برگی از درخت المپیاد فیزیک

المپیادهای فیزیک در ایران

(مرحله سوم)

از سال ۸۴ تا ۸۷

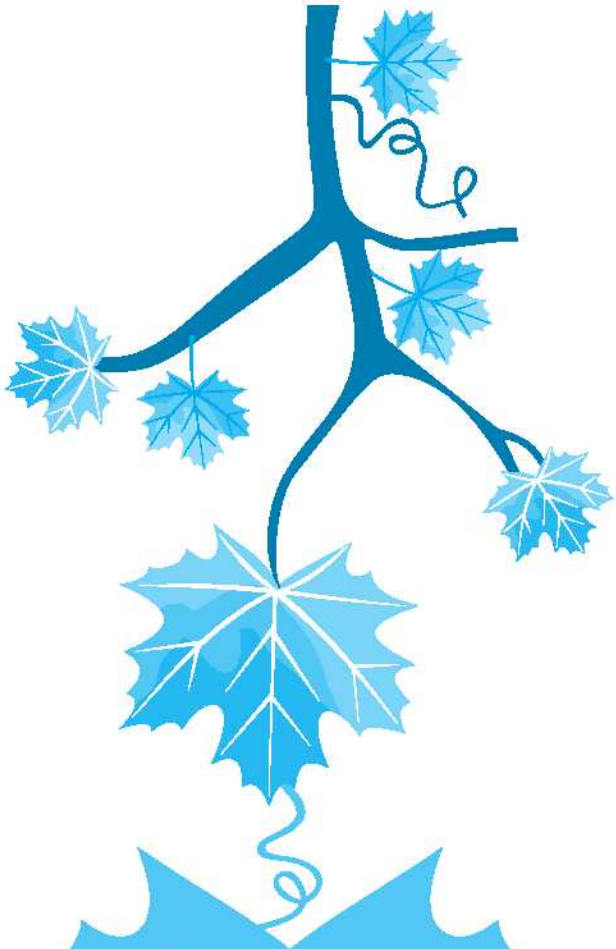
گردآوری و تألیف:

طه رجب‌زاده

محمدرضا سلطانی‌پور

پرنیان کسرایی

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده وهریک
از کتاب های این پروژه برگی ازآن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است. امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه باروواقعی بنشیند. فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.
التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزار می شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزار می شود المپیادهای علمی می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند(دراین مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده دردوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه خود رقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متأسفانه درسال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است درحالی که با تحقیقی که درسال های گذشته انجام شده است فعالیت درزمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب درکنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز ویا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را دریک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز دریک رشته از رشته های المپیاد فوایدبسیاری دارد که به تعدادی ازآن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب ازاین نعمت خدادادی محافظت شود به هردانش آموزی نیزاستعدادی داده است که باید شکوفا وبهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم ازخصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت دریکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی ازآن افراد راجع به اهدافشان ازاین فعالیت سؤال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته وانتخاب شدن درتیم ملی را درنهایت عنوان می کنند. چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنندو هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سؤال می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغناکننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغناکننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که درنهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و درحل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

۵. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برتر) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخراست از بدو تأسیس به فکرتدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال وبا بهره گیری ازاساتید مجربی که خود درسنواتی نه چندان دورمدال آوریکی ازالمپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین وتألیف شود که درآن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب ازاین پروژه که دراختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است ازتمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی نمایم و در نهایت نیز ازعوامل زحمت کش انتشارات اعم ازمشاورین، حروف چین ها، طراحان وکارمندان وکارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

المپیادهای علمی و ادبی همواره مورد توجه دانش‌آموزان علاقه‌مند به یادگیری جدی حوزه‌های علوم مختلف بوده است چرا که محتوای کتاب‌های درسی دوره‌ی دبیرستان به هیچ وجه پاسخ‌گوی این نیاز نیست. در این میان المپیاد فیزیک بر پایه‌ی یادگیری قسمت‌های اصلی فیزیک کلاسیک، سعی در فراهم آوردن زمینه‌ای دارد که دانش‌آموزان تا سطح خوبی مسلط به مفاهیم و قادر به حل مسائل کلاسیک این رشته شوند.

آزمون‌های مرحله‌ی سوم المپیاد فیزیک در سطح ترم دوم دوره‌ی کارشناسی رشته‌ی فیزیک برگزار می‌شود و طبیعی است کسانی که به کلاس‌های دوره‌ی تابستانی اکتفا کنند توان رقابت برای کسب مدال طلا را نخواهند داشت. از طرف دیگر، در اکثر موارد، دانش‌آموزان شهرستان‌ها دسترسی مطلوبی به کلاس‌های آمادگی المپیادهای علمی را ندارند و متاسفانه علی‌رغم استعداد بالا و پشتکار دانش‌آموزان شهرستانی اکثر مدال‌های طلا مربوط به شهر تهران است.

کتاب پیش رو سؤالات دوره‌ی تابستانی المپیاد فیزیک سال ۸۴ تا آزمون سوم دوره‌ی تابستانی سال ۸۷ را به‌همراه پاسخ مفصل فراهم آورده است. به شکلی که خوانندگان، اگر مسلط به قسمت مکانیک و الکتریسیته و مغناطیس کتاب هالیدی باشند، به راحتی می‌توانند مطالب این کتاب را بدون نیاز به معلم، دنبال کنند.

پیشنهاد ما این است که پس از حل هر سوال، درستی جواب آخر چک شود، به این ترتیب بعد از حل کردن یک یا دو دوره، دانش‌آموزان پیشرفت خود در حل مساله را به خوبی احساس می‌کنند.

اگرچه سطح سؤالات مرحله‌ی دوم از دوره‌ی تابستانی پایین‌تر است، تسلط بر آزمون‌های مرحله‌ی سوم، حل سوالات مرحله‌ی دوم را به مراتب آسان‌تر خواهد نمود. لذا مطالعه‌ی این کتاب برای کسب آمادگی مرحله‌ی دوم المپیاد فیزیک نیز به شدت توصیه می‌شود.

در پایان لازم می‌دانیم از باشگاه دانش‌پژوهان جوان که متولی برگزاری المپیادهای علمی و ادبی است به جهت در اختیار قرار دادن سوالات دوره‌ی تابستانی و از جناب آقای دکتر بهمن‌آبادی به سبب پشتیبانی و راهنمایی‌های ارزنده‌شان صمیمانه قدردانی نماییم.

امید است این کتاب کمکی هر چند اندک برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به رشته‌ی فیزیک فراهم آورد.

مؤلفین

فهرست مطالب

فصل اول — تابستان ۸۴ ..... ۱

۱.۱ آزمون اول المپیاد فیزیک ۱
۲.۱ آزمون دوم المپیاد فیزیک ۳
۳.۱ آزمون سوم المپیاد فیزیک ۴
۴.۱ آزمون چهارم المپیاد فیزیک ۶
۵.۱ آزمون پنجم المپیاد فیزیک ۹
۶.۱ آزمون نهایی المپیاد فیزیک ۱۳

فصل دوم — تابستان ۸۵ ..... ۱۹

۱.۲ آزمون اول المپیاد فیزیک ۱۹
۲.۲ آزمون دوم المپیاد فیزیک ۲۳
۳.۲ آزمون سوم المپیاد فیزیک ۲۵
۴.۲ آزمون چهارم المپیاد فیزیک ۲۸
۵.۲ آزمون پنجم المپیاد فیزیک ۳۲
۶.۲ آزمون نهایی المپیاد فیزیک ۳۵

فصل سوم — تابستان ۸۶ ..... ۴۱

۱.۳ آزمون اول المپیاد فیزیک ۴۱
۲.۳ آزمون دوم المپیاد فیزیک ۴۳
۳.۳ آزمون سوم المپیاد فیزیک ۴۵
۴.۳ آزمون چهارم المپیاد فیزیک ۴۷
۵.۳ آزمون پنجم المپیاد فیزیک ۴۹
۶.۳ آزمون نهایی المپیاد فیزیک. بخش اول ۵۱
۷.۳ آزمون نهایی المپیاد فیزیک. بخش دوم ۵۴

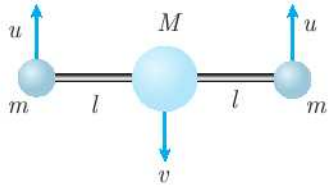
فصل چهارم — تابستان ۸۷ ..... ۵۹

۱.۴ آزمون اول المپیاد فیزیک ۵۹
۲.۴ آزمون دوم المپیاد فیزیک ۶۰
۳.۴ آزمون سوم المپیاد فیزیک ۶۴

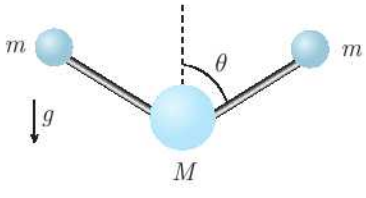
فصل پنجم — پاسخ آزمون‌ها ۶۷

۶.۱ آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

۱ دو جرم m همراه با دو میله‌ی صلب، به یک جسم به جرم M $(M \gg m)$ لولا شده‌اند. این مجموعه را مطابق شکل همراه با سرعت‌های اولیه‌ی u و v که به ترتیب به جرم‌های m و M می‌دهیم در میدان گرانشی یکنواخت g رها می‌کنیم. طول هر یک از دو میله‌ی صلب l است.



الف) زاویه‌ی میله‌ها را نسبت به امتداد قائم، $\theta(t)$، را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ به‌دست آورید.
توجه: میله‌ها بدون جرم‌اند و از هر گونه اصطکاک صرف‌نظر کنید.



ب) زمان رسیدن دو جرم m به یکدیگر را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ به‌دست آورید.

۲ فرض کنید از سطح صافی ذراتی با سرعت v_0 در راستای عمودی رو به بالا گسیل می‌شوند. سطح صاف را $y = 0$ بگیرید. به دلیل گرانش سرعت و چگالی ذرات بر حسب ارتفاع y، که جهت مثبت آن رو به بالا فرض شده است متغیر است. (g در راستای منفی محور y است.)

تعداد ذرات بر واحد حجم در $y = 0$ را n_0 (یکنواخت) فرض کنید. فرض کنید ذرات در بالاترین نقطه‌ی مسیرشان به نحوی جذب شده و دیگر به سطح باز نمی‌گردند.

الف) $n(y)$ یعنی تعداد ذرات بر واحد جم را به‌دست آورید.

حال فرض کنید کره‌ای به شعاع R و جرم M در داخل منطقه‌ای که $n(y)$ صفر نیست قرار دهیم. جرم هر یک از ذرات را m بگیرید و برخورد ذرات با کره را کشسان فرض کنید. R را کوچک فرض کنید به طوری که چگالی ذرات در کل نقاط کره ثابت باشد.

ب) شرطی برای تعادل کره به‌دست آورید و ارتفاع تعادل آن را محاسبه کنید.

ج) فرض کنید کره را از وضعیت تعادل به اندازه‌ی δy منحرف کنیم. معادل‌ی دیفرانسیلی برای $\delta y(t)$ تا مرتبه‌ی اول نسبت به δy و $\delta \dot{y}$ به‌دست آورید.

۳ یک پوسته‌ی کروی با چگالی بار سطحی $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ را در نظر بگیرید. مرکز کره مرکز مختصات، شعاع کره R، و θ زاویه‌ی بردار واصل مرکز به هر نقطه با محور z است. پتانسیل الکتریکی حاصل

از این پوسته را

$$\phi = \begin{cases} -Er\cos\theta & r < R \\ \dfrac{A\cos\theta}{r^2} & r > R \end{cases}$$

بگیرید، که E و A ثابت‌اند و r فاصله تا مرکز است.

الف) E و A را حساب کنید.

ناحیه‌ی بین دو کره به شعاع‌های a و b $(a < b)$ پر از یک دی‌الکتریک با پذیرفتاری χ است. درون کره‌ی به شعاع a و بیرون کره‌ی به شعاع b خالی است. این مجموعه را در یک میدان الکتریکی یکنواخت $E_0\hat{z}$ می‌گذاریم (یعنی میدان الکتریکی در نقاط دور از این کره‌ها یکنواخت است). به خاطر این میدان بارهای سطحی $\sigma_a\cos\theta$ روی کره‌ی به شعاع a و $\sigma_b\cos\theta$ روی کره‌ی به شعاع b القا می‌شود. σ_a و σ_b ثابت‌اند.

ب) پتانسیل الکتریکی در ناحیه‌های $r < a$، $a < r < b$ و $r > b$ را بر حسب σ_a، σ_b، a و E_0 به‌دست آورید.

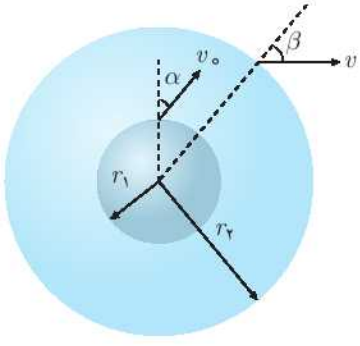
ج) σ_a و σ_b را حساب کنید و پتانسیل الکتریکی در کل فضا را به‌دست آورید (بر حسب a، b و χ، ...).

د) فرض کنید $\dfrac{b-a}{a} \ll 1$. یک ذره‌ی باردار به بار q و جرم m، از بیرون $(r = b)$ وارد دی‌الکتریک می‌شود. اندازه‌ی سرعت ذره هنگام وارد شدن به دی‌الکتریک v و زاویه‌ی بردار سرعت با راستای شعاعی α است. اندازه‌ی سرعت این ذره هنگام خروج از دی‌الکتریک $(r = a)$، تا مرتبه‌ی یک نسبت به $b - a$ چقدر است؟

فرض کنید ذره در نقطه‌ی $\theta = 0$ وارد دی‌الکتریک می‌شود.

۴ دو استوانه‌ی هم‌محور با شعاع‌های r_1 و r_2 $(r_2 > r_1)$ به اختلاف پتانسیل U متصل‌اند. استوانه‌ی داخلی، یک فلز داغ و توپر است که الکترون‌ها از آن با سرعت v_0 بیرون می‌آیند. استوانه‌ی بیرونی، r_2، یک توری فلزی است که الکترون‌ها به راحتی از آن می‌گذرند.

الف) اگر الکترون از استوانه‌ی داخلی با زاویه‌ی α نسبت به خط شعاعی خارج شود، سرعت v در هنگام خروج الکترون از استوانه‌ی بیرونی و زاویه‌ی آن هنگام خروج از استوانه نسبت به خط شعاعی، β، را به‌دست آورید. (مؤلفه‌ی z سرعت صفر است.)



فرض کنید n الکترون بر واحد زمان در صفحه‌هایی عمود بر محور استوانه از استوانه‌ی داخلی جدا شده و سرعت آن در جهت دلخواهی به طرف بیرون است (جهت خاصی در صفحه‌ی عمود بر محور استوانه مرجع نیست و احتمال خروج الکترون در تمام زوایا در این صفحه یکسان است یعنی احتمال خروج الکترون بین زاویه‌ی α و $\alpha + d\alpha$ به α بستگی ندارد).

ب) تعداد الکترون‌هایی که در زاویه‌ی α تا $\alpha + d\alpha$ از استوانه‌ی داخلی بر واحد زمان خارج می‌شود چند تا است و تعداد الکترون‌هایی که از استوانه‌ی خارجی بر واحد زمان در زاویه‌ی β تا $\beta + d\beta$ بیرون می‌آیند چند تا است؟

حال فرض کنید وقتی الکترون‌ها از استوانه‌ی r_2 خارج می‌شوند تحت نیروی $\vec{F} = \eta \vec{v} \times \hat{z}$ قرار بگیرند، که در آن $\hat{z}$ بردار یکه در راستای محور استوانه‌ها و به سمت داخل صفحه‌ی کاغذ است و η مقدار ثابتی است. در اثر این نیرو الکترون‌ها روی دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کنند. جرم الکترون را m بگیرید.

ج) شعاع R را به‌دست آورید.

د) حداکثر فاصله‌ای که الکترون‌ها می‌توانند از محور استوانه‌ها پیدا کنند چقدر است؟

اکنون فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r_3 $(r_3 > r_2 > r_1)$ هم‌محور با استوانه‌های قبلی هم وجود دارد که الکترون‌هایی که به آن می‌رسند آشکار می‌شوند.

ه) ماکزیمم مقدار U چقدر باشد تا هیچ الکترونی توسط آشکارساز روی استوانه‌ی r_3 آشکار نشود؟

و) برای آن‌که تمام الکترون‌های خارج شده از استوانه‌ی r_1 به آشکارساز برسند، حداقل مقدار U چقدر باید باشد؟

ز) فرض کنید $eU \gg \frac{1}{2}mv_0^2$. در این حالت مقدار بار رسیده بر واحد زمان به استوانه‌ی r_3 را به‌دست آورید.

۵ در این مسئله می‌خواهیم با مدلی ساده، بازی دومینو را بررسی کنیم. چیدمان این بازی، تعدادی قطعه‌ی چوبی هم‌شکل (دومینو) است که در فواصل یکسان از هم به صورت عمودی قرار داده

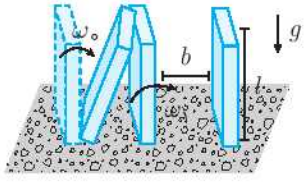
شده‌اند. بازی با حرکت دادن اولین دومینو به سمت دومینوهای دیگر شروع می‌شود و با برخوردهای پیاپی آن‌ها ادامه پیدا می‌کند. ابعاد طولی مورد نیاز، در شکل مشخص شده‌اند. به عنوان مدلی ساده برای بررسی کیفی این بازی، چند فرض ساده می‌کنیم:

۱) قطعات کاملاً همگن‌اند و ضخامت آن‌ها قابل چشم‌پوشی است.

۲) پای دومینوها هنگام حرکت و برخوردها نمی‌لغزد و بلند نمی‌شود.

۳) هر دومینو تنها یک برخورد انجام می‌دهد و در برخوردهای بعدی نقشی ندارد.

۴) از اصطکاک میان دومینوها در لحظه‌ی برخورد می‌توان چشم‌پوشی کرد.



سرعت زاویه‌ای دومینوی kام درست پس از برخورد دومینوی $k-1$ام با آن، ω_k است. این دومینو پس از سقوط در میدان گرانشی با دومینوی بعدی برخورد ناکشسان انجام می‌دهد.

الف) کم‌ترین انرژی جنبشی مجموعه‌ی دومینوی kام و $k+1$ام را درست پس از برخورد به‌دست آورید. $(E^k_{\min})$

ب) فرض کنید انرژی جنبشی این مجموعه پس از برخورد ناکشسان به صورت زیر باشد:

$$E^{(k)} = E^{(k)}_{\min} + \eta^2 (E^{(k)}_0 - E^{(k)}_{\min}) \qquad (1)$$

که در آن η عددی ثابت در بازه‌ی $(0,1)$ و $E^{(k)}_0$ انرژی جنبشی مجموعه‌ی دو دومینو پیش از برخورد است. رابطه‌ی بازگشتی برای سرعت زاویه‌ای دومینوی $k+1$ام درست پس از برخورد دومینوی kام با آن (ω_{k+1}) بر حسب ω_k و با حل آن رابطه‌ی صریح برای ω_k بر حسب سرعت زاویه‌ای دومینوی اول (ω_0) و پارامترهای مسئله به‌دست آورید.

ج) رفتار ω_k را در حد $k \to \infty$ حساب کنید.

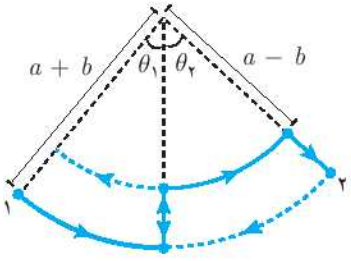
د) سرعت خطی انتشار برخوردها را در حد $k \to \infty$ تا اولین مرتبه‌ی ناصفر از b/l به‌دست آورید. می‌توانید پاسخ خود را با استفاده از معکوس تابع $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ بیان کنید.

راهنمایی: پاسخ عمومی معادله‌ی دیفرانسیل زیر:

$$\ddot{x} - \beta^2 x = 0 \qquad (2)$$

به صورت $x(t) = Ae^{\beta t} + Be^{-\beta t}$ است که در آن A و B با توجه به شرایط اولیه تعیین می‌شوند.

۶ یک نفر می‌خواهد تاب‌بازی کند. او با تغییر مکان مرکز جرم خود دامنه‌ی نوسان تاب را زیاد می‌کند. مطابق شکل در نیمی از حرکت فاصله‌ی مرکز جرم او از نقطه‌ی آویز $a+b$ و در نیم دیگر این فاصله $a-b$ است. دامنه‌ی حرکت او در نقطه‌ی ۱ را θ_1 و در نقطه‌ی ۲، θ_2 بگیرید. حرکت او از ۱ به ۲ را یک گام بگیرید. او حرکت خود در گام اول را به چند بخش تقسیم می‌کند:

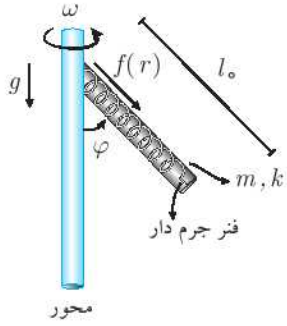


۱) ابتدا از نقطه‌ی ۱ روی مسیر دایره‌ای با شعاع $a+b$ شروع به حرکت می‌کند.
۲) در پایین‌ترین نقطه از مسیر، فاصله‌اش از نقطه‌ی آویز را به $a-b$ تغییر می‌دهد.
۳) سپس روی دایره‌ای به شعاع $a-b$ حرکت می‌کند.
۴) بالاخره در انتها فاصله‌ای را به $a+b$ می‌رساند.
۵) او در گام‌های بعدی مشابه همین کار را ادامه می‌دهد.

الف) با فرض این‌که در ابتدا از زاویه‌ی θ_1 رها شده باشد، θ_2 را بر حسب θ_1، a و b به‌دست آورید.

ب) پس از چند بار تاب خوردن (چند گام) می‌تواند خودش را به بالاترین نقطه برساند و دور کامل بزند.

۷ لوله‌ی صلب بدون جرمی را که فنر جرم‌داری به جرم m و ضریب سختی k و طول آزاد l_0 در داخل آن قرار دارد، در نظر بگیرید. این لوله از یک انتها به محوری که با سرعت زاویه‌ای ω در حال چرخش است، متصل شده است و می‌تواند آزادانه در صفحه‌ی شامل لوله و محور حرکت کند (شکل ۱). (توجه کنید که فنر فقط در راستای میله می‌تواند تغییر طول بدهد.)



الف) ضریب سختی فنر (k) را بی‌نهایت بگیرید و زاویه‌ی تعادل در این حالت را محاسبه کنید. (φ_0)

در صورت بی‌نهایت نبودن ضریب سختی k زاویه‌ی تعادل (φ) نسبت به حالت قبل تغییر می‌کند. می‌خواهیم این زاویه را به‌دست آوریم. برای این منظور تابع $f(r)$، $(0 < r < l_0)$

را تعریف می‌کنیم که بیانگر مکان جزء کوچکی از فنر است که در حالت (الف) در فاصله‌ی r از تکیه‌گاه قرار داشته است.

ب) معادلات لازم را برای جزء کوچکی از فنر در حالت تعادل بنویسید و با توجه به آن‌ها معادله‌ی دیفرانسیلی برای $f(r)$ به‌دست آورید. (این معادله شامل $f(r)$ و مشتقات آن، ثابت‌های مسئله و زاویه‌ی تعادل φ می‌باشد.)

حال فرض می‌کنیم که k بسیار بزرگ است به طوری که $\frac{۱}{k}$ بسیار کوچک است.

ج) معادله‌ی دیفرانسیل به‌دست آمده در قسمت (ب) را حل کرده و جواب را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{۱}{k}$ بسط دهید. حال با اعمال شرایط مرزی مناس، تابع $f(r)$ را به طول کامل (همراه با ضرایب) تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{۱}{k}$ به‌دست آورید.

د) زاویه‌ی تعادل جدید را تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{۱}{k}$ و ثابت‌های مسئله به‌دست آورید.

* جواب معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن $\frac{d^۲y}{dx^۲} + a^۲y = b$ (که a و b ثابت‌اند) به صورت $y = A\sin(ax + B) + \frac{b}{a^۲}$ است که A و B ضرایب دلخواهی هستند که با توجه به شرایط مرزی مشخص می‌شوند.

$$\langle \delta U \rangle = \frac{mgx_0^2}{4a}\left(\frac{2\delta x_0}{x_0} - \frac{\delta a}{a}\right)$$

ه) نیروی N دو مؤلفه دارد. در راستای y و x را جداگانه به‌دست آورده و بعد میانگین زمانی می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} N_y &= N\cos\theta \\ N_x &= N\sin\theta \end{aligned}\right\} \xrightarrow{(2)} \begin{cases} N_y = m\left(g + \dfrac{x_0^2\omega^2}{a}(\sin\omega t\cos\omega t)\right) \\ N_x = -mx_0\sin\omega t \end{cases}$$

$$\langle W_x \rangle = \langle -\int mx_0\omega^2 \sin\omega t dx_0 \rangle = \langle -\frac{mx_0^2}{2}\omega^2\sin\omega t\rangle = 0$$

$$\delta W_y = \delta W_N = \delta\left(m(g + \frac{\omega^2 x_0^2}{2a}(\sin 2\omega t))y\right)$$

$$= \delta(mg\Delta y) = \frac{mgx_0^2\sin^2\omega t}{a}\left(\frac{2\delta x_0}{x_0} - \frac{\delta a}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \langle \delta W_N \rangle = \frac{mgx_0^2}{2a}\left(\frac{2\delta x_0}{x_0} - \frac{\delta a}{a}\right)$$

و)

$$\langle \delta W_N \rangle + \langle \delta U \rangle = \delta\langle k \rangle$$

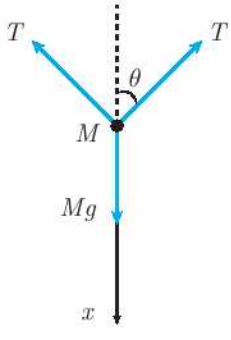
$$\left(\frac{2\delta x_0}{x_0} - \frac{\delta a}{a}\right)\frac{mgx_0^2}{2a} + \left(\frac{2\delta x_0}{x_0} - \frac{\delta a}{a}\right)\frac{mgx_0^2}{2a} = \frac{mgx_0\omega}{2a}\delta x_0$$

$$\Rightarrow \frac{x_0\delta x_0}{a} = \frac{3}{4}\frac{\delta a}{a^2}x^2 \Rightarrow \frac{\delta a}{a} = \frac{4}{3}\frac{\delta x}{x}$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{4}{3}} = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) \Rightarrow \boxed{ax^{-\frac{4}{3}} = \text{const}}$$

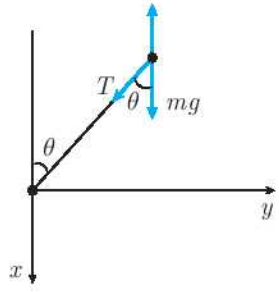
۶.۵ پاسخ آزمون نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۴)

۱ الف) با توجه به نیروهای وارد بر جرم M داریم:



$$Mg - 2T\cos\theta = M\ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} = g - \frac{2T}{M}\cos\theta \qquad (1)$$



اکنون حرکت جرم m را در دستگاه جرم M بررسی می‌کنیم:

$$T - m\ddot{x}\cos\theta + mg\cos\theta = ml\dot{\theta}^2$$
$$mg\sin\theta - m\ddot{x}\sin\theta = ml\ddot{\theta}$$

با قرار دادن معادله‌ی (۱) در معادلات به‌دست آمده به معادلات زیر می‌رسیم.

$$T + 2\frac{m}{M}T\cos^2\theta = ml\dot{\theta}^2$$
$$\frac{2m}{M}T\sin\theta\cos\theta = ml\ddot{\theta}$$

با حذف T از دو معادله‌ی بالا به یک معادله‌ی دیفرانسیل برای θ می‌رسیم:

$$\frac{1 + \frac{2m}{M}\cos^2\theta}{\frac{2m}{M}\sin\theta\cos\theta} = \frac{\dot{\theta}^2}{\ddot{\theta}}$$
$$(1 + \frac{2m}{M}\cos^2\theta)\ddot{\theta} = \frac{2m}{M}\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2$$

$\theta = \theta_0 + \delta\theta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\ddot{\theta}_0 + \delta\ddot{\theta} + \frac{2m}{M}\cos^2\theta_0\ddot{\theta}_0 = \frac{2m}{M}\sin\theta_0\cos\theta_0\dot{\theta}_0^2$$
$$\ddot{\theta}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_0 = -\frac{u+v}{l} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} - (\frac{u+v}{l})t$$
$$\delta\ddot{\theta} = \frac{m}{M}\sin 2\theta_0\dot{\theta}_0^2 \Rightarrow \delta\ddot{\theta} = \frac{m}{M}(-\frac{u+v}{l})^2\sin(\pi - \frac{2(u+v)}{l}t)$$
$$\delta\ddot{\theta} = \frac{m}{M}(\frac{u+v}{l})^2\sin\big(2(\frac{u+v}{l})t\big)$$
$$\delta\dot{\theta} - 0 = \frac{m}{M}(\frac{u+v}{l})^2(\frac{-l}{2(u+v)})(\cos\frac{2(u+v)}{l}\Big|_0^t$$
$$\delta\dot{\theta} = \frac{m}{M}\frac{u+v}{2l}(1 - \cos\frac{2(u+v)}{l}t)$$
$$\delta\theta = \frac{m}{M}\frac{u+v}{2l}(t - \frac{l}{2u+2v}\sin\frac{2(u+v)}{l}t)$$

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{u+v}{l}t + \frac{m}{M}\frac{u+v}{2l}\big(t - \frac{l}{2(u+v)}\sin(\frac{2(u+v)}{l}t)\big)}$$

ب) در زمان رسیدن دو جرم m، $\theta = 0$ است و T را برابر عبارت روبه‌رو تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{m}{M}$ می‌گیریم:

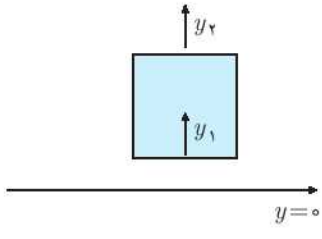
$$T = T_0 + \delta T$$

$$0 = \frac{\pi}{2} - (\frac{u+v}{l})(T_0 + \delta T_0)$$
$$+ \frac{m}{M}(\frac{u+v}{2l})\left(T_0 + \delta T_0 - \frac{l}{2(u+v)}\sin\left(\frac{2(u+v)}{l}(T_0 + \delta T_0)\right)\right)$$
$$T_0 = \frac{l\pi}{2(u+v)}$$
$$-(\frac{u+v}{l})\delta T_0 + \frac{m}{M}(\frac{u+v}{2l})(T_0 - \frac{l}{2(u+v)}\sin(\frac{2(u+v)}{l}T_0)) = 0$$
$$\delta T_0 = \frac{m}{2M}\left[\frac{l\pi}{2(u+v)} - \frac{l}{2(u+v)}\sin\left(\frac{2(u+v)}{l}\times\frac{l\pi}{2(u+v)}\right)\right]$$
$$\Rightarrow \delta T_0 = \frac{ml\pi}{4M(u+v)} \Rightarrow \boxed{T = \frac{l\pi}{2(u+v)}[1 + \frac{m}{2M}]}$$

۲ **الف)** با توجه به صورت مسئله مطابق شکل چگالی جریان به صورت زیر است:

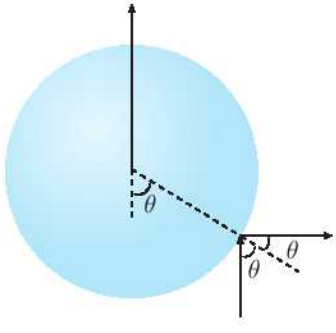
$$\vec{J} = mn_y v_y \hat{y}$$

با توجه به شکل و این‌که بر حسب زمان چگالی جرم در هیچ نقطه‌ای تغییر نمی‌کند مطابق معادله‌ی پیوستگی داریم:



$$\nabla.\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \Rightarrow \nabla.\vec{J} = 0 \Rightarrow \vec{J} = \text{const}$$
$$\Rightarrow \vec{J}_1 = \vec{J}_2$$
$$n_{(y)}v_y = n_0 v_0 \Rightarrow \boxed{n_{(y)} = \frac{n_0}{\sqrt{1 - \frac{2gy}{v_0^2}}}}$$

ب) نیروی ناشی از برخورد ذرات به کره را محاسبه می‌نماییم.



$$dF_y\Delta t = dm\,2v\cos\theta(\cos\theta)$$
$$\Rightarrow dF_y\Delta t = nv\Delta t dA\cos\theta 2v\cos^2\theta m$$
$$dF_y = 2nv^2\cos^3\theta(R^2 d\theta\sin\theta d\varphi\rho)m$$
$$\Rightarrow F_y = mn_0\pi R^2 v_0\sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

با توجه به تعادل کره داریم:

$$Mg = mn_{\circ}\pi R^{۲} v_{\circ}\sqrt{v_{\circ}^{۲} - ۲gy} \Rightarrow \boxed{y = \frac{۱}{۲g}\left(v_{\circ}^{۲} - \left(\frac{Mg}{mn_{\circ}\pi R^{۲} v_{\circ}}\right)^{۲}\right)}$$

ج) با توجه به نیروهای وارد بر ذره و این‌که $y = y_{\circ} + \delta y$ داریم:

$$m\delta\ddot{y} = -Mg + n_{\circ} m v_{\circ}\pi R^{۲}\sqrt{v_{\circ}^{۲} - ۲g(y_{\circ} + \delta y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta\ddot{y} = \left(\frac{-(n_{\circ} m v_{\circ}\pi R^{۲})^{۲}}{mM}\right)\delta y}$$

۳ الف) با توجه به شرایط مرزی در نقطه‌ی $r = R$ داریم:

$$\begin{cases} \varphi(R_{+}) = \varphi(R_{-}) \\ -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R_{+}} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R_{\circ}} = \dfrac{\sigma_{\circ}}{\epsilon_{\circ}}\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ER\cos\theta = \dfrac{A\cos\theta}{R^{۲}} \\ \left(\dfrac{۲A\cos\theta}{R^{۳}} - E\cos\theta\right) = \dfrac{\sigma_{\circ}}{\epsilon_{\circ}}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \dfrac{-A}{R^{۳}} \\ -E + \dfrac{۲A}{R^{۳}} = \dfrac{\sigma_{\circ}}{\epsilon_{\circ}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma_{\circ}}{۳\epsilon_{\circ}}} \quad , \quad \boxed{A = -\frac{\sigma_{\circ} R^{۳}}{۳\epsilon_{\circ}}}$$

ب) با توجه به قسمت قبل و با توجه به اصل برهم‌نهی (جمع پتانسیل‌های ناشی از σ_a، σ_b و $E_{\circ}$) برای پتانسیل در کل فضا داریم:

$$V = \begin{cases} -E_{\circ} r\cos\theta - \dfrac{(\sigma_a + \sigma_b)}{۳\epsilon_{\circ}} r\cos\theta & r < a \\ -E_{\circ} r\cos\theta - \dfrac{\sigma_b r}{۳\epsilon_{\circ}}\cos\theta - \dfrac{\sigma_a a^{۳}\cos\theta}{۳\epsilon_{\circ} r^{۲}} & a \le r < b \\ -E_{\circ} r\cos\theta - \dfrac{(\sigma_a a^{۳} + \sigma_b b^{۳})\cos\theta}{۳\epsilon_{\circ}} & b \le r \end{cases}$$

ج) پس با توجه به شرایط مرزی در $r = a$ و $r = b$ داریم:

$$\begin{cases} D(b^{+}) - D(b^{-}) = ۰ \\ D(a^{+}) - D(a^{-}) = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\epsilon_{\circ}\dfrac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=b^{+}} + \epsilon_{\circ}(\chi + ۱)\dfrac{\partial v}{\partial r}\Big|_{r=b^{-}} = ۰ \\ -\epsilon_{\circ}(\chi + ۱)\dfrac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=a^{+}} + \epsilon_{\circ}\dfrac{\partial V}{\partial r}\Big|_{r=a^{-}} = ۰ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\left(E_0\cos\theta + \dfrac{2(\sigma_a a^3 + \sigma_b b^3)}{3\epsilon_0 b^3}\cos\theta\right) \\ +(\chi+1)\left(-E_0\cos\theta - \dfrac{\sigma_b}{3\epsilon_0}\cos\theta + \dfrac{2\sigma_a a^3}{3\epsilon_0 b^3}\cos\theta\right) = 0 \\ -(\chi+1)\left(-E_0\cos\theta - \dfrac{\sigma_b}{3\epsilon_0}\cos\theta + \dfrac{2\sigma_a a^3}{3\epsilon_0 a^3}\cos\theta\right) \\ +\left(-E_0\cos\theta - \dfrac{(\sigma_a+\sigma_b)}{3\epsilon_0}\cos\theta\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\chi+1)\left(\dfrac{2\sigma_a a^3}{3\epsilon_0 b^3} - \dfrac{\sigma_b}{3\epsilon_0} - E_0\right) + E_0 - \dfrac{2\sigma_a a^3}{3\epsilon_0 b^3} - \dfrac{2\sigma_b}{3\epsilon_0} = 0 \\ (\chi+1)\left(\dfrac{-2\sigma_2}{3\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_b}{3\epsilon_0} + E_0\right) - E_0 - \dfrac{\sigma_a}{3\epsilon_0} - \dfrac{\sigma_b}{3\epsilon_0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2\chi a^3}{b^3}\sigma_a - (\chi+3)\sigma_b = 3\epsilon_0 E_0 \chi \\ \sigma_a(\chi+3) - \sigma_b\chi = 3\epsilon_0 E_0 \chi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \sigma_b &= 3\epsilon_0\chi E_0\left[\frac{\frac{2\chi a^3}{b^3} - (\chi+3)}{(\chi+3)^2 + 2\chi^2\frac{a^3}{b^3}}\right] \\ \sigma_a &= 9\epsilon_0\chi E_0\left[\frac{1}{(\chi+3)^2 - 2x^2\frac{a^3}{b^3}}\right] \end{aligned}}$$

با توجه به مقدارهای به‌دست آمده برای σ_a و σ_b و جایگذاری آن‌ها در V داریم:

$$V = \begin{cases} -E_0 r\cos\theta\left[1 + \chi^2\left(\dfrac{\frac{2a^3}{b^3} - 1}{(\chi+3)^2 - \frac{2\chi^2 a^3}{b^3}}\right)\right] & r < a \\ -E_0 r\cos\theta\left[1 + \chi\left(\dfrac{\frac{2\chi a^3}{b^3} - (\chi+3) + \frac{3a^3}{r^3}}{(\chi+3)^2 - \frac{2\chi^2 a^3}{b^3}}\right)\right] & a \le r < b \\ -E_0 r\cos\theta\left[1 + \dfrac{\chi}{r^3}\left(\dfrac{(2\chi+3)a^3 - (\chi+3)b^3}{(\chi+3)^2 - \frac{2\chi^2 a^3}{b^3}}\right)\right] & b \le r \end{cases}$$

د) با توجه به رابطه‌ی پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV(b) = \frac{1}{2}mv_x^2 + qV(a)$$

$$\Rightarrow v_x^2 = v^2 + \frac{2q}{m}(V(b) - V(a))$$

$$\Rightarrow v_x^2 = v^2 - \frac{2qE_0}{m}\left(b + \frac{\chi}{b^2}\left(\frac{(2\chi+3)a^3 - (\chi+3)b^3}{(\chi+3)^2 - \frac{2\chi^2 a^3}{b^2}}\right) - a - a\chi^2\left(\frac{\frac{2a^3}{b^3} - 1}{(\chi+3)^2 - \frac{2\chi^2 a^3}{b^3}}\right)\right)$$

حال در معادله‌ی بالا $b = a + \delta$ می‌گیریم که در آن δ را در آخر برابر $b - a$ قرار می‌دهیم.

$$v_x^2 = v^2 - \frac{2qE_0}{m}\left(\delta + \frac{\chi(2\chi+3)\frac{a^2}{a^2(1+\frac{\delta}{a})^2} - \chi(\chi+3)(a+\delta) - \frac{2a^6\chi^2}{a^2(1+\frac{\delta}{a})^2} + a\chi^2}{(\chi+3)^2 + \frac{2\chi^2a^2}{a^2(1+\frac{\delta}{a})^2}}\right)$$

$$= v^2 - \frac{2qE_0}{m}\left(\delta + \frac{\chi(2\chi+3)a(1-\frac{2\delta}{a}) - \chi(\chi+3)a(1+\frac{\delta}{a}) - 2a\chi^2(1-\frac{2\delta}{a}) + a\chi^2}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2(1-\frac{2\delta}{a})}\right)$$

$$= v^2 - \frac{2qE_0}{m}\delta\left(1 - \frac{2(\chi)(2\chi+3) + \chi(\chi+3) - 6\chi^2}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)$$

$$= v^2 - \frac{2qE_0}{m}\delta\left(1 + \frac{\chi^2 - 9\chi}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)$$

$$= v\left(1 - \frac{qE_0\delta}{mv^2}\left(\frac{9-3\chi}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_x = v\left(1 - \frac{3qE_0(b-a)}{mv^2}\left(\frac{3-\chi}{(\chi+3)^2 - 2\chi^2}\right)\right)}$$

۴ **الف)** با توجه به پایستگی انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - eU \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}} \quad (1)$$

نیرو مرکزگراست بنابراین:

$$r^2\dot{\theta} = \cos t \Rightarrow r_1 v_0 \sin\alpha = r_2 v \sin\beta \Rightarrow \sin\beta = \frac{r_1 v_0}{r_2 v}\sin\alpha \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{\dot{\beta} = \sin^{-1}\left[\frac{r_1 v_0}{r_2\sqrt{v_0^2 + \frac{2eU}{m}}}\sin\alpha\right]}$$

ب) با توجه به این‌که احتمال خروج در همه‌ی زاویه‌ها یکسان است پس

$$\boxed{n_\alpha = \frac{d\alpha}{\pi}n}$$

از آن‌جایی که در مسیر حرکت الکترون اضافه نمی‌شود پس تمام الکترون‌هایی که بین زاویه‌ی α و $d\alpha + \alpha$ خارج شده‌اند از زاویه‌ی β و $\beta + d\beta$ بیرون می‌آیند:

$$n_\beta = \frac{d\alpha}{\pi}n \quad (1)$$

با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\sqrt{(\frac{r_1}{r_2})^2\frac{v_0^2}{v_0^2 + \frac{2eU}{m}} - \sin^2\beta}}{\cos\beta} \quad (2)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \boxed{n_\beta = \frac{n}{\pi}\frac{\cos\beta d\beta}{\sqrt{(\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \frac{v_۰^۲}{v_۰^۲+\frac{۲eU}{m}} - \sin^۲\beta}}}$$

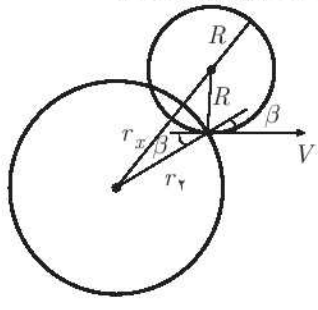
ج) با توجه به قانون دوم نیوتن داریم:

$$F = \frac{mv^۲}{R} \Rightarrow R = \frac{m}{F}v^۲$$

با توجه به قسمت الف و معادله‌ی بالا:

$$\boxed{R = \frac{m}{\eta}(v_۰^۲ + \frac{۲eU}{m})^{\frac{۱}{۲}}}$$

د) با توجه به شکل بیش‌ترین فاصله‌ی الکترون برابر است با:



$$d = R + r_x \qquad (۱)$$

از طرفی با توجه به هندسه‌ی شکل:

$$r_x = \sqrt{R^۲ + r_۲^۲ - ۲r_۲R\cos(\beta + \frac{\pi}{۲})}$$

$$r_x = \sqrt{R^۲ + r_۲^۲ + ۲r_۲R\sin\beta} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow d = R + \sqrt{R^۲ + r_۲ + ۲r_۲R\sin\beta}$$

با توجه به قسمت‌های قبل با جایگذاری R در معادله‌ی بالا داریم:

$$\boxed{d = \frac{m}{\eta}(v_۰^۲ + \frac{۲eU}{m})^{\frac{۱}{۲}} + \sqrt{\frac{m^۲}{\eta^۲}(v_۰^۲ + \frac{۲eU}{m}) + r_۲^۲ + \frac{۲m}{\eta}v_۰ r_۱ \sin\alpha}}$$

ه) پس باید شرط زیر برقرار باشد:

$$d_{\max} < r_۳$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\eta}(v_0^2+\frac{2eU}{m})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(\frac{m}{\eta})^2(v_0^2+\frac{2eU}{m})+e_2^2+\frac{2m}{\eta}v_0 r_1}<r_3$$

$$\frac{-2mr_3}{\eta}\sqrt{v_0^2+\frac{2eU}{m}}>r_2^2-r_3^2+\frac{2mv_0 r_1}{\eta}$$

$$\frac{2eU}{m}<-v_0^2\left(v_0\frac{r_1}{r_3}-\frac{\eta}{2mr_3}(r_3^2-r_2^2)\right)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\max}=\frac{m}{2e}\left[\left(v_0\frac{r_1}{r_3}-\frac{\eta}{2mr_3}(r_3^2-r_2^2)\right)^2-v_0\right]}$$

و) برای آن‌که همه‌ی الکترون‌ها به آشکارساز برسند باید $r_3 < v_{\min}$ باشد.

$$r_3<\frac{m}{\eta}(v_0^2+\frac{2eU}{m})^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(\frac{m}{\eta})^2(v_0^2+\frac{2eU}{m})+r_2^2}$$

$$\frac{-2mr_3}{\eta}\sqrt{v_0^2+\frac{2eU}{m}}<r_2^2-r_3^2$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{\min}=\frac{m}{2e}\left[\frac{\eta(r_3^2-r_2^2)^2}{2mr_3}-v_0^2\right]}$$

ز) چون در طی مسیر الکترون به مقدار بارها اضافه نمی‌شود بنابراین مقدار بار رسیده بر واحد زمان برابر همان n می‌باشد.

۵ با محاسبه‌ی ω اولیه و استفاده از پایستگی تکانه در راستای x، سرعت هرکدام بعد از برخورد را محاسبه کرده و E را به‌دست می‌آوریم.

الف) انرژی جنبشی دومینوی اول قبل از برخورد:

$$T_{\min}^{(k-1)}=\frac{mg}{2}(l-\sqrt{l^2-b^2})=\frac{1}{2}ml^2\frac{\omega^2}{3}$$

$$\Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{3}{l^2}(l-l^2-b^2)}$$ سرعت زاویه‌ای قبل برخورد

پایستگی تکانه در راستای x: (v' سرعت نقطه‌ی برخورد است.)

$$\left.\begin{aligned} p_x &= p'_x \\ p'_x &= \frac{mv'}{2}+mv'=\frac{mv'}{2}(1+\frac{l}{2\sqrt{l^2-b^2}}) \\ p_x &= \frac{ml\omega}{2}\sqrt{1-\frac{b^2}{l^2}} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow v'=l\omega\sqrt{1-\frac{b^2}{l^2}}(1+\frac{l}{2\sqrt{l^2-b^2}})^{-1} \qquad (*)$$

$$E_{\min}=\frac{1}{6}ml^2(\frac{v'^2}{l^2-b^2}+\frac{v'^2}{l^2-b^2})=\frac{1}{3}\frac{ml^2v'^2}{l^2-b^2}$$

با فرض این‌که دومینوی اول بدون سرعت اولیه می‌افتد.

$$\xrightarrow{(*)} \boxed{E^{(k)}_{\min} = \frac{mg}{3} \times \frac{l - \sqrt{l^2 - b^2}}{(1 + \frac{l}{2\sqrt{l^2 - b^2}})^2}}$$

ب)

$$\left.\begin{array}{ll} I\omega_k'^2 = I\omega_k^2 + 2\Delta E & : \text{انرژی} \\ E^{(k)} = E^{(k)}_{\min} + \eta^2[E^{(k)}_0 - E^{(k)}_{\min}] & \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta E = \eta^2(\Delta E_0)$$

این نشان می‌دهد که انرژی کل در هر مرحله ضریبی از مرحله‌ی قبل است. یعنی ω^2 همچنین ویژگی خواهد داشت.

$$\omega_{k+1} = \alpha\omega'_k = \alpha\sqrt{\omega_k^2 + \frac{2\Delta E}{I}}$$

تعریف می‌کنیم: $u_{k+1} := \omega^2_{k+1}$ و $C := \alpha^2(\frac{2\Delta E}{I})$

$$\omega^2_{k+1} = \alpha^2\omega_k^2 + \alpha^2(\frac{2\Delta E}{I})$$

$$u_{k+1} = \alpha u_k + c$$

با حل این رابطه‌ی بازگشتی خواهیم داشت:

$$\omega_n^2 = \frac{c}{1-\alpha} + \alpha^n\omega_0^2 \qquad (*)$$

حال با جایگذاری α بر حسب η داریم:

(چرا $\alpha \neq \eta$؟ اگر در رابطه‌ی $E^{(k)} - E^{(k)}_{\min} = \eta^2(E^{(k)}_0 - E^{(k)}_{\min})$، $E^{(0)}_{\min} = E^{(0)}$ باشند آن‌گاه $E^{(k)} = E^{(k)}_{\min}$ خواهد بود. پس در واقع $\Delta E = \eta^2\Delta E_0$. از تشابه این رابطه با $\omega^2_{k+1} = \alpha^2\omega'^2_k$ داریم:)

$$\eta^2 = \alpha^2\frac{ml^2}{6}$$

$$\xrightarrow{(*)} \omega_n^2 = 4\eta^2\Delta E_0 + \omega_0^2(\frac{6\eta^2}{ml^2})^{\frac{n}{2}} \qquad (1)$$

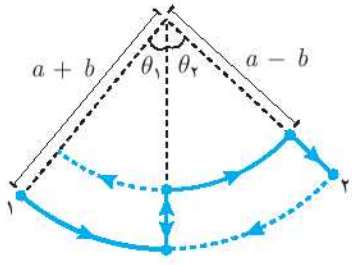
$$\Delta E_0 = E^{(0)}_{\min} - \frac{ml^2\omega^2}{6} \qquad (2)$$

$$\text{و از بخش الف} \quad : \quad \Delta E_0 = \frac{m}{3}\left(g.\frac{l - \sqrt{l^2 - b^2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}} - \frac{l^2\omega^2}{2}\right) \qquad (3)$$

از سه رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2(\frac{6\eta^2}{ml^2})^{\frac{n}{2}} + \frac{4\eta^2 m}{3}\left(g\frac{l - \sqrt{l^2 - b^2}}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{l^2}}} - \frac{l^2\omega^2}{2}\right)$$

۶ **الف)** با توجه به شکل زیر و پایستگی انرژی در مسیر ۱ و ۳ و با توجه به شعاعی بودن نیرو در مسیر ۲ و ثابت بودن $r^۲\dot{\theta} = \text{const}$ یا $rv = \text{const}$ داریم:



$$\begin{cases} -mg(a+b)\cos\theta_۱ = -mg(a+b) + \frac{۱}{۲}mv_۱^۲ \\ (a+b)v_۱ = (a-b)v_۲ \\ -mg(a-b) + \frac{۱}{۲}mv_۲^۲ = -mg(a-b)\cos\theta_۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)\cos\theta_۱ = a+b-\frac{v_۱^۲}{۲g} \\ -(a-b)\cos\theta_۲ = -(a-b) + \frac{v_۱^۲}{۲g}(\frac{a+b}{a-b})^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^۳}{(a-b)^۲}\cos\theta_۱ - (a-b)\cos\theta_۲ = \frac{(a+b)^۳}{(a-b)^۲} - (a-b)$$

$$\Rightarrow (\frac{a+b}{a-b})^۳(\cos\theta_۰ - ۱) = \cos\theta_۲ - ۱$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_۲ = \cos^{-۱}\left[۱ - (\frac{a+b}{a-b})^۳(۱-\cos\theta_۰)\right]}$$

ب) بنابراین کافی است رابطه‌ای برای θ_n بر حسب $\theta_۱$ به‌دست آوریم بنابراین با توجه به رابطه‌ی بین $\theta_۰$ و $\theta_۲$ می‌توان رابطه‌ای نیز برای $\theta_۲$ و $\theta_۳$ نوشت با توجه به این‌که در این‌ها زاویه‌ی اولیه‌ی ما $\theta_۲$ خواهد بود بنابراین داریم:

$$\begin{cases} (۱-\cos\theta_۲) = (\frac{a+b}{a-b})^۳(۱-\cos\theta_۱) \\ (۱-\cos\theta_۳) = (\frac{a+b}{a-b})^۳(۱-\cos\theta_۲) \\ \vdots \\ (۱-\cos\theta_n) = (\frac{a+b}{a-b})^۳(۱-\cos\theta_{n-۱}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (۱-\cos\theta_n) = (\frac{a+b}{a-b})^{۳(n-۱)}(۱-\cos\theta_۱)$$

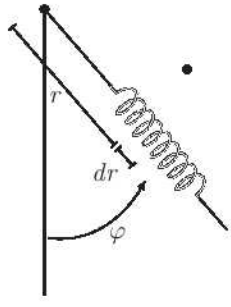
پس اگر بخواهد تاب به $\theta_n = \pi$ برسد داریم:

$$\frac{۲}{۱ - \cos\theta_۱} = (\frac{a+b}{a-b})^{۲(n-۱)}$$
$$n = ۱ + \frac{۱}{۳}\log_{(\frac{a+b}{a-b})}(\frac{۲}{۱ - \cos\theta_۱})$$

توجه شود که n می‌تواند یک عدد غیرصحیح باشد زیرا لزوماً تاب در π نخواهد بود پس باید از تابع براکت استفاده نمود تا حداقل دور را دریابیم:

$$\boxed{n = ۱ + [۱ + \frac{۱}{۳}\log_{(\frac{a+b}{a-b})}(\frac{۲}{۱ - \cos\theta_۱})]}$$

۷ **الف)** دستگاه مختصات متصل به جسم چرخان گشتاور حول o را محاسبه می‌کنیم:

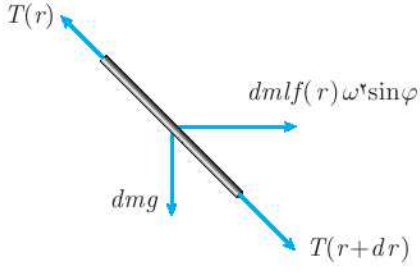


$$\begin{aligned} d\tau_\omega &= dmr\omega^۲ r\cos\varphi\sin\varphi \\ d\tau_g &= dmr\sin\varphi g \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \tau_\omega &= \frac{m\cos\varphi\sin\varphi l_۰^۲\omega^۲}{۳} \\ \tau_g &= mg\frac{l_۰}{۲}\sin\varphi \end{aligned}$$

از آن‌جا که در این دستگاه فنر در حال تعادل است داریم:

$$\tau_g = \tau_\omega \Rightarrow g\frac{l_۰\sin\varphi}{۲} = \frac{\cos\varphi\sin\varphi l_۰^۲\omega^۲}{۳}$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{۳g}{۲l_۰\omega^۲} \Rightarrow \varphi = \cos^{-۱}\left(\frac{۳g}{۲l_۰\omega^۲}\right)$$

ب) دیاگرام آزاد را برای جزئی از فنر رسم می‌کنیم:



با نوشتن نیروهای در راستای میله داریم:

$$dT = -dm(g\cos\varphi + f(r)\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi) \qquad (۱)$$

این جزء کوچک دارای کشش معادل $\frac{k_{۰}l_{۰}}{dr}$ است و کشش در آن نقطه از ضابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$T = \frac{k_{۰}l_{۰}}{dr}(df - dr) \Rightarrow T = k_{۰}l_{۰}(\frac{df}{dr} - ۱)$$

$$\Rightarrow dT = k_{۰}l_{۰}(f''(r))dr \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow k_{۰}l_{۰}f''(r)dr = -\frac{m}{l_{۰}}(g\cos\varphi + f(r)\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi)dr$$

$$\boxed{f''(r) + f(r)\frac{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi m_{۰}}{k_{۰}l_{۰}^{۲}} + \frac{g\cos\varphi m_{۰}}{k_{۰}l_{۰}^{۲}} = ۰}$$

ج) با توجه به راهنمایی مسئله داریم:

$$f(r) = A\sin\left(\frac{\omega\sin\varphi}{l_{۰}}\sqrt{\frac{m}{k}}r + B\right) - \frac{g\cos\varphi}{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi} \qquad (۳)$$

شرایط مرزی مطابق زیر است:

$$\begin{cases} T(l_{۰}) = ۰ \Rightarrow f'(l_{۰}) - ۱ = ۰ \\ f(۰) = ۰ \end{cases}$$

حال با نسبت معادله‌ی ۳ تا مرتبه‌ی اول نسبت به $\frac{۱}{k}$ داریم:

$$f(r) = A\sin B\left(۱ - \frac{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi}{l_{۰}^{۲}}\frac{mr^{۲}}{k}\right) + A\cos\beta\left(\frac{\omega\sin\varphi r}{l_{۰}}\sqrt{\frac{m}{k}}\right) - \frac{g\cos\varphi m_{۰}}{k_{۰}l_{۰}^{۲}}$$

با قرار دادن شرایط مرزی خواهیم داشت:

$$\frac{A\cos\beta\omega\sin\varphi}{l_{۰}}\sqrt{\frac{m}{k}} - \frac{A\sin\beta\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi}{l_{۰}}\frac{m}{k} = ۱$$

$$A\sin\beta = \frac{g\cos\varphi}{\omega^{۲}\sin^{۲}\varphi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(r) = A\cos(B)\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\omega\sin(\varphi)}{l_{۰}}r - \frac{mg\cos\varphi}{۲kl_{۰}^{۲}}r^{۲} \\ \frac{A\cos(B)}{l_{۰}}\sqrt{\frac{m}{k}}\omega\sin\varphi = ۱ + \frac{mg\cos(\varphi)}{kl_{۰}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(r) = r\left(1 + \frac{mg\cos\varphi}{kl_0}\right) - \frac{mg\cos(\varphi)r^2}{2kl_0^2}}$$

د) با توجه به شرط تعادل و این‌که در این حالت هم گشتاور صفر است:

$$\begin{cases} d\tau\omega = (\frac{m}{l_0}dr)f(r)\cos\varphi f(r)\sin(\varphi)\omega^2 \\ d\tau_g = (\frac{m}{l_0}dr)f(r)\sin\varphi g \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_\omega = \frac{m}{l_0}\omega^2\cos\varphi\sin\varphi\int_0^l f^2(r)dr \\ \tau_g = \frac{m}{l_0}\sin\varphi g\int_0^{l_0} f(r)dr \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tau_\omega = \tau_g \Rightarrow \frac{\omega^2}{g}\cos\varphi\int_0^{l_0} f^2(r)dr = \int_0^{l_0} f(r)dr$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2\cos\varphi}{g}\int_0^{l_0}\left(r^2 + \frac{2mg\cos\varphi r^2}{kl_0} - \frac{mg\cos\varphi r^3}{kl_0^2}\right)dr$$

$$= \int_0^{l_0}\left(r\left(1 + \frac{mg\cos\varphi}{kl_0}\right) - \frac{mg\cos\varphi r^2}{2kl_0^2}\right)dr$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2\cos\varphi}{g}\left(\frac{l_0^2}{3} + \frac{2mgl_0^2\cos\varphi}{3k} - \frac{mg\cos\varphi l_0^2}{4k}\right) = \left(\frac{l_0^2}{2} + \frac{mgl_0\cos\varphi}{3k}\right)$$

حال $\cos(\varphi)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\cos\varphi_0 = \cos(\varphi_0) + \frac{c}{k} \quad , \quad \cos(\varphi_0) = \frac{3g}{2l_0\omega^2}$$

حال با جایگذاری در معادله‌ی بالا داریم:

$$\frac{\omega^2 l^2}{3g}\cos\varphi + \frac{5ml\omega^2}{24k}\cos^2\varphi - \frac{l}{2} - \frac{mg\cos\varphi}{3k}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 l^2}{3gk}c + \frac{5ml\omega^2}{24k}\frac{8g^2}{4l^2\omega^4} - \frac{mg^2}{2l\omega^2 k} = 0$$

$$\Rightarrow C = \frac{3m\omega^2}{32}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{3g}{2l_0\omega^2} + \frac{3m\omega^2}{32k}}$$