

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



برگی از درخت المپیاد فیزیک

المپیادهای فیزیک در ایران

(مرحله دوم)

از دوره ۱۲ تا کنون

مؤلف: علیرضا طهماسب زاده



انتشارات خورشید

فهرست مطالب

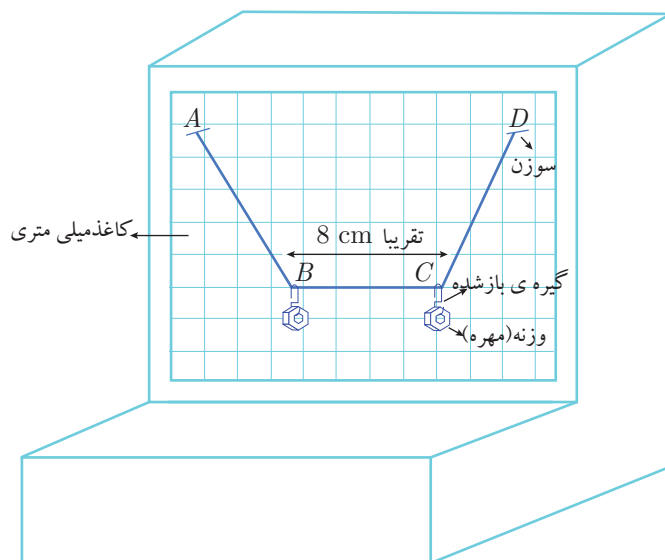
۱	فصل ۱ (دوره‌ی دوازدهم)
۲	آزمون عملی
۴	آزمون نظری
۹	پاسخ آزمون نظری
۱۶	تحلیل آزمون
۱۷	فصل ۲ (دوره‌ی سیزدهم)
۱۸	آزمون عملی
۱۹	آزمون نظری
۲۳	پاسخ آزمون نظری
۲۹	تحلیل آزمون
۳۱	فصل ۳ (دوره‌ی چهاردهم)
۳۲	آزمون نظری
۳۷	پاسخ آزمون نظری
۴۷	تحلیل آزمون
۴۹	فصل ۴ (دوره‌ی پانزدهم)
۵۰	آزمون عملی
۵۱	آزمون نظری
۵۷	پاسخ آزمون نظری
۶۵	تحلیل آزمون
۶۷	فصل ۵ (دوره‌ی شانزدهم)
۶۸	آزمون عملی
۶۹	آزمون نظری
۷۴	پاسخ آزمون نظری
۸۳	تحلیل آزمون
۸۵	فصل ۶ (دوره‌ی هفدهم)
۸۶	آزمون عملی
۸۷	آزمون نظری
۹۳	پاسخ آزمون نظری
۱۰۴	تحلیل آزمون
۱۰۵	فصل ۷ (دوره‌ی هجدهم)
۱۰۶	آزمون عملی

۱۰۷	آزمون نظری
۱۱۲	پاسخ آزمون نظری
۱۲۳	تحلیل آزمون
۱۲۵	فصل ۸ (دوره‌ی نوزدهم)
۱۲۶	آزمون عملی
۱۲۷	آزمون نظری
۱۳۲	پاسخ آزمون نظری
۱۴۴	تحلیل آزمون
۱۴۵	فصل ۹ (دوره‌ی بیستم)
۱۴۶	آزمون عملی
۱۴۷	آزمون نظری
۱۵۲	پاسخ آزمون نظری
۱۶۷	تحلیل آزمون
۱۶۹	فصل ۱۰ (دوره‌ی بیست و یکم)
۱۷۰	آزمون عملی
۱۷۱	آزمون نظری
۱۷۸	پاسخ آزمون نظری
۱۹۲	تحلیل آزمون
۱۹۳	فصل ۱۱ (دوره‌ی بیست و دوم)
۱۹۴	آزمون عملی
۱۹۵	آزمون نظری
۲۰۰	پاسخ آزمون نظری
۲۱۹	تحلیل آزمون
۲۱۱	فصل ۱۲ (دوره‌ی دوازده)
۲۱۲	آزمون عملی
۲۱۳	آزمون نظری
۲۱۸	پاسخ آزمون نظری
۲۳۱	تحلیل آزمون

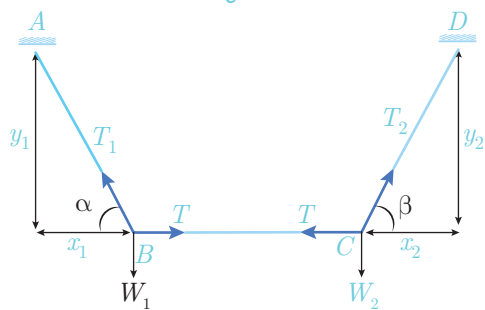
دورهی دوازدهم

آزمون عملی

به کمک مجموعه‌ای از ابزارهای ساده، می‌توان ترازویی مطابق شکل (۱) ساخت و به وسیله آن نسبت جرم مهره‌های آویخته شده را اندازه گرفت.



شکل (۱)



شکل (۲)

در شرایطی که مطابق شکل (۲) نخ در فاصله BC در راستای افقی قرار گرفته و تعادل مجموعه برقرار است، روابط زیر را می‌توان نوشت.

$$T_1 \cos \alpha = T = T_2 \cos \beta$$

$$T_1 \sin \alpha = m_1 g, \quad T_2 \sin \beta = m_2 g$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{y_2}$$

وسایل آزمایش:

پایه ی یونولیتی، کاغذ میلی متری، مقداری نخ، چهار سوزن، چهار گیره ی کاغذ، شش پونز، یک مهره ی چهارگوش و یک مهره ی شش گوش.

شرح آزمایش:

ابتدا کاغذ میلی متری را به کمک یکی از سوزن ها از یکی از گوشه های بالای آن به پایه ی یونولیتی متصل کنید.

یکی از مهره ها را به کمک نخ از این سوزن آویزان کنید. با این ابزار، به کمک پونز، کاغذ میلی متری را طوری روی یونولیت ثابت کنید که خط های افقی کاغذ موازی سطح افق باشد.

روش خود را برای انجام این کار توضیح دهید.

حال تکه نخ به طول تقریبی 20cm بردارید. دو گیره ی کاغذ را چنان که در شکل (۱) می بینید باز کنید. نخ را از دو نقطه ی میانی (نقاط B و C) به گیره ها گره بزنید. هر سر نخ را به یک سوزن گره بزنید. از دو سوزن به عنوان تکیه گاه های A و D استفاده کنید. یکی از آنها را در یک گوشه ی کاغذ میلی متری (صفحه ی یونولیتی) در مکانی مناسب فرو کنید. این تکیه گاه (A) را تا آخر آزمایش ثابت نگه دارید. حال مکان تکیه گاه D را چنان تعیین کنید که نخ BC افقی قرار گیرد. در این حال سر سوزن دیگر (تکیه گاه D) را نیز در صفحه ی یونولیتی فرو کنید. توجه کنید که برای برقراری تعادل و افقی شدن BC ، برای مکان D بیش از یک جواب پیدا می شود.

نکته ۱: هنگام فرو کردن سوزن دوم (تکیه گاه D)، مراقب باشید BC افقی مانده باشد.

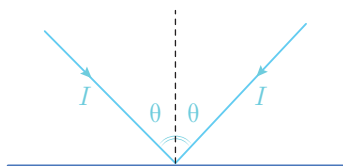
نکته ۲: نیازی نیست A و D روی یک خط افقی قرار گیرند.

مقادیر x_1 ، x_2 ، y_1 و y_2 را اندازه گیری کنید و در جدول (در پاسخ نامه) ثبت کنید. این آزمایش را سه بار دیگر (برای سه نقطه ی متفاوت D) تکرار کنید و خانه های خالی پاسخ نامه را پر کنید. m_1 جرم مهره

شش گوش، و m_2 جرم مهره چهارگوش است. جرم مهره چهارگوش 3gr است.



۱ انرژی نورانی‌ای که در واحد زمان به واحد سطح عمود بر جهت تابش می‌تابد، شدت نور نامیده می‌شود. در اثر بازتابش نور از آینه، فشاری بر آن وارد می‌شود که فشار تابش نام دارد. اگر مطابق شکل پرتو نوری به شدت I ، با زاویه تابش θ ، بر سطح آینه بتابد، فشاری معادل با $\frac{2I}{c} \cos^2 \theta$ بر آینه وارد می‌شود. در این رابطه c سرعت نور در خلأ و برابر با $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است.



یک بادبان خورشیدی یک آینه‌ی بسیار سبک است. نیروی محرک سفینه‌ی بادبانی، ناشی از تابش نور خورشید از بادبان آن است. توان خورشید (انرژی تابیده شده از خورشید بر واحد زمان، $L = 4 \times 10^{26} \text{ W}$) است.

الف) فرض کنید یک سفینه‌ی بادبانی در فاصله‌ی $2 \times 10^{11} \text{ m}$ از خورشید است. اگر نور خورشید عمود بر سطح بادبان بتابد، چه نیرویی بر یک مترمربع از بادبان وارد می‌شود؟

ب) در این فاصله، بادبان چه مساحتی داشته باشد تا فشار تابش، نیروی گرانشی خورشید را خنثی کند؟ جرم واحد سطح بادبان 0.5 g/m^2 ، جرم سفینه 20 kg ، جرم خورشید $M_s = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ و ثابت جهانی گرانشی $G = 7 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ است.

ج) اگر فاصله‌ی سفینه از خورشید دو برابر شود، مساحت بادبان چه مقدار تغییر کند، تا شرایط قسمت (ب) برقرار بماند؟

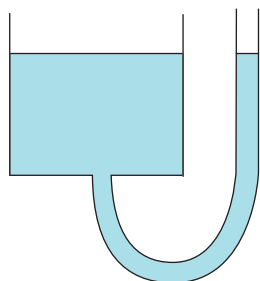
د) فرض کنید وضعیت بادبان طوری تنظیم شود که در تمام مدت حرکت، نور خورشید عمود بر آن بتابد. اگر در قسمت (ب) سرعت اولیه‌ی سفینه V_0 باشد، مسیر حرکت آن چگونه است؟

«۱۰ نمره»

۲ یک تار نوری مستقیم به طول $l = 80 \text{ m}$ ، از شیشه‌ای با ضریب شکست $n = 1.36$ ساخته شده است. در یک انتهای تار، چشمه‌ی نقطه‌ای S روی محور آن قرار دارد و علائم نوری را به فاصله زمانی Δt از یکدیگر می‌فرستد. هنگام ارسال هر علامت نوری، چشمه‌ی S در بازه‌ی زمانی بسیار کمتر از یک نانوثانیه (10^{-9} s) روشن است و سپس خاموش می‌شود. به دلیل اختلاف زمان رسیدن پرتوهای که با زاویه‌های مختلف وارد تار می‌شوند، علامت نوری، پهن می‌شود، یعنی هنگام دریافت علامت از طرف

دیگر تا، عرض زمانی بیشتری نسبت به هنگام ارسال آن خواهد داشت. معین کنید بازه ی زمانی ارسال علائم، Δt ، حداقل چقدر باشد، تا گیرنده بتواند علائم دریافت شده را به خوبی از هم تفکیک کند؟

«۶ نمره»

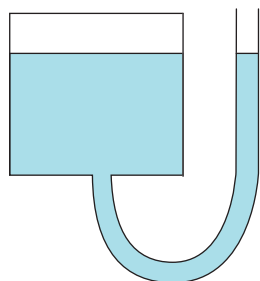


شکل (۱)

۳ یک لوله ی U شکل به قطر d ، مطابق شکل

(الف)

اکنون فرض کنید پیش از ریختن آب در لوله، بالای ظرف استوانه ای را مطابق شکل بسته ایم. با ریختن آب در لوله، سطح جیوه در ظرف، به اندازه ی x بالا می آید که x از L' بسیار کوچک تر است، یعنی $\frac{x}{L'} \ll 1$.



شکل (۲)

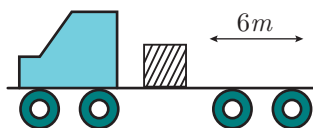
(ب) برای $\epsilon \ll 1$ داریم:

$$\frac{1}{1 - \epsilon} \approx 1 + \epsilon$$

با استفاده از این تقریب، فشار هوای بالای جیوه در ظرف را بر حسب x به دست آورید.

(ج) ارتفاع آب در لوله را به دست آورید.

«۱۲ نمره»



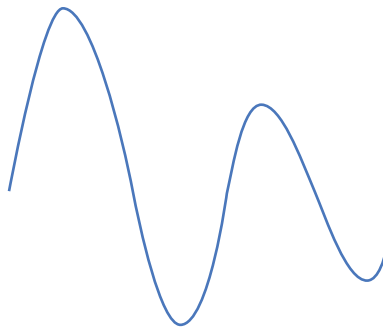
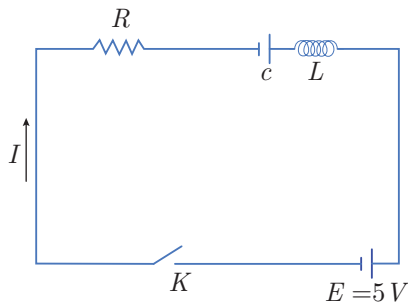
۴ مطابق شکل جعبه ای روی کف یک تریلی

(الف)

ب) اگر تریلی به مدت 2s با شتاب تندکننده 4m/s^2 حرکت کند، و پس از آن سرعت تریلی ثابت بماند، جعبه با چه سرعتی نسبت به زمین، تریلی را ترک می‌کند؟

«۸ نمره»

۵ مدارى مطابق شکل از یک مقاومت R ،



الف)

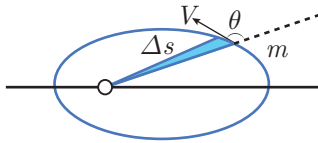
ب) با استفاده از اطلاعات نمودار در لحظه t_2 ، مقدار C را محاسبه کنید.

ج) با استفاده از اطلاعات نمودار در لحظه t_1 ، مقدار R را محاسبه کنید.

د) با استفاده از اطلاعات نمودار، اختلاف پتانسیل دو سر خازن را در لحظه t_3 حساب کنید.

«۱۲ نمره»

۶ یک ماهواره به جرم m در یک مدار بیضی



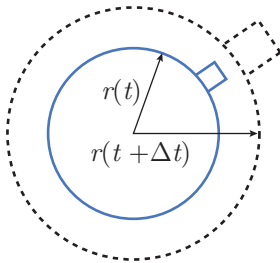
(الف)

θ می‌سازد. آهنگ مساحت جاروب شده توسط شعاع حامل، یعنی $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ را بر حسب r ، V و θ به دست آورید.

(ب) کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین شعاع حامل را به ترتیب با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم. با توجه به قانون دوم کپلر (مقدار ثابت $= \frac{\Delta S}{\Delta t}$)، سرعت ماهواره در این دو نقطه از مسیرش یعنی V_1 و V_2 را بر حسب r_1 ، r_2 ، M_e و G به دست آورید.

«۱۰ نمره»

۷ فرض کنید جهان از ماده‌ای با چگالی



(الف)

فقط تابع زمان است و به شعاع اولیه‌ی کره بستگی ندارد. این نسبت را پارامتر هابل (H) می‌نامند.

(ب) جرم کوچک m را بر سطح این کره در نظر بگیرید. این جرم، مطابق شکل، همراه ماده‌ی درون کره حرکت می‌کند. فرض کنید حرکت این جرم نسبت به مرکز کره، شعاعی است. همچنین فرض کنید جرم m فقط تحت تأثیر نیروی گرانشی کره (با جرم ثابت M) است. شتاب این جرم را بر حسب r و M (ثابت جهانی گرانش) بنویسید.

ج) انرژی پتانسیل گرانشی جرم m از رابطه $U = -G \frac{Mm}{r}$ به دست می‌آید. انرژی جنبشی و انرژی کل جرم m را حساب کنید.

د) انرژی کل در چه رابطه‌ای صدق کند تا جرم m بتواند تا بی‌نهایت (نسبت به مرکز کره) برود، این شرط را بر حسب چگالی و پارامتر هابل (هر دو در زمان t) بنویسید.

«۱۲ نمره»

الف) برای به دست آوردن شدت نور خورشید در فاصله r می دانیم کل انرژی خورشید بر واحد زمان به سطح کره ای به شعاع r می رسد (برای به دست آوردن شدت نور در هر فاصله ای این کره مجازی به شعاع r را می توان در نظر گرفت).

$$I = \frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4 \times 10^{26}}{4\pi \times (2 \times 10^{11})^2} = 7.96 \times 10^2 \text{ W/m}^2$$

این نور عمود بر بادبان است پس فشار ناشی $P = \frac{2I}{c} = 5.3 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$ نیرو $F = PA$ و $A = 1 \text{ m}^2$ پس

$$F = 5.3 \times 10^{-6} \text{ N}$$

ب) اگر مساحت سطح بادبان A باشد جرم کل سفینه $M = 20 + 0.5 \times 10^{-3} A$ است. پس

$$\begin{aligned} F_G &= \frac{GM_s M}{r^2} = \frac{7 \times 10^{-11} \times 2 \times 10^{30} \times (20 + 5 \times 10^{-4} A)}{(2 \times 10^{11})^2} \\ &= 0.07 + 1.75 \times 10^{-6} A \\ F_P &= PA = 5.3 \times 10^{-6} A \\ F_G &= F_P \end{aligned}$$

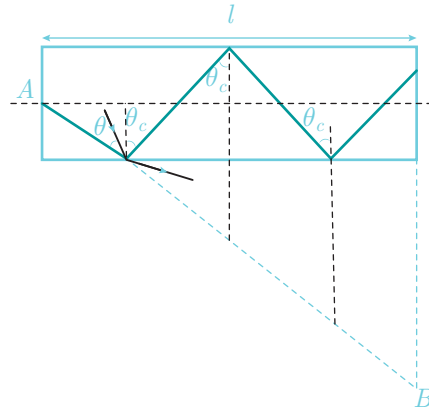
در نتیجه

$$A = 1.97 \times 10^4 \text{ m}^2$$

ج) توجه کنیم $F_G = \frac{GM_s M}{r^2}$ و $F_P = \frac{LA}{2\pi r^2 c}$ پس r^2 از دو طرف حذف می شود یعنی به فاصله مرتبط نیست و با A به دست آمده در قسمت (ب) همواره این اتفاق می افتد.

د) چون نیرویی بر سفینه وارد نمی شود پس با سرعت ثابت v_0 به حرکت در امتداد اولیه ادامه می دهد.

۲) پرتویی که در جهت محور حرکت می کند کمترین زمان را طی می کند $t_{\min} = \frac{nl}{c}$ (توجه کنیم سرعت نور داخل تار $\frac{c}{n}$ است). حال باید برای یافتن بیشترین زمان، پرتویی که بیشترین مسیر را طی می کند پیدا کنیم.



پرتوها با هر زاویه‌ای می‌توانند وارد شوند (چون از محیط با n کمتر آمده‌اند) اما برای این‌که داخل تار بمانند و بازتاب کلی شوند باید از θ_c کمتر نباشند که $\sin \theta_c = \frac{1}{n}$ پرتویی که زاویه‌اش از θ_c کمتر باشد می‌شکند و خارج می‌شود. همان پرتوهایی که با زاویه θ_c هستند بیشترین طول مسیر را طی می‌کنند. برای طول مسیر آنها می‌توان گفت اگر مقدار Δx در طول رفته باشند $\Delta l = \frac{\Delta x}{\sin \theta_c}$ پس $S = \frac{l}{\sin \theta_c}$ طول مسیر حرکت است). این را از شکل هم می‌توانستیم بفهمیم چون در مثلث، $S = AB$ و $AB = \frac{l}{\sin \theta_c}$ پس

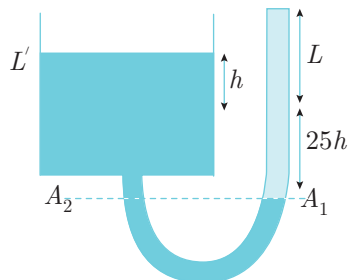
$$t_{\max} = \frac{S}{\left(\frac{c}{n}\right)} = \frac{nl}{c \sin \theta_c} = \frac{n^2 l}{c}$$

پس به اندازه‌ی $t_{\max} - t_{\min}$ پهن می‌شود یعنی اختلاف زمانی باید حداقل برابر این پهن شدگی باشد:

$$\Delta t = t_{\max} - t_{\min} = \frac{80 \times 1.36}{3 \times 10^8} (1.36 - 1)$$

در نتیجه

$$\Delta t = 130 \times 10^{-9} \text{ s}$$



۳ الف) فرض کنیم وقتی کل لوله با آب پر شد، سطح جیوه در ظرف به اندازه‌ی h بالا بیاید، به دلیل یکسان بودن حجم خارج شده از لوله و حجم وارد شده به ظرف، چون مساحت ظرف ۲۵ برابر لوله است پس در لوله به اندازه $25h$ جیوه پایین آمده یعنی ارتفاع آب برابر است با:

$$L + 25h = 65.2 + 25h$$

می‌دانیم فشار یک مایع در ارتفاع‌های یکسان، با هم برابر است یعنی

$$P_{A_1} = P_{A_2}$$

$$P_{A_1} = \rho_w g(65.2 + 25h) + P_0, \quad P_{A_2} = \rho_{Hg} g(25h + h) + P_0$$

$$\Rightarrow (65.2 + 25h) \times 1 = (26h) \times 13.5 \Rightarrow h = 0.2 \text{ cm}$$

$$H_{\text{آب}} = L + 25h$$

در نتیجه

$$H_{\text{آب}} = 70.2 \text{ cm}$$

ب) می‌دانیم $P_0 V_0 = P' V'$ پس

$$P_0 A L' = P' A (L' - x)$$

$$\Rightarrow P' = \frac{P_0 L'}{L' - x} = P_0 \left(1 + \frac{x}{L'} \right)$$

در نتیجه

$$P' = 75 \left(1 + \frac{x}{20} \right) \text{ cmHg} \quad (x \text{ بر حسب cm})$$

ج) دوباره معادله‌ی $P_{A_1} = P_{A_2}$ را می‌نویسیم:

$$P_{A_1} = P_0 + \rho_w g(L + 25h), \quad P_{A_2} = P' + \rho_{Hg} g(h + 25h)$$

در این قسمت $x = h$ است پس:

$$P_0 + \rho_w g(65.2 + 25h) = P_0 + \frac{P_0 h}{20} + \rho_{Hg} g(h + 25h)$$

توجه کنیم $P_0 = 75 \text{ cmHg}$ بر حسب واحد سانتی‌متر جیوه است پس P_0 را تبدیل می‌کنیم

$$P_0 = 75 \text{ cmHg} = 75 \text{ cm} \times 13.5 \text{ g/cm}^3 \times g = 1012g \times \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$$

$$1 \times g \times (65.2 + 25h) = \frac{1012gh}{20} + 13.5g(26h)$$

که g از طرفین حذف می‌شود، دقت کنیم اگر g حذف نمی‌شد در جایگذاری باید آن را بر حسب cm/s^2 در می‌آوردیم و قرار می‌دادیم

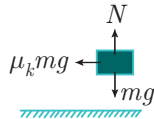
$$h = 0.17 \text{ cm}$$

$$H_{\text{آب}} = L + 25h$$

در نتیجه

$$H_{\text{آب}} = 69.45 \text{ cm}$$

۲ الف



$$f_{s \max} = \mu_s mg$$

$$f_{s \max} = ma_{\max} \Rightarrow a_{\max} = 0.3 \times 10$$

$$a_{\max} = 3 \text{ m/s}^2$$

ب) چون شتاب تندشونده از a_{\max} بیشتر است پس جعبه می لغزد. یعنی جعبه با شتاب $a_m = 1.5 \text{ m/s}^2$ می رود و ماشین با شتاب $a_M = 4 \text{ m/s}^2$. پس به طور نسبی جرم با شتاب $a_{\text{rel}} = -2.5 \text{ m/s}^2$ عقب می رود. سرعت اولیه اش هم به طور نسبی صفر بوده است. پس

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_{\text{rel}} t^2 = \frac{1}{2} \times (-2.5) \times (2)^2 = -5 \text{ m}$$

یعنی هنوز 1m از انتها فاصله دارد و سرعتش هم نسبت به تریلی

$$v_{\text{rel}} = v_{0 \text{rel}} + a_{\text{rel}} t = 0 - 2.5 \times 2 = -5 \text{ m/s}$$

چون سرعت جسم منفی است هنوز اصطکاک $\mu_k mg$ وارد می شود و چون تریلی شتاب ندارد این شتاب نسبت به زمین هم هست. سرعت تریلی در این لحظه

$$V = 3 + 4 \times 2 = 8 \text{ m/s}$$

است. سرعت جسم در لحظه ترک:

$$v_f^2 - v_{\text{rel}}^2 = 2 \times (-1.5) \times 1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{22}$$

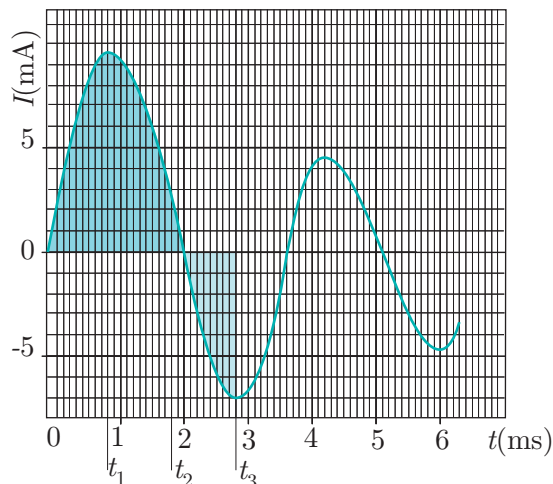
$$\Rightarrow V_{\text{تری}} = V - v_f = 11 \text{ m/s} - \sqrt{22} \text{ m/s}$$

در نتیجه

$$V_{\text{تری}} = 6.3 \text{ m/s}$$

۵ الف) در $I = 0, t = 0$ و بار خازن صفر است پس:

$$E = L \frac{dI}{dt}$$



از روی نمودار داریم: $\frac{dI}{dt} = 20$ در نتیجه

$$L = 0.25H$$

ب) در t_2 , $I = 0$:

$$E = \frac{q}{C} + 0.25 \frac{dI}{dt}(t = t_2)$$

که q را از مساحت زیر نمودار $I - t$ می‌توان به‌دست آورد (چون $dq = Idt$) برای این مساحت داریم:

$$102 \text{ خانه} \times 0.1\text{ms} \times 1\text{mA} = 10.2 \times 10^{-6} \text{As}$$

و شیب نمودار در این لحظه $\frac{dI}{dt}(t = t_2) = -15 \text{A/s}$ است پس:

$$5 = \frac{10.2 \times 10^{-6}}{C} - 0.25 \times 15$$

در نتیجه

$$C = 1.17\mu\text{F}$$

ج) در t_1 , $\frac{dI}{dt} = 0$ است و بار خازن از مساحت زیر نمودار به‌دست می‌آید (که ۵۱ خانه است) و I هم ۹.۵mA است:

$$E = \frac{q}{C} + IR$$

$$5 = \frac{5.1 \times 10^{-6}}{1.17 \times 10^{-6}} + 9.5 \times 10^{-3} \times R$$

$$R = 67.5\Omega$$

د) در t_3 ، $\frac{dI}{dt} = 0$ و $I = -7\text{mA}$ است پس

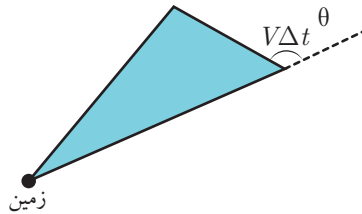
$$E = IR + V_C$$

$$\Rightarrow V_C = 5 + 7 \times 67.5 \times 10^{-3}$$

در نتیجه

$$V_C = 5.47\text{V}$$

۶ الف) می‌دانیم مساحت یک مثلث برابر است با:



$$\Delta S = \frac{1}{2} r V \Delta t \sin(\pi - \theta)$$

$$\Delta S = \frac{1}{2} r V \Delta t \sin \theta$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r V \sin \theta}{2}$$

ب) طبق قسمت الف)، چون در شعاع‌های مینیمم و ماکزیمم، شعاع بر سرعت عمود است $\sin \theta = 1$ و

$$\frac{r_1 V_1}{2} = \frac{r_2 V_2}{2} \Rightarrow V_2 = \frac{r_1}{r_2} V_1$$

از رابطه‌ی بقای انرژی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{-GM_e m}{r_1} + \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{-GM_e m}{r_2} + \frac{1}{2} m V_2^2$$

$$\Rightarrow V_1^2 - V_2^2 = 2GM_e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\Rightarrow V_1^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) = 2GM_e \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{2GM_e r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}, \quad V_2 = \sqrt{\frac{2GM_e r_2}{r_1(r_1 + r_2)}}$$

۷ الف) چون جرم کره ثابت است و $M = \rho V$ پس

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4}{3} \pi \left(3r^2 \rho \frac{dr}{dt} + r^3 \frac{d\rho}{dt} \right)$$

چون جرم کره ثابت است $\frac{dM}{dt} = 0$ پس

$$\frac{\left(\frac{dr}{dt}\right)}{r} = -\frac{1}{3} \frac{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}{\rho}$$

در نتیجه

$$H = -\frac{1}{3} \frac{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)}{\rho}$$

ب)

$$a = \frac{-GM}{r^2}$$

$$\frac{-GMm}{r^2} = ma$$

ج)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mH^2r^2$$

$$E = U + K$$

$$E = \frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{GMm}{r}$$

د) می‌دانیم انرژی ثابت است و در بی‌نهایت $\frac{GMm}{r} = 0$ و $K \geq 0$ پس در بی‌نهایت $E \geq 0$

است:

$$\frac{1}{2}mH^2r^2 - \frac{GMm}{r} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}H^2r^2 \geq G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)$$

در نتیجه

$$H_{(t)}^2 \geq \frac{8}{3}\pi G\rho_{(t)}$$

دورهی سیزدهم



آزمون عملی



وسایل موجود:

۱. کاغذ میلی‌متری با جرم مجهول (m_1)

۲. سیم با جرم مجهول (m_2)

۳. چوب کبریت

شرح آزمایش:

کاغذ میلی‌متری را چند بار تا بزنید و به شکل یک خط‌کش باریک درآورید. از این کاغذ تا شده به عنوان اهرم استفاده کنید.

الف) نسبت m_1 به m_2 را به دست آورید.

ب) روش انجام آزمایش را بنویسید.

ج) عوامل مؤثر بر خطای آزمایش را بنویسید.

«۱۲ نمره»



۱ اتومبیلی در یک جاده‌ی افقی بدون پیچ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند. هوا ساکن است و باران

(الف)

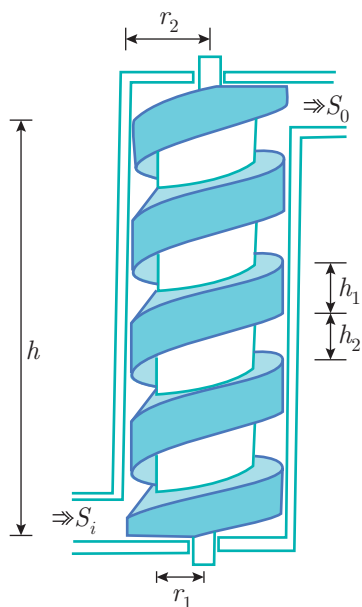
به سطح افقی را حساب کنید.

ب) فرض کنید زاویه‌ی شیشه‌ی جلوی اتومبیل با راستای قائم α باشد. چه شرطی بین α ، u و v برقرار

باشد تا بارانی که به شیشه‌ی جلوی اتومبیل می‌خورد، روی شیشه شروع به بالا رفتن کند؟

«۶ نمره»

۲ وسیله‌ای که در شکل نشان داده شده،



(الف)

حجم آبی که از تلمبه بیرون می‌آید، چقدر است؟

ب) اگر قسمت میانی N دور بر ثانیه بگردد،

سرعت آب خروجی از تلمبه چقدر است؟

ج) چه توانی لازم است تا تلمبه را N دور بر ثانیه بگرداند؟ چگالی آب را ρ و شتاب گرانش را g بگیرید.

د) اکنون با فرض مقادیر $r_1 = 16\text{cm}$ ، $h_2 = 25\text{cm}$ ، $h_1 = 20\text{cm}$ ، $h = 180\text{cm}$

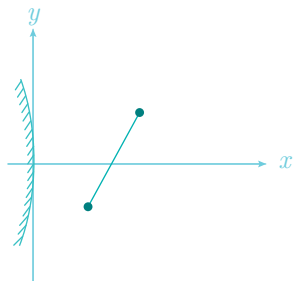
سرعت آب خروجی از تلمبه $S_0 = 100\text{cm}^2$ ، دور بر ثانیه $N = 0.3$ و $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ مقدار عددی

کمیت‌های محاسبه شده در الف، ب و ج را به دست آورید.

«۱۰ نمره»

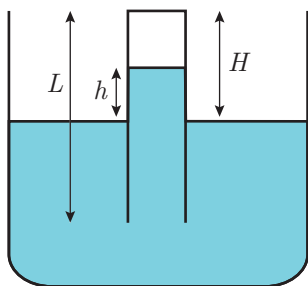


۳ مطابق شکل، میله نازکی که قسمتی از



«۸ نمره»

۴ وقتی یک لوله نازک را به طور عمودی در



«۱۰ نمره»

۵

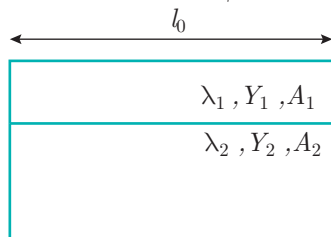
(الف)

(ب) دو فنر یکسان با ثابت فنر k را موازی با هم می‌بندیم. ثابت فنر حاصل چقدر است؟

(ج) هر میله را می‌توان شبیه فنری در نظر گرفت که طول آن تحت کشش و فشار عوض می‌شود. فرض کنید ثابت فنر میله‌ای از یک جنس معین، به طول واحد و مساحت مقطع واحد Y باشد. به Y مدول یانگ می‌گویند.

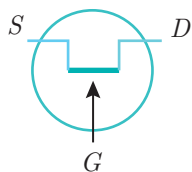
ثابت فنر میله‌ای از همین جنس به طول l و مساحت A چقدر است؟

دو میله از دو جنس مختلف در نظر بگیرید. در دمای T_0 ، طول هر میله l_0 است. مطابق شکل، این دو میله را به هم جوش داده‌اند. ضریب انبساط طولی میله‌ها λ_1 و λ_2 ، مساحت مقطع میله‌ها A_1 و A_2 و مدول یانگ میله‌ها Y_1 و Y_2 است. میله‌ها را گرم می‌کنیم. چون ضریب انبساط میله‌ها با هم فرق می‌کند، افزایش طول ناشی از گرم شدن میله‌ها یکسان نیست. اما میله‌ها به هم جوش خورده‌اند، و اگر مساحت مقطع‌شان به حد کافی زیاد باشد، تقریباً خم نمی‌شوند. بنابراین در یکی



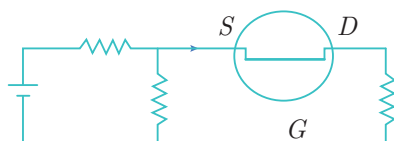
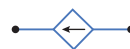
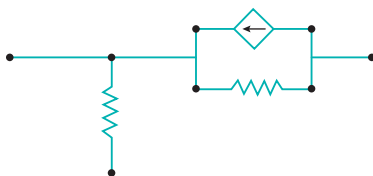
کشش و در دیگری فشار به وجود می‌آید، به طوری که طول دو میله در دمای T یکسان می‌شود. ثابت فزر این دو میله را همان ثابت فزرشان در دمای T_0 بگیرید. این طول چقدر است؟

«۱۲ نمره»



شکل (۱)

۶ ترازیستور اثر میدان (FET) یک عنصر



(الف) r_g را بی‌نهایت بگیرید و مدار این تقویت کننده را، با استفاده از مدار معادل ترانزیستور، بکشید. در همه قسمت‌های دیگر مسئله از این مدار استفاده کنید.

(ب) $A_V = \frac{V_{DG}}{V_{SG}}$ را به دست آورید.

(ج) جریان I در شکل (۳) را بر حسب A_v ، مقاومت‌های داده شده در مدار و V_{SG} به دست آورید.

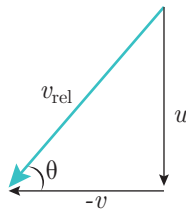
(د) $\frac{V_{SG}}{V_i}$ را بر حسب A_v و مقاومت‌های داده شده در مدار به دست آورید.

(ه) معمولاً r_d بسیار بزرگ است. در حد $r_d \rightarrow \infty$ ، نسبت $A'_v = \frac{V_{DG}}{V_i}$ را به دست آورید.

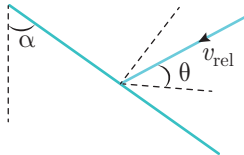
«۱۱ نمره»

$$\vec{V}_{rel} = \vec{V}_{rain} - \vec{V}_{car}$$

$$|V_{rel}| = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \theta = \text{Arctan}\left(\frac{u}{v}\right)$$



ب) برای این‌که باران از شیشه بالا رود باید سرعت نسبی آن نسبت به ماشین به گونه‌ای باشد که از عمود به شیشه زاویه‌اش کمتر باشد یعنی $\theta < \alpha$ (به شکل توجه کنید):



$$\text{Arctan}\left(\frac{u}{v}\right) < \alpha$$

در نتیجه

$$\frac{u}{v} < \tan \alpha$$

الف ۲) حجم آب موجود در هر پای پیچ را می‌توان به یک استوانه توخالی مشابهت داد. توجه کنیم آن حجم دقیقاً حجمی برابر استوانه دارد چون فاصله‌ی بین هر دو ردیف همه جا h_2 و شعاع‌ها همه جا r_1 و r_2 اند، پس

$$V = \pi(r_2^2 - r_1^2)h_2$$

ب) حجمی که در واحد زمان خارج می‌شود $N\pi(r_2^2 - r_1^2)h_2$ است که این باید از مساحت S_0 خارج شود و می‌دانیم اگر شارهای با سرعت u از مساحت S_0 رد شود، دبی آن S_0u است:

$$N\pi(r_2^2 - r_1^2)h_2 = S_0u$$

$$u = \frac{N\pi(r_2^2 - r_1^2)h_2}{S_0}$$

ج) توان برابر کار انجام شده بر واحد زمان است، کاری که باعث چرخیدن تلمبه می‌شود در نهایت باعث بالا رفتن آب‌ها به مقداری مشخص و خروج آب با یک سرعت مشخص است. بازه‌ی زمانی $\Delta t = \frac{1}{N}$ s

را در نظر می‌گیریم. در این بازه تلمبه ۱ دور چرخیده است. طول کل استوانه h است و ارتفاع هر گام پیچ $h_1 + h_2$ است پس مجموعاً $n = \frac{h}{h_1 + h_2}$ حجم V داخل استوانه داریم. با هر دور چرخاندن پیچ، همی این n حجم V به میزان $h_1 + h_2$ بالا می‌روند پس:

$$\Delta U = n \times (\rho V)g(h_1 + h_2) = \rho g V h$$

$$\Delta U = \rho g \pi (r_2^2 - r_1^2) h_2$$

همچنین برای انرژی جنبشی با هر دور چرخاندن به حجم V خروجی سرعت u داده می‌شود:

$$\Delta K = \frac{1}{2}(\rho V)u^2$$

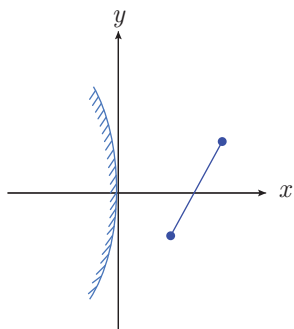
$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho\pi(r_2^2 - r_1^2)\frac{N^2\pi^2(r_2^2 - r_1^2)^2h_2^2}{S_0^2}$$

شاید تصور شود که این تغییر انرژی جنبشی صرفاً به دلیل تغییر مساحت است و ما کار آن را انجام نمی‌دهیم در حالی که به دلیل این کوچک شدن مساحت نیروی بیشتری برای چرخاندن تلمبه لازم است.

$$P = \frac{\Delta U + \Delta K}{\frac{1}{N}} \quad \text{جایگذاری عددی}$$

$$P = 61.2\text{W}$$

مختصات تصویر را با (X, Y) و مختصات خط را با (x, y) نشان می‌دهیم:



$$\begin{aligned} -\frac{1}{f} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{X} \Rightarrow X = \frac{-fx}{f+x} & (1) \\ m = \left|\frac{q}{p}\right| &= \left|\frac{Y}{y}\right| \Rightarrow \frac{X}{x} = \frac{Y}{y} \\ &\Rightarrow \frac{f}{f+x} = \frac{Y}{mx+b} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y = (mx + b) \times \frac{f}{f+x} \xrightarrow{(1)} x = \frac{-Xf}{X+f}$$

$$\Rightarrow Y = \left(\frac{-mXf}{f+X} + b\right) \times \left(\frac{f(f+X)}{f^2}\right) = \left(\frac{-Xmf + bf + bX}{f}\right)$$

$$Y = \left(-m + \frac{b}{f}\right)X + b$$



۲ ابتدا فشار هوای محصور را به دست می‌آوریم:

$$P_0 L = P(H - h) \Rightarrow P = \frac{P_0 L}{H - h}$$

برای آب معادله‌ی نیرو را می‌نویسیم:

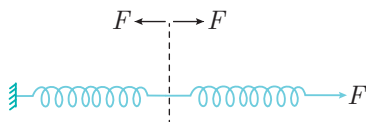
$$\begin{aligned} P_0 S + \gamma \pi D &= \rho S h g + P S \\ \Rightarrow P_0 + \frac{\gamma \pi D}{S} &= \frac{\rho g h (H - h) + P_0 L}{(H - h)} \\ S &= \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 \right) (H - h) = \rho g h (H - h) + P_0 L \\ \Rightarrow (\rho g) h^2 + h \left(\frac{-4\gamma}{D} - P_0 - \rho g H \right) + \left(H \left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 \right) - P_0 L \right) &= 0 \\ \Delta &= \frac{16\gamma^2}{D^2} + P_0^2 + (\rho g H)^2 + \frac{8\gamma P_0}{D} + \frac{8\gamma \rho g H}{D} \\ &+ 2P_0 \rho g H - 4\rho g \left(\frac{4\gamma H}{D} + P_0 H - P_0 L \right) \\ h &= \frac{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 + \rho g H \right) \pm \sqrt{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 - \rho g H \right)^2 + 4\rho g P_0 L}}{2\rho g} \end{aligned}$$

برای حالت خاص، اگر $H = L$ باشد یعنی لوله داخل آب نرود و $\gamma = 0$ باشد باید $h = 0$ شود چون نیروی بالا برنده‌ای نداریم

$$0 = \frac{P_0 + \rho g L \pm \sqrt{(P_0 - \rho g H)^2 + 4\rho g P_0 L}}{2\rho g}$$

پس جواب منفی قابل قبول است.

$$h = \frac{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 + \rho g H \right) - \sqrt{\left(\frac{4\gamma}{D} + P_0 - \rho g H \right)^2 + 4\rho g P_0 L}}{2\rho g}$$



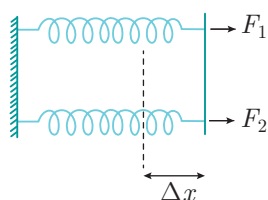
۵ الف) نقطه‌ی اتصال دو فنر را در نظر می‌گیریم. چون فنرها شتاب ندارند (هنگامی که فنرها کشیده شده‌اند و در تعادل‌اند) پس در آن محل هم نیروی F به سمت چپ به فنر راستی و نیروی F به سمت راست به فنر چپ‌ی وارد می‌شود.

$$\Delta x_1 = \frac{F}{k}, \quad \Delta x_2 = \frac{F}{k} \Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{2F}{k}$$

$$F = k_T \Delta x$$

در نتیجه

$$k_T = \frac{k}{2}$$



ب) برای دو فنر موازی هم می‌توان نوشت:

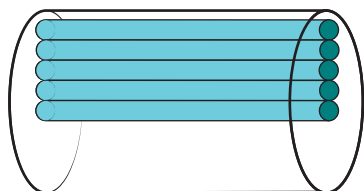
$$F_1 = k \Delta x, \quad F_2 = k \Delta x$$

$$F_T = F_1 + F_2 = 2k \Delta x, \quad F_T = k_T \Delta x$$

در نتیجه

$$k_T = 2k$$

ج) می‌توان مساحت مقطع A را به المان‌هایی به مساحت واحد تقسیم کرد (توجه کنیم منظور از مساحت واحد تنها 1m^2 نیست بلکه هر مساحتی را می‌توان واحد گرفت). حال تعدادی میله با طول l و مساحت مقطع واحد داریم که این میله‌ها مانند فنرهای موازی با هم هستند زیرا به یک میزان تغییر طول می‌دهند.

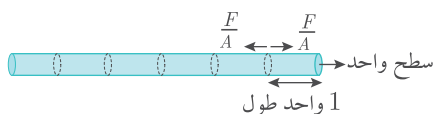


اگر نیروی کل F به میله وارد شود به هر کدام از میله‌ها نیروی $\frac{F}{4} = \frac{F}{\frac{A}{1}}$ وارد می‌شود (چون تعداد این میله‌ها $\frac{A}{1}$ است و نیرو وارد به آنها با هم یکسان است).

در طول این میله، ۱ واحد، ۱ واحد جدا می‌کنیم (دوباره توجه کنیم، هر طولی را می‌توان واحد گرفت) مانند قسمت (الف)، به همه‌ی این فنرها نیروی $\frac{F}{A}$ وارد می‌شود پس $\Delta x = \frac{\frac{F}{A}}{Y} = \frac{F}{AY}$ و چون تعداد کل فنرها در طول $n = \frac{l}{1}$ است داریم:

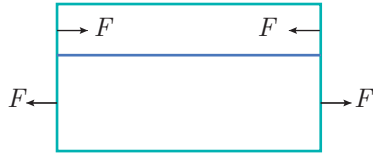
$$\Delta x_T = \Delta x \times l = \frac{Fl}{AY}$$

$$F = k_T \Delta x_T$$



در نتیجه

$$k_T = \frac{AY}{l}$$



د) بدون این‌که به کلیت مسئله لطمه‌ای بخورد فرض می‌کنیم $\lambda_1 > \lambda_2$ ، یعنی اگر جوش نمی‌خوردند طول ۱ بیشتر می‌شد، پس حالا که جوش خورده‌اند از طرف میله‌ی ۲، یک نیروی فشاری F به آن وارد می‌شود، و طبق قانون سوم نیوتن از طرف میله‌ی ۱ هم نیروی کششی به میله‌ی ۲ وارد می‌شود:

$$L_1 = l_0(1 + \lambda_1(T - T_0)) - \frac{F}{k_1}, \quad k_1 = \frac{A_1 Y_1}{l_0}$$

$$L_2 = l_0(1 + \lambda_2(T - T_0)) + \frac{F}{k_2}, \quad k_2 = \frac{A_2 Y_2}{l_0}$$

$$L_1 = L_2$$

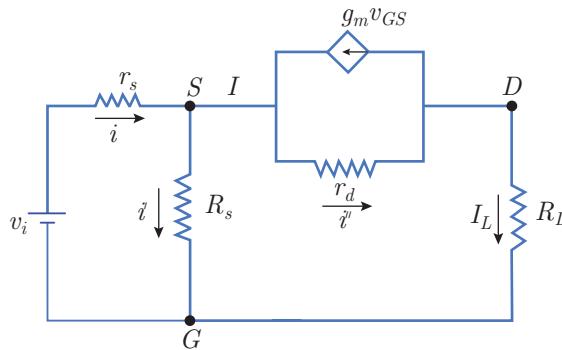
$$\Rightarrow 1 + \lambda_1(T - T_0) - \frac{F}{A_1 Y_1} = 1 + \lambda_2(T - T_0) + \frac{F}{A_2 Y_2}$$

$$\Rightarrow F = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(T - T_0)A_1 A_2 Y_1 Y_2}{(A_1 Y_1 + A_2 Y_2)}$$

$$L = l_0 + l_0 \lambda_1(T - T_0) - \frac{l_0(\lambda_1 - \lambda_2)(T - T_0)A_2 Y_2}{A_1 Y_1 + A_2 Y_2}$$

$$L = l_0 \left[1 + \frac{A_1 Y_1 \lambda_1 + A_2 Y_2 \lambda_2}{A_1 Y_1 + A_2 Y_2} (T - T_0) \right]$$

۶ الف) اگر $r_g \rightarrow \infty$ ، انگار از آن شاخه جریانی رد نمی‌شود و می‌توان آن را حذف کرد. همچنین چون این شاخه با شاخه‌ی شامل R_S موازی است، پتانسیل G را می‌توان همان پتانسیل در پایین شاخه‌ی شامل R_S گرفت.



ب) می‌دانیم $V_{GS} = V_G - V_S$.

$$V_D - I_L R_L = V_G, \quad V_S - i' r_d = V_D$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow I_L &= \frac{V_{DG}}{R_L}, \quad i'' = \frac{V_{SD}}{r_d} \\ i'' &= g_m V_{GS} + I_L \Rightarrow \frac{V_{SD}}{r_d} = g_m V_{GS} + \frac{V_{DG}}{R_L} \\ V_{SD} &= V_S - V_D = V_S - V_G + V_G - V_D = V_{SG} + V_{GD} = V_{SG} - V_{DG} \\ \frac{V_{SG} - V_{DG}}{r_d} &= -g_m V_{SG} + \frac{V_{DG}}{R_L} \\ V_{SG} \left(\frac{1}{r_d} + g_m \right) &= V_{DG} \left(\frac{1}{R_L} + \frac{1}{r_d} \right) \\ \Rightarrow A_v &= \frac{V_{DG}}{V_{SG}} = \frac{\frac{1}{r_d} + g_m}{\frac{1}{R_L} + \frac{1}{r_d}} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$A_v = \frac{R_L + r_d R_L g_m}{R_L + r_d}$$

 ج) مطابق شکل مدار $I = I_L$ است پس $I = \frac{V_{DG}}{R_L}$ در نتیجه

$$\frac{A_v V_{SG}}{R_L} = I$$

د)

$$i = I + i' = \frac{A_v V_{SG}}{R_L} + \frac{V_{SG}}{R_s} = V_{SG} \left(\frac{A_v}{R_L} + \frac{1}{R_s} \right)$$

$$V_G + V_i - i r_s = V_S \Rightarrow V_i - i r_s = V_{SG}$$

$$V_i = V_{SG} r_s \left(\frac{A_v}{R_L} + \frac{1}{R_s} \right) + V_{SG}$$

$$\frac{V_{SG}}{V_i} = \frac{1}{1 + \frac{r_s A_v}{R_L} + \frac{r_s}{R_s}}$$

ه)

$$A'_v = \frac{V_{DG}}{V_i} = \frac{V_{DG}}{V_{SG}} \times \frac{V_{SG}}{V_i} = \frac{A_v}{1 + \frac{r_s A_v}{R_L} + \frac{r_s}{R_s}}$$

$$\lim_{r_d \rightarrow \infty} A_v = \lim_{r_d \rightarrow \infty} \frac{R_L + r_d R_L g_m}{R_L + r_d} = R_L g_m$$

$$A'_v = \frac{R_L g_m}{1 + r_s g_m + \frac{r_s}{R_s}}$$

چهاردهمین المپیاد فیزیک

وقت آزمون: ۱۹۵ دقیقه

آزمون نظری



۱

(الف)

دارد. چشمه از جایی که آینه قرار دارد با زاویه‌ی (قطر ظاهری) خیلی کوچک α دیده می‌شود. اگر فاصله‌ی چشمه از آینه خیلی زیاد باشد، شعاع تصاویر چقدر است؟

ب) برای آتش زدن یک تکه چوب لازم است حداقل توان تابشی بر واحد سطح 60 kW/m^2 بر آن بتابد. یک تکه چوب را در کانون یک آینه‌ی مقعر با مساحت A و فاصله‌ی کانونی 50 m قرار می‌دهیم. A چند مترمربع باشد تا تکه چوب را بشود با نور خورشید که به وسیله‌ی آینه روی آن تابانده می‌شود، آتش زد؟ در سطح زمین توان تابشی خورشید بر واحد سطح 1 kW/m^2 و قطر ظاهری خورشید از زمین 0.5° است.

«۱۰ نمره»

۲

یک نوع ارتفاع‌سنج بر اساس سنجش فشار هوا کار می‌کند. فشار هوا در ارتفاع‌های h_0 ، h_1 و h_2

(الف)

و دمای مطلق هوا در این فاصله را $\frac{P_i + P_{i+1}}{2}$ ، و دمای مطلق هوا در این فاصله را $\frac{T_i + T_{i+1}}{2}$ بگیرد. چگالی هوا در این فاصله را به دست آورید.

راهنمایی: هوا مثل یک گاز کامل است و معادله‌ی حالت آن $PV = nRT$ است، که در آن V حجم گاز، n تعداد مول‌ها و R ثابت عمومی گاز است. جرم هر مول هوا M است.

ب) با استفاده از این چگالی، $h_{i+1} - h_i$ را به دست آورید و از آنجا $h_1 - h_0$ و $h_2 - h_0$ را بنویسید.

ج) با فرض $P_0 = 103 \times 10^3 \text{ Pa}$ ، $P_1 = 97 \times 10^3 \text{ Pa}$ ، $t_0 = 20^\circ \text{ C}$ ، $t_1 = 14^\circ \text{ C}$ ، $M = 29 \text{ g/mol}$ ، $g = 10 \text{ m/s}^2$ و $R = 8.3 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ، مقدار عددی $h_1 - h_0$ را به دست آورید.

«۱۰ نمره»

۳

یک جسم به جرم m از ارتفاع h بالای سر آزاد یک فنر سبک عمودی روی فنر می‌افتد. سر دیگر