

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# المپیاد کامپیوتر

در ایران

(مرحله اول)

از سال ۷۴ تا سال ۸۴

گردآوری و تنظیم:  
رسول حاجی‌زاده

## فهرست

۵	پیشگفتار ناشر.....
۷	پیشگفتار مؤلف.....
۹	پنجمین المپیاد کامپیوتر (مهر ۷۴).....
۱۷	پاسخ کلیدی.....
۱۸	پاسخ تشریحی.....
۲۹	ششمین المپیاد کامپیوتر (اردیبهشت ۷۵).....
۴۰	پاسخ کلیدی.....
۴۱	پاسخ تشریحی.....
۵۳	هفتمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۷۵).....
۶۸	پاسخ کلیدی.....
۶۹	پاسخ تشریحی.....
۸۹	هشتمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۷۶).....
۱۰۴	پاسخ کلیدی.....
۱۰۵	پاسخ تشریحی.....
۱۲۱	نهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۷۷).....
۱۳۵	پاسخ کلیدی.....
۱۳۶	پاسخ تشریحی.....

۱۵۱	دهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۷۸)
۱۶۳	پاسخ کلیدی
۱۶۴	پاسخ تشریحی
۱۷۹	یازدهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۷۹)
۱۹۱	پاسخ کلیدی
۱۹۲	پاسخ تشریحی
۲۰۵	دوازدهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۸۰)
۲۱۹	پاسخ کلیدی
۲۲۰	پاسخ تشریحی
۲۳۳	سیزدهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۸۱)
۲۴۵	پاسخ کلیدی
۲۴۶	پاسخ تشریحی
۲۶۳	چهاردهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۸۲)
۲۷۵	پاسخ کلیدی
۲۷۶	پاسخ تشریحی
۲۹۱	پانزدهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۸۳)
۳۰۲	پاسخ کلیدی
۳۰۳	پاسخ تشریحی
۳۱۹	شانزدهمین المپیاد کامپیوتر (بهمن ۸۴)
۳۳۲	پاسخ کلیدی
۳۳۳	پاسخ تشریحی
۳۴۸	منابع مفید در زمینه المپیادهای علمی

### **پیشگفتار ناشر**

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به‌نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود مخصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است مورد پسند و استفاده دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.



## پیشگفتار مؤلف

حل معماهای فکری به چندین سال قبل از میلاد بر می‌گردد. بشر در دوره باستان، به‌ویژه در یونان، روم، چین و ایران، علاوه بر این که در صدد حل معماهای آن دوره بود، خود نیز در صدد طرح معماهای جدید برآمد تا جایی که بعضی از آنها، حالت تاریخی پیدا کرده‌اند. طرح و حل معماهای ریاضی، در زمان بعضی از آنها، حالت تاریخی پیدا کرده‌اند. طرح و حل معماهای ریاضی، در زمان بعضی از دانشمندان از جمله خوارزمی، خواجه نصیرالدین طوسی و خیام سرعت بیشتری به خود گرفت. افراد زیادی پیدا می‌شدند که با علم ریاضی به معنی خاص آن بیگانه بودند ولی حل معماهای ریاضی لذت خاصی به آنان می‌بخشید. در یک جمله می‌توان گفت که کشف مجهولات و پیدا کردن راه حلی برای معماها نیاز هر بشری می‌باشد.

برگزاری المپیادهای علمی در کشورهای مختلف در پاسخ به این نیاز بشر می‌باشد. در سال ۱۳۶۶ ایران برای اولین بار در بیست و هشتمین المپیاد جهانی ریاضی که در کوبا برگزار شد، شرکت نموده و در بین کشورهای شرکت‌کننده رتبه مناسبی را کسب نمود. همین موفقیت مسئولین امر را برای سرمایه‌گذاری هر چه بیشتر برای دانش‌آموزان ممتاز رشته ریاضی، تشویق نمود. با توجه به این که استعدادها بالقوه‌ای در دانش‌آموزان ایرانی وجود دارد، شکوفا کردن این استعدادها و معرفی کردن آن به جهانیان نیاز به یک برنامه‌ریزی دقیق دارد. خوشبختانه در سال‌های اخیر این برنامه‌ریزی از سوی وزارت آموزش و پرورش انجام گرفته و دانش‌آموزان ایرانی یکی پس از دیگری در صحنه‌های بین‌المللی درخشش چشمگیری را داشته‌اند.

لازمه موفقیت در المپیادهای فیزیک و شیمی داشتن اطلاعات کافی در مورد این دروس می‌باشد. به طوری که اگر دانش‌آموزی به طور عمقی مفاهیم این علوم را نیاموخته باشد، راه‌یابی به مراحل بالای این المپیادها برای او امکان‌ناپذیر می‌شود. اما برای موفقیت در المپیاد کامپیوتر تنها عامل مهم، داشتن هوش و استعداد تحصیلی است و داشتن معلومات کافی در زمینه کامپیوتر و برنامه‌نویسی لازم نمی‌باشد به همین جهت مشتاقان به این شاخه از المپیاد روز به روز افزایش می‌یابند.

سابقه برگزاری المپیاد کامپیوتر جهانی به سال ۱۹۸۹ میلادی (۱۳۶۸ هجری شمسی) بر می‌گردد. ایران از دور چهارم این مسابقات (از سال ۱۹۹۲) در این شاخه از المپیاد جهانی شرکت داشته است و خوشبختانه از همان ابتدا دانش‌آموزان ایرانی در بین شرکت‌کنندگان دیگر کشورها، رتبه‌های قابل توجهی را کسب نموده‌اند. نحوه انتخاب اعضای تیم اعزامی به المپیاد جهانی کامپیوتر در سال‌های گذشته بدین شیوه بوده است که در ابتدا آزمون تستی در سراسر کشور از دانش‌آموزان واجد شرایط، به عمل آمده و ۱۰۰۰ نفر برتر این آزمون را برای مرحله بعدی معرفی می‌نمایند. در مرحله دوم آزمون تشریحی بین این ۱۰۰۰ نفر، برگزار نموده و ۳۰ نفر اول را جهت شرکت در کلاس‌های آموزشی معرفی می‌کنند. ۳۰ نفر منتخب در طول تابستان در یک دوره آموزشی ۹ هفته‌ای در محل باشگاه دانش‌پژوهان جوان شرکت نموده و در پایان دوره با آزمون‌های کوناگونی ۸ نفر اول مشخص می‌شوند. این ۸ نفر در طول سال تحصیلی دوره پیشرفته‌ای را سپری می‌کنند و اواخر بهار از بین آنان، ۴ نفر جهت شرکت در المپیاد جهانی برگزیده می‌شوند.

در انتها تذکر این نکته را لازم می‌دانم که جواب‌های نوشته شده برای سؤالات به منزله این نیست که به محض خواندن سؤال به جواب آن مراجعه کنید، بلکه درج آنان بدین معناست که پس از حل کردن سؤال، جواب خود را با جواب موجود در کتاب قیاس کرده و یا احیاناً اگر پس از فکر کردن کافی در مورد سؤال موفق به یافتن جواب نشدید جواب موجود در کتاب را ببینید.

با تشکر  
حاجی‌زاده  
بهار ۱۳۸۵

## پنجمین المپیاد کامپیوتر

مهر ۷۴

هر جواب درست ۱ نمره مثبت و هر جواب نادرست  $\frac{1}{4}$  نمره منفی دارد.

۱. ۱۰ نقطه متمایزی روی محیط یک دایره قرار دارد. تعداد ۵ ضلعی‌هایی که می‌توان با این نقاط ساخت چند تا است؟

الف) ۳۰۲۴۰ (ب) ۶۰۴۸ (ج) ۲۵۲ (د) ۱۰۰۸ (ه) ۱۲۰

۲. ۴ نفر راننده که هر کدام یک اتومبیل دارند در یک محل کار می‌کنند. این ۴ نفر به چند طریق می‌توانند

اتومبیل‌های خود را با هم عوض کنند به قسمی که هیچ کدام اتومبیل خود را نرانند؟

الف) ۲۰ (ب) ۹ (ج) ۱۸ (د) ۶ (ه) ۴

۳. در مربع  $3 \times 3$  مقابل اعداد ۱، ۲، ۳، ...، ۹ را طوری قرار می‌دهیم که حاصل جمع

هر ستون و هر سطر و هر قطر با هم برابر باشند. مجموع اعداد واقع در چهار گوشه

این مربع چیست؟

۱		

الف) ۲۰ (ب) ۲۴ (ج) ۱۸ (د) ۳۰ (ه) ۲۵

۴. مبلغ ۳۶ تومان پول را بین سه برادر تقسیم کرده‌ایم. به هر یک از آنها به اندازه سن خود پول بر حسب تومان

رسیده است. برادر کوچکتر نصف پول خود را به تساوی بین دو برادر دیگر تقسیم می‌کند. برادر میانی و بعد برادر

بزرگتر همین کار را انجام می‌دهند. در پایان پول هر سه برادر مساوی می‌شود. برادر میانی چند سال دارد؟

الف) ۱۰ (ب)  $10/5$  (ج) ۱۱ (د)  $11/5$  (ه) ۱۲



۵. یک مکعب به ضلع ۳ را در نظر بگیرید که در مرکز هر یک از مکعب‌های کوچک آن یک نقطه گذاشته شده است (مجموعاً ۲۷ نقطه) چند تا مجموعه سه تایی از این نقاط روی یک خط مستقیم قرار دارند؟

- الف) ۴۸ (ب) ۳۶ (ج) ۴۹ (د) ۴۳ (ه) ۳۷

۶. تعداد اعداد سه رقمی بزرگتر از  $530$  که ارقام متمایز دارند کدام است؟

- الف) ۲۰۱ (ب) ۲۴۰ (ج) ۳۴۵ (د) ۳۳۵ (ه) ۳۳۶

۷. از نقشه شبکه راه‌های یک استان اطلاعات زیر را به دست آورده‌ایم: از هر شهری می‌توان به سایر شهرها مسافرت کرد. کمترین فاصله بین دو شهر ۲۸ کیلومتر است. بیشترین فاصله بین دو شهر ۱۳۷۴ کیلومتر است. تعداد شهرها ۷ تا است. شهری وجود دارد که مستقیماً به ۳ شهر دیگر جاده دارد. اگر طول کل جاده‌هایی که بین این ۷ شهر کشیده شده است  $n$  کیلومتر باشد، آنگاه:

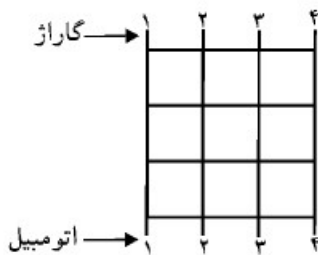
الف)  $n \geq 1430$  (ب)  $n \leq 2748$

ج)  $n = 1402$  (د)  $n \geq 1402$

ه)  $1374 \leq n \leq 2748$

۸. می‌خواهیم ۸ کتاب یکسان را بین ۴ نفر تقسیم کنیم به قسمی که به نفر دوم حداکثر ۲ کتاب و به نفر سوم حداقل ۲ کتاب و به سایر نفرات حداقل ۱ کتاب برسد. تعداد حالات ممکن برابر است با:

- الف) ۳۱ (ب) ۳۵ (ج) ۷۰ (د) ۶۵ (ه) ۵۶



۹. نقشه خیابان‌های شهری به شکل مقابل است. (خیابان‌های عمودی رو به بالا یک طرفه‌اند) می‌خواهیم اتومبیل‌های ۱ تا ۴ را به گاراژهایی که در شکل نشان داده شده است ببریم. به طوری که از هر خیابان حداکثر یک اتومبیل عبور کند. کدام یک از دنباله‌های زیر (از چپ به راست) می‌تواند شماره‌های اتومبیل‌ها در گاراژهای ۱ تا ۴ باشد؟

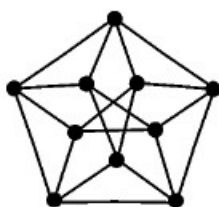
الف) ۱, ۳, ۴, ۲ (ب) ۳, ۱, ۴, ۲

ج) ۲, ۱, ۴, ۳ (د) ۲, ۳, ۱, ۴

ه) هیچ کدام

۱۰. یک صفحه شطرنجی نامتناهی را در نظر بگیرید. مهره اسب در این صفحه به این صورت حرکت می‌کند که دو خانه در یک جهت (افقی یا عمودی) و یک خانه در جهت دیگر حرکت می‌کند. حداقل تعداد حرکت‌های لازم برای این که اسب بتواند خود را از خانه  $(0, 0)$  به خانه  $(1374, 1374)$  برساند، چقدر است؟

- الف) ۴۵۸      ب) ۹۱۶      ج) ۱۳۷۵  
د) ۶۸۷      ه) ۱۳۷۴



۱۱. در شکل مقابل دایره‌های سیاه را رأس و هر پاره خط بین دو

دایره سیاه را یک یال می‌نامیم. کدام یک از گزاره‌های زیر در

مورد آن صحیح است؟

الف) می‌توان رأس‌های آن را با ۴ رنگ متفاوت چنان رنگ کرد که

رنگ هر دو رأس که با یک یال به هم متصلند متفاوت باشد

ب) می‌توان اعداد ۱ تا ۱۰ را به رأس‌های آن نسبت داد به قسمی که رأس شماره  $i$  به رأس‌های  $1$  و

$1+i$  وصل باشد  $(2 \leq i \leq 9)$  و رأس ۱ نیز به ۱۰ وصل باشد

ج) می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد (رأس‌ها را نقطه و یال‌ها را پاره خط

در نظر بگیرید)

د) هر سه مورد فوق صحیح است

ه) هیچ کدام از موارد فوق صحیح نیست

۱۲. خروجی الگوریتم زیر چند است؟ (منظور از  $A[i]$  در این الگوریتم عنصر  $i$ ام یک دنباله به نام  $A$  است.)

۱- به ازای  $i$  از ۱ تا ۵ مقدار  $A[i]$  را مساوی  $i$  قرار بده.

۲- به ازای  $i$  از ۳ تا ۹ کارهای زیر را انجام بده.

۱.۲- به ازای  $j$  از ۱ تا ۵ کارهای زیر را انجام بده.

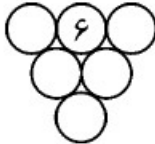
۱.۱.۲- در صورتی که  $1 \leq i \leq j \leq 5$ ، جای  $A[j]$  و  $A[i]$  را با هم عوض کن.

۳- مقدار  $A[5]$  را چاپ کن.

- الف) ۱      ب) ۲      ج) ۳  
د) ۴      ه) ۵

۱۳. تعدادی از دانش‌آموزان یک مدرسه در یک اردوی یک هفته‌ای شرکت کردند. در هر روز ۳ نفر از دانش‌آموزان مسئولیت تهیه غذا را برعهده داشتند. پس از پایان اردو معلوم شد که هیچ دو نفر از دانش‌آموزان بیش از یک بار با هم مسئول تهیه غذا نبوده‌اند. اگر  $n$  تعداد دانش‌آموزان شرکت‌کننده در اردو باشد، آنگاه:

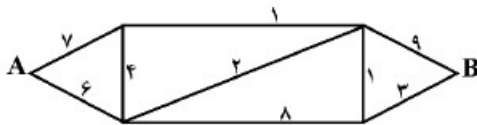
- (الف)  $n = ۲۱$       (ب)  $n = ۷$   
 (ج)  $n \geq ۷$       (د)  $n < ۹$   
 (ه)  $n \geq ۹$



۱۴. ۶ دایره مقابل داده شده است: می‌خواهیم اعداد ۱ تا ۵ را در دایره‌های خالی بنویسیم به طوری که عدد نوشته شده در هر دایره تفاضل اعداد نوشته شده در دو دایره بالایی آن باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد.

- (الف) ۰      (ب) ۱      (ج) ۲      (د) ۳      (ه) ۴

۱۵. بین منبع آب A و مصرف‌کننده B به صورت زیر لوله کشی شده است: عددی که بر روی هر لوله نوشته شده



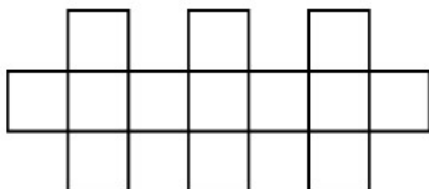
است. نشان‌دهنده حداکثر ظرفیت انتقال آن لوله (لیتر بر ثانیه) است. مصرف‌کننده حداکثر چند لیتر بر ثانیه آب دریافت خواهد کرد؟

- (الف) ۱۳      (ب) ۷  
 (ج) ۱۲      (د) ۴۱  
 (ه) ۱۱

### مسئله‌های بله - خیر

پاسخ هر یک از مسائل زیر «بله» یا «خیر» است که هر جواب درست یک نمره مثبت و هر جواب نادرست یک نمره منفی دارد.

۱۶. در یک صفحه شطرنجی مربع به ضلع ۱۳۷۴ متر آیا می‌توان یک چندضلعی با اضلاع افقی و عمودی که طول هر ضلع آن برحسب متر عدد صحیح باشد رسم کرد که محیط آن ۱۹۹۵ متر شود؟



۱۷. در شکل زیر که از ۴۰ عدد چوب کبریت ساخته شده ۱۳ مربع  $1 \times 1$  دیده می‌شود: آیا می‌توان با برداشتن ۹ چوب کبریت، شکلی ایجاد کرد که در آن هیچ مربعی دیده نشود؟

۱۸. ۱۱ سنگریزه در اختیار داریم، دو بازیکن با این سنگریزه‌ها این بازی را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خودش ۱، ۲، ۳ یا ۴ سنگریزه بر می‌دارد، وقتی که سنگریزه‌ها تمام شد، تعداد سنگریزه‌هایی که هر یک از بازیکنان برداشته‌اند را می‌شماریم، هر بازیکن که به تعداد زوجی سنگریزه برداشته بود، برنده است. آیا بازیکن اول می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

۱۹. یک دنباله  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  متنوع نامیده می‌شود، اگر این شرایط برقرار باشند:

• برای هر  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ )  $a_i$  و  $a_{i+1}$  متفاوت باشند.

• اگر  $n > 1$ ، دنباله  $a_0, a_1, \dots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  نیز یک دنباله متنوع باشد. ( $\lfloor x \rfloor$  یعنی بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی  $x$ )

برای مثال  $A, B, C, A, D, C$  یک دنباله متنوع است.

اگر  $a_i \in \{A, B, C\}$ ، آیا دنباله متنوع  $a_0, a_1, \dots, a_{1374}$  وجود دارد به طوری که دنباله

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{1374}$  نیز متنوع باشد؟

۲۰. در یک نقشه شبکه راه‌های منطقه، هر شهر دقیقاً به سه شهر دیگر به طور مستقیم جاده دارد. آیا امکان دارد

که با بستن یکی از این جاده‌ها ارتباط بعضی از شهرها را با بعضی از شهرهای دیگر قطع کرد؟

۲۱. برای هر عدد صحیح غیرمنفی  $n$ ، عدد  $a_{n+1}$  از  $a_n$  براساس قانون زیر به دست می‌آید:

اگر آخرین رقم سمت راست عدد  $a_n$  از ۵ بیشتر باشد،  $a_{n+1} = 9a_n$ ، در غیر این صورت، رقم سمت راست  $a_n$  را

کنار می‌گذاریم و ارقام باقیمانده نمایشگر  $a_{n+1}$  است. اگر  $a_{n+1}$  شامل هیچ رقمی نباشد، کار پایان می‌یابد. آیا

به ازای هر  $a_0$  دلخواه این فرایند پایان پذیر است؟

۲۲. یک نوار داریم که به  $n$  خانه تقسیم شده است. خانه‌ها را به ترتیب از ۱ تا  $n$  شماره گذاری کرده ایم. دو عدد مهره در خانه‌های  $n$  و ۱ قرار گرفته‌اند. دو بازیکن بازی زیر را انجام می‌دهند:

هر بازیکن در نوبت خود می‌تواند یکی از مهره‌ها (هر کدام) را برداشته و در یک خانه خالی با شماره کمتر قرار دهد. بازیکنی که آخرین حرکت را انجام دهد برنده است. در صورتی که  $n - 9$  باشد آیا نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده باشد؟

۲۳. یک ماتریس  $M_{p \times p}$  در نظر بگیرید که درایه‌هایش از علائم  $\{ = , > , < \}$  باشد. ساختن توابع  $f$  و  $g$  با خواص زیر مورد نظر است.

• اگر مقدار  $M_{ij}$  مساوی  $<$  باشد، آنگاه  $f(i) < g(j)$ .

• اگر مقدار  $M_{ij}$  مساوی  $>$  باشد، آنگاه  $f(i) > g(j)$ .

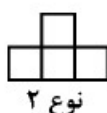
• اگر مقدار  $M_{ij}$  مساوی  $=$  باشد، آنگاه  $f(i) = g(j)$ .

ماتریس  $3 \times 3$  زیر که مؤلفه‌هایش مشخص شده‌اند تعریف شده است:

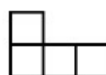
$$\begin{bmatrix} < & < & = \\ = & < & > \\ < & < & > \end{bmatrix}$$

آیا برای ماتریس فوق توابع  $f$  و  $g$  با خواص مورد نظر را می‌توان یافت؟

□ موازیبک‌هایی از انواع زیر وجود دارند:



نوع ۲



نوع ۱

منظور از فرش کردن یک صفحه با موازیبک‌ها پوشاندن تمام خانه‌های صفحه با موازیبک‌هاست. به طوری که

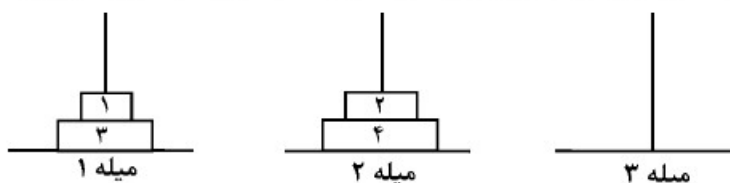
موازیبک‌ها روی هم قرار نگیرند.

۲۴. آیا با موازیبک‌هایی از نوع ۱ می‌توان یک صفحه شطرنجی  $6 \times 6$  را فرش کرد؟

۲۵. آیا با موازیبک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی  $6 \times 6$  را فرش کرد؟

۲۶. آیا با موزاییک‌هایی از نوع ۲ می‌توان یک صفحه شطرنجی  $100 \times 100$  را فرش کرد؟

□ سه میله با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و چهار مهرهٔ سوراخدار با شماره‌های ۱ تا ۴ مطابق شکل زیر داده شده است:



می‌خواهیم با حرکت دادن این مهره‌ها و رعایت قواعد زیر کلیهٔ مهره‌ها را به صورت زیر بر میلهٔ سوم ببریم:



• در هر حرکت تنها یک مهره حرکت داده شود.

• هیچ‌گاه مهرهٔ با شمارهٔ بزرگتر بر روی مهرهٔ با شمارهٔ کوچکتر قرار نگیرد.

۲۷. آیا می‌توان با کمتر از ۱۱ حرکت این کار را انجام داد؟

۲۸. در صورتی که ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ داشته باشیم به طوری که مهره‌های ۱، ۳ و ۵ در میلهٔ اول و مهره‌های ۲

و ۴ در میلهٔ دوم باشند، آیا می‌توان با کمتر از ۲۲ حرکت این مسأله را حل کرد؟

۲۹. آرایهٔ  $a$  با  $n$  عنصر به صورت صعودی مرتب شده است. می‌خواهیم ببینیم که آیا عنصر  $x$  در آرایهٔ  $a$  وجود دارد یا

خیر. برای این کار الگوریتم زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

۱-  $i$  را مساوی با ۱ و  $j$  را مساوی با  $n$  قرار بده.

۲-  $k$  را مساوی با  $\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$  قرار بده.

۳- اگر  $a_k < x$ ، در این صورت  $i$  را مساوی با  $k+1$  قرار بده. در غیر این صورت  $j$  را مساوی با  $k-1$  قرار بده.

۴- اگر  $a_k = x$ ، در این صورت  $x$  در آرایهٔ  $a$  وجود دارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۵- اگر  $i \geq j$ ، در این صورت  $x$  در آرایهٔ  $a$  وجود ندارد؛ به مرحلهٔ «۷» برو.

۶- برو به مرحلهٔ «۲».

۷- پایان.

آیا این الگوریتم برای تمام مقادیر  $x$  درست کار می‌کند؟

۳۰. اگر الگوریتم فوق را به صورت زیر تغییر دهیم، پاسخ چیست؟

۱-  $i$  را مساوی با ۱ و  $j$  را مساوی با  $n$  قرار بده.

۲-  $k$  را مساوی با  $\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor$  قرار بده.

۳- اگر  $a_k > x$ ، در این صورت  $j$  را مساوی با  $k$  قرار بده. در غیر این صورت  $i$  را مساوی با  $k+1$  قرار بده.

۴- اگر  $j \neq i$ ، در این صورت به مرحله «۲» برو.

۵- اگر  $a_{\lfloor \frac{i+j}{2} \rfloor} = x$ ، در این صورت  $x$  در آرایه  $a$  وجود دارد؛ به مرحله «۷» برو.

۶- در غیر این صورت  $x$  در آرایه  $a$  وجود ندارد.

۷ پایان.

## پاسخ کلیدی

## پنجمین المپیاد کامپیوتر

بله	خیر	الف	ب	ج	د	هـ	۱.
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
۱۶.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	۲.
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
۱۷.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۳.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>
۱۸.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۴.
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
۱۹.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	۵.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۶.
۲۰.		<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۷.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۸.
۲۱.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	۹.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۱۰.
۲۲.		<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۱۱.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۱۲.
۲۳.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۱۳.
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۱۴.
۲۴.		<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	۱۵.
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
۲۵.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
۲۶.		<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
۲۷.		<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
۲۸.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
۲۹.		<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	
۳۰.		<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input checked="" type="radio"/>	<input type="radio"/>	



## پاسخ تشریحی

### پنجمین المپیاد کامپیوتر

۱. بدیهی است که با هر ۵ نقطه یک پنج ضلعی ساخته می‌شود، پس تعداد آنها برابر  $\binom{۱۰}{۵}$  یا ۲۵۲ می‌باشد.

۲. تعداد طرق تقسیم ۴ اتومبیل بین ۴ نفر به طوری که X صاحب اتومبیل خود باشد را با  $|X|$ ، تعداد آن طرق به طوری که هم X صاحب اتومبیل خود و هم Y صاحب اتومبیل خود باشند را با  $|X \cap Y|$ ، ... نمایش می‌دهیم، بنابراین:

$$\begin{aligned} ? &= |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} \cap \bar{D}| = |M| - |A| - |B| - |C| - |D| \\ &\quad + |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| \\ &\quad + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| \\ &\quad - |A \cap B \cap C| - |A \cap B \cap D| \\ &\quad - |A \cap C \cap D| - |B \cap C \cap D| \\ &\quad + |A \cap B \cap C \cap D| \\ &= 4! - 4(3!) + 6(2!) - 4(1!) + (0!) = 9 \end{aligned}$$

۳. چون مجموع اعداد از ۱ تا ۹ برابر ۴۵ می باشد، بنابراین معلوم است که مجموع اعداد واقع در هر سطر،

هر ستون و نیز قطرها برابر ۱۵ می باشد. خواهیم داشت:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

$$a + e + i = 15$$

$$b + e + h = 15$$

$$c + e + g = 15$$

$$d + e + f = 15$$

$$(a + b + c + d + e + f + g + h + i) + 3e = 60 \Rightarrow 45 + 3e = 60 \Rightarrow e = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} a + e + i = 15 \\ c + e + g = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow a + i + c + g = 20$$

۸	۳	۴
۱	۵	۹
۶	۷	۲

نمونه‌ای از شکل پر شده به صورت مقابل می باشد:

$x =$  سن برادر بزرگتر

۴. راه حل اول:

$y =$  سن برادر میانی

$z =$  سن برادر کوچکتر

$$x + y + z = 36 \quad (1)$$

پول سه برادر بعد از مرحله اول به ترتیب برابر با  $x + \frac{z}{4}$ ،  $y + \frac{z}{4}$  و  $\frac{z}{2}$  خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله دوم به ترتیب برابر با  $\frac{16x + 4y + 5z}{16}$ ،  $\frac{4y + z}{8}$  و  $\frac{4y + 9z}{16}$  خواهد بود.

پول سه برادر بعد از مرحله سوم به ترتیب برابر با  $\frac{16x + 4y + 5z}{32}$ ،  $\frac{16x + 36y + 13z}{64}$  و

$\frac{16x + 20y + 14z}{64}$  خواهد بود. پس باید داشته باشیم:

$$\frac{16x + 20y + 14z}{64} = \frac{16x + 36y + 13z}{64} = \frac{16x + 4y + 5z}{32} \quad (2)$$

با مقایسه رابطه‌های (۲) و رابطه (۱) به جواب  $x = 19/5$  و  $y = 10/5$  و  $z = 6$  خواهیم رسید، پس  $y = 10/5$  می‌باشد.

راه حل دوم: در پایان پول هر سه برادر با هم برابر شده است پس در پایان مرحله سوم هر کدام از آنان  $\frac{36}{3}$  یعنی ۱۲ تومان خواهند داشت. قبل از این مرحله (پایان مرحله دوم) برادر بزرگتر یقیناً ۲۴ تومان داشته است (چون نصف پولش را برای خودش نگه داشته و نصف پولش را بین دو برادرش تقسیم کرده است). چون برادر بزرگتر نصف پولش را بین دو برادر دیگر به تساوی تقسیم کرده است پس به هر کدام از آنان ۶ تومان داده است. پس قبل از شروع مرحله پایانی پول برادر بزرگتر ۲۴ تومان، پول برادر میانی ۶ تومان و پول برادر کوچکتر ۶ تومان بوده است. با همین استدلال در ابتدای مرحله دوم برادر بزرگتر ۲۱ تومان، برادر میانی ۱۲ تومان و برادر کوچکتر ۳ تومان دارا هستند و بالاخره در ابتدای مرحله اول برادر بزرگتر  $19/5$  تومان، برادر میانی  $10/5$  تومان و برادر کوچکتر ۶ تومان پول دارند.

۵. مکعب کوچک را مطابق شکل از ۱ تا ۲۷ شماره گذاری می‌کنیم. ۲۷ مجموعه سه‌تایی عبارتند از  $\{(1, 2, 3), (4, 5, 6), \dots, (25, 26, 27)\}$ ،  $\{(1, 10, 9), (1, 10, 9), \dots, (1, 18, 27)\}$ ،  $\{(1, 4, 7), \dots, (27, 24, 21)\}$  (مکعب‌هایی که فقط در یک وجه مشترکند).

۱۸ مجموعه سه‌تایی عبارتند از  $\{(1, 5, 9), (1, 5, 9), \dots, (10, 14, 18)\}$ ،  $\{(3, 15, 27), \dots, (10, 14, 18)\}$  و بالاخره ۴ مجموعه سه‌تایی عبارتند از:

$\{(3, 14, 25), (7, 14, 21), (19, 14, 9), (1, 14, 27)\}$

		۲۷	۱۸	۹
	۲۶	۱۷	۸	۹
۲۵	۱۶	۷	۷	۸
			۶	۶
۲۲	۱۳	۴	۴	۵
			۳	۳
۱۹	۱۰	۱	۱	۲

پس روی هم ۴۹ مجموعه سه‌تایی با خاصیت فوق

موجود است.

۶. تعداد اعداد بزرگتر از ۵۹۹ با خاصیت مورد نظر برابر با  $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  یعنی

۲۸۸ عدد می‌باشد و تعداد اعداد بین ۶۰۰ و ۵۲۹ با خاصیت مورد نظر برابر  $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  یعنی ۴۸

عدد می باشد که مجموعاً ۳۳۶ عدد می شود که اگر عدد ۵۳۰ را از این مجموعه خارج کنیم جواب مورد نظر یعنی ۳۳۵ به دست خواهد آمد.

۷. برای گزینه های «ب» و «ج» و «ه» مثال نقضی مانند شکل «الف» و برای گزینه «الف» مثال نقضی مانند شکل «ب» وجود دارد. در ضمن شکل «ب» حداقل جاده ممکن را دارا می باشد.



۸. تعداد حالات ممکن برابر تعداد جواب های صحیح معادله زیر است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad (x_1, x_4 \geq 1, \quad x_2 \leq 2, \quad x_3 \geq 2)$$

به این معنی که به نفر  $i$  ام ( $i = 1, 2, 3, 4$ )،  $x_i$  کتاب برسد.

حالا باید تعداد جواب های معادله بالا را بیابیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_2 \quad (x_1, x_4 > 0, \quad x_2 > 1, \quad x_3 = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2)$$

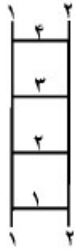
$$\Rightarrow \text{تعداد جواب} = C(8 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad 1, 3 \quad 1)$$

$$= C(8 \quad x_2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1, 2)$$

$$= C(6 \quad x_2, 2)$$

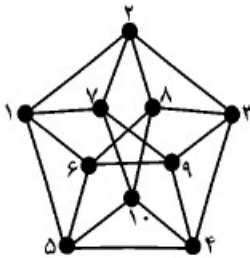
$$= C(6, 2) + C(5, 2) + C(4, 2) = 15 + 10 + 6 = 31$$

۹. نقشه خیابان ها شامل ۱۲ خیابان عمودی و ۱۲ خیابان افقی است. بدیهی است که برای رسیدن به گاراژها هر کدام از اتومبیل ها سه خیابان عمودی و در مجموع ۱۲ خیابان عمودی را طی می کنند. پس تمام ۱۲ خیابان عمودی توسط اتومبیل ها طی می شود. دو ستون اول را در نظر می گیریم. فرض می کنیم اتومبیل شماره ۱ از خیابان افقی شماره  $i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) به سمت راست رفته و یکی از اتومبیل های دیگر از خیابان افقی شماره  $j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) به سمت چپ برود. بدیهی است که  $i \neq j$  زیرا در غیر این صورت از این خیابان یک ماشین به سمت چپ و یک ماشین به سمت راست رفته است که مخالف فرض است.

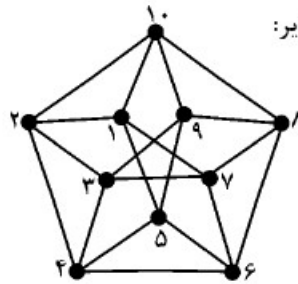


اگر  $i > j$ ، آنگاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر  $i$  و  $j$  توسط هیچ اتومبیلی طی نمی‌شود و اگر  $j > i$ ، آنگاه در ستون اول خیابان عمودی بین سطر  $i$  و  $j$  توسط دو اتومبیل طی می‌شود که مخالف فرض است. بدین ترتیب ثابت می‌شود که اتومبیل  $i$  فقط به گاراژ  $i$  می‌تواند برود.

۱۰. از خانه  $(0, 0)$  تا خانه  $(1374, 1374)$  به تعداد  $1374$  خانه در راستای عمودی و  $1374$  خانه در راستای افقی و در مجموع  $2748$  خانه فاصله وجود دارد. در هر حرکت سه خانه توسط اسب طی می‌شود، پس برای رسیدن به خانه مورد نظر حداقل  $\frac{2748}{3}$  یعنی  $916$  حرکت لازم است. با  $916$  حرکت می‌توان به خانه مورد نظر رسید. کافی است یک حرکت در راستای افقی (دو خانه در جهت افقی و یک خانه در جهت عمودی) و یک حرکت در راستای عمودی (دو خانه در جهت عمودی و یک خانه در جهت افقی) انجام داد و این عمل را  $916$  مرتبه متوالیاً تکرار کرد.



۱۱. گزینه «الف» صحیح است. کافی است رأس‌های ۱، ۳ و ۱۰ زرد باشند. رأس‌های ۲ و ۴ سبز باشند. رأس‌های ۵، ۸ و ۹ قرمز باشند. و بالاخره رأس‌های ۶ و ۷ آبی باشند.



گزینه «ب» نیز صحیح است. مطابق شکل زیر:

و بالاخره گزینه «ج» نیز صحیح است. مراحل رسم شکل به طریق زیر می‌باشد:

$1 \Rightarrow 7 \Rightarrow 3 \Rightarrow 9 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1 \Rightarrow 10 \Rightarrow 9 \Rightarrow 8 \Rightarrow 7 \Rightarrow 6 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 10 \Rightarrow 8 \Rightarrow 6$   
 $\Rightarrow 4 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$

$$A[5] = 5$$

۱۲.

۱۳. مسأله درست کردن هفت مجموعه سه عضوی از اشیاء  $a_1, a_2, \dots, a_n$  می باشد به طوری که هیچ دو مجموعه ای بیش از یک عضو مشترک نداشته باشند. حداقل  $n$  می تواند ۷ باشد، زیرا اگر  $n$  برابر با ۶ باشد از شش عضو متمایز یکی از آنان حداقل در ۴ مجموعه تکرار شده است (زیرا اگر چنین نباشد حداکثر اعضاها  $3 \times 6 = 18$  یعنی ۱۸ عضو خواهد بود در صورتی که ۷ مجموعه روی هم ۲۱ عضو دارند). این ۴ مجموعه را  $A_1, A_2, A_3, A_4$  و عضو مشترک را  $a_1$  در نظر می گیریم. اگر این چهار مجموعه علاوه بر  $a_1$  به ترتیب شامل  $a_2, a_3, a_4, a_5$  باشند چون در  $a_1$  مشترک هستند پس هیچ دو مجموعه از این ۴ مجموعه غیر از  $a_1$  عضو مشترک دیگری نباید داشته باشند در صورتی که تنها عضو باقیمانده  $a_6$  می باشد و ناچاراً عضوهای سوم سه مجموعه از ۴ مجموعه عضوهای تکراری خواهند پذیرفت که تناقض است.

ثابت می کنیم اگر  $n = 7$  باشد این کار عملی است. نمونه ای از مجموعه های مطلوب عبارتند از:

$$A_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$A_2 = \{a_1, a_4, a_5\}$$

$$A_3 = \{a_1, a_6, a_7\}$$

$$A_4 = \{a_2, a_4, a_6\}$$

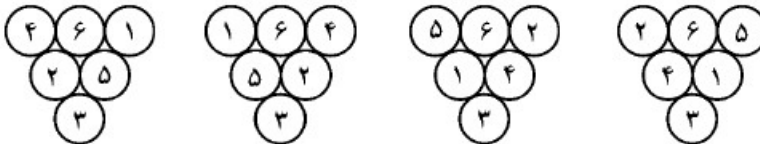
$$A_5 = \{a_2, a_5, a_7\}$$

$$A_6 = \{a_3, a_4, a_7\}$$

$$A_7 = \{a_3, a_5, a_6\}$$

پس  $n \geq 7$

۱۴. به ۴ طریق زیر این کار عملی است:



۱۵. با توجه به شکل زیر حداکثر ۴ لیتر آب به نقطه  $D$  می رسد. پس از لوله  $DB$  که ظرفیت آن ۹ لیتر است حداکثر ۴ لیتر در ثانیه آب به مصرف کننده  $B$  سرآید می شود. از لوله  $CB$  نیز که حداکثر ظرفیت



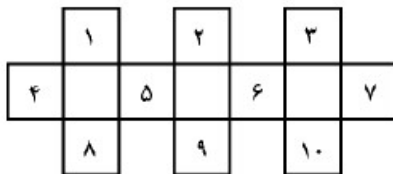
آن ۳ لیتر است اگر ۳ لیتر در ثانیه آب به مصرف کننده  $B$  برسد حداکثر آبی که به مصرف کننده خواهد رسید ۷ لیتر در ثانیه می باشد.

۱۶. یکی از رأس‌های این ۱۹۹۵ ضلعی را  $A$  می‌نامیم. از  $A$  حرکت کرده و محیط چندضلعی را طی می‌کنیم تا دوباره به  $A$  برگردیم. اگر مسیر حرکت را برداری در نظر بگیریم بدیهی است که مجموع بردارها صفر می‌باشد. درستی مطالب زیر واضح است:

۱. مجموع بردارهای در جهت راست با مجموع بردارهای در جهت چپ قرینه‌اند.
۲. مجموع بردارهای در جهت بالا با مجموع بردارهای در جهت پایین قرینه‌اند.
۳. اگر مجموع اندازه‌های بردارهای در سمت راست، چپ، بالا و پایین به ترتیب برابر با  $a$ ،  $b$ ،  $c$  و  $d$  باشند، آنگاه  $a = b$  و  $c = d$  و همچنین:

$$1995 = a + b + c + d = 2a + 2c = 2(a + c)$$

چون  $a$  و  $c$  هر دو صحیح‌اند پس تساوی فوق هرگز نمی‌تواند برقرار باشد.



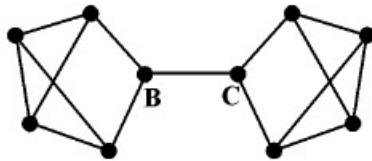
۱۷. برای از بین بردن مربع‌های ۱، ۲، ... و ۱۰ باید حداقل یکی از اضلاع آنها حذف شود. چون این ده مربع هیچ ضلع مشترکی ندارند پس باید حداقل ۱۰ چوب کبریت حذف شود.

۱۸. مراحل بازی به شکل زیر است:

۱. بازیکن اول ۴ سنگریزه بر می‌دارد.
۲. بازیکن دوم  $i$  سنگریزه بر می‌دارد.
۳. اگر  $i = 4$  باشد، بازیکن اول ۲ سنگریزه دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.
- اگر  $i = 3$  باشد، بازیکن اول ۴ سنگریزه دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.
- اگر  $i = 2$  باشد، بازیکن اول ۴ سنگریزه دیگر بر می‌دارد و برنده می‌شود.
- و اما اگر  $i = 1$  باشد، بازیکن اول ۱ سنگریزه دیگر بر می‌دارد. باز متناسب با اینکه بازیکن دوم در مرحله بعد چند سنگریزه بردارد، حالات زیر پیش می‌آید:
- اگر بازیکن دوم ۱ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۳ سنگریزه برداشته و برنده می‌شود.
- اگر بازیکن دوم ۲ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۳ سنگریزه باقیمانده را برداشته و برنده می‌شود.

اگر بازیکن دوم ۳ سنگریزه بردارد، بازیکن اول ۱ سنگریزه برداشته و برنده می‌شود. و بالاخره اگر بازیکن دوم ۴ سنگریزه بردارد، بازیکن اول تنها سنگریزه باقیمانده را برداشته و برنده می‌شود.

۱۹. بدون اینکه به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود  $a_0$  را  $A$  و  $a_1$  را  $B$  در نظر می‌گیریم.  $a_p$  نمی‌تواند  $B$  باشد (شرط اول)،  $A$  نیز نمی‌تواند باشد (زیرا در غیر این صورت  $a_0$  و  $a_p$  متفاوت نمی‌شوند)، پس  $a_p = C$ .  $a_p$  نمی‌تواند  $A$  باشد (چون  $a_0, \dots, a_p$  و  $a_0$  باید متنوع باشد)،  $C$  نیز نمی‌تواند باشد (شرط اول)، پس  $a_p = B$ .  $a_p$  نمی‌تواند  $B$  باشد (شرط اول)  $C$  نیز نمی‌تواند باشد (چون  $a_p$  و  $a_p$  طبق شرط دوم باید متنوع باشد) و اما  $a_p, A$  نیز نمی‌تواند باشد زیرا در این صورت دنباله  $a_0, a_1, a_2, \dots$  به صورت  $A, C, A, \dots$  در می‌آید که اگر آن را به صورت  $b_0, b_1, b_2, \dots$  در نظر بگیریم چون  $b_0 = b_p$  می‌شود، پس متنوع نیست.



۲۰. اگر نقشه شبکه به شکل مقابل باشد بایستن مسیر  $BC$  ارتباط شهرهای سمت چپ با شهرهای سمت راست قطع خواهد شد.

۲۱. اگر  $a_0$  یکی از اعداد یک رقمی باشد حکم واضح است. حال ثابت می‌کنیم اگر حکم برای اعداد از ۱ تا  $k$  برقرار باشد، برای  $k+1$  نیز برقرار است. اگر رقم آخر عدد  $(k+1)$  کوچکتر یا مساوی ۵ باشد با کنار گذاشتن آن رقم، عدد حاصل کوچکتر از  $(k+1)$  خواهد بود و طبق فرض ادامه فرایند پایان پذیر خواهد بود. و اما اگر رقم آخر عدد  $(k+1)$  بزرگتر از ۵ باشد در این صورت  $(k+1)$  به یکی از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ ختم خواهد شد که با کنار گذاشتن این رقم حاصل از  $k+1$  کوچکتر خواهد بود و باز بنا به فرض این فرایند پایان پذیر خواهد بود.

۲۲. لم: اولین بازیکنی که یک مهره در یکی از خانه‌های  $i$  ( $i \leq 4$ ) قرار دهد بازنده است.

اثبات: حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱. بازیکن  $x$  یک مهره در خانه ۱ قرار می‌دهد در این صورت بازیکن  $y$  مهره دیگر را در خانه ۲ قرار داده

و برنده می‌شود.



۲. بازیکن  $x$  یک مهره در خانه ۲ قرار می‌دهد در این صورت بازیکن  $y$  مهره دیگر را در خانه ۱ قرار داده و برنده می‌شود.

۳. بازیکن  $x$  مهره  $A$  را در خانه ۳ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن  $y$  مهره  $B$  را در خانه ۴ قرار می‌دهد. حال اگر  $x$  یکی از مهره‌ها را در خانه ۱ (یا ۲) قرار دهد، آنگاه  $y$  مهره دیگر را در خانه ۲ (یا ۱) قرار داده و برنده می‌شود.

۴. بازیکن  $x$  مهره  $A$  را در خانه ۴ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن  $y$  مهره  $B$  را در خانه ۳ قرار می‌دهد و همانند بند ۳ واضح است که  $y$  برنده می‌شود.

طریقه بازی: بازیکن اول مهره موجود در خانه شماره ۹ را در خانه ۷ قرار می‌دهد. بازیکن دوم به دو طریق زیر می‌تواند بازی کند (با توجه به لم واضح است که اگر یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ۴ قرار دهد بازنده می‌شود):

(الف) یکی از مهره‌ها را در خانه ۶ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن اول مهره دیگر را در خانه شماره ۵ قرار می‌دهد اینجاست که بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ۴ قرار می‌دهد و با توجه به لم، بازنده می‌شود.

(ب) یکی از مهره‌ها را در خانه ۵ قرار می‌دهد. در این صورت بازیکن اول مهره دیگر را در خانه شماره ۶ قرار می‌دهد. سپس بازیکن دوم به ناچار یکی از مهره‌ها را در یکی از خانه‌های ۱ تا ۴ قرار داده و با توجه به لم، بازنده می‌شود.

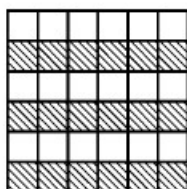
۲۳. با توجه به اطلاعات مسأله می‌توان نتیجه گرفت که:

$$g(2) > f(2) = g(1) > f(3) > f(1) = g(3)$$

بدیهی است که بی‌نهایت تابع با شرایط فوق می‌توان در نظر گرفت به‌عنوان مثال:

$$f: \{(1, 2), (2, 10), (3, 6)\}$$

$$g: \{(1, 10), (2, 20), (3, 2)\}$$



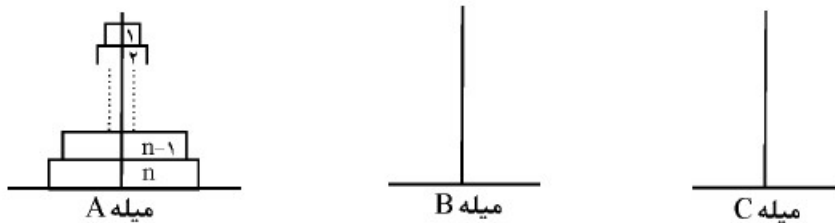
۲۴. صفحه  $6 \times 6$  را به شکل مقابل رنگ‌بندی می‌کنیم، معلوم است که هر موزاییکی از نوع ۱ یا سه خانه سفید و یک خانه سیاه را پوشانده است و یا سه خانه سیاه و یک خانه سفید را. بنابراین به خاطر مساوی بودن تعداد

خانه‌های سفید و سیاه لازم است تعداد موزاییک‌هایی که سه خانه سفید و یک خانه سیاه را پوشش می‌دهند با تعداد موزاییک‌هایی که سه خانه سیاه و یک خانه سفید را پوشش می‌دهند برابر باشند که چنین امری محال است، چون تعداد کل موزاییک‌ها ۹ عدد می‌باشد.

۲۵. اگر صفحه  $6 \times 6$  را به صورت شطرنجی رنگ‌بندی کنیم و مثل استدلال سؤال قبل عمل کنیم معلوم خواهد شد که فرش‌بندی صفحه  $6 \times 6$  با موزاییک‌هایی از نوع ۲ نیز غیر ممکن است.

۲۶. چون یک مربع  $4 \times 4$  را می‌توان با موزاییک از نوع ۲ فرش کرد پس با کنار هم گذاشتن ۶۲۵ عدد از این مربع‌های  $4 \times 4$  می‌توان صفحه شطرنجی  $100 \times 100$  را به دست آورد.

۲۷. اگر  $n$  مهره به ترتیب شماره در داخل میله A باشند و دو میله B و C خالی باشند، آنگاه حداقل با  $2^n$  حرکت می‌توان مهره‌ها را از A به C منتقل کرد به طوری که مهره‌های با شماره بزرگتر هرگز روی مهره‌های با شماره کوچکتر قرار نگیرند.



اثبات: فرض می‌کنیم با حداقل  $h_{n-1}$  حرکت بتوان  $n-1$  مهره با شرایط مذکور را از A به C منتقل کرد. ابتدا  $n-1$  مهره را با  $h_{n-1}$  حرکت از A به B منتقل می‌کنیم. فقط مهره  $n$  در داخل میله A باقی می‌ماند. با یک حرکت مهره  $n$  را به C منتقل می‌کنیم و با  $h_{n-1}$  حرکت  $n-1$  مهره دیگر را از B به C انتقال می‌دهیم. پس مجموع حرکات برای چنین کاری برابر  $h_{n-1} + 1 + h_{n-1}$  یعنی  $2h_{n-1} + 1$  خواهد بود. پس:

$$h_n = 2h_{n-1} + 1 \quad (1)$$

می‌دانیم:

$$h_1 = 1, h_2 = 3, h_3 = 7, \dots$$

$$h_n = 2^n - 1$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱) معلوم می شود که:

برای حل مسأله مورد نظر الگوریتم زیر را پیاده می کنیم:

- مهره ۱ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۲ را به میله ۱ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۱ را به میله ۱ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۴ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۱ تا ۳ را به میله ۳ منتقل می کنیم (با توجه به لم، ۷ حرکت).
- پس مجموعاً ۱۱ حرکت می شود و با کمتر از این، ممکن نیست.

۲۸. برای حل مسأله الگوریتم زیر را پیاده می کنیم:

- مهره ۲ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۱ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۳ را به میله ۲ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۱ را به میله ۱ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۲ را به میله ۲ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۱ را به میله ۲ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۵ را به میله ۳ منتقل می کنیم (یک حرکت).
  - مهره ۱ تا ۴ را به میله ۳ منتقل می کنیم (با توجه به لم، ۱۵ حرکت).
- پس مجموعاً ۲۲ حرکت می شود و با کمتر از این، ممکن نیست.

۲۹. به عنوان مثال اگر اعداد ما ۲۰، ۱۰، ۴ و ۲ بوده و  $x = ۲۰$  باشد به سادگی قابل بررسی است که این الگوریتم در خروجی خود عدد  $x = ۲۰$  را عضوی از آرایه  $a$  معرفی نخواهد کرد.

۳۰. اگر آرایه  $a$  با همان عناصر مثال قبل فرض شود و  $x = ۱۰$  باشد، باز خروجی الگوریتم چنان است که  $x = ۱۰$  در آرایه  $a$  موجود نیست.

## ششمین المپیاد کامپیوتر

اردیبهشت ۷۵

هر جواب درست ۴ نمره مثبت و هر جواب نادرست ۱ نمره منفی دارد.

۱. ۱۵ عدد گلوله با وزن‌های دو به دو متفاوت و سه ترازوی دو کفه‌ای سالم بدون وزنه داده شده‌اند. با استفاده از هر یک از این ترازوها می‌توان وزن دو گلوله را با هم مقایسه کرد. در هر مرحله می‌توان از تعدادی از ترازوها به‌طور همزمان جهت توزین این گلوله‌ها استفاده کرد. با حداقل چه تعداد مراحل می‌توان سنگین‌ترین گلوله را مشخص کرد؟

(ج) ۹

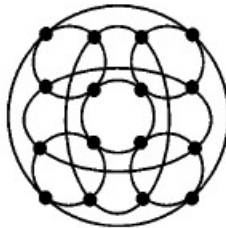
(ب) ۶

(الف) ۵

(ه) ۱۴

(د) ۱۳

۲. ۱۶ کامپیوتر مطابق شکل به هم ارتباط داده شده‌اند. هر کامپیوتر می‌تواند در هر ثانیه یک فایل اطلاعاتی را فقط



به یکی از کامپیوترهایی که به آن مربوط است منتقل کند.

برای این که یک فایل اطلاعاتی جدید که فقط در یکی از

کامپیوترها موجود است، به تمام کامپیوترها منتقل شود،

حداقل چند ثانیه وقت لازم است؟

(ب) ۴ ثانیه

(الف) ۳ ثانیه

(د) ۶ ثانیه

(ج) ۵ ثانیه

(ه) بسته به این که فایل اولیه روی کدام کامپیوتر باشد زمان فرق می‌کند

۳. فرض کنید  $b_0, b_1, \dots, b_q$  نمایش عدد  $b$  در مبنای ۲ باشد. عدد  $b$  بر ۳ بخش پذیر است اگر و تنها اگر:

(الف)  $b_1 = b_0 = 1$

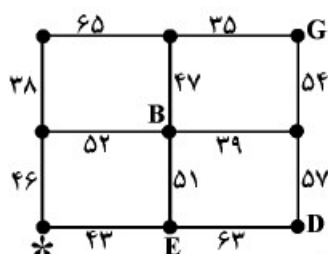
(ب) مجموع  $b_i$  ها بر ۹ بخش پذیر باشد

(ج) مجموع  $b_i$  ها بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۹ بخش پذیر نباشد

(د) مقدار  $\dots b_1 + b_0$  صفر باشد

(ه) مقدار  $\dots b_1 + b_0$  بر ۳ بخش پذیر باشد

۴. در کشوری ۹ شهر با نام های  $A$  تا  $I$  وجود دارد. بین این شهرها جاده‌هایی کشیده شده است. نقشه این جاده‌ها



همراه با طول آنها در شکل زیر نشان داده شده است. ولی

متأسفانه نام ۵ تا از این شهرها از نقشه پاک شده است.

اطلاعات زیر را در مورد شهرها می‌دانیم:

•  $C$  و  $D$  دورترین شهرها هستند.

• کوتاه‌ترین فاصله بین  $B$  و  $C$  برابر با کوتاهترین فاصله بین  $E$  و  $I$  است.

• کوتاه‌ترین فاصله بین  $H$  و  $F$ ، یکی بیشتر از کوتاه‌ترین فاصله بین  $E$  و  $H$  است.

• کوتاه‌ترین فاصله بین  $A$  و  $B$ ، دو برابر کوتاه‌ترین فاصله بین  $H$  و  $B$  است. شهری که در شکل با ستاره

مشخص شده است، کدام شهر است؟

(الف)  $A$  (ب)  $C$  (ج)  $F$  (د)  $H$  (ه)  $I$

۵. می‌خواهیم مقدار دو متغیر  $A$  و  $B$  را با هم عوض کنیم. کدام یک از برنامه‌های زیر این کار را انجام می‌دهند؟

(الف)  $A = A + B$  (ب)  $A = A - B$  (ج)  $A = A + B$  (د)  $A = B$  (ه) الف و ج

$B = A + B$   $B = A - B$   $B = A + B$   $B = A$   $B = A + B$

$A = B + A$   $A = A - B$   $A = A + B$   $A = A + B$   $A = B + A$

۶. برای انجام یک پروژه می‌خواهیم ۶ دانش‌آموز را گروه‌بندی کنیم به طوری که هر گروه یا تک نفره باشد یا شامل ۲

دانش‌آموز، به چند طریق این کار ممکن است؟

(الف) ۷۶ (ب) ۶۴

(ج) ۱۹۶ (د) ۳۵

(ه) ۹۰

۷. محمد متوجه شد که امسال سن او برابر مجموع رقم‌های سال تولد اوست. سن او در چه محدوده‌ای است؟

- الف) ۱۱ تا ۱۴  
ب) ۱۵ تا ۱۹  
ج) ۲۱ تا ۲۵  
د) ۲۶ تا ۲۹  
ه) ۳۱ تا ۳۶

۸. در یک مسابقه فوتبال ۱۰ تیم شرکت کرده‌اند. هر دو تیم یک بار مسابقه می‌دهند. هر برد دو امتیاز، هر مساوی یک امتیاز و هر باخت صفر امتیاز دارد. حداکثر اختلاف امتیاز برای دو تیم که رتبه‌های متوالی را کسب کرده‌اند چه قدر می‌تواند باشد؟

- الف) ۸  
ب) ۱۰  
ج) ۱۲  
د) ۱۵  
ه) ۱۸

۹. عمل شماره یک از رشته  $abcdef$ ، رشته  $adbcef$  و عمل شماره دو از رشته  $abcdef$ ، رشته  $daebfc$  را تولید می‌کند. با استفاده بی‌دری و دلخواه از این دو عمل و با شروع از رشته  $abcdef$  کدام یک از رشته‌های زیر را نمی‌توان به دست آورد.

- الف)  $dbafec$     ب)  $fcbeda$     ج)  $cabefd$     د)  $efdcab$     ه)  $fedcba$

۱۰. تعداد اعداد ۳ رقمی که مجموع ارقام آنها برابر با ۱۵ باشد چه قدر است؟

- الف) ۶۹  
ب) ۱۲۵  
ج) ۷۳  
د) ۹۰  
ه) ۱۲۶

۱۱. برای مقادیر صحیح  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$  تابع  $A(x, y)$  را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A(0, y) = y + 1$$

$$A(x + 1, 0) = A(x, 1)$$

$$A(x + 1, y + 1) = A(x, A(x + 1, y))$$

مقدار  $A(1, y)$  برای کلیه مقادیر نامنفی  $y$  چقدر است؟

- الف) ۲    ب)  $1 + y$     ج)  $2 + y$     د)  $3 + 2y$     ه) هیچ‌کدام

۱۲. تمام اعداد طبیعی را پشت سر هم نوشته‌ایم. ۱۳۷۵ امین رقم این دنباله چیست؟ (اعداد طبیعی از ۱ شروع می‌شوند.)

- الف) ۳    ب) ۴    ج) ۵    د) ۶    ه) ۹