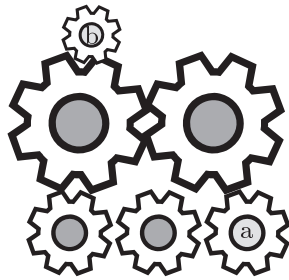


فصل ۲

هم‌پایگی

۱-۲ تعدادی چرخ‌دنده به صورت شکل زیر داریم، که با هم درگیر هستند. چرخ‌دنده b باید چند دور و در کدام جهت بچرخد تا چرخ‌دنده a دقیقاً یک دور ساعتگرد بچرخد؟ تعداد دنده‌های چرخ‌دنده‌های کوچک ۸، چرخ‌دنده‌های متوسط ۱۶، و چرخ‌دنده‌های بزرگ ۳۲ است.



... ۱۶ دنده

... ۳۲ دنده

الف) ۱ دور ساعتگرد

ب) ۱ دور پادساعتگرد

ج) ۲ دور ساعتگرد

د) ۲ دور پادساعتگرد

ه) نمی‌توان چرخ‌دنده a را چرخاند.

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۶)

۲-۲ برای کدام مقدار n ، می‌توان عددهای ۱ تا n را به دو دسته طوری تقسیم کرد که مجموع عددهای دو دسته برابر باشند؟

الف) ۲۰۰۳ ب) ۲۰۰۲ ج) ۱۳۸۲ د) ۱۰ ه) ۹

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۲)

۳-۲ علی و امیر هر کدام چهار عدد متمایز را از میان عددهای $\{۴, ۵, ۷, ۸, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۲۳, ۲۴\}$ انتخاب کرده است، به‌گونه‌ای که همه عددهای علی متفاوت از عددهای امیر است. مجموع عددهای انتخابی علی سه‌برابر مجموع عددهای انتخابی امیر است. عدد انتخاب‌نشده کدام است؟

الف) ۴ ب) ۷ ج) ۱۳ د) ۱۴ ه) ۲۳

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۷)

۴-۲ یک n ضلعی کامل نامیده می‌شود اگر برای هر عدد صحیح i ، که $1 \leq i \leq n$ ، دقیقاً یک ضلع به طول i وجود داشته باشد، و هر دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. کمترین مقدار n ، که برای آن n ضلعی کامل وجود دارد، چندتا است؟

الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸ د) ۱۲ ه) ۱۶

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۱)

۵-۲ تعدادی عدد روی تخته نوشته شده‌اند. در هر مرحله، دو تا از عددها را پاک می‌کنیم و روی تخته قدرمطلق تفاضل آن دو را می‌نویسیم. در پایان، تنها عدد o روی تخته باقی مانده است. عددهای اولیه کدامیک از حالت‌های زیر می‌تواند باشد؟

i. ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸

ii. ۱, ۳, ۷, ۸, ۱۰, ۱۲

iii. ۱, ۴, ۷, ۹, ۱۲, ۱۸

الف) i ب) i و ii ج) ii د) i و iii ه) i, ii, و iii

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۷)

۶-۲ n عدد ۱ روی یک تخته سیاه نوشته شده‌اند. در هر مرحله دو عدد a و b را از روی تخته پاک می‌کنیم و به جای آنها دوبار عدد $a + b$ را می‌نویسیم. پس از چند مرحله n عدد n روی تخته به دست آمده است. n کدامیک از عددهای زیر می‌تواند باشد؟

i. ۱۵

ii. ۱۶

iii. ۹

الف) i و iii ب) ii و iii ج) فقط iii د) فقط ii ه) i, ii, و iii

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۷)

۷-۲ عددهای ۱ تا ۱۳۷۵ در یک ردیف نوشته شده‌اند. یک نفر از ابتدای این عددها شروع می‌کند و عدد یکم را خط می‌زند، عدد دوم را باقی می‌گذارد و عدد سوم را خط می‌زند، و به همین صورت یک‌درمیان عددها را خط می‌زند. سپس، دوباره از ابتدای لیست شروع می‌کند و یکمین عددی را که خط نخورده است خط می‌زند و به همین صورت یک‌درمیان عددهایی را که خط نخورده‌اند خط می‌زند. پس از آن، دوباره از ابتدای لیست شروع می‌کند و همین کار را تا جایی ادامه می‌دهد که تنها یک عدد باقی بماند. آن عدد چیست؟

الف) ۱۳۷۴ (ب) ۱۰۲۴ (ج) ۶۸۷ (د) ۶۸۲ (ه) ۵۱۲

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۵)

۸-۲ به چند روش می‌توان یک جدول 3×3 را با عددهای 0 و 1 پر کرد که تعداد 1 های موجود در همسایه‌های هر خانه فرد باشد. دو خانه همسایه‌اند اگر در یک ضلع یا گوشه مشترک باشند. پس، تعداد همسایه‌ها حداقل 3 و حداکثر 8 است. هیچ خانه‌ای همسایه خودش به شمار نمی‌رود.

الف) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 8 (ه) 32

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۲)

۹-۲ ماشین قارقوری، که برای نمایش عددهای طبیعی به کار می‌رود، از 9 کلید و 9 کارت‌خوان تشکیل شده است. برای کار با قارقوری نخست باید 9 عدد صحیح مثبت روی 9 کارت تمیز نوشته، در کارت‌خوان‌های ماشین قرار دهیم. سپس، با روشن و خاموش کردن کلیدهای آن به عدد مورد نظر برسیم. می‌دانیم عددی که قارقوری به عنوان خروجی نمایش می‌دهد، برابر با

$$n = s_1 \cdot v_1 + s_2 \cdot v_2 + \dots + s_9 \cdot v_9$$

است، که v_i عدد نوشته شده روی کارت i ام می‌باشد، و مقدار s_i در صورتی که کلید i ام روشن باشد برابر 1 و در صورتی که خاموش باشد برابر -1 است. وهاب قصد دارد از این ماشین برای نمایش عددهای طبیعی مختلف استفاده کند. می‌دانیم وهاب مقدارهای اولیه کارت‌ها را تنها یک‌بار و آن هم در آغاز کار با دستگاه می‌تواند تعیین کند و از آن به بعد، صرفاً با تغییر وضعیت کلیدها قادر به تغییر مقدار خروجی خواهد بود. حداکثر مقدار k را بیابید که، وهاب بتواند طوری مقدارهای کارت‌ها را در ابتدا تعیین کند که تنها با تغییر دادن حالت کلیدها بتواند همه عددهای 1 تا k را نمایش دهد.

الف) 9 (ب) 81 (ج) 511 (د) 19682 (ه) هیچ‌کدام

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۴)

۱۰-۲ فردی در نقطه $(2, 3)$ جدول مختصات قرار دارد. او در هر حرکت اگر در نقطه (i, j) باشد، می‌تواند به یکی از نقطه‌های $(i + i \cdot j, j)$ ، $(i - i \cdot j, j)$ ، $(i, j + i \cdot j)$ ، یا $(i, j - i \cdot j)$ برود. با تکرار این حرکت‌ها، این فرد به کدام یک از نقطه‌های زیر می‌تواند برسد؟

الف) $(-256, 9002)$ (ب) $(1535, -25301)$

ج) $(-18, 15400)$ (د) $(32, -9207)$

ه) $(-1701, 256)$

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۲)

۱۱-۲ می‌توان یک دنباله از عددها را این‌گونه تغییر داد که ۳ جمله پشت سر هم a, b, c و از دنباله پاک کرد و به جای آنها عدد $a+c-b$ را در همان مکان گذاشت. برای مثال، دنباله $\langle 1, 2, 8, 4, 7 \rangle$ را می‌توان به $\langle 1, -2, 7 \rangle$ و $\langle 1, -2, 7 \rangle$ را به $\langle 1, 0 \rangle$ تبدیل کرد. چند دنباله از ۵ دنباله زیر را می‌توان به $\langle 0 \rangle$ تبدیل کرد؟

$$\langle 7, 7, 7, 6, 6, 6, 5, 5, 5, 5 \rangle$$

$$\langle 2, 4, -1, 7, 8, 4, 9, 3, 1 \rangle$$

$$\langle 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 \rangle$$

$$\langle 4, 4, 3, 7, 1, 9, 8, 5, 6 \rangle$$

$$\langle 8, 7, 5, 7, 3, 6, 7, 7, 4 \rangle$$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۵

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۰)

۱۲-۲ دنباله $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ را در نظر بگیرید که در آن $S_j \cdot a_i \in \{+1, -1, +5, -5\}$ را مجموع j عنصر نخست دنباله تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که هیچ $1 \leq j \leq n$ وجود ندارد که S_j مضرب ۵ باشد. در هر گزینه، یک دوتایی مرتب (n, S_n) داده شده است. کدام گزینه امکان‌پذیر است؟

الف) (۶۷, ۳۳۳) ب) (۸۳, ۳۳۴)

ج) (۷۷, -۲۵۶) د) (۹۳, -۲۸۸)

ه) (۱۰۵, ۵۱۹)

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۳)

۱۳-۲ سه عدد a, b, c و روی تخته نوشته شده‌اند. آرش و ایمان به این ترتیب با این سه عدد بازی می‌کنند که، هر کس در نوبت خود دو عدد دلخواه را از این سه عدد، مانند a و b ، از روی تخته پاک می‌کند، و دو عدد $a+b$ و $a-b$ را به جای آنها می‌نویسد. آرش بازی را آغاز می‌کند. آرش و ایمان به طور یک‌درمیان بازی می‌کنند. آرش می‌خواهد کار را به جایی برساند که هر سه عدد نوشته شده روی تخته بر ۳ بخش‌پذیر باشند، و ایمان می‌خواهد جلوی این کار را بگیرد. برای چندتا از سه‌تایی‌های زیر به عنوان مقادیرهای آغازین (a, b, c) ، آرش می‌تواند به هدف خودش برسد؟

$$(1, 2, 10), (2, 3, 6), (3, 1, 4),$$

$$(5, 6, 7), (100, 1000, 10000)$$

الف) ۱ ب) ۴ ج) ۲ د) ۰ ه) ۵

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۴)

۱۴-۲ در یک بازی دونفره با سعید شرکت کرده‌اید. سعید از شما می‌خواهد که یک عدد چندرقمی به نام x را انتخاب کنید، معکوس آن عدد، \bar{x} ، را از روی x بسازید و (برای مثال، معکوس ۱۰۲۴۰ ، ۰۲۴۱ است). سپس، $a = x - \bar{x}$ را حساب کنید و علامت آن را نادیده بگیرید. شما باید یک رقم غیرصفر a به نام p را انتخاب کنید و آن را به خاطر بسپارید و جمع بقیه رقم‌های a را به سعید اعلام کنید. سعید می‌تواند از این اطلاعات p را به دست آورد! اگر مقدار اعلام شده ۳۱ باشد، p چه عددی است؟

- (الف) ۵ (ب) ۷ (ج) ۹ (د) ۱ (ه) ۳

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۷)

۱۵-۲ میان شهرهای یک کشور لوله‌های آب قرار داده‌ایم. میزان انتقال آب روی هر لوله هم مشخص است. قدرت یک شهر را برابر تفاوت میزان آب خروجی از آن شهر و میزان آب ورودی به آن تعریف می‌کنیم. قدرت یک شهر می‌تواند عددی منفی یا مثبت باشد، بسته به اینکه آن شهر تولیدکننده آب باشد، یا فقط مصرف‌کننده آب. برای مثال، اگر قدرت یک شهر $۶-$ و میزان آب ورودی به آن شهر ۱۰۲ لیتر باشد، میزان آب خروجی (از طریق لوله‌هایی که از آن شهر به شهرهای دیگر خارج شده است) ۹۶ لیتر خواهد بود.

در یک کشور با پنج شهر، فرض کنید باقیمانده قدرت چهار شهر نخست در تقسیم بر ۱۱ به ترتیب عددهای ۳ ، ۹ ، ۷ ، ۱ باشد. کدام یک از عددهای زیر می‌تواند قدرت شهر پنجم باشد؟

- (الف) ۱۰۰۰ (ب) ۳۰۰۰ (ج) ۵۰۰۰ (د) ۷۰۰۰ (ه) ۹۰۰۰

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۸)

۱۶-۲ بازی k اتل متل، که k عددی مثبت است، با حضور ۲۰ بازیکن انجام می‌شود. این بازیکنان با شماره‌های ۱ تا ۲۰ به ترتیب شماره‌هایشان و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دور یک میز نشسته‌اند. نخست یک پرچم به دست فرد شماره ۱ می‌دهیم. در هر مرحله، k بار پرچم دست به دست می‌شود. هر بار دست به دست شدن پرچم به این معنی است که، فردی که پرچم را در دست دارد، آن را به فرد سمت راستی خود می‌دهد. در پایان هر مرحله، فردی که پرچم را در دست دارد، از بازی حذف و از دور میز خارج می‌شود و پرچم را به فرد سمت راستی خود می‌دهد.

می‌خواهیم به ترتیب، از راست به چپ، افراد با شماره‌های ۳ ، ۱۹ ، ۱۷ ، ۲۰ ، ۱۶ ، ۸ ، ۱ ، ۱۱ ، ۹ ، ۱۲ ، ۱۵ ، ۱۳ ، ۷ ، ۱۴ ، ۶ ، ۲ ، ۱۰ ، ۴ ، ۵ و ۱۸ حذف شوند. کوچک‌ترین k را، که برای آن بازی k اتل متل موجب حذف افراد به ترتیب گفته شده می‌شود، k' می‌نامیم. باقیمانده k' بر ۵ چند خواهد بود؟

- (الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۷)

۱۷-۲ یک قورباغه در نقطه o روی محور x ‌ها نشسته است. در جهش یکم یک واحد به چپ یا راست و در جهش i ام 3^{i-1} واحد به چپ یا راست می‌جهد. این قورباغه به کدام نقطه از محور می‌تواند برسد؟
 الف) ۳۰۹ ب) ۳۱۰ ج) ۳۱۱ د) ۳۱۲ ه) ۳۱۳

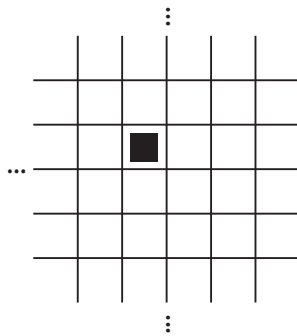
(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۷)

۱۸-۲ سه ظرف ۳ لیتری آب داریم که در هر کدام ۱ لیتر آب وجود دارد. در هر گام یکی از ظرف‌ها را انتخاب می‌کنیم و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3}$ آب درون آن را در دو ظرف دیگر می‌ریزیم. برای مثال، پس از گام یکم، در ظرف‌ها $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ لیتر آب خواهد بود. این گام را چندبار تکرار می‌کنیم. اکنون، در ظرف‌ها چند لیتر آب می‌تواند باشد؟

الف) $\frac{27}{243}$ ، $\frac{30}{243}$ ، $\frac{40}{243}$ ب) $\frac{13}{81}$ ، $\frac{89}{81}$ ، $\frac{141}{81}$
 ج) $\frac{41}{81}$ ، $\frac{111}{81}$ ، $\frac{91}{81}$ د) $\frac{247}{243}$ ، $\frac{91}{243}$ ، $\frac{291}{243}$
 ه) $\frac{292}{243}$ ، $\frac{129}{243}$ ، $\frac{308}{243}$

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۷۹)

۱۹-۲ یک جدول دوبعدی نامتناهی را در نظر بگیرید که در ابتدا همه خانه‌های آن سفید هستند. در مرحله یکم یکی از خانه‌های جدول را به دلخواه سیاه می‌کنیم (شکل زیر را ببینید). از مرحله دوم به بعد، در هر مرحله همه خانه‌هایی را که ۱، ۲، یا ۳ همسایه سیاه دارند مشخص می‌کنیم و سپس، همه آنها را سیاه و دیگر خانه‌ها را سفید می‌کنیم. دو خانه همسایه‌اند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.



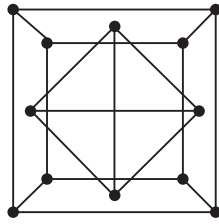
بزرگ‌ترین k ، که خانه‌ای که در مرحله یکم سیاه شده بود، در مرحله k ام هم سیاه شود، چند است؟

الف) ۱ ب) ۷
 ج) ۸ د) ۱۶

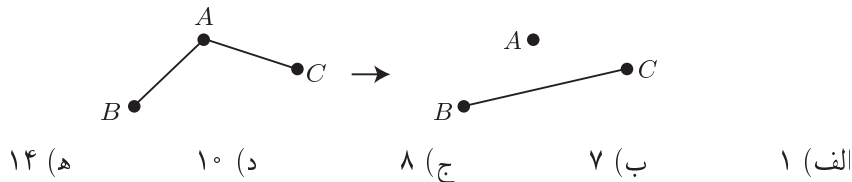
ه) k هر قدر می‌تواند بزرگ باشد.

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۱)

۲-۲۰ کامبیز شکل زیر را روی کاغذ کشیده و به شان‌دیز داده است.



این شکل از تعدادی «تکه‌خط» تشکیل شده است. تکه‌خط چیزی مانند پاره‌خط است، با این تفاوت که در دو سر آن حتماً دو دایره کوچک سیاه قرار دارند. شان‌دیز در هر مرحله می‌تواند سه دایره سیاه A ، B ، و C را که A به B و A به C با تکه خط متصل است، ولی B به C متصل نیست، انتخاب کند، سپس، تکه‌خط‌های AB و AC را پاک کرده، تکه‌خط BC را به جای آن دو بکشد (مانند شکل زیر). با تکرار این عمل تا جای ممکن، حداقل چند تکه‌خط ممکن است باقی بماند؟ (دقت کنید که در شکل زیر هیچ سه نقطه‌ای روی یک خط نیستند.)



(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۶)

۲-۲۱ یک جدول ۲۰۰۵×۲۰۰۵ در اختیار داریم که همه خانه‌های آن سفید هستند. شخصی ۱۳۸۳ بار یک سطر و یک ستون را انتخاب و رنگ همه خانه‌های آن سطر و آن ستون را برعکس می‌کند: از سفید به سیاه یا از سیاه به سفید. توجه کنید که رنگ خانه مشترک در سطر و ستون تغییر نمی‌کند. تعداد خانه‌های سیاه باقیمانده در جدول در انتها کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

(الف) ۰

(ب) ۲,۷۷۲,۹۱۵

(د) ۳,۰۴۴,۸۵۴

(ج) ۱۹۶,۰۷۸

(ه) ۲,۱۲۴

(المپیاد کامپیوتر ایران، ۱۳۸۳)