاصل $\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1}$ کدام است؟

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $-\frac{3}{2}$

۵۲. **مسئله** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ باشد، مقدار $\frac{\alpha^2}{\beta+1} + \frac{\beta^2}{\alpha+1}$ کدام است؟
- (۱) $\frac{137}{5}$ (۲) $\frac{167}{5}$ (۳) $\frac{113}{7}$ (۴) $\frac{152}{7}$
۵۳. **رسواری** α و β ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 - Kx + K + 1 = 0$ هستند. اگر $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 12$ آن‌گاه مقدار K کدام است؟
- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) ۴ (۴) -۴
۵۴. **مسئله** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 4 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2 - \beta$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷
۵۵. معادله $x^2 - 5x - 7 = 0$ با ریشه‌های α و β مفروض است. حاصل $\frac{\gamma}{\beta} - \beta$ کدام است؟
- (۱) ۵ (۲) -۵ (۳) $-\frac{\gamma}{5}$ (۴) $-\frac{5}{\gamma}$
۵۶. **رسواری** اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x - 4 = 0$ باشند، مقدار $\alpha^2(5\beta + 4)$ کدام است؟
- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۹ (۴) ۸
۵۷. به ازای کدام مقدار m ، عدد $\sqrt{2}$ واسطه هندسی بین ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - 5x + m^2 - 3 = 0$ است؟
- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۳ (۴) -۳
۵۸. **مسئله** به ازای کدام مقدار m ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ معکوس یکدیگرند؟
- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

(سنوش ریاضی - ۹۴)

(سراسری فارغ از کشور تهری - ۹۰)

نوشتن معادله درجه ۲ با داشتن S و P

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دومی باشند در این صورت با تعیین مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ می‌توانیم معادله درجه دوم را به صورت مقابل بنویسیم:

$$x^2 - sx + p = 0$$

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ و $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ باشد.

پاسخ

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{2+\sqrt{3}}{2} = 2 \\ P &= \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + \frac{1}{4} = 0$$

تشکیل معادله درجه دوم جدید

اگر معادله درجه دومی داده شود و معادله‌ای خواسته شده باشد که ریشه‌هایش رابطه‌ای با ریشه‌های معادله اول داشته باشد، با تشکیل S و P معادله جدید برحسب S و P معادله اولیه، معادله درجه دوم خواسته شده را از فرمول $x^2 - Sx + P = 0$ می‌نویسیم.

مثال معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش ۳ برابر ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + 1 = 0$ باشد و α' و β' ریشه‌های معادله خواسته شده در این صورت داریم:

$$\alpha' = 3\alpha \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = \frac{\alpha + \beta = S = -4}{3(-4)} = -12 \\ P' = \alpha' \cdot \beta' = (3\alpha)(3\beta) = 9(\alpha\beta) = \frac{\alpha\beta = P = 1}{9(1)} = 9 \end{cases}$$

با توجه به این که $S' = -12$ و $P' = 9$ معادله جدید به صورت $x^2 + 12x + 9 = 0$ است.

مثال معادله درجه دوم بنویسید که ریشه‌هایش مجذور ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ باشد.

پاسخ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - x - 3 = 0$ و α' و β' ریشه‌های معادله خواسته شده باشد، داریم:

$$\alpha' = \alpha^2 \Rightarrow \begin{cases} S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P = \frac{S^2}{P} - 2 = \frac{1}{-3} - 2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ P' = \alpha'\beta' = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = (-3)^2 = 9 \end{cases}$$

با داشتن $S' = \frac{5}{3}$ و $P' = 9$ معادله درجه دوم جدید به صورت $x^2 - \frac{5}{3}x + 9 = 0$ است.

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشد، معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌هایش $\left\{\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}\right\}$ باشد.

پاسخ

$$S' = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta = S = \frac{3}{2} \quad \frac{9}{4} + 4}{\alpha\beta = P = -2} = \frac{\frac{9}{4} + 4}{-2} = -\frac{25}{8}$$

$$P' = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

با داشتن $S' = -\frac{25}{8}$ و $P' = 1$ معادله درجه دوم جدید به صورت $x^2 + \frac{25}{8}x + 1 = 0$ است.

مثال معادله درجه دومی با ضرایب صحیح بنویسید که یکی از ریشه‌های آن $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ باشد.

پاسخ

با توجه به ریشه معادله می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم:

$$x = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = |1+\sqrt{3}| = 1+\sqrt{3} \Rightarrow x-1 = \sqrt{3} \Rightarrow (x-1)^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0$$

پرسش‌های چهارگزینگی

۵۹. **مسئله** مستطیلی به محیط ۱۸ و مساحت ۷ داریم. طول ضلع کوچک مستطیل کدام است؟

$$(1) \frac{9-\sqrt{43}}{2} \quad (2) \frac{8-\sqrt{53}}{2} \quad (3) \frac{9-\sqrt{53}}{2} \quad (4) \frac{8-\sqrt{53}}{2}$$

۶۰. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش مربع ریشه‌های معادله $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ باشند، کدام است؟

$$(1) x^2 + 10x - 16 = 0 \quad (2) x^2 - 10x + 16 = 0 \quad (3) x^2 - 10x - 16 = 0 \quad (4) x^2 + 10x + 16 = 0$$

۶۱. **مسئله** اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 3x - 2 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله زیر $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ است؟

$$(1) 2x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (2) x^2 - 8x + 1 = 0 \quad (3) 4x^2 - x - 1 = 0 \quad (4) x^2 - 3x - 1 = 0$$

۶۲. اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{ \frac{1}{\alpha} + 1 \text{ و } \frac{1}{\beta} + 1 \right\}$ است؟

(سراسری ریاضی - ۹۲)

$$(1) 4x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (2) 4x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (3) 4x^2 - 5x - 1 = 0 \quad (4) 4x^2 - 3x - 1 = 0$$

۶۳. **مسئله** ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کم‌تر است؟ (سراسری تجربی - ۹۴)

$$(1) x^2 - 3x + 1 = 0 \quad (2) x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (3) x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (4) x^2 + 5x + 2 = 0$$

۶۴. **مسئله** معادله درجه دومی که ریشه‌های آن $1 + 2\sqrt{3}$ و $-1 + 2\sqrt{3}$ می‌باشد، کدام است؟

(کتاب درسی)

$$(1) x^2 + 3\sqrt{3}x - 1 = 0 \quad (2) x^2 + 6\sqrt{3}x + 2 = 0 \quad (3) x^2 - 2\sqrt{3}x - 9 = 0 \quad (4) x^2 - 4\sqrt{3}x + 11 = 0$$

۶۵. ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ ، یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیش تر است b کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۶۶. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار K مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - Kx + 25 = 0$ به صورت

است $\left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$ ؟

(سراسری ریاضی - ۹۰)

- (۱) ۲۷ (۲) ۲۸ (۳) ۲۹ (۴) ۳۱

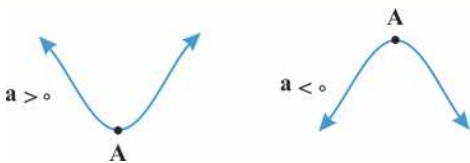
۶۷. ریشه‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ دو واحد بیش تر از ریشه‌های معادله $x^2 - 9x - 5 = 0$ است. مقدار $\frac{b}{c}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{17}{13}$ (۲) $\frac{13}{17}$ (۳) $-\frac{17}{13}$ (۴) $-\frac{13}{17}$

۶۸. جواب‌های کدام معادله، معکوس ریشه‌های معادله $3x^2 - 5x - 4 = 0$ است؟

- (۱) $4x^2 - x - 3 = 0$ (۲) $4x^2 - 5x - 3 = 0$ (۳) $4x^2 + x - 3 = 0$ (۴) $4x^2 + 5x - 3 = 0$

ماکزیمم یا مینیمم سهمی



نمودار تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ یک سهمی است که با توجه به علامت a به یکی از دو صورت مقابل است:

در شکل‌های فوق نقطه A را رأس سهمی می‌گویند. می‌دانیم طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ است و داریم:

- اگر $a > 0$ باشد همان‌طور که می‌بینیم سهمی رو به بالا است و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ کم‌ترین مقدار (مینیمم) خود را اختیار می‌کند.
- اگر $a < 0$ باشد همان‌طور که می‌بینیم سهمی رو به پائین است و به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ بیش‌ترین مقدار (ماکزیمم) خود را اختیار می‌کند.

مثال کم‌ترین مقدار (مینیمم) تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را بیابید.

پاسخ
 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2 \Rightarrow f(2) = 4 - 8 + 3 = -1$

نکته مختصات رأس سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت $A\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.

سهمی دارای یک خط محور تقارن به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ است.

مثال نمودار تابع به معادله $f(x) = mx^2 + 4x + m$ ماکزیممی به عرض ۳- دارد. $f(-1)$ کدام است؟

پاسخ

$$y_A = -3 \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = -3 \Rightarrow \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -3$$

$$\Rightarrow \frac{-(16 - 4m^2)}{4m} = -3 \Rightarrow 4m^2 - 16 = -12m \Rightarrow 4m^2 + 12m - 16 = 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)(m+4) = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} m = -4 & \text{قابل قبول} \\ m = 1 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$ برای این‌که تابع ماکزیمم داشته باشد باید ضریب x^2 منفی باشد \rightarrow

$$\Rightarrow f(x) = -4x^2 + 4x - 4 \Rightarrow f(-1) = -4 - 4 - 4 = -12$$

مثال خط به معادله $y = -1$ محور تقارن تابع با ضابطه $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند، مقدار a را بیابید.