الگوی کار و تمرین

ریاضی ۹ اُم

آموزش و تمرین

کاظم اجلالی، مهدی اعتصامی‌فرد، ارشک حمیدی

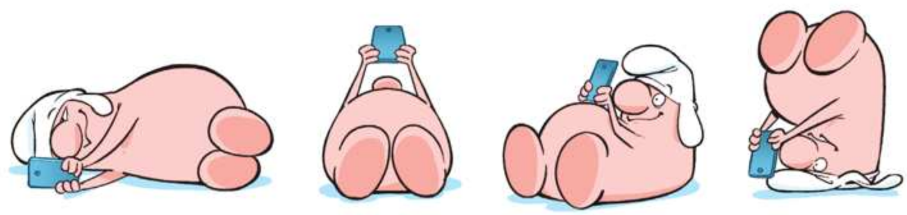
پیشگفتار

این کتاب را براساس محتوای کتاب درسی ریاضی پایهٔ نهم و با هدف آموزش آسان و دقیق و تمرین بیشتر نوشته‌ایم. بنابراین کتاب حاضر مکمل کتاب درسی است. به همین دلیل، همه‌جا چارچوب‌های کتاب درسی را رعایت کرده‌ایم. در عین حال، با آوردن تمرین‌های زیاد و متنوع کوشیده‌ایم خلأهای موجود در کتاب درسی را نیز برطرف کنیم.

تقسیم‌بندی فصل‌ها و درس‌های کتاب درست مانند کتاب درسی است. در هر درس، مفاهیم اصلی را با بیانی روشن و با آوردن مثال‌هایی آموزنده معرفی کرده‌ایم و اگر لازم بوده، در انتهای درس با حل کردن مسئله‌های تکمیلی، روش استفاده از این مفاهیم را نشان داده‌ایم. در انتهای هر درس تمرین‌هایی برای کار مستقل دانش‌آموزان آورده‌ایم. همچنین، در انتهای هر درس نمونه‌هایی از پرسش‌های چهارگزینه‌ای و در انتهای هر فصل برگزیده‌ای از سؤالات امتحانات نهایی مربوط به مباحث همان فصل را آورده‌ایم. علاوه بر این‌ها، برای آشنایی بیشتر با سؤال‌های مطرح‌شده در امتحانات پایانی، در انتهای کتاب نمونه‌هایی از امتحانات هماهنگ استانی سال‌های اخیر آمده است.

وظیفهٔ خود می‌دانیم که از همکاران عزیزمان در نشر الگو، جناب آقای دکتر آریس آقانیانس و خانم‌ها عاطفه ربیعی، مهدیه جمشیدی و زینب آدینه‌وند برای ویراستاری علمی کتاب، خانم فاطمه احدی برای حروف‌چینی و صفحه‌آرایی کتاب، خانم الهام اسماعیل‌زاده برای رسم شکل‌ها و خانم سکینه مختار مدیر واحد ویراستاری و حروف‌چینی تشکر و قدردانی کنیم.

مؤلفان



فهرست

فصل اول

مجموعه‌ها

درس اول: معرفی مجموعه

مفهوم مجموعه

در زندگی روزمره برای مشخص کردن چیزهایی که ویژگی مورد نظر ما را دارند از کلمه‌هایی مانند «دسته»، «گروه» و «مجموعه» استفاده می‌کنیم که هر سه یک معنی را می‌دهند. مثلاً می‌گوییم «دسته‌ای از پرنده‌ها»، «گروهی از پرنده‌ها» یا «مجموعه‌ای از پرنده‌ها». در ریاضیات کلمهٔ «مجموعه» معنی خاصی دارد.

در ریاضیات برای توصیف و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز از **مجموعه** استفاده می‌کنیم. کلمهٔ «مشخص» یعنی اینکه ویژگی اشیای متعلق به مجموعه را طوری توصیف کنیم که هیچ ابهامی ایجاد نشود. کلمهٔ «متمایز» یعنی اینکه در مجموعه هیچ دو شیئی برابر نیستند.

مثال می‌توانیم بگوییم «مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵»، زیرا با این توصیف معلوم است که منظورمان عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ هستند. اما نمی‌توانیم بگوییم «مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵ که ممکن است کسی آن‌ها را دوست نداشته باشد»، زیرا هیچ توصیف مشخصی برای دوست نداشتن عددها نمی‌شناسیم. همچنین می‌توانیم بگوییم «مجموعهٔ عددهای ۱، ۲ و ۳»، اما نمی‌توانیم بگوییم «مجموعهٔ عددهای ۱، ۱ و ۲». با این حال، توافق می‌کنیم که در چنین مواردی، هر عضو تکراری را فقط یک بار به حساب بیاوریم.

مثال دانش‌آموزان پایهٔ نهم شهر شما در سال تحصیلی جاری افرادی مشخص هستند و یک مجموعه را مشخص می‌کنند. البته، اگر شهر شما بزرگ باشد، ممکن است همهٔ عضوهای این مجموعه را نشناسید!

عضویت

معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نام‌گذاری می‌کنیم. اگر شیئی مانند a در مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم a **عضو** مجموعهٔ A است و می‌نویسیم $a\in A$ (بخوانید a عضو مجموعهٔ A است). اگر شیئی مانند a عضو مجموعهٔ A نباشد، می‌نویسیم $a\notin A$ (بخوانید a عضو مجموعهٔ A نیست). توجه کنید که لزومی ندارد عضوهای یک مجموعه از یک جنس باشند. مثلاً، ممکن است عدد ۲ و مثلث ABC عضو یک مجموعه باشند.

مثال فرض کنید A مجموعهٔ عددهای اول کوچک‌تر از ۷ باشد. در این صورت $۲\in A$، $۳\in A$ و $۵\in A$، اما $۷\notin A$، همین‌طور، $۴\notin A$.

نمایش مجموعه‌ها

معمولاً مجموعه‌ها را با نوشتن عضوهایشان بین دو آکُلاد نشان می‌دهیم.

مثال اگر A مجموعهٔ عددهای اول کوچک‌تر از ۷ باشد، مجموعهٔ A را به‌صورت $\{۲,۳,۵\}$ نشان می‌دهیم.

مثال مجموعهٔ $\{۲,\{۲\}\}$ دو عضو دارد که ۲ و $\{۲\}$ هستند.

مثال فرض کنید $A=\{۱,\Delta,\{۲\},\{۳,۴\}\}$. در این صورت

$$۱\in A\,,\quad \Delta\in A\,,\quad \{۲\}\in A\,,\quad \{۳,۴\}\in A\,,\quad \{\Delta\}\notin A\,,\quad ۲\notin A$$

ترتیب عضوها

اگر مجموعه‌ای را با دو آکلاد نشان دهیم، ترتیب نوشتن عضوهایش اهمیتی ندارد. همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعهٔ جدیدی ساخته نمی‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد که عضوهای مجموعه متمایزند.

مثال

- اگر A مجموعهٔ عددهای اول کوچک‌تر از ۷ باشد، می‌توانیم بنویسیم $A=\{۲,۳,۵\}$ یا $A=\{۵,۲,۳\}$.
- به‌جای نمایش مجموعه‌ای به‌صورت $\{۱,۱,۲,۳\}$ می‌نویسیم $\{۱,۲,۳\}$، یعنی عضوهای تکراری را فقط یک بار می‌نویسیم.

مجموعه‌های بزرگ

گاهی ممکن است نوشتن همهٔ عضوهای مجموعه‌ای ممکن نباشد. مثلاً نوشتن همهٔ عضوهای مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ عملاً ممکن نیست. در این موارد، اگر عضوهای مجموعه الگویی داشته باشند، چند عضو نخست را می‌نویسیم تا الگو مشخص شود، سپس با گذاشتن «...» نشان می‌دهیم که این الگو ادامه دارد و در آخر هم یک یا چند عضو آخر مجموعه را می‌نویسیم. به این ترتیب، مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ را به‌صورت $\{۱,۲,۳,...,۹۹۸,۹۹۹\}$ می‌نویسیم. همچنین، اگر نتوانیم ابتدا یا انتهای مجموعه را مشخص کنیم، باز هم از «...» استفاده می‌کنیم. مثلاً مجموعهٔ عددهای طبیعی را به‌صورت $\{۱,۲,۳,...\}$ و مجموعهٔ عددهای صحیح منفی را به‌صورت $\{-۱,-۲,-۳,...\}$ یا $\{...,-۳,-۲,-۱\}$ می‌نویسیم.

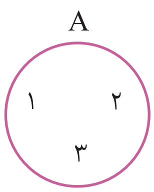
مثال

- مجموعهٔ $\{۳,۶,۹,۱۲,...,۳۶\}$ را به‌صورت «مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۳ که از ۳۷ کمترند» توصیف می‌کنیم.
- مجموعهٔ $\{۱,۴,۹,۱۶,...\}$ را به‌صورت «مجموعهٔ مربع‌های اعداد طبیعی» توصیف می‌کنیم.

نمودار وِن یک مجموعه

روشی دیگر برای نمایش مجموعه‌ها این است که مجموعه را با نوشتن عضوهایش درون یک منحنی بسته نشان دهیم. این طرز نمایش را نمودار وِن می‌نامند.

مثال فرض کنید A مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ باشد. نمودار وِن مجموعهٔ A به‌صورت مقابل است.



مجموعهٔ تهی و مجموعهٔ ناتهی

اگر مجموعه‌ای هیچ عضوی نداشته باشد، آن را مجموعهٔ تهی می‌نامیم و با $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان می‌دهیم. اگر مجموعه‌ای تهی نباشد، به آن مجموعهٔ ناتهی می‌گوییم.

مثال

- مجموعهٔ عددهای اول و زوج بزرگ‌تر از ۲ تهی است.
- مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^۲+۱=۰$ تهی است.
- مجموعهٔ اعداد طبیعی‌ای که هم مربع کامل هستند و هم مکعب کامل، ناتهی است. مثلاً عدد ۶۴ عضوی از این مجموعه است، زیرا مربع ۸ و مکعب ۴ است.

مجموعهٔ تهی را نباید با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$، $\{\{\}\}$ و $\{0\}$ که هر کدام یک عضو دارند اشتباه کرد. همچنین، مجموعهٔ تهی را با نمودار وِن نشان نمی‌دهیم.

مثال ممکن است مجموعهٔ تهی خودش عضو یک مجموعه باشد. معلوم است که ساده‌ترین مثال $\{\varnothing\}$ است. مثالی دیگر $\{\varnothing, 1\}$ است.

تمرین

درست یا نادرست

الف) عبارت «کتاب‌های سخت ریاضی» یک مجموعه را مشخص می‌کند. ◯

ب) اگر P مجموعهٔ اعداد اول باشد، آن‌گاه $2 \in P$. ◯

پ) کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $\{3, 2, 5\}$ برابر ۳ است. ◯

ت) مجموعهٔ مثلث‌هایی که دو زاویهٔ باز دارند، تهی است. ◯

ث) مجموعهٔ $\{1, 2, 2, 3, 4\}$ پنج عضو دارد. ◯

کامل کنید

الف) برای توصیف دسته‌ای از اشیای مشخص و متمایز از .... استفاده می‌کنیم.

ب) بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $\{1, 3, 7, 2, 0\}$ برابر .... است.

پ) تعداد عضوهای مجموعهٔ $\{2, \{2\}, \varnothing\}$ برابر .... است.

ت) مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، مجموعهٔ .... نام دارد.

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) کدام گزینه توصیف یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

۱) آدم‌های خوب شهر   ۲) انسان‌هایی که تاکنون زیسته‌اند

ب) کدام عدد عضو مجموعهٔ $\{\{1\}, \{1, 2\}, 2\}$ است؟

۱) ۱   ۲) ۲

پ) کدام‌یک مجموعهٔ تهی است؟

۱) مجموعهٔ جواب‌های صحیح معادلهٔ $2x - 3 = 0$

۲) مجموعهٔ نقطه‌های روی یک پاره‌خط که از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله‌اند

ت) مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4\}$ چند عضو کمتر از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \ldots, 19\}$ دارد؟

۱) ۱۵   ۲) ۱۶

ث) چند عضو باید به مجموعهٔ $\{2, 4, 6\}$ اضافه کنیم تا مجموعهٔ مضرب‌های طبیعی ۲ که از ۲۰ کوچک‌تر هستند، به‌دست بیاید؟

۱) ۶   ۲) ۷

تمرین‌های تشریحی

۱ در هر مورد، مشخص کنید که عبارت داده شده یک مجموعه را مشخص می‌کند یا خیر. سپس، مجموعه‌ها را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

الف) اعداد صحیح یک‌رقمی بزرگ‌تر از ۶

ب) پنج ماه از سال

پ) سه رنگ شاد

ت) اعداد طبیعی بین ۱۷ و ۱۸

ث) چهار عدد اول دورقمی

ج) اعداد گویای مثبت مانند $\frac{a}{b}$ که $a+b=۷$

چ) جواب‌های معادلهٔ $۳x-۵=۱۴$

ح) اعداد طبیعی‌ای که ۵ شمارندهٔ آن‌هاست

۲ مولوی می‌گوید: «ای عاشقان، ای عاشقان آن کس که بیند روی او / شوریده گردد عقل او، آشفته گردد خوی او». آیا عبارت «ای عاشقان» در این بیت مجموعه‌ای از انسان‌ها را مشخص می‌کند؟

۳ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه بنویسید و تعداد عضوهای هر مجموعه را تعیین کنید.

الف) اعداد صحیح بین ۵− و ۸

ب) اعداد اول بین ۱۰ و ۲۰

پ) عددهای اول زوج

ت) عددهای دورقمی مربع کامل

۴ متناظر با هر عبارت، یک مجموعه بنویسید.

الف) اعداد طبیعی فرد

ب) اعداد صحیح به‌صورت $۵k+۲$ (k عددی طبیعی است)

۵ سه مجموعهٔ متفاوت بنویسید که ۳ و ۵ عضو آن‌ها باشند.

۶ سه عبارت بنویسید که مجموعهٔ $\{۲\}$ را توصیف کنند.

۷ برای توصیف مجموعه‌های زیر، یک عبارت بنویسید.

الف) $\{۳,۵,۷\}$

ب) $\{۲,۴,۶,۸\}$

پ) $\{-۴,-۲,۰,۲,۴\}$

ت) $\{-۶,-۳,۰,۳,۶,۹\}$

ث) $\{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$

ج) $\{۳,۶,۹,۱۲,\ldots\}$

چ) $\{۱۰,۱۲,۱۴,\ldots,۹۸\}$

ح) $\{۱,۸,۲۷,۶۴,۱۲۵,\ldots\}$

۸) اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج و کوچک‌تر از ۲۰ باشد، درستی یا نادرستی هر مورد را تعیین کنید.

الف) $۰\in A$ ب) $۱۲\in A$ پ) $۱۳\notin A$

۹) اگر $A=\{a,\{a\},\{a,b\},c\}$، در هر مورد مشخص کنید حکم داده شده درست است یا خیر.

الف) $a\in A$ ب) $b\notin A$ پ) $\{a\}\in A$

ت) $\{c\}\in A$

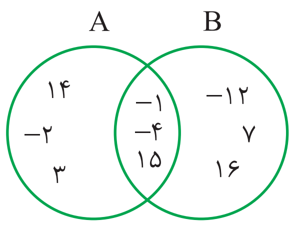
۱۰) فرض کنید $A=\{۱,۲,\{۱,۲\},۳,\{۴\}\}$. در هر مورد، نماد «$\in$» یا «$\notin$» را طوری قرار دهید که حکم حاصل درست باشد.

الف) $\{۱\}\ \bigcirc\ A$ ب) $۲\ \bigcirc\ A$ پ) $\{۱,۲\}\ \bigcirc\ A$

ت) $۴\ \bigcirc\ A$ ث) $\{۱,۲,۳\}\ \bigcirc\ A$ ج) $\{۳,\{۴\}\}\ \bigcirc\ A$

۱۱) مجموعهٔ عددهای زوج یک‌رقمی را با نمودار وِن نشان دهید.

۱۲) نمودار وِن مجموعه‌های A و B در شکل مقابل رسم شده است.



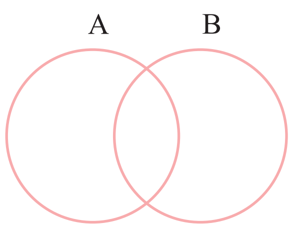
الف) مجموعه‌های A و B را با نوشتن عضوهایشان مشخص کنید.

ب) بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ A چه عددی است؟

پ) کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ B چه عددی است؟

ت) کوچک‌ترین عضوی که هم در مجموعهٔ A و هم در مجموعهٔ B است، چه عددی است؟

۱۳) الف) دو مجموعهٔ $A=\{-۳,-۱,۰,۸,۹\}$ و $B=\{-۱,۵,۷,۸\}$ را در نظر بگیرید و نمودار وِن مقابل را کامل کنید.



ب) مجموعهٔ عضوهایی را که هم در مجموعهٔ A و هم در مجموعهٔ B هستند، بنویسید.

پ) مجموعهٔ عضوهایی را که در مجموعهٔ B هستند ولی در مجموعهٔ A نیستند، بنویسید.

۱۴) سه مجموعهٔ متفاوت مثال بزنید که هریک از آن‌ها مجموعهٔ تهی باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ کدام گزینه یک مجموعه را مشخص نمی‌کند؟

۱) عددهای زوج کوچک‌تر از ۱۰
۲) عددهای اول بزرگ‌تر از ۳
۳) سه عدد اول بین ۱۰ و ۲۰
۴) عددهای اول بین ۲۵ و ۲۸

۲ مجموعهٔ عددهای صحیح بین $\sqrt{۱۳}$ و $\sqrt{۹۸}$ چند عضو دارد؟

۱) ۴
۲) ۵
۳) ۶
۴) ۷

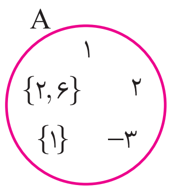
۳ کدام گزینه عضو مجموعهٔ $\{۱,\{۲,۳\},\{۴\},۵,۶\}$ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) $\{۳\}$
۴) ۴

۴ کدام گزینه عضو مجموعهٔ $\{۱,\{۲\},\{۳,۴\},۵,۶\}$ نیست؟

۱) ۱
۲) $\{۲\}$
۳) ۳
۴) ۶

۵ نمودار وِن مجموعهٔ A در شکل مقابل داده شده است. کدام گزینه درست نیست؟



۱) $۱\in A$
۲) $\{۱\}\in A$
۳) $-۴\notin A$
۴) $\{۲,۶\}\notin A$

۶ مجموعهٔ $\{۱,\{۱\},\{۱,۲\},\varnothing,\{۲,۱\}\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۲
۲) ۳
۳) ۴
۴) ۵

۷ مجموعهٔ $\{۱,\{۱\},\{۱,۲\},\varnothing,\{\varnothing\}\}$ چند عضو دارد که عضو مجموعهٔ $\{۱,\{۲,۱\},\{\},\{\{\varnothing\}\}\}$ نیستند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

۸ اگر مجموعهٔ $\{۱,۲,x,x^۲+۱\}$ دو عضو داشته باشد، مقدار x کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) -۱
۴) صفر

۹ کدام‌یک مجموعهٔ تهی است؟

۱) مجموعهٔ عددهای اول بین ۲۵ و ۳۰
۲) مجموعهٔ عددهای اول کوچک‌تر از ۱۰
۳) مجموعهٔ مثلث‌هایی که دو زاویهٔ باز دارند
۴) مجموعهٔ مثلث‌هایی که دو زاویهٔ تند دارند

۱۰ کدام‌یک مجموعهٔ تهی نیست؟

۱) مجموعهٔ مضرب‌های ۱۳ بین ۴۰ و ۵۰
۲) مجموعهٔ عددهای اول دورقمی
۳) مجموعهٔ عددهای اول بین ۵۵ و ۵۸
۴) مجموعهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویهٔ باز دارند

درس دوم: مجموعه‌های برابر و نمایش مجموعه‌ها

مجموعه‌های برابر

اگر هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد و هر عضو مجموعهٔ B نیز عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌گوییم مجموعه‌های A و B برابرند و می‌نویسیم $A=B$.

مثال

- فرض کنید A مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۱۵ باشد. در این صورت $A=\{۳,۵\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۴۵ باشد. در این صورت $B=\{۳,۵\}$. بنابراین $A=B$.
- مجموعهٔ حروف کلمهٔ «مادر» با مجموعهٔ حروف کلمهٔ «مراد» برابر است، زیرا هر دو $\{$ر, د, ا, م$\}$ هستند.

مثال

فرض کنید $\left\{b,\frac{۵}{۲},-۱,۳\right\}=\left\{۱,-۱,\frac{۵}{۲},a\right\}$. چون مجموعه‌های دو طرف تساوی برابرند، پس هر عضو هر کدام از آن‌ها باید عضو دیگری هم باشد. چون ۱ عضو مجموعهٔ سمت چپ است، پس باید عضو مجموعهٔ سمت راست هم باشد، در نتیجه $b=۱$. از طرف دیگر، چون ۳ عضو مجموعهٔ سمت راست است، پس باید عضو مجموعهٔ سمت چپ هم باشد، در نتیجه $a=۳$.

مجموعه‌های نابرابر

اگر یکی از دو مجموعهٔ A و B عضوی داشته باشد که در دیگری نباشد، می‌گوییم مجموعه‌های A و B برابر نیستند و می‌نویسیم $A\neq B$.

مثال

فرض کنید A مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۳۰ باشد. در این صورت $A=\{۲,۳,۵\}$. همچنین فرض کنید B مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۴۲ باشد. در این صورت $B=\{۲,۳,۷\}$. توجه کنید که $۵\in A$ اما $۵\notin B$، پس $A\neq B$. البته می‌توانستیم بگوییم $۷\in B$ اما $۷\notin A$، پس $A\neq B$.

زیرمجموعه

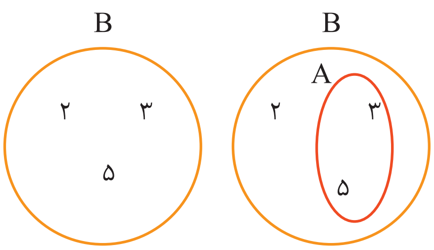
اگر هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B باشد، می‌گوییم مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B است و می‌نویسیم $A\subseteq B$.

مثال

هر عضو مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳\}$ عضوی از مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است. پس A زیرمجموعهٔ B است.

مثال

فرض کنید A مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۴۵ باشد. در این صورت $A=\{۳,۵\}$. همچنین، فرض کنید B مجموعهٔ شمارنده‌های اول عدد ۳۰ باشد. در این صورت $B=\{۲,۳,۵\}$. معلوم است که هر عضو مجموعهٔ A عضوی از مجموعهٔ B است، یعنی $A\subseteq B$. نمودار وِن مجموعهٔ B را در شکل سمت چپ نشان داده‌ایم. اگر بخواهیم نمودار وِن مجموعهٔ A را هم روی این شکل رسم کنیم، باید مانند شکل سمت راست دور عددهای ۳ و ۵ یک منحنی بسته بکشیم.



مثال فرض کنید A مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و B مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین باشد. چون هر مثلث متساوی‌الاضلاع مثلثی متساوی‌الساقین نیز هست، پس $A \subseteq B$.

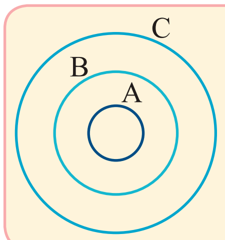
زیرمجموعه نبودن

اگر مجموعهٔ A عضوی داشته باشد که عضوی از مجموعهٔ B نباشد، می‌گوییم مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ مجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A \nsubseteq B$.

مثال
- فرض کنید A مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین و B مجموعهٔ مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باشد. چون مثلثی متساوی‌الساقین وجود دارد که متساوی‌الاضلاع نیست (مثلاً مثلث با طول ضلع‌های ۱، ۵ و ۵)، پس $A \nsubseteq B$.
- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، آن‌گاه $\{۱,۲,۳\} \subseteq A$، $\{۲,۴\} \subseteq A$، $\{\{۱\}\} \nsubseteq A$ و $\{۱,۲,۳,۴\} \subseteq A$.
- فرض کنید $A=\{a,b,\{c\},\{d,e\}\}$. در این صورت $\{a,b\} \subseteq A$، $\{d,e\} \nsubseteq A$ و $\{\{c\}\} \subseteq A$.
- اگر $A=\{۰,۲,۳,\{۱\},\{۲,۳\}\}$، مجموعهٔ $\{۲,۳\}$ هم عضو مجموعهٔ A است هم زیرمجموعهٔ آن، یعنی $\{۲,۳\} \in A$ و $\{۲,۳\} \subseteq A$.

روابط زیرمجموعه بودن

- اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه $A \subseteq A$ و $\varnothing \subseteq A$.
- فرض کنید A، B و C سه مجموعه باشند. اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$، آن‌گاه $A \subseteq C$.



نوشتن زیرمجموعه‌های یک مجموعه

هر زیرمجموعهٔ ناتهی یک مجموعه از چند عضو این مجموعه تشکیل شده است. برای نوشتن همهٔ زیرمجموعه‌های یک مجموعه، بهتر است ابتدا زیرمجموعهٔ صفرعضوی آن را (که مجموعهٔ تهی است) بنویسیم، سپس زیرمجموعه‌های یک‌عضوی آن را بنویسیم، بعد زیرمجموعه‌های دوعضوی آن را بنویسیم و همین طور ادامه دهیم تا در نهایت خود مجموعه را بنویسیم.

مثال همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴\}$ را در زیر نوشته‌ایم:

صفرعضوی: $\varnothing$

یک‌عضوی: $\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۴\}$

دوعضوی: $\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۳,۴\}$

سه‌عضوی: $\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۴\},\{۱,۳,۴\},\{۲,۳,۴\}$

چهارعضوی: $\{۱,۲,۳,۴\}$

مثال مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ هشت زیرمجموعه دارد که ۲ عضوی از آن‌هاست. این زیرمجموعه‌ها عبارت‌اند از

$$\{۲\},\{۲,۱\},\{۲,۳\},\{۲,۴\},\{۲,۱,۳\},\{۲,۱,۴\},\{۲,۳,۴\},\{۲,۱,۳,۴\}$$

نمایش مجموعه‌های مهم اعداد

برای چند مجموعهٔ معروف از عددها نمادهای خاصی وجود دارد.

- مجموعهٔ عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\dots\}$$

- مجموعهٔ عددهای حسابی را با $\mathbb{W}$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$$

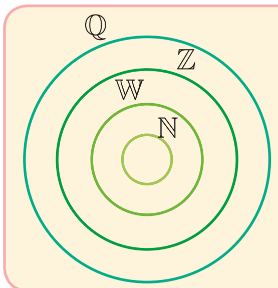
- مجموعهٔ عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$$

- مجموعهٔ عددهای گویا را با $\mathbb{Q}$ نشان می‌دهیم.

چون هر عدد طبیعی، عددی حسابی است و هر عدد حسابی، عددی صحیح است و هر عدد صحیح، عددی گویاست، پس

$$\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$$



نمایش مجموعه‌ها به کمک نمادهای ریاضی

اگر بخواهیم مجموعه‌ای را به‌صورت $\{\dots|\dots\}$ نشان دهیم، در سمت چپ نماد «$|$» صورت کلی عضوهای مجموعه و در سمت راست نماد «$|$» شرط یا شرطهایی که این عضو را به طور کامل توصیف می‌کنند، می‌نویسیم. نماد «$|$» را می‌خوانیم «به‌طوری که».

مثال

- اگر E مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$E=\{۲,۴,۶,\dots\}$$

توجه کنید که مجموعهٔ E از همهٔ عددهای به‌صورت $۲k$ تشکیل شده است که در آن‌ها k عددی طبیعی است. بنابراین نمایش دیگر این مجموعه به کمک نمادهای ریاضی به‌صورت زیر است:

$$E=\{۲k\,|\,k\in\mathbb{N}\}$$

تساوی بالا را می‌خوانیم «مجموعهٔ E برابر است با مجموعهٔ عددهایی مانند $۲k$ به‌طوری که k عضو مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است».

- اگر O مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$O=\{۱,۳,۵,\dots\}$$

توجه کنید که مجموعهٔ O از همهٔ عددهای به‌صورت $۲k-۱$ تشکیل شده است که در آن‌ها k عددی طبیعی است. بنابراین نمایش دیگر این مجموعه به کمک نمادهای ریاضی به‌صورت زیر است:

$$O=\{۲k-۱\,|\,k\in\mathbb{N}\}$$

- مجموعهٔ عددهای گویا را می‌توانیم به‌صورت زیر نشان دهیم:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq ۰\right\}$$

مثال

- اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، می‌توانیم A را به شکل‌های زیر نشان دهیم:

$$A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},x\leq ۴\} \quad \text{یا} \quad A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\leq ۴\}$$

- مجموعهٔ $B=\{۲,۴,۶,۸\}$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم

$$B=\{۲x\,|\,x\in\mathbb{N},x\leq ۴\} \quad \text{یا} \quad B=\{x\,|\,x\in E,x<۱۰\}$$

مثال در هر مورد، مجموعهٔ داده شده را با نوشتن عضوهایش مشخص کرده‌ایم.

الف) $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۲\le x<۳\}=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$

ب) $B=\{۲x \mid x\in\mathbb{N}, ۳<x<۷\}=\{۸,۱۰,۱۲\}$

اگر مجموعه‌ای با عضوهایش مشخص شده باشد، نمایش آن با نمادهای ریاضی منحصر به فرد نیست.

مثال مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$A=\{۰,۴,۸,۱۲,\dots,۲۴,۲۸\}\ ,\quad B=\{۱,۶,۱۱,\dots,۲۶,۳۱\}$$

عضوهای مجموعهٔ A مضرب‌های غیرمنفی عدد ۴ هستند که از ۲۸ کوچک‌تر یا با آن برابرند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$A=\{۴k \mid k\in\mathbb{Z}, ۰\le k\le ۷\}=\{۴k \mid k\in\mathbb{W}, k\le ۷\}$$

هر عضو مجموعهٔ B یک واحد از مضربی غیرمنفی از عدد ۵ که از ۳۰ کوچک‌تر یا با آن برابر است، بیشتر است. بنابراین، می‌توان نوشت

$$B=\{۵k+۱ \mid k\in\mathbb{Z}, ۰\le k\le ۶\}$$

راه‌های دیگری هم برای نمایش مجموعهٔ B به کمک نمادهای ریاضی وجود دارد، مثلاً،

$$B=\{۵k+۶ \mid k\in\mathbb{Z}, -۱\le k\le ۵\} \quad \text{یا} \quad B=\{۵k-۴ \mid k\in\mathbb{Z}, ۱\le k\le ۷\}$$

مثال مجموعهٔ $\{۰\}$ را می‌توانیم به‌صورت‌های زیر بنویسیم:

$$\left\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -\frac{۱}{۳}<x<\frac{۱}{۳}\right\} \quad \text{یا} \quad \left\{x \mid x\in\mathbb{W}, -\frac{۱}{۲}<x<\frac{۱}{۲}\right\}$$

مسئله‌های تکمیلی

مسئله ۱ **اگر $\{۳x+۷,-۴\}=\{y-۱, ۵x+۱\}$، مقادیر x و y را مشخص کنید.**

راه‌حل: چون -۴ عضو مجموعهٔ سمت چپ تساوی است، پس باید عضو مجموعهٔ سمت راست تساوی نیز باشد. بنابراین یا $y-۱$ برابر -۴ است، یا $۵x+۱$ برابر -۴ است. این دو حالت را بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: $y-۱=-۴$، پس $y=-۳$. توجه کنید که در این حالت عضو $۳x+۷$ از مجموعهٔ سمت چپ تساوی باید با عضو $۵x+۱$ از مجموعهٔ سمت راست تساوی برابر باشد. بنابراین

$$۳x+۷=۵x+۱ \Rightarrow ۵x-۳x=۷-۱ \Rightarrow ۲x=۶ \Rightarrow x=۳$$

در نتیجه در این حالت $x=۳$ و $y=-۳$.

حالت ۲: $۵x+۱=-۴$، پس $۵x=-۵$، یعنی $x=-۱$. توجه کنید که در این حالت عضو $۳x+۷$ از مجموعهٔ سمت چپ تساوی باید با عضو $y-۱$ از مجموعهٔ سمت راست تساوی برابر باشد. بنابراین

$$\begin{cases} ۳x+۷=y-۱ \\ x=-۱ \end{cases} \Rightarrow ۳\times(-۱)+۷=y-۱ \Rightarrow -۳+۷=y-۱ \Rightarrow ۴=y-۱ \Rightarrow y=۵$$

در نتیجه در این حالت $x=-۱$ و $y=۵$.

مسئله ۲ **فرض کنید $A=\{۱,۲,۰,x\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,y\}$. اگر $A\subseteq B$، مقادیر x و y را پیدا کنید.**

راه‌حل: چون $۰\in A$ و $A\subseteq B$، پس $۰\in B$. چون صفر عضو B است، پس $y=۰$. همین‌طور، چون $x\in A$ و $A\subseteq B$، پس $x\in B$. بنابراین x یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و صفر است.

تمرین

درست یا نادرست

الف) هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است. ◯

ب) هر مجموعه زیرمجموعهٔ تهی است. ◯

پ) هر مجموعه دست‌کم دو زیرمجموعه دارد. ◯

ت) مجموعهٔ تهی هیچ زیرمجموعه‌ای ندارد. ◯

ث) مجموعهٔ $\{\varnothing\}$ یک زیرمجموعه دارد. ◯

کامل کنید

الف) اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$، آن‌گاه ....

ب) مجموعهٔ .... زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هاست.

پ) تعداد زیرمجموعه‌های یک‌عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ برابر .... است.

ت) اگر عضوی در مجموعهٔ A باشد و در مجموعهٔ B نباشد، آن‌گاه مجموعهٔ A .... مجموعهٔ B نیست.

ث) مجموعهٔ $\{۲x \mid x \in \mathbb{N}\}$ برابر مجموعهٔ عددهای طبیعی .... است.

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) کدام رابطه درست است؟

۱) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W}$ ۲) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{W}$

ب) کدام‌یک زیرمجموعهٔ مجموعهٔ $\{۱, \{۲\}, \{۲, ۳\}\}$ است؟

۱) $\{\{۲\}\}$ ۲) $\{۱, ۲\}$

پ) کدام توصیف برای مجموعهٔ $\{۲k+۱ \mid k \in \mathbb{W}\}$ درست است؟

۱) مجموعهٔ عددهای طبیعی فرد ۲) مجموعهٔ عددهای طبیعی زوج

ت) نمایش ریاضی مجموعهٔ عددهای گویا کدام است؟

۱) $\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq ۰\right\}$

ث) مجموعهٔ $\left\{\frac{۱}{x} \mid x \in \mathbb{Z}, -۴ < x < -۲\right\}$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) $\left\{\frac{۱}{x+۲} \mid x \in \mathbb{Z}, -۶ < x < -۴\right\}$ ۲) $\left\{\frac{۱}{x-۲} \mid x \in \mathbb{Z}, -۶ < x < -۴\right\}$

تمرین‌های تشریحی

۱) فرض کنید A مجموعهٔ لاک‌پشت‌هایی باشد که می‌توانند از روی کوه دماوند بپرند و B مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ $x^{۲}+۱=۰$ باشد. آیا $A=B$ ؟

۲) x و y چه عددهایی باشند که مجموعه‌های $\{y, ۷, -۰/۵\}$ و $\left\{-\frac{۱}{۲}, x, \sqrt{۹}\right\}$ برابر باشند؟

۳) اگر $A=\{a, \{a\}, \{a, b\}, c\}$، در هر مورد مشخص کنید که حکم داده شده درست است یا خیر.

الف) $a \subseteq A$ ب) $\{a\} \subseteq A$ پ) $\{c\} \subseteq A$

ت) $\{a, b\} \subseteq A$ ث) $\{a, c\} \subseteq A$ ج) $\{\{a\}\} \subseteq A$

۴) فرض کنید $A=\{a, b, \{c\}, \{d, e\}\}$. در هر مورد، نماد «$\subseteq$» یا «$\not\subseteq$» را طوری قرار دهید که حکم حاصل درست باشد.

الف) $\{a\}$ ◯ A ب) $\{a, \{b\}\}$ ◯ A پ) $\{c\}$ ◯ A ت) $\{\{d, e\}\}$ ◯ A

۵) فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۲ و B مجموعهٔ همهٔ مضرب‌های طبیعی عدد ۴ باشد. آیا $A \subseteq B$؟ آیا $B \subseteq A$؟

۶) مجموعه‌هایی مانند A و B مثال بزنید که $A \in B$ و $A \not\subseteq B$.

۷) اگر $A=\{۱, ۲, ۳, ۴-k\}$، $B=\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $A \subseteq B$، تمام مقادیر ممکن k را به‌دست آورید.

۸) همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{a, b, c\}$ را بنویسید.

۹) تمام زیرمجموعه‌های دوعضوی و تمام زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را بنویسید.

۱۰ در هر مورد، مجموعهٔ داده شده را با نمادهای ریاضی بنویسید.

الف) $A=\{۲,۳,۴,۵,۶\}=$ ....

ب) $B=\{۲,۴,۸,۱۶,۳۲\}=$ ....

پ) $C=\{-۳,-۴,-۵,\dots\}=$ ....

ت) $D=\{۳,۶,۹,\dots\}=$ ....

ث) $E=\{-۱,۳,۷,۱۱,۱۵,۱۹\}=$ ....

ج) $F=\left\{-۱,-\frac{۱}{۴},-\frac{۱}{۹},-\frac{۱}{۱۶},-\frac{۱}{۲۵}\right\}=$ ....

چ) $G=\{۰,۷,۲۶,۶۳,\dots\}=$ ....

ح) $H=\left\{\frac{۲}{\sqrt{۵}},\frac{۳}{\sqrt{۶}},\dots,\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}\right\}=$ ....

خ) $I=\{۱,-۲,۳,-۴,۵,-۶,\dots\}=$ ....

د) $J=\left\{۲,۱,\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۵},\frac{۱}{۳},\dots\right\}=$ ....

۱۱ اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A=\{x^۲ \mid x\in\mathbb{Z}, ۰<x\le ۲\}=$ ....

ب) $B=\left\{۲x-۷ \mid x\in\mathbb{N}, \frac{۱۲}{x}\in\mathbb{Z}\right\}=$ ....

پ) $C=\left\{\frac{۲k}{۷} \mid k\in\mathbb{Z}, k\le ۳\right\}=$ ....

ت) $D=\{mn \mid m,n\in\{۱,۲,۳\}\}=$ ....

ث) $E=\{(-۱)^y y^۲ \mid y\in\mathbb{N}\}=$ ....

ج) $F=\{x \mid x\in\mathbb{N}, (x+۱۰)(x+۹)\dots(x-۹)(x-۱۰)=۰\}=$ ....

چ) $G=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid \frac{x^۲-۱}{x^۲+۱}, -۲\le x<۲\right\}=$ ....

ح) $H=\{۳n\sqrt{۲} \mid n\in\mathbb{W}\}=$ ....

۱۲ مجموعهٔ $\left\{x \mid x=\frac{a}{b}, a, b\in\mathbb{Z}, ab=۱۵\right\}$ را با عضوهایش بنویسید.

....

....

۱۳ مجموعهٔ $\{\sqrt{x} \mid x\in\mathbb{N}, ۱۰\le x\le ۱۰۰\}$ چند عضو طبیعی دارد؟

....

تمرین‌های ویژه

۱ مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ چند زیرمجموعه دارد که a و b هر دو عضو آن‌ها هستند؟ آن‌ها را بنویسید.

۲ اگر دو مجموعهٔ $\{x-۵,۵-x\}$ و $\{۲y+۲\}$ برابر باشند، مقدار $y-x$ را پیدا کنید.

۳ اگر $\{۱-,۳+x۲\}=\{۵,۳-y۲,۲-x\}$، مقادیر x و y را به‌دست آورید.

۴ A، B و C سه مجموعه‌اند. اگر $A\neq B$ و $B\neq C$، آیا لزوماً $A\neq C$؟

۵ همهٔ زیرمجموعه‌های سه‌عضوی مجموعهٔ $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}, x<۷\}$ را بنویسید.

۶ اگر $M=\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$، اعضای مجموعه‌های زیر را بنویسید:

الف) $A=\{-x\mid x\in M, x^{۲}<۲۰\}=$

ب) $B=\left\{x\in A\mid \frac{x+۵}{۲}\in\mathbb{Z}\right\}=$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ فرض کنید $A=\{۴,۵,۶,۷\}$، $B=\{۴,a,b,c\}$ و $C=\{۵,a,b,۴\}$. اگر $A=B=C$، مقدار $ab+c$ کدام است؟

۱) ۴۷ ۲) ۴۶ ۳) ۴۱ ۴) ۳۷

۲ اگر $\{x\,,y-۱\}=\{۲x-۵\,,۵\}$، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۳ اگر $A=\{\{a\},\{b\},\{a,b\},c\}$، کدام مجموعه زیرمجموعهٔ A است؟

۱) $\{a\}$ ۲) $\{a\,,b\}$ ۳) $\{\{a\,,b\}\}$ ۴) $\{\{b\},\{c\}\}$

۴ اگر $A=\{۱,\{۱,۲\},۳\}$، کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $\{\{۱,۲\}\}\subseteq A$ ۲) $\{۱\}\subseteq A$ ۳) $\{۱,۲,۳\}\subseteq A$ ۴) $\{۱,۳\}\subseteq A$

۵ اگر $A=\{a\,,b,\{a\,,b\},\{c\}\}$، کدام مجموعه زیرمجموعهٔ A <u>نیست</u>؟

۱) $\{a\}$ ۲) $\{b\}$ ۳) $\{c\}$ ۴) $\{a\,,b\}$

۶ اگر $A=\{۱,۲,\{۳,۴\},۵,\{۶\}\}$، کدام گزینه درست <u>نیست</u>؟

۱) $\{۶\}\in A$ ۲) $\{\{۶\}\}\subseteq A$ ۳) $\{۳,۴\}\subseteq A$ ۴) $\{۵,\{۶\}\}\subseteq A$

۷ اگر $A=\{a\,,b,c,\{b\},\{a\,,c\}\}$، کدام گزینه هم عضو A است هم زیرمجموعهٔ آن؟

۱) a ۲) b ۳) $\{a\}$ ۴) $\{b\}$

۸ اگر $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{Z}\,,۴<x^۲\leq ۲۵\}$، مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۹ بزرگ‌ترین عضو مجموعهٔ $A=\left\{x\,|\,x\in\mathbb{Z},\dfrac{x}{۲}<-۳\right\}$ کدام است؟

۱) -۷ ۲) -۶ ۳) -۵ ۴) بزرگ‌ترین عضو ندارد.

۱۰ مجموعهٔ $A=\{x\,|\,۲۰\leq x\leq ۴۸\,,x=۳k\,,k\in\mathbb{Z}\}$ چند عضو دارد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰ ۳) ۹ ۴) ۲۸

درس سوم: اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که بین مجموعه‌های A و B مشترک‌اند، یعنی هم‌عضو مجموعهٔ A و هم‌عضو مجموعهٔ B هستند. اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با $A\cap B$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\,,\,x\in B\}$$

برای نوشتن اشتراک دو مجموعه، عضوهای مشترک آن‌ها را در یک مجموعه می‌نویسیم.

مثال فرض کنید $A=\{۱,۳,۵,۷\}$ و $B=\{۰,۱,۲,۵\}$. توجه کنید که عضوهای ۱ و ۵ در هر دو مجموعه مشترک هستند. بنابراین $A\cap B=\{۱,۵\}$.

مثال فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}$، $B=\{۲,۴,۶\}$ و $C=\{۱,۴,۶\}$. می‌خواهیم مجموعه‌های $A\cap(B\cap C)$ و $(A\cap B)\cap C$ را مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$B\cap C=\{۲,۴,۶\}\cap\{۱,۴,۶\}=\{۴,۶\}$$

پس

$$A\cap(B\cap C)=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}\cap\{۴,۶\}=\{۶\}$$

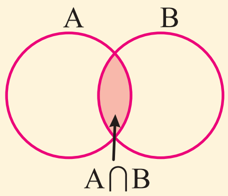
به همین ترتیب،

$$A\cap B=\{۱,۲,۳,۵,۶,۷\}\cap\{۲,۴,۶\}=\{۲,۶\}\,,\quad (A\cap B)\cap C=\{۲,۶\}\cap\{۱,۴,۶\}=\{۶\}$$

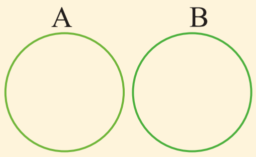
اگر A، B و C سه مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعه‌های $(A\cap B)\cap C$ و $A\cap(B\cap C)$ برابرند و آن‌ها را با $A\cap B\cap C$ نیز نشان می‌دهیم.

نمودار وِن دو مجموعه

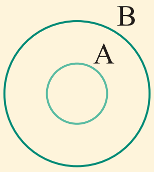
اگر دربارهٔ وضعیت مجموعه‌های A و B نسبت به هم چیزی ندانیم، نمودار وِن آن‌ها را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم.



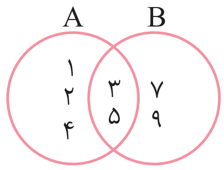
معلوم است که اگر مجموعه‌های A و B هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی $A\cap B=\varnothing$، نمودار وِن آن‌ها به‌صورت مقابل است.



اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه نمودار وِن مجموعه‌های A و B را به‌صورت مقابل رسم می‌کنیم.



مثال فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۵,۷,۹\}$. در این صورت عضوهای مشترک مجموعه‌های A و B عددهای ۳ و ۵ هستند، یعنی $A \cap B=\{۳,۵\}$. نمودار وِن این مجموعه‌ها به‌صورت مقابل است.



روابط اشتراک دو مجموعه

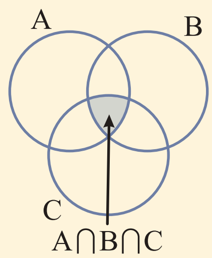
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.

- $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$.
- اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cap B=A$ و برعکس، یعنی اگر $A \cap B=A$، آن‌گاه $A \subseteq B$.
- $A \cap A=A$ و $A \cap \varnothing=\varnothing$.
- $A \cap B=B \cap A$

مثال چون $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$، پس $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}=\mathbb{N}$.

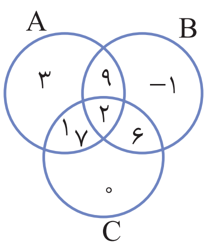
نمودار وِن سه مجموعه

نمودار وِن سه مجموعهٔ A، B و C در حالت کلی به‌صورت زیر رسم می‌شود:

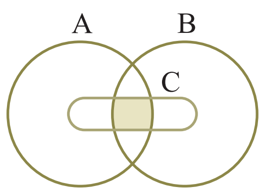


مثال فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۷,۹\}$، $B=\{-۱,۲,۶,۹\}$ و $C=\{۰,۱,۲,۷,۶\}$. نمودار وِن این سه مجموعه به‌صورت مقابل است. از روی این نمودار معلوم می‌شود که

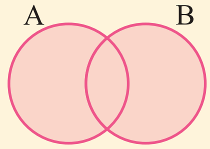
$$A \cap B=\{۲,۹\}\ ,\quad B \cap C=\{۲,۶\}\ ,\quad C \cap A=\{۱,۲,۷\}\ ,\quad A \cap B \cap C=\{۲\}$$



مثال ناحیهٔ سایه‌دار در نمودار وِن مقابل را در نظر بگیرید. توجه کنید که ناحیهٔ سایه‌دار، اشتراک مجموعه‌های $A \cap B$ و C است، یعنی مجموعهٔ مورد نظر می‌شود $(A \cap B) \cap C$.



اجتماع دو مجموعه



اجتماع دو مجموعهٔ A و B مجموعهٔ همهٔ عضوهایی است که عضو مجموعهٔ A یا عضو مجموعهٔ B هستند. اجتماع دو مجموعهٔ A و B را با $A\cup B$ نشان می‌دهیم. می‌توان نوشت

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ یا } x\in B\}$$

برای نوشتن اجتماع دو مجموعه، همهٔ عضوهای آن‌ها را در یک مجموعه می‌نویسیم (عضوهای مشترک را یک بار می‌نویسیم).

مثال

- فرض کنید $A=\{-۱,۰,۲,۷\}$ و $B=\{-۲,-۱,۳,۷\}$. در این صورت مجموعهٔ $A\cup B$ از همهٔ عضوهای A و B تشکیل شده است، یعنی $A\cup B=\{-۲,-۱,۰,۲,۳,۷\}$.
- فرض کنید $A=\{a,b,\{a,b\},c\}$ و $B=\{a,c,\{b,c\}\}$. در این صورت

$$A\cup B=\{a,b,c,\{a,b\},\{b,c\}\}$$

مثال

فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{-۱,۰,۱\}$ و $C=\{-۱,۳,۵\}$. می‌خواهیم مجموعه‌های $A\cup(B\cup C)$ و $(A\cup B)\cup C$ را مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$B\cup C=\{-۱,۰,۱\}\cup\{-۱,۳,۵\}=\{-۱,۰,۱,۳,۵\}$$

در نتیجه

$$A\cup(B\cup C)=\{۱,۲,۳\}\cup\{-۱,۰,۱,۳,۵\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۵\}$$

از طرف دیگر،

$$A\cup B=\{۱,۲,۳\}\cup\{-۱,۰,۱\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}$$

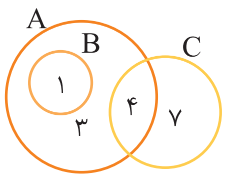
در نتیجه

$$(A\cup B)\cup C=\{-۱,۰,۱,۲,۳\}\cup\{-۱,۳,۵\}=\{-۱,۰,۱,۲,۳,۵\}$$

اگر A، B و C سه مجموعه باشند، آن‌گاه مجموعه‌های $A\cup(B\cup C)$ و $(A\cup B)\cup C$ با هم برابرند و آن‌ها را با $A\cup B\cup C$ نیز نشان می‌دهیم.

مثال

نمودار وِن مجموعه‌های A، B و C در شکل مقابل رسم شده است. مجموعهٔ $A\cap(B\cup C)$ را مشخص می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که



$$A=\{۱,۳,۴\},\quad B=\{۱\},\quad C=\{۴,۷\}$$

بنابراین

$$B\cup C=\{۱\}\cup\{۴,۷\}=\{۱,۴,۷\},\quad A\cap(B\cup C)=\{۱,۳,۴\}\cap\{۱,۴,۷\}=\{۱,۴\}$$

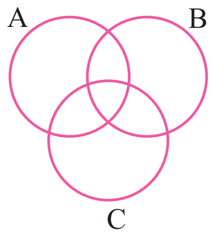
روابط اجتماع دو مجموعه

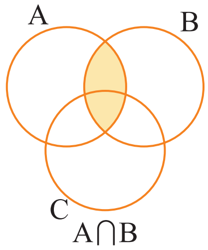
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.

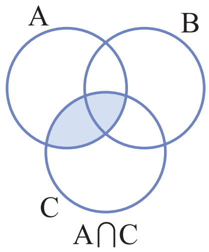
- $A\subseteq A\cup B$ و $B\subseteq A\cup B$.
- اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A\cup B=B$ و برعکس، یعنی اگر $A\cup B=B$، آن‌گاه $A\subseteq B$.
- $A\cup A=A$ و $A\cup\varnothing=A$.
- $A\cup B=B\cup A$
- $A\cap(A\cup B)=A$ و $A\cup(A\cap B)=A$.

مثال چون $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$، پس $\mathbb{Z}\cup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$.

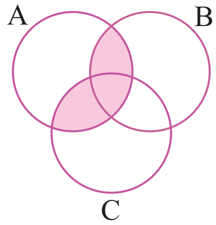
مثال می‌خواهیم مجموعهٔ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ را در نمودار وِن مقابل سایه‌دار کنیم. برای این کار، ابتدا مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cap C$ را سایه می‌زنیم.







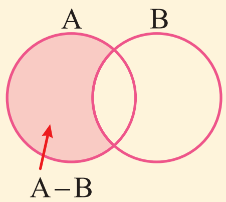
بنابراین مجموعهٔ $(A\cap B)\cup(A\cap C)$ ناحیهٔ سایه‌دار در نمودار مقابل است.

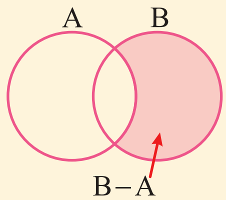


تفاضل دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. مجموعهٔ $A-B$ (بخوانید A منهای B) مجموعهٔ همهٔ عضوهایی از مجموعهٔ A است که عضو مجموعهٔ B نیستند. در حقیقت،

$$A-B=\{x\,|\,x\in A\,,\,x\notin B\}$$

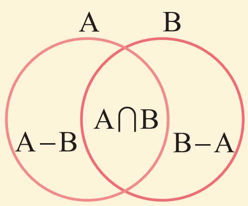




برای نوشتن مجموعهٔ $A-B$، عضوهای مجموعهٔ A را که در مجموعهٔ B نیستند، در یک مجموعه می‌نویسیم.

مثال فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶\}$. در این صورت $A-B=\{۱\,,۲\}$.

در حالت کلی، ناحیه‌های نمودار وِن دو مجموعهٔ A و B به‌صورت مقابل هستند.



روابط تفاضل دو مجموعه

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند.

- $A-B\subseteq A$ و $B-A\subseteq B$.
- اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$ و برعکس، یعنی اگر $A-B=\varnothing$، آن‌گاه $A\subseteq B$.
- در حالت کلی، $A-B\neq B-A$.
- $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

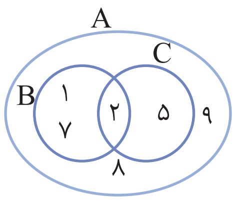
مثال فرض کنید $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $C=\{۱,۵\}$. می‌خواهیم مجموعهٔ $(A-B)-C$ را مشخص کنیم. ابتدا توجه کنید که

$$A-B=\{۱,۲,۳\}-\{۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۱\}$$

در نتیجه

$$(A-B)-C=\{۱\}-\{۱,۵\}=\varnothing$$

مثال با توجه به نمودار وِن مقابل، مجموعهٔ $A\cap(B-C)$ را مشخص می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که



$$A=\{۱,۲,۵,۷,۸,۹\}\ ,\quad B=\{۱,۲,۷\}\ ,\quad C=\{۲,۵\}$$

بنابراین

$$B-C=\{۱,۲,۷\}-\{۲,۵\}=\{۱,۷\}$$

در نتیجه

$$A\cap(B-C)=\{۱,۲,۵,۷,۸,۹\}\cap\{۱,۷\}=\{۱,۷\}$$

تعداد عضوهای یک مجموعه

تعداد عضوهای مجموعهٔ A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم.

مثال

- اگر $A=\{۲,۴,۶,۸\}$، آن‌گاه $n(A)=۴$.
- فرض کنید $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N}\,,\,x^۳<۱۰۰\}$. توجه کنید که

$$۱^۳=۱,\quad ۲^۳=۸,\quad ۳^۳=۲۷,\quad ۴^۳=۸۱,\quad ۵^۳=۱۲۵,\quad \ldots$$

بنابراین $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و در نتیجه $n(A)=۴$.

مثال اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۲,۵,۷,۹\}$، مقدارهای $n(A\cap B)$، $n(A\cup B)$، $n(A-B)$ و $n(B-A)$ را حساب می‌کنیم.

$$A\cap B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\cap\{۲,۵,۷,۹\}=\{۲,۵\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$$

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\cup\{۲,۵,۷,۹\}=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۹\}\Rightarrow n(A\cup B)=۸$$

$$A-B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}-\{۲,۵,۷,۹\}=\{۱,۳,۴,۶\}\Rightarrow n(A-B)=۴$$

$$B-A=\{۲,۵,۷,۹\}-\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}=\{۷,۹\}\Rightarrow n(B-A)=۲$$

مسئله‌های تکمیلی

مسئله ۱ **فرض کنید A مجموعهٔ مقسوم‌علیه‌های طبیعی عدد ۱۸، B مجموعهٔ مضرب‌های کوچک‌تر از ۱۰۰ عدد ۹ و C مجموعهٔ عددهای اول یک‌رقمی باشد. مجموعهٔ $(A-B)\cap C$ را مشخص کنید.**

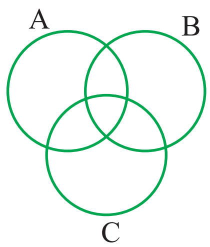
راه‌حل: ابتدا توجه کنید که

$$A=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}\ ,\quad B=\{۹,۱۸,۲۷,۳۶,۴۵,۵۴,۶۳,۷۲,۸۱,۹۰,۹۹\}\ ,\quad C=\{۲,۳,۵,۷\}$$

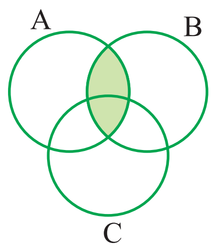
به این ترتیب،

$$A-B=\{۱,۲,۳,۶,۹,۱۸\}-\{۹,۱۸,۲۷,۳۶,۴۵,۵۴,۶۳,۷۲,۸۱,۹۰,۹۹\}=\{۱,۲,۳,۶\}$$
$$(A-B)\cap C=\{۱,۲,۳,۶\}\cap\{۲,۳,۵,۷\}=\{۲,۳\}$$

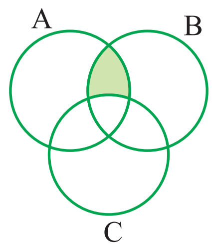
مسئله ۲ **در نمودار وِن مقابل، مجموعهٔ $(A\cap B)-C$ را سایه‌دار کنید.**



راه‌حل: ابتدا مجموعهٔ $A\cap B$ را سایه می‌زنیم، سپس قسمت مشترک آن با مجموعهٔ C را حذف کنیم تا مجموعهٔ $(A\cap B)-C$ به‌دست آید.



$A\cap B$



$(A\cap B)-C$

تمرین

درست یا نادرست

الف) هر عضو مجموعهٔ A در مجموعهٔ $A\cup B$ نیز هست. ◯

ب) هر عضو مجموعهٔ A در مجموعهٔ $A\cap B$ نیز هست. ◯

پ) هر عضو مجموعهٔ $A-B$ در مجموعهٔ A نیز هست. ◯

ت) اشتراک هر دو مجموعه زیرمجموعهٔ اجتماع آن‌هاست. ◯

ث) مجموعهٔ A زیرمجموعهٔ $A-B$ است. ◯

کامل کنید

الف) اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A\cup B$ برابر با مجموعهٔ .... است.

ب) اگر $A\cap B=B$، آن‌گاه مجموعهٔ .... زیرمجموعهٔ .... است.

پ) مجموعهٔ $\mathbb{N}\cap\mathbb{Q}$، برابر با مجموعهٔ .... است.

ت) اگر $A\subseteq B$، مجموعهٔ $A-B$ برابر با مجموعهٔ .... است.

ث) اگر $A\cap B=\varnothing$، مجموعهٔ $A-B$ برابر با مجموعهٔ .... است.

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) مجموعهٔ $A\cap\varnothing$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) $\varnothing$

ب) مجموعهٔ $A\cup\varnothing$ برابر کدام مجموعه است؟

۱) A ۲) $\varnothing$

پ) مجموعهٔ $\mathbb{W}-\mathbb{N}$ چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) ۱

ت) اگر $n(A)=۵$ و $n(B)=۳$، مقدار $n(A\cup B)$ حداکثر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۸

ث) اگر $n(A)=۴$ و $n(B)=۷$، مجموعهٔ $A-B$ حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴

تمرین‌های تشریحی

۱) اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}, -۳\le x\le ۴\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{N}, -۲<x<۳\}$، مجموعهٔ $A\cap B$ را پیدا کنید.

۲) اگر $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}, x<۱۰\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{N}, x^۲<۲۰\}$، مجموعهٔ $A\cup B$ را مشخص کنید.

۳) فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۶,۷,۹\}$، $B=\{۲,۴,۷,۸\}$ و $C=\{۴,۵,۷,۹\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A\cap B=$

ب) $B\cap C=$

پ) $A\cup B=$

ت) $B\cup C=$

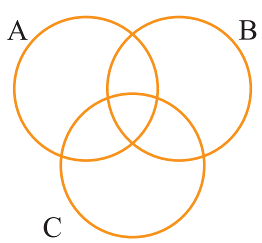
ث) $A\cup(B\cap C)=$

ج) $(A\cap B)\cup C=$

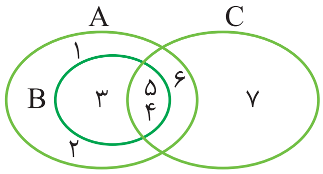
۴) A مجموعهٔ شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۴، B مجموعهٔ اعداد اول یک‌رقمی و C مجموعهٔ مضارب طبیعی ۳ و کوچک‌تر از ۲۰ هستند.

الف) اعضای این مجموعه‌ها را در نمودار وِن روبه‌رو بنویسید.

ب) مجموعهٔ $(A\cap B)\cap C$ را به‌دست آورید.

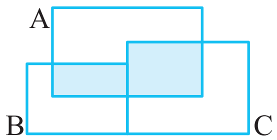


۵) با توجه به نمودار وِن مقابل، مجموعهٔ $(A\cup B)\cap(A\cap C)$ را مشخص کنید.



۶) اگر $A=\{x|\ x\in\mathbb{Z}, -۳\le x<۱۷\}$ و $B=\{x|\ x\in\mathbb{Z}, -۶\le x<۱۳\}$، مجموعه‌های $A\cap B$ و $A\cup B$ را با استفاده از نمادهای ریاضی بنویسید.

۷) ناحیهٔ سایه‌دار در شکل مقابل کدام مجموعه را مشخص می‌کند؟



۸) فرض کنید $A=\{۲,۳,۴,۷,۸,۹\}$، $B=\{۱,۲,۳,۶\}$ و $C=\{۳,۴,۵,۶\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A-B=$

ب) $B-A=$

پ) $A-C=$

ت) $C-A=$

۹) فرض کنید $A=\{۱,۲,\{۳\},۵\}$ و $B=\{۱,۲,۳,\{۳\},۴,۵\}$. مجموعهٔ $A-B$ را مشخص کنید.

۱۰) مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضایشان مشخص کنید.

الف) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=$

ب) $\mathbb{N}-\mathbb{Z}=$

پ) $\mathbb{N}-\mathbb{W}=$

ت) $\mathbb{W}-\mathbb{N}=$

ث) $\mathbb{Z}-\mathbb{W}=$

ج) $\mathbb{W}-\mathbb{Z}=$

چ) $\mathbb{N}\cap\mathbb{W}=$

ح) $\mathbb{Z}\cup\mathbb{N}=$

۱۱) فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$، $B=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$ و $C=\{۱,۳,۶,۹\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $A-(B\cap C)=$

ب) $A-(B\cup C)=$

۱۲) فرض کنید $A=\{x|x\in\mathbb{N}, x\le ۵\}$ و $B=\{x^۲+۱|\ x\in A\}$. مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

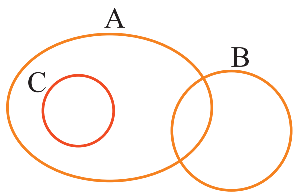
الف) $A\cup B=$

ب) $A\cap B=$

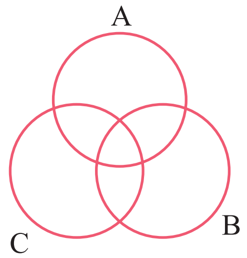
پ) $A-B=$

ت) $B-A=$

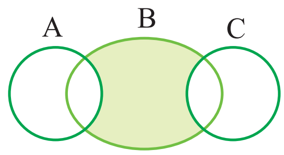
۱۳) **الف)** در نمودار وِن مقابل مجموعهٔ $(A\cap B)\cup C$ را سایه بزنید.



ب) مجموعهٔ $(B\cup A)-(B\cap C)$ را روی نمودار وِن مقابل سایه بزنید.



پ) ناحیهٔ سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه است؟



۱۴) در هر مورد تعداد اعضای مجموعه را مشخص کنید.

الف) $A=\{۱,۲,\{۱,۲\},\{۳,۴\}\}$

ب) $B=\{x \mid x\in\mathbb{W}, x<۷\}$

پ) $C=\{\varnothing\}$

ت) $D=\{x \mid x\in\mathbb{N}, x<۱\}$

۱۵) اگر $A=\{۱,۳,۴,۹\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, x^{۲}\in A\}$، مقدار $n(A\cup B)$ چند است؟

۱۶) اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۱\le x\le ۶\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{Z}, -۶\le x\le ۱\}$، مقدار $n(A\cup B)+n(A\cap B)$ چند است؟

۱۷) دو مجموعه مانند A و B مثال بزنید که $n(A)=۶$، $n(B)=۴$ و $n(A\cup B)=۸$.

۱۸) دو مجموعه مانند A و B مثال بزنید که $n(A)=۷$، $n(B)=۳$ و $n(A\cap B)=۱$.

۱۹ دو مجموعه مانند A و B مثال بزنید که $n(A)=۵$، $n(B)=۴$ و $n(A-B)=۳$.

تمرین‌های ویژه

۱ مجموعه‌هایی مانند A و B مثال بزنید که $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، $A\cap B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $A\cap\{۶,۷\}=\varnothing$.

۲ مقادیر x و y را در هریک از تساوی‌های زیر به‌دست آورید.

الف) $\{۱۱,x,۵\}\cup\{-۵,۱۳,۱۱,۲\}=\{۵,۲,۱۱,-۵,y\}$

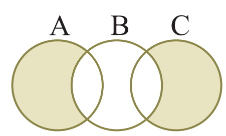
ب) $\{۱,x\}=\left\{۷,-۶,۴,\frac{y}{۲}\right\}\cap\{۴,y+۱,۰,x-۳\}$

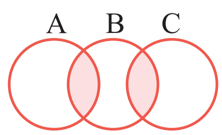
۳ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹,۱۰\}$، $B=\{۱,۲,۷\}$ و $C=\{۳,۴,۷,۸\}$.

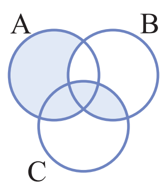
الف) تحقیق کنید که $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$.

ب) تحقیق کنید که $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$.

۴ در هر مورد تعیین کنید ناحیهٔ سایه‌دار کدام مجموعه را مشخص می‌کند.

الف)


ب)


پ)


پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ مجموعهٔ $(A\cap B)\cup(A\cap\varnothing)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) $A\cap B$ ۳) $A\cup B$ ۴) A

۲ اگر $A=\{x \mid x\in\mathbb{N},$ زوج است $x\}$ و $B=\{x \mid x\in\mathbb{N},$ مضرب ۳ است $x\}$، کوچک‌ترین عضو مجموعهٔ $A\cap B$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

۳ اگر $A=\{۱,۲,۳\}$ و $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، مجموعهٔ B حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۴ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$، مجموعهٔ $A-(A\cap B)$ چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

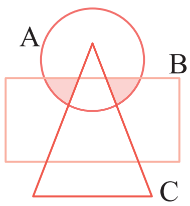
۵ اگر $A=\{\nabla,\varnothing,\{\varnothing\},\Delta,?\}$ و $B=\{\{\varnothing,\nabla\},\Delta,\{?\}\}$، مقدار $n(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۶ اگر $A=\{x \mid ۱۵\leq x\leq ۶۷, x=۴n, n\in\mathbb{N}\}$ و $B=\{y \mid ۱۸<y\leq ۷۵, y=۳k, k\in\mathbb{N}\}$، مقدار $n(A\cap B)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷ نمودار وِن مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟



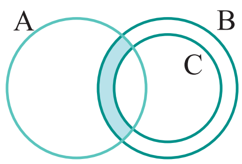
۱) $A\cap B\cap C$

۲) $(A-C)-B$

۳) $(A\cap B)-C$

۴) $(B-C)-A$

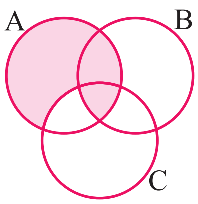
۸ نمودار وِن مقابل کدام مجموعه را نشان می‌دهد؟



۱) $A\cap B\cap C$ ۲) $(B-C)\cap(A\cap C)$

۳) $(B-C)-A$ ۴) $(A\cap B)-C$

۹ ناحیهٔ سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه است؟



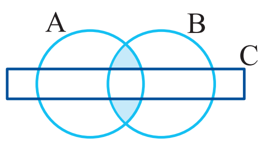
۱) $(A\cap B\cap C)\cup A$

۲) $(A\cap B)\cup C$

۳) $A-(A\cap B)$

۴) $(A\cap B)\cup(A-(B\cup C))$

۱۰ ناحیهٔ سایه‌دار در نمودار وِن مقابل کدام مجموعه است؟



۱) $(A\cap B)-C$ ۲) $(A\cup B)\cap C$

۳) $(A-B)\cap C$ ۴) $(C\cap B)\cup A$

درس چهارم: مجموعه‌ها و احتمال

احتمال

فرض کنید در انجام یک آزمایش، مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن را با S نشان دهیم. در این صورت هر زیرمجموعه از S را یک پیشامد تصادفی یا به اختصار یک پیشامد می‌نامیم. اگر احتمال رخ دادن پیشامد A را با $P(A)$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

مثال سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. چون سکه «رو» یا «پشت» می‌آید، پس $S=\{\text{پ}, \text{ر}\}$، بنابراین $n(S)=۲$. اگر A پیشامد این باشد که سکه «رو» بیاید، آن‌گاه $A=\{\text{ر}\}$، بنابراین $n(A)=۱$. در نتیجه

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۲}$$

مثال تاسی را پرتاب می‌کنیم. در این صورت عددی که روی وجه بالایی تاس معلوم است، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. بنابراین $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. اگر A پیشامد این باشد که عدد روشده اول باشد، آن‌گاه $A=\{۲,۳,۵\}$، پس

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

همچنین، اگر B پیشامد این باشد که عدد روشده زوج باشد، آن‌گاه $B=\{۲,۴,۶\}$، پس

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

همین‌طور، اگر C پیشامد این باشد که عدد روشده بر ۹ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه $C=\varnothing$، پس

$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۰}{۶}=۰$$

همچنین، اگر D پیشامد این باشد که عدد روشده مثبت باشد، آن‌گاه $D=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، پس

$$P(D)=\frac{n(D)}{n(S)}=\frac{۶}{۶}=۱$$

اگر A و B دو پیشامد باشند که احتمال رخ دادن آن‌ها برابر است، یعنی $P(A)=P(B)$، به این دو پیشامد، پیشامدهای هم‌شانس می‌گوییم.

مثال در مثال قبل، A و B دو پیشامد هم‌شانس هستند.

مثال دو سکه را همزمان پرتاب می‌کنیم. معلوم است که سکه‌ها از هم قابل تشخیص هستند. بنابراین می‌توانیم یکی را سکهٔ اول و دیگری را سکهٔ دوم بنامیم. اکنون توجه کنید که

- یا هر دو سکه «رو» می‌آیند: (ر , ر)
- یا سکهٔ اول «رو» و سکهٔ دوم «پشت» می‌آید: (ر , پ)
- یا سکهٔ اول «پشت» و سکهٔ دوم «رو» می‌آید: (پ , ر)
- یا هر دو سکه «پشت» می‌آیند: (پ , پ)

بنابراین S={(ر , ر),(ر , پ),(پ , ر),(پ , پ)}. اگر A پیشامد این باشد که دست‌کم یکی از سکه‌ها «رو» بیاید، آن‌گاه A={(ر , ر),(ر , پ),(پ , ر)}. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

همچنین، اگر B پیشامد این باشد که دست‌کم یکی از سکه‌ها «پشت» بیاید، آن‌گاه B={(ر , پ),(پ , ر),(پ , پ)}. بنابراین

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۴}$$

توجه کنید که پیشامدهای A و B با هم فرق دارند، اما احتمال رخداد آن‌ها برابر است، یعنی هم‌شانس هستند.

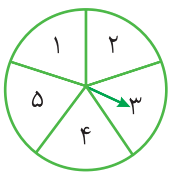
مثال تاسی را پرتاب می‌کنیم. می‌خواهیم احتمال اینکه ۲ یا ۵ بیاید را حساب کنیم. توجه کنید که اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(S)=۶\,,\quad A=\{۲,۵\}\Rightarrow n(A)=۲$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

مثال اگر چرخندهٔ شکل مقابل را بچرخانیم، می‌خواهیم احتمال اینکه عقربه روی عددی زوج بایستد را حساب کنیم (عقربه در مرز ناحیه‌ها نمی‌ایستد). توجه کنید که $S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $A=\{۲,۴\}$. بنابراین



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۵}$$

مثال در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سبز و ۷ مهرهٔ سیاه وجود دارد. مهره‌ای را از این جعبه بیرون می‌آوریم. اگر مهره‌های قرمز را با $r_۱$، ... و $r_۵$، مهره‌های سبز را با $g_۱$، $g_۲$ و $g_۳$ و مهره‌های سیاه را با $b_۱$، ... و $b_۷$ نشان دهیم، آن‌گاه

$$S=\{r_۱,\dots,r_۵,g_۱,g_۲,g_۳,b_۱,\dots,b_۷\}$$

پس $n(S)=۱۵$. فرض کنید A پیشامد این باشد که مهرهٔ بیرون آمده نه قرمز باشد نه سیاه. در این صورت A وقتی رخ می‌دهد که مهرهٔ بیرون آمده سبز باشد، یعنی $A=\{g_۱,g_۲,g_۳\}$. بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۵}=\frac{۱}{۵}$$

مثال دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. معلوم است که تاس‌ها از هم قابل تشخیص هستند. بنابراین می‌توانیم یکی را تاس اول و دیگری را تاس دوم بنامیم. همهٔ حالت‌های ممکن در این آزمایش را در جدول زیر مشخص کرده‌ایم.

		تاس دوم					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
تاس اول	۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
	۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
	۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
	۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
	۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
	۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

در این آزمایش $n(S)=۳۶$. اگر A پیشامد این باشد که مجموع عددهای روشده برابر ۳ باشد، آن‌گاه $A=\{(۱,۲),(۲,۱)\}$، پس

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۳۶}=\frac{۱}{۱۸}$$

همین‌طور، اگر B پیشامد این باشد که حاصل‌ضرب عددهای روشده برابر ۱۲ باشد، آن‌گاه $B=\{(۲,۶),(۳,۴),(۴,۳),(۶,۲)\}$، پس

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

مسئله‌های تکمیلی

مسئله ۱ **یک سکه و یک تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه سکه «رو» و تاس عددی زوج بیاید چقدر است؟**

راه‌حل: همهٔ حالت‌های ممکن در این آزمایش را در جدول زیر مشخص می‌کنیم:

		تاس					
		۱	۲	۳	۴	۵	۶
سکه	رو	(ر,۱)	(ر,۲)	(ر,۳)	(ر,۴)	(ر,۵)	(ر,۶)
	پشت	(پ,۱)	(پ,۲)	(پ,۳)	(پ,۴)	(پ,۵)	(پ,۶)

بنابراین در این آزمایش $n(S)=۱۲$. همچنین، اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه $A=\{(ر,۲),(ر,۴),(ر,۶)\}$، پس $n(A)=۳$. در نتیجه،

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

مسئله ۲ **یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم.**

الف) **احتمال اینکه دو عدد روشده مثل هم باشند چقدر است؟**

ب) **احتمال اینکه مجموع دو عدد روشده برابر ۹ باشد چقدر است؟**

راه‌حل: توجه کنید که مانند آزمایش پرتاب همزمان دو تاس، در این آزمایش نیز $n(S)=۳۶$.

الف) اگر A پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow n(A)=۶$$

بنابراین

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ب) اگر B پیشامد مورد نظر باشد، آن‌گاه

$$B=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}\Rightarrow n(B)=۴$$

بنابراین

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

تمرین

درست یا نادرست

الف) در آزمایش پرتاب یک سکه، $n(S)=۱$. ◯

ب) در آمایش پرتاب همزمان دو سکه، $n(S)=۴$. ◯

پ) در آزمایش پرتاب همزمان یک تاس، $n(S)=۶$. ◯

ت) در آزمایش پرتاب دو تاس، $n(S)=۳۶$. ◯

ث) اگر A یک پیشامد باشد، آن‌گاه $n(A)<n(S)$. ◯

ج) اگر A و B دو پیشامد باشند که $A\cap B=\varnothing$، آن‌گاه $P(A)=P(B)$. ◯

کامل کنید

الف) اگر در یک آزمایش، مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن برابر S باشد، هر زیرمجموعهٔ S را یک .... می‌نامیم.

ب) مقدار $P(\varnothing)$ برابر .... است.

پ) اگر در یک آزمایش، مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن برابر S باشد، مقدار $P(S)$ برابر .... است.

ت) دو پیشامد را که احتمال رخ دادن آن‌ها برابر است، دو پیشامد .... می‌نامیم.

ث) در آزمایش پرتاب همزمان یک سکه و یک تاس، احتمال اینکه سکه «پشت» و تاس عددی فرد بیاید برابر .... است.

پرسش‌های دو گزینه‌ای

الف) اگر A یک پیشامد باشد، مقدار $P(A)$ برابر است با ....

۱) $\dfrac{n(A)}{n(S)}$ ۲) $\dfrac{n(S)}{n(A)}$

ب) اگر A و B دو پیشامد باشند که $A\subseteq B$، آن‌گاه ....

۱) $P(B)\le P(A)$ ۲) $P(A)\le P(B)$

پ) در آزمایش پرتاب همزمان یک سکه و یک تاس، مقدار $n(S)$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۲

ت) در آزمایش پرتاب همزمان دو سکه، چقدر احتمال دارد که هر دو سکه یک جور بیایند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

ث) در آزمایش پرتاب همزمان دو تاس، احتمال اینکه یکی از عددهای روشده کوچک‌تر از دیگری باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$

تمرین‌های تشریحی

۱ اگر $n(S)=۴۲$ و $P(A)=\frac{۱}{۷}$، پیشامد A چند عضو دارد؟

۲ از میان عددهای طبیعی‌ای که از ۳۰ کوچک‌ترند، عددی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد مضرب ۴ باشد چقدر است؟

۳ اگر عددی از مجموعهٔ $\{۰, ۳, ۵, ۸, ۱۰, ۱۳, ۱۵, ۱۸, ۲۰\}$ انتخاب کنیم، احتمال اینکه مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشد چقدر است؟

۴ از میان عددهای طبیعی‌ای که از ۵۰ بزرگ‌تر نیستند، عددی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه رقم یکان این عدد ۳ باشد چقدر است؟

۵ تاسی را پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد عددی که تاس نشان می‌دهد، شمارندهٔ ۱۰ باشد؟

۶ تاسی را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه ۲ یا ۵ نیاید چقدر است؟

۷ عددی دورقمی را انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه بر ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

۸ فرض کنید $B=\{۴k+۳ \mid k\in\mathbb{N}, k\leq ۷\}$. اگر عضوی از B انتخاب کنیم، احتمال اینکه اول باشد چقدر است؟

۹ در جعبه‌ای ۲ توپ قرمز، ۳ توپ آبی و ۸ توپ سیاه وجود دارد. اگر توپی از این جعبه بیرون بیاوریم، احتمال اینکه آبی باشد چقدر است؟

۱۰ در جعبه‌ای ۶ توپ قرمز، ۳ توپ سبز و ۱۲ توپ سیاه وجود دارد. سه توپ را یکی پس از دیگری (بدون برگرداندن به جعبه) بیرون می‌آوریم. اگر هر سه توپ سیاه باشند، احتمال اینکه توپ بعدی نیز که درمی‌آوریم سیاه باشد چقدر است؟

۱۱ در جعبه‌ای ۴ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ آبی و ۲ مهرهٔ سفید وجود دارد. اگر یک مهره از این جعبه خارج کنیم، چقدر احتمال دارد که این مهره سفید نباشد؟

۱۲ تاسی را پرتاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) عدد روشده فرد باشد.

ب) عدد روشده کمتر از ۲ نباشد.

پ) عدد روشده مربع کامل باشد.

ت) عدد روشده اول و فرد باشد.

۱۳ دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر را حساب کنید.

الف) دو عدد روشده فرد باشند.

ب) دو عدد روشده شمارندهٔ ۴ باشند.

پ) مجموع دو عدد روشده ۸ باشد.

ت) یکی از عددهای روشده مضرب دیگری باشد.

ث) مجموع عددهای روی تاس‌ها مضرب ۳ باشد.

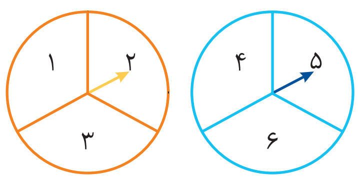
۱۴) دو تاس X و Y را همزمان پرتاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه عددی که تاس Y نشان می‌دهد شمارندهٔ ۵ باشد چقدر است؟

ب) احتمال اینکه عددی که تاس X نشان می‌دهد شمارندهٔ ۵ نباشد چقدر است؟

پ) احتمال اینکه عددهایی که تاس‌ها نشان می‌دهند هیچ‌کدام شمارندهٔ ۵ نباشند چقدر است؟

۱۵) عقربهٔ هریک از چرخنده‌های زیر را یک بار می‌چرخانیم. احتمال اینکه حاصل‌ضرب عددهایی که نشان می‌دهند، زوج باشد چقدر است (عقربه‌ها در مرز ناحیه‌ها نمی‌ایستند)؟



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ از میان عددهای طبیعی‌ای که از ۵۰ بزرگ‌تر نیستند، عددی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه این عدد از ۲۳ بزرگ‌تر باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۵}$ ۴) $\frac{۲۷}{۵۰}$

۲ اگر یکی از شمارنده‌های طبیعی عدد ۱۲ را انتخاب کنیم، احتمال اینکه عددی اول باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۳ تاسی را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عددی که تاس نشان می‌دهد، شمارندهٔ عدد ۱۲ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۴ تاسی را پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عددی که تاس نشان می‌دهد، شمارندهٔ عدد ۱۵ نباشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۵ دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه مجموع عددهایی که تاس‌ها نشان می‌دهند، عددی دورقمی باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

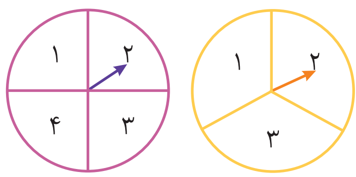
۶ دو تاس را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه حاصل‌ضرب عددهای روی تاس‌ها از ۱۲ کمتر نباشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۸}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۷ جواد و اکبر هر کدام عددی از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ انتخاب می‌کنند (ممکن است عددهایشان برابر باشند). احتمال اینکه حاصل‌ضرب عددهای آن‌ها زوج باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۵}{۶}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۷}{۹}$

۸ اگر عقربهٔ هریک از چرخنده‌های زیر را بچرخانیم، احتمال اینکه حاصل‌ضرب عددهایی که عقربه‌ها نشان می‌دهند، زوج باشد چقدر است (عقربه‌ها در مرز ناحیه‌ها نمی‌ایستند)؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۹ دو تاس X و Y را همزمان پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه عددی که تاس Y نشان می‌دهد، شمارندهٔ ۶ باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۱۰ سمیه و سمیرا هر کدام تاسی را پرتاب می‌کنند. احتمال اینکه عدد تاس سمیه از عدد تاس سمیرا بیشتر باشد چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۷}{۱۲}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

امتحان نهایی فصل اول

۱ عبارت‌های درست را با علامت ✓ و عبارت‌های نادرست را با علامت × مشخص کنید.

الف) مجموعهٔ «اعداد اول بین ۱۵ و ۱۸» یک مجموعهٔ تک عضوی است. ○ همدان

ب) مجموعهٔ تهی را به‌صورت $\{\varnothing\}$ نشان می‌دهیم. ○ یزد

پ) هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است. ○ شهرستان‌های تهران

ت) در پرتاب یک تاس، احتمال اینکه عدد رو آمده اول باشد برابر $\frac{۱}{۳}$ است. ○ تهران

ث) یک مجموعهٔ سه عضوی ۸ زیرمجموعه دارد. ○ خارج از کشور

ج) اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cap B = A$. ○ اصفهان

چ) در مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوها مهم است. ○ آذربایجان غربی

ح) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$ ○ هرمزگان

خ) مجموعهٔ $A \cup B$ زیرمجموعهٔ A است. ○ تهران

د) اگر $n(A) = n(B)$، آن‌گاه A و B دو مجموعهٔ برابرند. ○ استان تهران

ذ) مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ همهٔ مجموعه‌ها است. ○ سیستان و بلوچستان

ر) عبارت «دو عدد اول یک رقمی» یک مجموعه را مشخص می‌کند. ○ خراسان رضوی

۲ جملات زیر را کامل کنید.

الف) اگر $A = \{۱, ۲, ۱, ۴, ۵\}$، آن‌گاه $n(A) = \cdots\cdots\cdots$. خوزستان

ب) احتمال ظاهر شدن عددی زوج و کوچک‌تر از ۵ در پرتاب یک تاس .... است. گیلان

پ) اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $A \cup B = \cdots\cdots\cdots$. یزد

ت) مجموعهٔ $A = \{۳, ۰, \varnothing\}$ دارای .... زیرمجموعه است. فارس

ث) مجموعهٔ شامل همهٔ عضوهایی که حداقل در یکی از دو مجموعهٔ A و B باشند، .... دو مجموعهٔ A و B نام دارد.
سمنان

۳ در پرسش‌های زیر گزینهٔ درست را انتخاب کنید.

الف) اگر خانواده‌ای دو فرزند داشته باشد، احتمال دختر شدن هر دو فرزند این خانواده کدام است؟ فارس

۱) $\frac{۱}{۴}$ ○ ۲) $\frac{۲}{۴}$ ○

۳) $\frac{۳}{۴}$ ○ ۴) $\frac{۰}{۴}$ ○

ب) در پرتاب همزمان دو تاس، چقدر احتمال دارد که اعداد رو آمده مثل هم نباشند؟ اصفهان

۱) $\frac{۱}{۶}$ ○ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ○

۳) $\frac{۱}{۳}$ ○ ۴) $\frac{۱}{۴}$ ○

پ) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ $A=\{x|x\in\mathbb{Z}, -۲<x\leq ۱\}$ برابر است؟ آذربایجان شرقی

۱) $\{-۲,-۱,۰,۱\}$
۲) $\{-۱,۰,۱\}$
۳) $\{-۱,۰\}$
۴) $\{-۲,-۱,۰\}$

ت) کدام عبارت یک مجموعه را مشخص می‌کند؟ هرمزگان

۱) اعداد اول کمتر از ۱۰
۲) سه عدد متوالی
۳) چهار شهر ایران
۴) اعداد بزرگ

ث) مجموعهٔ $\{x|x\in A, x\in B\}$ با کدام نماد نمایش داده می‌شود؟ خوزستان

۱) $A\subseteq B$
۲) $A\cap B$
۳) $A\cup B$
۴) $B\subseteq A$

ج) مجموعهٔ $\mathbb{Z}-\mathbb{N}$ برابر است با ایلام

۱) $\mathbb{N}$
۲) $\{۰,۱,۲,۳,\dots\}$
۳) $\varnothing$
۴) $\{\dots,-۳,-۲,-۱,۰\}$

چ) کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعهٔ $\{\dots,-۴,-۱,۲,۵,\dots\}$ برابر است؟ کهگیلویه و بویراحمد

۱) $\{۲k|k\in\mathbb{Z}\}$
۲) $\{۲k+۱|k\in\mathbb{Z}\}$
۳) $\{k+۳|k\in\mathbb{Z}\}$
۴) $\{۳k+۲|k\in\mathbb{Z}\}$

ح) در پرتاب هم‌زمان دو تاس سبز و زرد، احتمال اینکه مجموع دو عدد رو شده مساوی ۹ باشد چیست؟ گیلان

۱) $\frac{۱}{۱۸}$
۲) $\frac{۲}{۹}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۴}$