نشر گچ

نردبان المپیاد ریاضی ـ نظریه اعداد (مرحله اول)

مؤلفان:	مهدی صفا
ناشر:	انتشارات گچ
حروفچینی:	سیدمرتضی حسینی – هادی صفی‌اقدم
رسم تصاویر:	فرامرز الهی‌پناه
طرح جلد:	مهدی صمدی طهران
شابک:	۴ – ۳ – ۹۵۸۷۸ – ۶۰۰ – ۹۷۸
قیمت:	۱۱۰۰۰ تومان
نوبت چاپ:	اول – زمستان ۱۳۹۴
تیراژ:	۱۱۰۰ نسخه

تهران، میدان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، خیابان شهید نظری، پلاک ۱۰۵، طبقه دوم

صندوق پستی: ۵۷۹ – ۱۳۱۴۵، تلفن: ۶۶۹۸۰۵۳۸

www.gachpub.com

فهرست مطالب

سخن ناشر

مقدار گذر عمر تابع حالت است که تغییرات آن با داشتن نقاط ابتدا و انتهای هر بازه مشخص می‌شود. حتماً شما ده سال بعد، ده سال بزرگ‌تر (و یا شاید پیرتر) شده‌اید. این طول زندگی شما است و با سرعت در حال گذر است، جالب اینکه هیچ کنترلی بر روی آن ندارید. این طول محدودیت دارد و در نهایت به پایان می‌رسد. برای انسان‌های مختلف هم تفاوت زیادی ندارد، چند سال کمتر یا بیشتر!

حالا چشمان خود را ببندید و به آینده نگاه کنید، می‌توانید بگویید ده سال بعد، شما که هستید؟ حالت‌های ممکن، عرض زندگی شما و یک تابع مسیر است. هر لحظه از این ده سال می‌تواند در چیزی که در انتها خواهید بود مؤثر باشد.

هیچ‌وقت کسی ما را به خاطر توابع حالت زندگی‌مان بازخواست نمی‌کند، مثلاً تا حالا از شما پرسیده‌اند چرا در این سه سال فقط سی و شش ماه بزرگ‌شده‌ای؟ اما توابع مسیر را خودمان باید بسازیم، برای همین باید پاسخگوی این تغییرات باشیم. شاید بعضی از این سؤالات را شنیده باشید:

- چرا این‌قدر لاغر شدی؟ (پس وزن یک تابع مسیر است)
- چی شد که این‌قدر خطت قشنگ شد؟ (پس هنر یک تابع مسیر است)
- چطور تونستی صبر کنی؟ (پس اخلاق یک تابع مسیر است)
- چی کار کردی این همه پول درآوردی؟ (پس موفقیت شغلی یک تابع مسیر است)
- چرا همه تو رو دوست دارند؟ (پس شهرت یک تابع مسیر است)
- چقدر خوب می‌فهمی! (پس درک، فهم و تحصیلات تابع مسیر است)
- ...

می‌توانیم بخوابیم و همین‌طور که خوابیم، صد یا دویست سال بعد، کلاً و برای همیشه در این دنیا بخوابیم، بدون اینکه تابع مسیری از خود باقی گذاشته باشیم! اما عرض زندگی نهایت ندارد و در هر فرصتی، هر چقدر که بخواهیم می‌توانیم به آن وسعت بدهیم؛ انتخاب با خود ما است.

پیشگفتار مؤلف

نظریهٔ اعداد مقدماتی، شاخه‌ای از ریاضیات است که سؤالات آن در مرحله اول و دوم المپیاد ریاضی و المپیادهای بین‌المللی مورد توجه قرار می‌گیرد. هر چند دانش آموزان با مفاهیم اولیه نظریه اعداد در کتاب‌های مدرسه آشنا می‌شوند ولی مباحثی مانند بخش‌پذیری، ب.م.م و ک.م.م، همنهشتی، حل معادلات سیاله یا دیوفانتی، قضیه فرما و اویلر که جزء نظریه اعداد محسوب می‌شوند، از سطح بالاتری برخوردار هستند.

در سال‌های اخیر کتاب‌های زیادی در زمینهٔ نظریهٔ اعداد نوشته شده است که هر یک دارای معایب و محاسنی هستند. مزیت عمدهٔ کتاب حاضر سادگی و روانی مطالب و در عین حال کاربردی بودن نکات و قضیه‌ها در حل مسائل مرحلهٔ اول المپیاد ریاضی است.

هدف از تألیف کتاب این بوده است که اولاً دانش‌آموزان بتوانند بدون داشتن معلم و به‌تنهایی کتاب را مطالعه کنند و در مباحث آن مشکلی نداشته باشد. ثانیاً پس از خواندن کتاب و تسلط روی مباحث و سؤالات آن قادر باشد بیش از نیمی از سؤالات نظریه اعداد مطرح شده در مرحله اول المپیاد ریاضی کشوری را پاسخ دهند. در واقع دانش‌آموزان با تفکر کافی بر سؤالات این کتاب، علاوه بر تضمین قبولی در مرحله اول، مقدمات لازم برای حل سؤالات مرحله دوم المپیاد ریاضی کشوری را نیز فرا گرفته باشند. به همین علت تعداد صفحات کتاب و فصل‌های آن طوری تنظیم شده است که خواندن و یا تدریس آن در سه یا چهار ماه برای دانش آموزان یا معلمان محترم ممکن باشد.

سؤالات و مثال‌های مطرح شده در کتاب که بیش از ۲۰۰ عدد است، اکثراً مقدماتی و ساده هستند و تعدادی هم از میان سؤالات مرحله اول المپیاد ریاضی سال‌های گذشته انتخاب شده‌اند. توصیه می‌شود برای یادگیری بهتر مطالب، قبل از مراجعه به حل مثال‌ها حتماً روی آن‌ها دقایقی فکر کنید تا بتوانید شخصاً آن‌ها را حل کنید. در ضمن در پایان هر فصل تعدادی مسئله مرتبط با مطالب عنوان شده آمده است که حل آن‌ها می‌تواند به فهم بهتر مطالب فرا گرفته شده کمک نماید.

در پایان از تمام عزیزانی که نویسنده را در تألیف کتاب یاری نموده‌اند به خصوص از همکاران محترم انتشارات گچ کمال تشکر به عمل می‌آید.

اگر در مورد این کتاب نظر یا پیشنهادی دارید میتوانید آن را از طریق ایمیل mah_safa@yahoo.com با مولف در میان بگذارید.

۱

بخش پذیری

نظریهٔ اعداد یا تئوری اعداد شاخه‌ای از المپیاد ریاضی است که روی اعداد صحیح بحث می‌کند. یعنی اگر به پارامتری مانند a، b و ... در متن اشاره می‌شود به‌طور پیش فرض آن‌ها را صحیح می‌دانیم مگر اینکه به‌طور صریح اشاره شودکه مثلاً گنگ یا گویا هستند. در واقع یکی از تفاوت‌های بحث نظریهٔ اعداد و جبر هم در همین موضوع است، پارامترهای موجود در سؤالات جبر غالباً اعداد حقیقی می‌باشند ولی در نظریهٔ اعداد پارامترها طبیعی و صحیح هستند.

با این مقدمهٔ کوتاه به سراغ بیان اولین قضیه در این فصل می‌رویم. این قضیه در واقع همان عملیات سادهٔ تقسیم است که در دوران ابتدایی فراگرفته‌اید ولی به شکل پارامتری و به‌صورت حالت کلی مطرح می‌شود.

قضیه ۱ – ۱ (الگوریتم تقسیم)

اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $b \neq 0$، آنگاه می‌توان a را بر b تقسیم کرد و به خارج قسمت q و باقیماندهٔ r رسید. توجه کنید که اعداد q و r هم باید صحیح باشند و روابط زیر میان آن‌ها برقرار است:

$$a = bq + r \quad (۱)$$

$$0 \leq r \leq |b| \quad (۲)$$

به رابطهٔ (۲) شرط باقیمانده گویند و در آن $|b|$ بیانگر قدر مطلق عدد صحیح b می‌باشد. توجه به این نکته مهم است که باقیمانده تقسیم همواره عددی غیر منفی است و لذا در صورتی‌که مقسوم علیه عددی منفی باشد از

علامت قدر مطلق استفاده می‌شود که رابطهٔ (۲) برقرار باشد.

مثال ۱ − ۱

در هر قسمت با توجه به a و b داده شده، مقادیر q و r را در قضیهٔ ۱ − ۱ محاسبه نمایید.

۱) $a = ۹۴$ و $b = ۱۳$

۲) $a = ۲۵$ و $b = ۴$

۳) $a = ۲۵$ و $b = -۴$

۴) $a = ۸۹$ و $b = -۷$

۵) $a = n^۲ - ۱$ و $b = n + ۱$ (n طبیعی)

۶) $a = n^۳ + ۱$ و $b = n - ۱$ ($n \geq ۴$ طبیعی)

۷) $a = n^۳ + n^۲ + ۲$ و $b = n + ۲$ (n طبیعی)

راه حل:

۱) به سادگی و با تقسیم ۹۴ بر ۱۳ به‌دست می‌آید: $q = ۷$ و $r = ۳$ دقت کنید رابطهٔ (۲) یعنی شرط باقیمانده نیز برقرار است، یعنی $۰ \leq ۳ < ۱۳$.

۲) مشابه قسمت (۱) خواهیم داشت: $q = ۶$ و $r = ۱$.

۳) توجه کنید در اینجا b منفی است و لذا q هم منفی خواهد بود. مشابهاً با تقسیم کردن مستقیم به‌دست می‌آید: $q = -۶$ و $r = ۱$، در واقع داریم $۲۵ = (-۴) \times (-۶) + ۱$ و $۰ \leq ۱ < |-۴|$.

۴) مشابه قسمت (۳)، q باید منفی به‌دست آید: $q = -۱۲$ و $r = ۵$ یعنی $۸۹ = (-۷) \times (-۱۲) + ۵$.

۵) سه قسمت باقیمانده به‌صورت پارامتری و بر حسب n هستند. در این مورد یا می‌توان مستقیم تقسیم انجام داد و یا اینکه از اتحادهای مشهور استفاده نمود. در این قسمت از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم. داریم $n^۲ - ۱ = (n + ۱)(n - ۱) + ۰$، بنابراین $q = n - ۱$ و $r = ۰$ خواهد بود.

۶) از اتحاد چاق و لاغر داریم $n^۳ - ۱ = (n - ۱)\left(n^۲ + n + ۱\right)$. حال کافی است به طرفین این اتحاد عدد ۲ را اضافه نماییم و به‌دست آوریم $n^۳ + ۱ = (n - ۱)\left(n^۲ + n + ۱\right) + ۲$. پس به‌دست می‌آید $q = n^۲ + n + ۱$ و $r = ۲$. در اینجا سؤالی که مطرح می‌شود این است که شرط $n \geq ۴$ در صورت مسئله چرا قرار داده شده است. همان‌طور که در قضیهٔ الگوریتم تقسیم گفته شد برای درستی عمل تقسیم

شرط (۲) هم باید بررسی شود، در اینجا داریم:

$$|b| > r \geq ۰ \;\Rightarrow\; n-۱ > ۲ \geq ۰ \;\Rightarrow\; n > ۳ \;\Rightarrow\; n \geq ۴$$

۷) در این سؤال هم می‌توان از تقسیم دو عبارت پارامتری بر هم استفاده نمود. اگر از این روش استفاده کنید جوابی که به‌دست می‌آید $q = n^۳ - n + ۲$ و $r = -۲$ است. هر چند این جواب از نظر جبری و تقسیم چندجمله‌ای درست می‌باشد ولی به‌علت منفی بودن r در نظریهٔ اعداد قابل قبول نیست. برای رفع مشکل می‌توان یک واحد از q کم کرد و به r به‌دست آمده به اندازهٔ b اضافه نمود:

$$n^۳ + n^۲ + ۲ = (n+۲)\left(n^۲ - n + ۲\right) + (-۲)$$
$$\Rightarrow n^۳ + n^۲ + ۲ = (n+۲)\left(n^۲ - n + ۱\right) + (n)$$

در واقع باقیمانده در نظریهٔ اعداد عدد مثبت n است که از $b = n + ۲$ هم کمتر است. ♣

مثال ۱ − ۲

۱) فرض کنید a عددی صحیح باشد. نشان دهید a به یکی از صورت‌های $۲k$ یا $۲k + ۱$ قابل نمایش است که k عددی صحیح است.

۲) با فرض صحیح بودن a، نشان دهید a به یکی از حالت‌های $۳k$، $۳k + ۱$ یا $۳k + ۲$ قابل نمایش است.

✍ راه حل:

۱) عدد مفروض a را بر $b = ۲$ تقسیم می‌کنیم. با توجه به قضیهٔ ۱ − ۱ داریم:

$$a = ۲q + r \quad \text{و} \quad ۲ > r \geq ۰$$

بنابراین برای باقیماندهٔ r دو حالت به‌وجود می‌آید $r = ۰$ یا ۱، اگر $r = ۰$ باشد $a = ۲q$ خواهد بود و اگر $r = ۱$ باشد $a = ۲q + ۱$ می‌باشد.

البته توجه کنید در صورت مسئله به‌جای q از k استفاده شده که تنها تفاوت در نام‌گذاری است و در اصل اثبات تأثیری ندارد.

۲) مشابه قسمت قبل عدد a را بر $b = ۳$ تقسیم می‌نماییم:

$$a = ۳q + r \quad \text{و} \quad ۳ > r \geq ۰ \;\Rightarrow\; r = ۰ \text{ یا } ۱ \text{ یا } ۲$$

اگر $r = ۰$ به‌دست می‌آید $a = ۳q$، اگر $r = ۱$ خواهیم داشت $a = ۳q + ۱$ و اگر $r = ۲$ داریم $a = ۳q + ۲$ و لذا حکم مسئله اثبات می‌شود. ♣

مثال ۱ــ۳

اگر a عددی صحیح و n طبیعی باشد، ثابت کنید a به یکی از n صورت زیر قابل نمایش است:

$$nk \text{ یا } nk+۱ \text{ یا } nk+۲ \text{ یا } \cdots \text{ یا } nk+(n-۱)$$

✍ **راه حل:** مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم اگر $b=n$ باشد داریم $۰ \leq r < n$ که برای باقیماندهٔ r مقادیری مانند ۰، ۱، ... و $n-۱$ به‌دست می‌آید. ♣

مثال ۱ــ۴

مشخص کنید کدام‌یک از اعداد زیر به‌صورت $۳k+۲$ و کدام‌یک $۵k+۳$ هستند:

$$-۲ \text{ ، } -۱۰ \text{ ، } ۱۰۱ \text{ ، } ۱۰۰۰ \text{ ، } ۹۴ \text{ ، } ۵۸ \text{ ، } -۱۷ \text{ ، } ۱۷ \text{ ، } ۷$$

✍ **راه حل:** توجه کنید طبق مثال قبل عددی که $۳k+۲$ است یعنی در تقسیم بر ۳ به باقیماندهٔ ۲ می‌رسد و عددی که $۵k+۳$ است در تقسیم بر ۵ به باقیماندهٔ ۳ می‌رسد. با این توضیح کافی است اعداد داده شده را بر ۳ و ۵ تقسیم نموده و باقیمانده‌ها را محاسبه نماییم. به‌دست می‌آید که اعداد ۱۰−، ۱۰۱ و ۱۷ به شکل $۳k+۲$ هستند و اعداد ۲−، ۵۸ و ۱۷− به شکل $۵k+۳$ هستند. ♣

مثال ۱ــ۵

باقیماندهٔ تقسیم عدد طبیعی a بر ۷ برابر ۶ است و اگر a را بر ۴ و ۵ تقسیم کنیم باقیمانده در هر دو حالت برابر ۲ خواهد شد. حداقل مقدار a را بیابید.

✍ **راه حل:** عددی که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۴ و ۵ یکسان و برابر ۲ باشد، باید در تقسیم بر ۲۰ هم به باقیماندهٔ ۲ برسد و بنابراین داریم $a=۲۰k+۲$. حال کافی است k را طوری تعیین کنیم که باقیماندهٔ a بر ۷ برابر ۶ شود. اگر ۲ و $k=۱$ باشد به‌دست می‌آید ۴۲ و $a=۲۲$ که باقیمانده‌های این اعداد بر ۷ برابر ۶ نیست. اگر $k=۳$ باشد خواهیم داشت $a=۶۲$ که به‌وضوح در تقسیم بر ۷ به باقیماندهٔ ۶ می‌رسد. پس حداقل عدد ۶۲ است. ♣

مثال ۱ــ۶

حداقل عدد طبیعی a را بیابید که باقیماندهٔ تقسیم آن بر اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد.

✍ **راه حل:** یک روش حل این است که مشابه مثال قبل از سعی و خطا و عددگذاری استفاده کنیم. مثلاً توجه کنیم عددی که باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۳ و ۴ برابر ۲ و ۳ است به شکل $۱۲k+۱۱$ است حال k را آن‌قدر زیاد کنیم که باقیماندهٔ عدد بر ۵ برابر ۴شود که مثلاً در اینجا $k=۴$ مناسب است و عدد موردنظر $a=۵۹$ خواهد بود.

اما روش ساده‌تر توجه به این نکته است که بنابر فرض سؤال عدد $a+1$ بر اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ بخش پذیر است و باقیمانده ندارد و با کمی توجه درمی‌یابیم که حداقل چنین عددی ۶۰ است و لذا $a=59$ پاسخ مسئله خواهد بود. ♣

مثال ۱ـ۷

فرض کنید a و b دو عدد طبیعی هستند. برای a و b چهار حالت از لحاظ زوجیت (زوج یا فرد بودن) در نظر بگیرید، یعنی هر دو زوج، هر دو فرد، a زوج و b فرد و برعکس. در مورد زوجیت مقادیر زیر بحث کنید:

$$a+b \ ، \ a-b \ ، \ ab \ ، \ a^b \ ، \ \frac{a}{b} \ ، \ a^2-b^2$$

راه حل: برای اعداد a^2-b^2، $a-b$ و $a+b$ می‌توان گفت اگر a و b هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، این اعداد زوج هستند و در غیر این‌صورت فرد می‌باشند. ab هم فقط زمانی فرد است که هر دوی a و b فرد باشند.

زوجیت a^b مشابه زوجیت a است و ربطی به b ندارد. در مورد $\frac{a}{b}$ هم نمی‌توان چیزی گفت زیرا اصولاً امکان دارد حاصل عبارت صحیح نباشد. ♣

مثال ۱ـ۸

ثابت کنید مربع هر عدد فرد به‌صورت $8k+1$ است، یعنی وقتی بر ۸ تقسیم شود به باقیماندهٔ واحد می‌رسد. به‌عنوان مثال خوب است این حکم را برای اعداد ۱، ۹، ۲۵، ۴۹، ۸۱ و ... آزمایش کنید!

راه حل: اگر a عددی فرد باشد می‌توان نوشت $a=2n+1$. پس a^2 را محاسبه می‌کنیم:

$$a^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$$

اکنون نشان می‌دهیم عبارت $n(n+1)$ همواره عددی زوج است. در واقع حاصل‌ضرب دو عدد متوالی همواره زوج می‌باشد. کافی است به این نکته توجه کنیم که از هر دو عدد متوالی یکی زوج و دیگری فرد است و لذا طبق مثال ۱ـ۷ ضرب آن‌ها حتماً زوج خواهد بود. بنابراین داریم $n(n+1)=2k$ با جایگذاری رابطهٔ اخیر در رابطهٔ قبلی به‌دست می‌آید:

$$a^2=4n(n+1)+1=(4\times 2k)+1=8k+1$$ ♣

مثال ۱ـ۹

ثابت کنید عدد $5^{22}+7$ بر ۸ بخش پذیر است.

راه حل: توجه می‌کنیم که عدد 5^{22} مربع عددی فرد است، یعنی یک عدد فرد به توان زوج رسیده است.

بنابر مثال ۱–۸، 5^{22} به شکل $8k+1$ خواهد بود. با جایگذاری در رابطهٔ مسئله به‌دست می‌آید:

$$5^{22}+7=8k+1+7=8k+8=8(k+1)=8q$$ ♣

مثال ۱–۱۰

حداکثر مقدار a را بیابید که $3^{2^{11}}+1$ بر 2^a بخش پذیر باشد.

راه حل: نشان می‌دهیم $a=1$ پاسخ مسئله است. ابتدا توجه می‌کنیم که $3^{2^{11}}$ مربع عددی فرد است پس داریم:

$$3^{2^{11}}=8k+1 \Rightarrow 3^{2^{11}}+1=8k+2=2(4k+1)$$

چون $4k+1$ عددی فرد است واضح است که $3^{2^{11}}+1$ بر ۴ قابل قسمت نیست و $a=1$ حداکثر مقدار است. ♣

برای ادامهٔ بحث در قضیهٔ الگوریتم تقسیم حالتی را درنظر بگیرید که باقیمانده برابر صفرباشد و به‌عبارت دیگر a بر b بخش پذیر باشد. در این‌صورت می‌توان نوشت:

$$a=bq+r \text{ و } r=0 \Rightarrow a=bq$$

برای این حالت خاص که $r=0$ است به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف ۱–۱

اگر a و b اعدادی صحیح باشند که $b\neq 0$ و به ازای عددی صحیح مانند k داشته باشیم $a=bk$، در این‌صورت این رابطه را به شکل $b\,|\,a$ نشان می‌دهیم و به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

- b، a را عاد می‌کند.
- b، a را می‌شمارد.
- b یک عامل (شمارنده) برای a است.
- a بر b بخش پذیر است.

در ضمن اگر a بر b بخش پذیر نباشد می‌نویسیم $b \nmid a$ و می‌خوانیم، b، a را عاد نمی‌کند.

مثال ۱ــ۱۱

درستی یا نادرستی روابط زیر را مشخص نمایید:

۱) $3 \mid 2013$

۲) $-7 \mid 91$

۳) $11 \mid 142$

۴) $a+1 \mid a^5+1 \quad (a \neq -1)$

۵) $a^2+1 \mid a^4+1$

۶) $0 \mid 5$

۷) $-1 \mid 13$

راه حل: (۱) و (۲) هر دو درست هستند زیرا داریم: $(-13) \times (-7) = 91$ و $2013 = 3 \times 671$.
رابطهٔ (۳) صحیح نیست، در واقع داریم:

$$142 = 11 \times 12 + 10 \Rightarrow r = 10 \neq 0,$$

پس داریم $11 \nmid 142$.

(۴) رابطهٔ درستی است. از حالت کلی اتحاد چاق و لاغر می‌توان a^5+1 را تجربه کرد:

$$a^5+1 = (a+1)\left(a^4-a^3+a^2-a+1\right)$$

در مورد (۵) هم باید گفت این رابطه به ازای هر a برقرار نیست و لذا اشتباه است. برای مثال نقض کافی است $a=2$ قرار داده شود یعنی $5 \mid 17$ که اشتباه است. توجه کنید همیشه برای رد کردن یک رابطه ارائهٔ یک مثال نقض کافی است ولی برای قبول یک رابطه باید اثبات انجام شود.

رابطهٔ (۶) اصولاً اشتباه است زیرا طبق تعریف امکان ندارد $b=0$ باشد.

رابطهٔ (۷) هم برقرار است. در واقع $+1$ و -1 اعدادی هستند که تمام اعداد دیگر را عاد می‌کنند. در اینجا داریم: $13 = (-1) \times (-13)$. ♣

در ادامه توجه شما را به یک قضیه جلب می‌نماییم که خواص بخش‌پذیری و عاد کردن را بیان می‌کند. این روابط از آنجا که در حل مسائل بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مهم می‌باشند.

قضیه ۱ــ۲ (خواص بخش پذیری)

اگر a، b، c و d اعدادی صحیح و غیرصفر باشند، روابط زیر برقرار می‌باشند:

۱. اگر $a \mid b \Rightarrow a \mid -b$ و $-a \mid b$ و $-a \mid -b$

۲. $a \mid a$

۳) $a \mid 0$

۴) $1 \mid a$ و $-1 \mid a$

۵) اگر $a \mid 1 \Rightarrow a = \pm 1$

۶) اگر $a \mid b \Rightarrow |b| \geq |a|$

۷) اگر $a \mid b$ و $b \mid c \Rightarrow a \mid c$

۸) اگر $a \mid b$ و $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$

۹) اگر $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$ و $ac \mid bc$

۱۰) اگر $a \mid b$ و $a \mid c \Rightarrow a \mid b \pm c$

۱۱) اگر $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n$ (n طبیعی)

۱۲) اگر $a \mid b \Rightarrow \frac{b}{a} \mid b$

۱۳) اگر $a \mid b$ و $c \mid d \Rightarrow ac \mid bd$

۱۴) اگر $a \mid b$ و $c \mid d$ لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت $a + c \mid b + d$.

اثبات:

۱) به علت مشابه بودن فقط یک قسمت اثبات می‌شود:

$$a \mid b \Rightarrow b = ak \Rightarrow -b = -ak \Rightarrow -b = a \times (-k) \Rightarrow a \mid -b$$

اثبات خاصیت‌های ۲ تا ۵ به‌علت سادگی به عهدهٔ خواننده می‌باشد.

۶) اگر $a \mid b$ یعنی $b = ak$، از طرفین قدر مطلق می‌گیریم:

$$|b| = |ak| = |a| \times |k| \geq |a| \times 1 \Rightarrow |b| \geq |a|$$

۷)
$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = ak \\ b \mid c \Rightarrow c = bq \end{cases} \Rightarrow c = (ak)\,q \Rightarrow c = a\,(kq) \Rightarrow a \mid c$$

۸) از خاصیت (۶) کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow |b| \geq |a| \\ b \mid a \Rightarrow |a| \geq |b| \end{cases} \Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow a = \pm b$$

۹)
$$a \mid b \Rightarrow b = ak \Rightarrow bc = a\,(ck) = ac\,(k) \Rightarrow a \mid bc \text{ و } ac \mid bc$$

۱۰) $$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = ak \\ a \mid c \Rightarrow c = aq \end{cases} \Rightarrow b \pm c = a(k \pm q) \Rightarrow a \mid b \pm c$$

۱۱) $$a \mid b \Rightarrow b = ak \Rightarrow b^n = (ak)^n = a^n k^n \Rightarrow a^n \mid b^n$$

۱۲) $$a \mid b \Rightarrow b = ak \Rightarrow k \mid b \text{ و } k = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} \mid b$$

۱۳) $$\begin{cases} a \mid b \Rightarrow b = ak \\ c \mid d \Rightarrow d = cq \end{cases} \xRightarrow{\text{ضرب}} bd = (ac)kq \Rightarrow ac \mid bd$$

۱۴) همان‌طور که در قبل هم گفته شد برای رد کردن یک گزاره، ارائهٔ یک مثال نقض کافی است:

$$\begin{cases} ۳ \mid ۹ \\ ۵ \mid ۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۸ \mid ۱۹$$ که به‌وضوح اشتباه است

▲

مثال ۱ــ۱۲

با فرض صحیح بودن a، b و c و اینکه $a \mid c$ و $b \mid c$ ثابت کنید $c \mid ma + nb$ که m و n دو عدد دلخواه صحیح هستند. توجه کنید که به‌عبارت $ma + nb$ یک ترکیب خطی a و b گویند.

✍ **راه حل:** از خاصیت‌های (۹) و (۱۰) در قضیهٔ ۱ــ۲ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} c \mid a \xRightarrow{(۹)} c \mid ma \\ c \mid b \xRightarrow{(۹)} c \mid nb \end{cases} \xRightarrow{(۱۰)} c \mid ma + nb$$

♣

مثال ۱ــ۱۳

اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید:

۱) $۲ \mid n^۲ - n$ ۲) $۳ \mid n^۳ - n$ ۳) $۵ \mid n^۵ - n$

✍ **راه حل:**

۱) داریم $n^۲ - n = n(n-۱)$ یعنی ضرب دو عدد صحیح متوالی هستند که یکی از آن‌ها زوج است و لذا حاصل‌ضرب آن‌ها هم زوج خواهد بود.

۲) در تجزیهٔ عبارت $n^۳ - n$ می‌توان نوشت: $n^۳ - n = (n-۱)(n)(n+۱)$ یعنی حاصل‌ضرب سه عدد متوالی صحیح. از قبل می‌دانیم بین هر سه عدد متوالی یکی مضرب ۳ است. بنابراین حاصل‌ضرب آن‌ها هم مضرب ۳ خواهد بود.

۳) ابتدا $n^{۵}-n$ را تجزیه می‌کنیم:

$$n^{۵}-n=(n-۱)(n)(n+۱)\left(n^{۲}+۱\right).$$

از مثال ۱−۳ می‌دانیم هر عدد به یکی از صورت‌های $۵k+r$ که $r=۰,۱,۲,۳,۴$ قابل نمایش است. اگر $n=۵k$ یا $n=۵k+۱$ یا $n=۵k+۴$ آنگاه به‌راحتی مشاهده می‌شود $۵\mid(n-۱)(n)(n+۱)$ و حکم مسئله بدیهی است. برای دو حالت باقیمانده یعنی $n=۵k+۲$ و $۵k+۳$ نشان می‌دهیم $n^{۲}+۱$ مضرب ۵ است:

$$n=۵k+۲\ \Rightarrow\ n^{۲}+۱=۲۵k^{۲}+۲۰k+۵=۵\left(۵k^{۲}+۴k+۱\right)\ \Rightarrow\ ۵\mid n^{۲}+۱$$
$$n=۵k+۳\ \Rightarrow\ n^{۲}+۱=۲۵k^{۲}+۳۰k+۱۰=۵\left(۵k^{۲}+۶k+۲\right)\ \Rightarrow\ ۵\mid n^{۲}+۱$$

در نهایت مشاهده می‌شود در تمام حالات مختلف مسئله حل شده است. ♣

مثال ۱−۱۴

تمام اعداد طبیعی n را بیابید که کسر $\dfrac{۵+n}{۷-n}$ هم عددی طبیعی شود.

✍ **راه حل:** اگر کسر $\dfrac{a}{b}$ بخواهد طبیعی باشد لازم است رابطهٔ $a\mid b$ برقرار باشد. پس داریم:

$$\begin{cases}۷-n\mid ۵+n\\ ۷-n\mid ۷-n\end{cases}\xrightarrow{\text{جمع}}۷-n\mid ۱۲\ \Rightarrow\ ۷-n\in\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$$
$$\Rightarrow\ n\in\{۶,۵,۴,۳,۱,-۵\}$$

اما طبق صورت مسئله n باید طبیعی باشد، پس جواب $n=-۵$ قابل قبول نیست و مسئله دارای ۵ جواب است: $n=۱,۳,۴,۵,۶$. ♣

مثال ۱−۱۵

در هر قسمت مقادیر طبیعی n را طوری بیابید که روابط برقرار باشد:

۱) $n+۳\mid n+۸$

۲) $n+۲\mid ۷n+۵$

۳) $n+۱\mid n^{۲}+۵$

۴) $n+۲\mid n^{۳}+۱۵$

۵) $n^{۲}+۱\mid ۴n-۲$

۶) $n^{۲}+۱\mid n^{۵}+۳$

۷) $n-۳\mid ۵n+۱$

راه حل: قبل از حل این مثال به این نکته اشاره می‌کنیم که روش کلی در حل این‌گونه مسائل استفاده از خواص بخش پذیری قضیهٔ ۱−۲ و ساده‌سازی است تا حتی‌الامکان عبارت سمت راست کوچک شود یا به عددی ثابت برسد.

۱)
$$\begin{cases} n+۳ \mid n+۸ \\ n+۳ \mid n+۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n+۳ \mid ۵ \Rightarrow n+۳ = ۱ \text{ یا } ۵ \Rightarrow n = -۲ \text{ یا } ۲$$

بنابر طبیعی بودن n، تنها جواب $n = ۲$ قابل قبول است، یعنی ۱۰ | ۵ که برقرار است.

۲)
$$\begin{cases} n+۲ \mid ۷n+۵ \\ n+۲ \mid ۷(n+۲) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+۲ \mid ۷n+۵ \\ n+۲ \mid ۷n+۱۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n+۲ \mid ۹$$
$$\Rightarrow n+۲ \in \{۱,۳,۹\} \Rightarrow n \in \{-۱,۱,۷\}$$

باز هم چون n طبیعی است جواب‌های $n = ۱,۷$ درست هستند که با جایگذاری در رابطهٔ اصلی صحت آن‌ها بررسی می‌شود.

۳) در اینجا از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} n+۱ \mid n^۲+۵ \\ n+۱ \mid n^۲-۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n+۱ \mid ۶ \Rightarrow n+۱ \in \{۱,۲,۳,۶\} \Rightarrow n \in \{۰,۱,۲,۵\}$$

پس سه جواب $n = ۱,۲,۵$ قابل قبول است.

۴) در اینجا هم از اتحاد چاق و لاغر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} n+۲ \mid n^۳+۱۵ \\ n+۲ \mid n^۳+۸ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n+۲ \mid ۷ \Rightarrow n+۲ \in \{۱,۷\} \Rightarrow n \in \{-۱,۵\}$$

که چون n طبیعی است جواب $n = ۵$ قابل قبول است و با جایگذاری در رابطهٔ اصلی داریم ۱۴۰ | ۷.

۵) توجه کنید در این سوال درجهٔ عبارت سمت راست کمتر از درجهٔ عبارت سمت چپ است و لذا مانند قسمت‌های قبل نمی‌توان به‌طور مشابه قبل به عبارت‌های ساده‌تری رسید. برای حل این مسئله دو روش ارائه می‌کنیم:

روش ۱: استفاده از اتحاد مزدوج و ضرب سمت راست در عبارت $۴n+۲$، داریم:

$$n^۲+۱ \mid ۴n-۲ \xrightarrow{\text{خاصیت (۹)}} n^۲+۱ \mid (۴n-۲)\times(۴n+۲) \Rightarrow n^۲+۱ \mid ۱۶n^۲-۴$$

از طرفی به‌وضوح می‌توان گفت $n^۲ + ۱ \mid ۱۶n^۲ + ۱۶$، از تفاضل دو عبارت اخیر به‌دست می‌آید:

$$n^۲ + ۱ \mid ۲۰ \Rightarrow n^۲ + ۱ \in \{۱, ۲, ۴, ۵, ۱۰, ۲۰\} \Rightarrow n \in \{۰, ۱, ۲, ۳\}$$

همیشه توجه کنید بعد از به‌دست آوردن جواب‌ها آن‌ها را در رابطهٔ اصلی مسئله جایگذاری نمایید. این کار لازم است زیرا امکان دارد در طی حل سوال با عملیات مختلف که انجام شده است بعضی جواب‌های اضافی هم درنظر گرفته شده‌اند که باید حذف شوند. با قرار دادن مقادیر $n = ۱, ۲, ۳$ در مسألهٔ اصلی فقط جواب‌های $n = ۱, ۳$ درست هستند و جواب $n = ۲$ حذف خواهد شد.

روش ۲: از خاصیت (۶) در قضیهٔ ۱-۲ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که با کمی دقت می‌توان متوجه شد که با زیاد شدن مقدار n، بعد از مدتی مقدار $n^۲ + ۱$ از $۴n - ۲$ بیشتر خواهد شد و لذا جواب‌ها محدود است:

$$n^۲ + ۱ \mid ۴n - ۲ \Rightarrow ۴n - ۲ \geq n^۲ + ۱ \Rightarrow ۰ \geq n^۲ - ۴n + ۳ = (n - ۱)(n - ۳)$$

برای منفی شدن عبارت فوق مقادیر بین دو ریشه یعنی $n = ۱, ۲, ۳$ باید بررسی شوند که همان‌طور که در روش ۱ توضیح داده شد جواب $n = ۲$ حذف می‌شود.

۶) برای اینکه به عبارتی مشابه $n^۵ + ۳$ برسیم، ساده‌ترین کار ضرب $n^۲ + ۱$ در $n^۳$ است:

$$\begin{cases} n^۲ + ۱ \mid n^۵ + ۳ \\ n^۲ + ۱ \mid n^۳(n^۲ + ۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n^۲ + ۱ \mid n^۵ + ۳ \\ n^۲ + ۱ \mid n^۵ + n^۳ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n^۲ + ۱ \mid n^۳ - ۳$$

مشابهاً داریم $n^۲ + ۱ \mid n^۳ + n$ که از تفاضل این روابط به‌دست می‌آید: $n^۲ + ۱ \mid n + ۳$. اکنون این رابطه مشابه قسمت (۵) است و می‌توان از نامساوی‌ها کمک گرفت:

$$n^۲ + ۱ \mid n + ۳ \Rightarrow n + ۳ \geq n^۲ + ۱ \Rightarrow ۰ \geq n^۲ - n - ۲ = (n + ۱)(n - ۲)$$

برای منفی بودن عبارت اخیر باید داشته باشیم $n = ۱, ۲$ که هر دو جواب مسئله می‌باشند.

۷) مشابه قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} n - ۳ \mid ۵n + ۱ \\ n - ۳ \mid ۵(n - ۳) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n - ۳ \mid ۵n + ۱ \\ n - ۳ \mid ۵n - ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} n - ۳ \mid ۱۶$$

$$\Rightarrow n - ۳ \in \{۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶\} \Rightarrow n \in \{۴, ۵, ۷, ۱۱, ۱۹\}$$

که با جایگذاری مشاهده می‌شود تمام این اعداد درست هستند.

ممکن است این سوال به ذهن خواننده خطور کند که چرا سوال قسمت (۷) مطرح شده است، چون راه

حلی مشابه قسمت (۲) دارد و لزومی به تکرار نبود. نکته در اینجاست که راه حل ارائه شده کامل نیست! در واقع فرق این سوال و سوالات قبلی در این است که گر چه n طبیعی و مثبت است ولی $n-۳$ می‌تواند منفی هم باشد. پس در واقع راه حل کامل مسئله این‌گونه است:

$$n-۳ \mid ۱۶ \Rightarrow n-۳ \in \{-۱,-۲,-۴,-۸,-۱۶,۱,۲,۴,۸,۱۶\}$$
$$\Rightarrow n \in \{۲,۱,-۱,-۵,-۱۳,۴,۵,۷,۱۱,۱۹\}$$

یعنی مشاهده می‌شود علاوه بر پنج جواب قبلی، جواب‌های $n = ۱,۲$ هم باید درنظر گرفته شوند و مسئله در کل هفت جواب دارد. ♣

مثال ۱ـ۱۶

برای اعداد صحیح a و b و عدد طبیعی n ثابت کنید:

۱) $a-b \mid a^n-b^n$

۲) $a+b \mid a^n+b^n$ (n فرد است)

راه حل: برای اثبات این مثال از حالت کلی اتحادهای چاق و لاغر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم اگر n عددی طبیعی باشد داریم:

$$a^n-b^n=(a-b)\underbrace{\left(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱}\right)}_{k}=(a-b)\,k \Rightarrow a-b \mid a^n-b^n$$

و در ضمن اگر n عددی فرد باشد، عبارت a^n+b^n هم قابل تجزیه است:

$$a^n+b^n=(a+b)\underbrace{\left(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+\cdots+b^{n-۱}\right)}_{q}=(a+b)\,q \Rightarrow a+b \mid a^n+b^n$$

♣

مثال ۱ـ۱۷

ثابت کنید:

۱) $۲^۴ \mid ۷^{۲۰۰}-۱$

۲) $۲^۵ \mid ۳^{۲۰۰}-۱$

۳) $۷ \mid ۲^۷+۳^۷+۴^۷+۵^۷$

۴) $۲۹ \mid ۲^{۱۳۹۴}+۵^{۱۳۹۴}$

راه حل:

۱) برای اثبات این مثال از دو رابطهٔ مهم بیان شده در مثال ۱ـ۱۶ استفاده می‌کنیم:

$$۷^{۲۰۰}-۱=۴۹^{۱۰۰}-۱ \Rightarrow ۴۹-۱ \mid ۴۹^{۱۰۰}-۱ \Rightarrow ۴۸ \mid ۴۹^{۱۰۰}-۱ \Rightarrow ۱۶ \mid ۴۹^{۱۰۰}-۱$$

۲) در این قسمت ابتدا با کمک اتحاد مزدوج سعی می‌کنیم عبارت داده شده را تجزیه نماییم:

$$۳^{۲۰۰} - ۱ = \left(۳^{۱۰۰} + ۱\right)\left(۳^{۱۰۰} - ۱\right) = \left(۳^{۱۰۰} + ۱\right)\left(۳^{۵۰} + ۱\right)\left(۳^{۵۰} - ۱\right)$$

اکنون توجه کنید که

$$۳^{۵۰} - ۱ = ۹^{۲۵} - ۱ \Rightarrow ۸ \mid ۳^{۵۰} - ۱$$

و از طرفی هر کدام از پرانتزهای $۱ + ۳^{۵۰}$ و $۱ + ۳^{۱۰۰}$ هم زوج هستند و یک عامل ۲ دارند. بنابراین در کل عبارت داده شده بر $۲^۵ = ۲ \times ۲ \times ۸$ بخش پذیر است.

۳) چون ۷ عددی فرد است، می‌توان از قسمت (۲) در مثال ۱–۱۶ کمک گرفت.

$$\begin{cases} ۲ + ۵ \mid ۲^۷ + ۵^۷ \\ ۳ + ۴ \mid ۳^۷ + ۴^۷ \end{cases} \xRightarrow{\text{جمع}} ۷ \mid ۲^۷ + ۳^۷ + ۴^۷ + ۵^۷$$

۴) توجه کنید برای استفاده از قسمت (۲) مثال ۱–۱۶، توان باید عددی فرد باشد ولی در اینجا ۱۳۹۴ زوج است. برای رفع این مشکل این‌گونه عمل می‌نماییم.

$$۲^{۱۳۹۴} + ۵^{۱۳۹۴} = ۴^{۶۹۷} + ۲۵^{۶۹۷} \Rightarrow ۴ + ۲۵ \mid ۴^{۶۹۷} + ۲۵^{۶۹۷} \Rightarrow ۲۹ \mid ۴^{۶۹۷} + ۲۵^{۶۹۷}$$

♣

مثال ۱–۱۸

تعداد x های صحیح را بیابید که در معادلهٔ $\dfrac{x^۳ + x}{x + ۳} = ۳۵$ صدق کنند.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌شمار

✍ **راه حل:** با اندکی محاسبات به‌دست می‌آید:

$$x^۳ + x = ۳۵x + ۳ \times ۳۵ \Rightarrow x^۳ - ۳۴x = ۳ \times ۵ \times ۷ \Rightarrow x\left(x^۲ - ۳۴\right) = ۳ \times ۵ \times ۷$$

بنابراین با توجه به صحیح بودن x، یکی از ۱۶ حالت $\pm۱, \pm۳, \pm۵, \pm۷, \pm۱۵, \pm۲۱, \pm۳۵, \pm۱۰۵$ برای x ممکن است. با جایگذاری تمام این حالت‌ها در رابطهٔ اصلی مسئله، فقط جواب $x = ۷$ قابل قبول است و گزینهٔ (۲) صحیح است. ♣

مثال ۱–۱۹

تعداد اعداد صحیح x و y را بیابید که داشته باشیم:

$$۳x^۲ = yx^۲ + y + ۴x$$

✍ **راه حل:** در اینجا برای حل مسئله y را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$y=\frac{۳x^۲-۴x}{x^۲+۱} \Rightarrow \begin{cases} x^۲+۱ \mid ۳x^۲-۴x \\ x^۲+۱ \mid ۳x^۲+۳ \end{cases} \Rightarrow x^۲+۱ \mid ۴x+۳$$

$$\Rightarrow x^۲+۱ \mid (۴x+۳)(۴x-۳) \Rightarrow \begin{cases} x^۲+۱ \mid ۱۶x^۲-۹ \\ x^۲+۱ \mid ۱۶x^۲+۱۶ \end{cases} \Rightarrow x^۲+۱ \mid ۲۵$$

بنابراین ۲۵ یا ۵ یا ۱ $= ۱ + x^۲$ که با بررسی به سادگی جواب‌های $x = ۰, ۲, -۲$ ممکن است. با جایگذاری این سه مقدار $y = ۰, \frac{۴}{۵}, ۴$ به‌دست می‌آید که دو جواب $(x,y)=(۰,۰), (-۲,۴)$ قابل قبول هستند. ♣

مثال ۱ – ۲۰

چند عدد طبیعی n در بین اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ داریم که رابطهٔ زیر برقرار باشد؟

$$n+۱ \mid ۱+۲+\cdots+n$$

✍ **راه حل:**

$$n+۱ \mid \frac{n(n+۱)}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۲(n+۱) \mid n(n+۱) \Rightarrow ۲ \mid n$$

نتیجهٔ فوق به معنی این است که کافی است n عددی زوج باشد تا شرط مسئله برقرار باشد. مشخص است که ۵۰۰ عدد زوج بین اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ وجود دارد. ♣

مثال ۱ – ۲۱

تعداد جواب‌های معادلهٔ $۳xy-y-۵x=۱۳$ در اعداد طبیعی را بیابید.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) بی‌شمار

✍ **راه حل:** باز هم y را برحسب x محاسبه می‌نماییم:

$$y(۳x-۱)=۵x+۱۳ \Rightarrow y=\frac{۵x+۱۳}{۳x-۱} \Rightarrow ۳x-۱ \mid ۵x+۱۳$$

$$\xrightarrow{\times ۳} \begin{cases} ۳x-۱ \mid ۱۵x+۳۹ \\ ۳x-۱ \mid ۵(۳x-۱) \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} ۳x-۱ \mid ۴۴$$

اکنون توجه می‌کنیم که مقسوم علیه‌های مثبت ۴۴ که به شکل $۳x-۱$ هستند.