

معادله و نامعادله

کنکور	۹۸	۹۹	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ (نوبت اول و دوم)
تعداد تست	۳	۱	صفر	۲	۳

ارتباط با فصل‌های دیگر: برای شروع این فصل یادگیری اتحادها، خواص قدرمطلق و اعمال اولیه جبری مانند مخرج مشترک‌گیری کافیت. اما خودش پیش‌نیاز اصلی برای خواندن بسیاری از فصل‌هاست.

توصیه: در کنکورهای سال‌های اخیر، توجه ویژه‌ای به بخش معادله و نامعادله و تست‌های این بخش شده است که با تمرین و تکرار به راحتی قابل حل هستند. در ضمن به مسائل مربوط به کاربردهای معادلات گویا و گنگ (انجام کار، سرعت، غلظت، مسئله مسیر و ...) توجه ویژه‌ای کنید و سعی کنید مفهوشون رو درک کنید.

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

درس ۱

معادلات گویا

۲ همه معادلات را حل می‌کنیم:

$$\text{الف) } \frac{x+5}{2x+3} = \frac{x-3}{x} \Rightarrow 2x^2 - 3x - 9 = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 9 \end{cases}$$

$$\text{ب) } \frac{6}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{پ) } 3 - \frac{2}{x} = x \Rightarrow x + \frac{2}{x} - 3 = 0 \xrightarrow{\cdot x} x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

ساده کردن در معادلات گویا

در معادلات گویا اگر هر یک از کسرها قابل ساده شدن باشند، ابتدا آن‌ها را ساده می‌کنیم. زیرا ریشه‌های مخرج در دامنه تعریف قرار ندارند.

$$\frac{x^3+1}{x^3-x^2+x} + \frac{x^3-1}{x^4+x^3+x^2} = 1 \quad \text{مثلاً:}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x^2-x+1)} + \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2(x^2+x+1)} = 1 \Rightarrow \frac{x+1}{x} + \frac{x-1}{x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+x-1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2+2x-1 = x^2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

اگر بعد از ساده کردن معادله، به عبارتی مانند $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ رسیدیم، به دو نکته زیر توجه کنید:

به معادلاتی که صورت و مخرج کسر آن‌ها چند جمله‌ای است، معادلات گویا گویند. برای حل این معادلات، ابتدا صورت و مخرج را تا حد امکان تجزیه کرده و سپس از مخرج مشترک‌گیری و طرفین وسطین استفاده می‌کنیم.

تذکر بعد از حل معادله، باید جواب‌های به دست آمده را بررسی کنیم تا در دامنه عبارت‌ها باشند. [یعنی هیچ مخرجی را در معادله اولیه صفر نکنند].

مثال معادله $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = 1 - \frac{1}{x^2-x}$ را حل کنید.

مخرج مشترک می‌گیریم و داریم:

$$\frac{(x-1) + 2x}{x^2-x} = \frac{x^2-x-1}{x^2-x} \Rightarrow 3x-1 = x^2-x-1$$

$$\Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

از آن جایی که $x=0$ ریشه مخرج است، پس در دامنه معادله نیست و قابل قبول نمی‌باشد.

تست چه تعداد از معادله‌های زیر دارای جواب طبیعی هستند؟

الف) $\frac{x+5}{2x+3} = \frac{x-3}{x}$ (ب) $\frac{6}{x^2} - 2 = 0$ (پ) $3 - \frac{2}{x} = x$

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

فرض کنید A کاری را به تنهایی در t_A ساعت و B همان کار را به تنهایی در t_B ساعت انجام می‌دهد. اگر هر دو با هم کار کنند، این کار در t_{AB} ساعت انجام خواهد شد. در این صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{t_A} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{t_{AB}}$$

مثال آرمان برای تایپ یک مقاله ۲ ساعت وقت صرف می‌کند. اگر بهرام به او کمک کند، کار تایپ مقاله در ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه انجام می‌شود. اگر بهرام به تنهایی این مقاله را تایپ کند، چند دقیقه طول می‌کشد تا تایپ او تمام شود؟

آرمان به تنهایی مقاله را در ۱۲۰ دقیقه (۲ ساعت) تایپ می‌کند. اگر بهرام به او کمک کند، کار تایپ در ۸۰ دقیقه (۱ ساعت و ۲۰ دقیقه) انجام می‌شود. حال اگر بهرام به تنهایی مقاله را در t_B دقیقه تایپ کند، داریم:

$$\frac{1}{120} + \frac{1}{t_B} = \frac{1}{80} \Rightarrow \frac{1}{t_B} = \frac{1}{80} - \frac{1}{120} = \frac{3-2}{240} = \frac{1}{240}$$

$$\Rightarrow t_B = 240$$

بنابراین بهرام این مقاله را به تنهایی در ۲۴۰ دقیقه تایپ می‌کند.

در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به غلظت یک محلول داده می‌شود. از درس شیمی می‌دانیم غلظت، کمیتی است که بیان می‌کند چه مقدار از یک حل شونده در حلال، حل شده است. برای حل این مسائل، ابتدا وزن محلول را در غلظت آن ضرب می‌کنیم تا وزن حل شونده به دست آید.

مثال ۱۲۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۸ درصد موجود است. با

تبخیر چند کیلوگرم آب می‌توانیم غلظت محلول را به ۱۰ درصد برسانیم؟

ابتدا وزن نمک را به دست می‌آوریم:

$$120 \times \frac{8}{100} = 9.6$$

حال فرض می‌کنیم با تبخیر x کیلوگرم آب، غلظت محلول به ۱۰ درصد می‌رسد، پس:

$$\frac{9.6}{100 - x} = \frac{10}{120 - x} \Rightarrow 96 = 120 - x \Rightarrow x = 24$$

در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به سرعت یک متحرک داده می‌شود. از درس فیزیک می‌دانیم:

$$\text{جا به جایی} = \frac{\text{زمان سپری شده}}{\text{سرعت}}$$

تست یک کشتی فاصله ۱۴۴ کیلومتری بین دو شهر را رفته و برگشته

است. مدت زمان رفت و برگشت ۱۵ ساعت است. اگر سرعت این کشتی در جهت جریان آب ۸ کیلومتر بر ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی در جهت آب کدام است؟

(برگرفته از تمرین کتاب درسی)

$$10 \quad 16 \quad 20 \quad 24$$

۴ اگر سرعت حرکت کشتی را هنگامی که در جهت آب حرکت می‌کند برابر v در نظر بگیریم، سرعت آن هنگامی که در خلاف جهت آب حرکت می‌کند، برابر $v - 8$ می‌شود. حال چون مجموع زمان رفت و برگشت ۱۵ ساعت است، پس:

$$\frac{144}{v} + \frac{144}{v-8} = 15 \Rightarrow \frac{48}{v} + \frac{48}{v-8} = 5$$

جای‌گذاری گزینه‌ها $\rightarrow v = 24$

۱ صورت کسرهای را نباید از طرفین معادله ساده کرد. [A را نمی‌توان با ساده کرد.] مگر آن‌که ریشه عبارت ساده شده را به عنوان یکی از جواب‌های

معادله در نظر بگیریم. مثلاً:

$$\frac{x^2-1}{x} = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x+1}$$

۲ مخرج کسرهای را می‌توانیم از طرفین ساده کنیم. [B را می‌توان با ساده کرد.] اما باید دقت کنیم که ریشه‌های عبارت‌های ساده شده را از مجموعه جواب معادله حذف کنیم. مثلاً:

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x+1}{x^2-x} \xrightarrow{x \neq 1} \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x}$$

تست معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$ چند جواب دارد؟

۱) دو جواب مثبت

۲) دو جواب منفی

۳) یک جواب منفی

۴) جواب ندارد

در سمت چپ معادله مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x} \Rightarrow \frac{2x+2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)}$$

با شرط $x \neq 1$ عبارت $(x-1)$ را از مخرج کسرهای حذف می‌کنیم:

$$\frac{4x-2}{x+1} = \frac{2-x}{x} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

بنابراین $x = -\frac{2}{5}$ تنها جواب معادله است.

برای حل بعضی از معادلات گویا، می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب، ظاهر معادله را ساده‌تر کنیم تا حل معادله آسان شود. در این‌گونه معادلات، صورت هر کسر مضربی از مخرج کسر دیگر است.

مثال معادله $\frac{2}{x-2} + \frac{x-2}{2} = \frac{5}{2}$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $t = \frac{2}{x-2}$ باشد؛ بنابراین:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{t^2+1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(2)(2) = 9 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{5+3}{4} = 2 \\ t = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

حال با محاسبه t ، مقادیر x به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$t = 2 \Rightarrow \frac{2}{x-2} = 2 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x-2=4 \Rightarrow x=6$$

مدت زمان انجام کار

برای حل برخی مسائل که به صورت کاربرد مطرح می‌شوند، باید از معادلات گویا استفاده کنیم. این مسائل به سه دسته کلی زیر تقسیم می‌شوند:

۱ در بعضی از مسائل اطلاعاتی راجع به مدت زمان انجام کار توسط دو نفر یا دو وسیله داده می‌شود. در این مسائل اگر مدت زمان انجام یک کار برابر t ساعت باشد، مقداری از کار که در یک ساعت انجام می‌شود، برابر با $\frac{1}{t}$ از کل کار است.

عدد طلایی و مستطیل طلایی

اگر در یک مستطیل با طول x و عرض y رابطه زیر برقرار باشد، مستطیل را مستطیل طلایی می‌نامند.

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

در مستطیل طلایی با فرض $y=1$ مقداری برای x به دست می‌آید که آن را نسبت طلایی می‌نامند. این عدد برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1/618$ می‌باشد که معرف نسبت طول به عرض مستطیل طلایی است.

$$\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = x+1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\xrightarrow{a > 0} \frac{x}{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1/618$$

تست اگر محیط یک زمین مستطیل شکل، برابر 20 متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول زمین چقدر است؟

$$5\sqrt{5} - 5 \quad (1) \quad \frac{5\sqrt{10} - 5}{2} \quad (2)$$

$$5\sqrt{5} + 5 \quad (3) \quad \frac{5\sqrt{10} + 5}{2} \quad (4)$$

1 اگر طول زمین x و عرض آن y باشد، با توجه به این که محیط زمین برابر 20 است؛ پس: $y = 10 - x$ $\Rightarrow x + y = 10 \Rightarrow 2x + 2y = 20$ از طرفی مستطیل، یک مستطیل طلایی است، پس:

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} \xrightarrow{y=10-x} \frac{x}{10-x} = \frac{x+10-x}{x}$$

$$\Rightarrow x^2 = 10 - 10x \Rightarrow x^2 + 10x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{100+40}}{2}$$

$$= -5 \pm 5\sqrt{5}$$

با توجه به $x > 0$ ، طول زمین برابر با $-5 + 5\sqrt{5}$ خواهد بود.

معادلات گنگ

به معادلاتی که در آن‌ها، عبارت رادیکالی شامل متغیر، وجود داشته باشد، معادلات گنگ می‌گویند.

$$\sqrt{x} = 5, \quad \sqrt{2x^2 + 5x + 1} = x, \quad \sqrt{x+2} + 4 = x - 2$$

مراحل حل معادله

برای حل معادلات گنگی که در آن‌ها فقط یک رادیکال قرار دارد، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

1 رادیکال را در یک طرف معادله، تنها نگه می‌داریم و عبارت‌های دیگر را به طرف دیگر معادله می‌بریم.

2 با به توان رساندن طرفین، رادیکال را از بین می‌بریم و معادله را حل می‌کنیم.

3 جواب‌های به دست آمده را در معادله اصلی بررسی می‌کنیم تا عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج و طرف راست معادله را منفی نکنند و معادله به ازای جواب‌های به دست آمده برقرار باشد.

مثال معادله $\sqrt{x+1} + 5 = x$ را حل کنید.

$$\sqrt{x+1} = x - 5$$

$$x+1 = x^2 - 10x + 25 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=3 \end{cases}$$

جواب $x=3$ در معادله داده شده صدق نمی‌کند، چون طرف راست معادله یعنی $x-5$ را منفی می‌کند.

تذکر برای حل بعضی از معادلات گنگ باید عمل توان‌رسانی را دو

بار انجام دهیم؛ زیرا ممکن است با یک بار به توان رساندن، رادیکال از بین نرود.

مثلاً برای حل معادله $\sqrt{1+\sqrt{x}} = 2$ داریم:

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = 2 \xrightarrow{\text{توان } 2} 1+\sqrt{x} = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} x = 9$$

نکته در بعضی از معادلات گنگ، وقتی پس از ساده کردن، به

$\sqrt{\text{دایره}} = \text{دایره}$ می‌رسیم، دامنه عبارت زیر رادیکال باعث منفی شدن عبارت طرف دیگر تساوی می‌شود. در این حالت، معادله فاقد جواب حقیقی است.

مثال معادله $\sqrt{x-3} = 1-x$ چند جواب دارد؟

دامنه عبارت زیر رادیکال به صورت $[3, +\infty)$ است. در بازه $[3, +\infty)$ عبارت سمت راست تساوی یعنی $1-x$ در بازه $[-2, -\infty)$ قرار دارد. بنابراین سمت راست تساوی به ازای دامنه عبارت زیر رادیکال همواره عبارتی منفی است؛ در نتیجه معادله فاقد جواب است.

تست اگر $16 + 3a + \sqrt{3a+16} = 2a + 9$ باشد، عدد $4a+9$ کدام است؟

(خارج - 98)

$$4(1) \quad 6(2) \quad 15(3) \quad 21(4)$$

1 رادیکال را تنها کرده و طرفین را به توان 2 می‌رسانیم.

$$\sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان } 2} 3a+16 = 1-4a+4a^2$$

$$\Rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0$$

حال برای تجزیه عبارت $4a^2 - 7a - 15$ عدد 4 را در 15 ضرب می‌کنیم:

$$4a^2 - 7a - 15 = 0 \Rightarrow a^2 - 7a - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (a - \frac{12}{4})(4a + 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \quad \times \\ a=-\frac{5}{4} \quad \checkmark \end{cases}$$

چون $a=3$ طرف سمت راست معادله اولیه را منفی می‌کند، قابل

$$4a+9 = 4(-\frac{5}{4})+9 = -5+9 = 4 \quad \text{قبول نیست، پس:}$$

مجموع و تفاضل دو رادیکال

برای حل معادلات گنگی که شامل مجموع یا تفاضل دو رادیکال هستند، با دو حالت کلی زیر مواجه می‌شویم:

1 اگر مجموع دو رادیکال برابر صفر باشد، عبارت زیر هر رادیکال را برابر صفر قرار می‌دهیم و از جواب‌های به دست آمده، اشتراک می‌گیریم. مثلاً:

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \Rightarrow x=1, x=-1 \\ x^2-x=0 \Rightarrow x=1, x=0 \end{cases}$$

تنها جواب معادله $x=1$ است.

تست حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

(ریاضی داخل-۹۴)

کدام است؟

۱) (۲) ۲) (۳) ۳) (۴) ۴) (-۱)

۲ با فرض $x^2 + 4x + 3 = t$ داریم:

$$t = \sqrt{t+2} \Rightarrow t^2 = t+2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=2 \checkmark \\ t=-1 \times \end{cases}$$

با توجه به معادله $t = \sqrt{t+2}$ باید t عددی مثبت باشد. پس به ازای $t=2$ خواهیم داشت:

$$x^2 + 4x + 3 = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$$

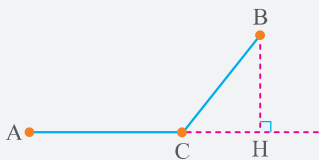
مسئله کاربردی در معادلات گنگ

در بعضی از مسائل مربوط به معادلات گنگ، یک مسیر داریم که از دو یا چند بخش تشکیل شده است. [در این سؤالات معمولاً بخش‌های مختلف مسیر در یک راستا نیستند]. برای حل این مسائل، باید طول بخشی از مسیر را به کمک قضیه فیثاغورس تعیین کنیم و با حل یک معادله گنگ طول همه قسمت‌های این مسیر را به دست آوریم.

تست در شکل زیر متحرکی از نقطه A شروع به حرکت می‌کند و پس

از عبور از نقطه B به نقطه C می‌رسد. اگر $AH = 11$ متر، $CH = 3$ متر و مسافت طی شده توسط متحرک ۱۲ متر باشد، طول مسیر BC چند

متر است؟



۱) ۳/۵

۲) ۴

۳) ۴/۵

۴) ۵

۴ با فرض $BH = x$ نتیجه می‌گیریم $AB = 11 - x$ و $BC = \sqrt{x^2 + 9}$ است، پس:

$$11 - x + \sqrt{x^2 + 9} = 12 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} = x + 1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 9 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

بنابراین $BC = \sqrt{16 + 9} = 5$ است.

۲ اگر مجموع یا تفاضل دو رادیکال برابر عبارتی غیر صفر باشد، یکی از رادیکال‌ها را به طرف دوم می‌بریم و طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم. مثلاً:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow x+1 = 9 + (x-2) - 6\sqrt{x-2}$$

$$\Rightarrow -6 = -6\sqrt{x-2} \Rightarrow \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3$$

تست اگر $\sqrt{22-a} - \sqrt{10-a} = 2$ مقدار $\frac{2a-3}{9}$ کدام است؟

۱) (۱) ۲) (۲) ۳) (۳) ۴) (۴) ۵) (۵)

۱ ابتدا $\sqrt{10-a}$ را به طرف راست تساوی منتقل کرده و سپس طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{22-a} = 2 + \sqrt{10-a} \Rightarrow 22-a = 4 + 10 - a + 4\sqrt{10-a}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{10-a} = 8 \Rightarrow \sqrt{10-a} = 2 \Rightarrow 10-a=4 \Rightarrow a=6$$

$$\Rightarrow \frac{2a-3}{9} = \frac{(2 \times 6) - 3}{9} = 1$$

نکته برای حل بعضی از معادلات گنگ، می‌توانیم با یک تغییر متغیر مناسب، ظاهر معادله را ساده‌تر کنیم تا حل معادله آسان شود.

مثال ۱ معادله $\sqrt{x-3} = \sqrt{x-1}$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $t = \sqrt{x-1}$ باشد؛ در این صورت:

$$t-2 = \sqrt{t} \Rightarrow (t-2)^2 = t \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t$$

$$\Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} \begin{cases} t=1 \times \\ t=4 \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow t=4 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 4 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x=25$$

مثال ۲ معادله $\sqrt{x+1} = \frac{2}{\sqrt{x+1}} + 1$ را حل کنید.

فرض می‌کنیم $t = \sqrt{x+1}$ باشد؛ بنابراین:

$$t = \frac{2}{t} + 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=-1 \times \\ t=2 \checkmark \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = -1 \times \\ \sqrt{x+1} = 2 \checkmark \end{cases}$$

واضح است $\sqrt{x+1}$ نمی‌تواند برابر -۱ باشد، پس:

$$\sqrt{x+1} = 2 \Rightarrow x+1=4 \Rightarrow x=3$$

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

درس
۱

معادلات گویا

واجب ۳۵۸. جواب کدام معادله زیر بزرگ‌تر است؟

۱) $\frac{x-2}{2x-1} = \frac{x-2}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2} - 12 = 0$

واجب ۳۵۹. معادله $\frac{2x+5}{x+3} + \frac{2x-2}{x} = 5$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

واجب ۳۶۰. معادله $\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = -\frac{3}{2}$ چند جواب دارد؟

۱) فقط یک جواب مثبت ۲) فقط یک جواب منفی

۳) $\frac{10}{x} - \frac{20}{3x} = \frac{5}{2}$ ۴) جواب ندارد.

۳) $2 - \frac{1}{x} = x$ ۴) دو جواب غیر هم علامت

۳) دو جواب هم علامت

۴) دو جواب غیر هم علامت

ولجب ۳۶۱. جواب های معادله $\frac{-2}{3-x} = \frac{x}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$ چگونه است؟

- ۱ جواب ندارد. ۲ یک جواب مثبت دارد. ۳ یک جواب منفی دارد. ۴ دو جواب غیر هم علامت دارد.

تسلی ۳۶۲. ریشه های معادله $0 = 2x + \frac{x^2-4x}{x-2} - \frac{x-6}{x-2}$ چگونه اند؟

- ۱ یک جواب ۲ دو جواب هم علامت ۳ دو جواب قرینه ۴ دو جواب وارون هم

ولجب ۳۶۳. بزرگ ترین ریشه معادله $5 + \frac{5}{2x-1} = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ -۲ ۳ ۱/۸ ۴ -۱/۸

ولجب ۳۶۴. معادله $\frac{2x+1}{x+4} = \frac{-2x+1}{x^2-3x-4} + \frac{1}{x+1}$ چند جواب دارد؟

- ۱ ریشه مثبت و ۱ ریشه منفی ۲ ریشه معکوس هم و ۱ ریشه منفی ۳ ۱ ریشه مثبت ۴ ۲ ریشه قرینه هم و ۱ ریشه مثبت

تسلی ۳۶۵. معادله $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ صفر ۲ یک ۳ دو ۴ چهار

ولجب ۳۶۶. حاصل ضرب ریشه های معادله $1 = \frac{x+1}{2} - \frac{4}{x+1}$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ -۲ ۳ -۹ ۴ ۸

تسلی ۳۶۷. حاصل ضرب ریشه های معادله $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{2x+1}{x-2} = \frac{3(x^2+1)}{x^2-4}$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۱/۳ ۳ ۱

ولجب ۳۶۸. مجموع ریشه های معادله $\frac{4}{x^2-3x} = \frac{x-1}{x^2-9} + \frac{2}{x^2+3x}$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۵ ۳ ۴ ۴ ۳

تسلی ۳۶۹. مجموع جواب های معادله $3 = \frac{4}{x^2-2x-3} - \frac{2}{x^2-4x+3}$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ۲ $2\sqrt{\frac{5}{3}}$ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ صفر

ولجب ۳۷۰. تعداد و علامت جواب معادله $\frac{1}{x^2+x} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{5x-1}{x^3-x}$ چگونه است؟

- ۱ جواب ندارد. ۲ دو جواب هم علامت دارد. ۳ دو جواب قرینه دارد. ۴ فقط یک جواب مثبت دارد.

ولجب ۳۷۱. به ازای کدام مقدار a ، معادله $1 - \frac{a+2}{x-1} = \frac{x-2}{ax-5}$ دارای جواب $x=3$ است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{1}{3}, 2$ ۳ $-\frac{2}{3}, 1$ ۴ $\frac{2}{3}, 1$

تسلی ۳۷۲. به ازای کدام مقدار a ، معادله $\frac{x}{x^2+x-2} - \frac{3+2x}{x^2-4} = \frac{x+a}{x^2-3x+2}$ دارای جواب $x=-1$ است؟

- ۱ ۱ ۲ ۱/۵ ۳ ۲ ۴ ۲/۵

تسلی ۳۷۳. معادله $3x(1 - \frac{x-1}{x+1}) = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$ چند جواب دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ جواب ندارد.

ولجب ۳۷۴. مجموع جواب های معادله $3 = \frac{x^2-4x+6}{x^2-4x+2} = x^2-4x+3$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۴ ۳ ۶ ۴ ۷

واجب ۳۷۵. اگر $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x^2-4} = \frac{3x}{x^2-4}$ باشد، مقدار B کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ -۴ ۳ ۶ ۴ -۶

واجب ۳۷۶. چند عدد غیر صحیح وجود دارد که مجموع دو برابر آن با سه برابر معکوسش برابر ۵ باشد؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ بیش از ۲

واجب ۳۷۷. به ازای چند مقدار a معادله $\frac{2x}{x^2-3x+2} = \frac{ax}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ فقط یک ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

iq ۳۷۸. به ازای چه مقداری از a معادله $\frac{1}{x-1} + \frac{a}{x+2} = 0$ بی شمار جواب دارد؟

- ۱ -۱ ۲ ۲ ۳ صفر ۴ \emptyset

ریاضی نوبت دوم - ۱۴۰۲

iq ۳۷۹. مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۱/۷۵ ۳ ۲ ۴ ۲/۲۵

مسائل کاربردی معادلات گویا و مستطیل طلایی



این بخش به مقدار مفهومی و برای حل سوالات باید دقت بیشتری داشته باشید. با دقت و تمرین از پیش برمیآید.

واجب ۳۸۰. بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز به

داخل - ۹۸

تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- ۱ ۳۲ ۲ ۳۳ ۳ ۳۵ ۴ ۳۶

واجب ۳۸۱. شیراول و دوم در ۱۰ ساعت استخر را پر می‌کنند. اگر شیر سوم را هم باز کنیم در ۶ ساعت استخر پر می‌شود. اگر شیر اول و سوم را باز کنیم کل

کار در ۱۴ ساعت انجام می‌شود. شیر دوم به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کند؟

- ۱ ۲۰۰ ۲ ۲۱۰ ۳ ۲۲۰ ۴ ۲۳۰

واجب ۳۸۲. پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت رفت

خارج - ۹۸

و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام چند کیلومتر در ساعت است؟

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۲/۵ ۳ ۱۳/۵ ۴ ۱۵

واجب ۳۸۳. سرعت یک قایق موتوری در آب راکد ۱۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان

داخل - ۹۸

رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۵ ۳ ۲۰ ۴ ۲۵

مسئله ۳۸۴. دو قطار A و B ایستگاهی به طول ۲۰۰ کیلومتر را به صورت رفت و برگشت با سرعت ثابت طی می‌کنند، اگر به دلیل نقص فنی در مسیر برگشت

قطار A، ۵ کیلومتر بر دقیقه و قطار B، ۱۰ کیلومتر بر دقیقه از سرعتشان کم شود و قطار A، ۴۰۰ ثانیه زودتر به مقصد برسد، مدت زمانی که

دو قطار در مسیر رفت طی می‌کنند چقدر است؟

- ۱ ۵ دقیقه ۲ ۱۰ دقیقه ۳ ۴۰ دقیقه ۴ ۲۰ دقیقه

واجب ۳۸۵. یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد، با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن،

خارج - ۹۲

غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌سد؟

- ۱ ۰/۴ ۲ ۰/۵ ۳ ۰/۶ ۴ ۰/۸

مسئله ۳۸۶. ۱۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۲۴ درصد را با ۴۰ کیلوگرم محلول آب نمک با غلظت ۱۴ درصد مخلوط می‌کنیم. به محلول حاصل،

چند کیلوگرم نمک اضافه کنیم تا غلظت آن به ۲۰ درصد برسد؟

- ۱ ۲ ۲ ۲/۲۵ ۳ ۲/۵ ۴ ۲/۷۵

واجب ۴۱۷. معادله $\sqrt{x+6} + \frac{4}{\sqrt{x+6}+1} = 3$ چند جواب صحیح دارد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

واجب ۴۱۸. معادله $\sqrt{\frac{3+x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{3+x}} = 2$ چند جواب دارد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

واجب ۴۱۹. معادله $(x^2 + \sqrt{x} - 1) + (x^2 + \sqrt{x} + 1) = 0$ چند ریشه دارد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

تسلیم ۴۲۰. ریشه‌های معادله $0 = (x^2 + x + 1) - 2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2$ چگونه است؟

- ۱ | ریشه ندارد.
۲ | چهار ریشه حقیقی دارد.
۳ | دو ریشه حقیقی دارد.
۴ | دو ریشه مضاعف دارد.

تسلیم ۴۲۱. اگر $\sqrt{a-3} + \sqrt{a+2} = 2 + \sqrt{2a-5}$ باشد، مقدار $\frac{a+2}{3}$ کدام است؟

- ۱ | $\frac{4}{3}$ | ۲ | $\sqrt{2}$ | ۳ | ۳ | ۴ | $2 + \sqrt{2}$

تسلیم ۴۲۲. معادله $\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{2x+1} = x-1$ چند جواب دارد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

تسلیم ۴۲۳. معادله $\sqrt{x-7} + \sqrt{2+x} + \sqrt{7-x} = 3$ چند جواب دارد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

تسلیم ۴۲۴. معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

واجب ۴۲۵. تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}} + \sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}} = x+2$ کدام است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

واجب ۴۲۶. چند عدد صحیح وجود دارد که حاصل جمع آن عدد با دو برابر جذر آن، برابر $\frac{1}{3}$ آن عدد باشد؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

واجب ۴۲۷. مجموعه جواب نامعادله $x\sqrt{x} - 2x < (\sqrt{x} - 2)(2x - 6)$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ | ۲ | ۳ | ۴

تسلیم ۴۲۸. یک مرغ دریایی مطابق شکل در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد

۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید. سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند! اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلو کالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند. نقطه B در چه فاصله‌ای از C باشد تا مرغ دریایی

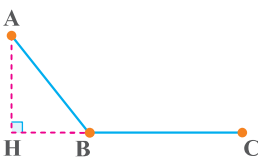
در کل ۱۸۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند؟

- ۱ | ۴ یا $\frac{7}{5}$

- ۲ | $\frac{4}{5}$ یا ۷

- ۳ | ۳ یا $\frac{6}{5}$

- ۴ | $\frac{3}{5}$ یا ۶



برگرفته از کتاب درسی

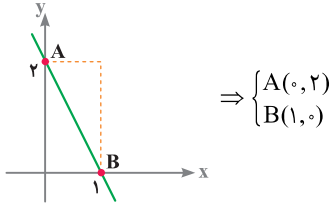
برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات یا توابعی دیگر

در مورد نقاط برخورد یک تابع با محورهای مختصات یا برخورد دو تابع، به نکات زیر توجه کنید:

1 عرض نقطه برخورد تابع $f(x)$ با محور x ها برابر صفر است.

2 طول نقطه برخورد تابع $f(x)$ با محور y ها برابر صفر است.

مثلاً در نمودار تابع زیر مختصات نقطه‌های A و B برابر است با:



اگر نمودار تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ همدیگر را در نقطه‌ای به طول a و عرض b قطع کنند، در این صورت مقدار این دو تابع در نقطه برخورد با هم برابر است، یعنی:

$$f(a) = g(a) = b$$

تست خط $f(x) = -2x + 1$ و سهمی به معادله $g(x) = x^2 + bx + c$ در دو

نقطه به طول‌های 1 و 2 متقاطع‌اند. کدام است؟

1 (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4)

3 چون این دو نمودار در نقاط 1 و 2 متقاطع‌اند، پس:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow -2 \times 1 + 1 = 1 + b + c \Rightarrow b + c = -2$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow -2 \times 2 + 1 = 4 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = -7$$

$$\Rightarrow b = -5, c = 3$$

تابع نویسی

در بعضی از مسائل می‌خواهیم مساحت، محیط، حجم و ... از یک شکل هندسی را برحسب تابعی از یک متغیر بیان کنیم. در این سؤالات ابتدا با توجه به شکل مسئله همه متغیرهای موجود در مسئله را برحسب متغیر خواسته شده به دست می‌آوریم و سپس در فرمول مساحت، محیط و ... جای‌گذاری می‌کنیم.

تست از یک قطعه مقوای مربع شکل به ضلع 12 سانتی‌متر می‌خواهیم

یک جعبه در باز بسازیم. برای این منظور از چهار گوشه این مقوا چهار

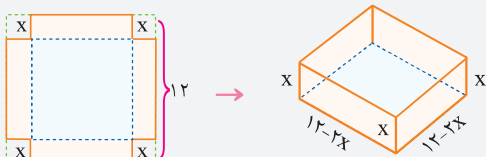
مربع به ضلع x بریده و اطراف آن را تا می‌کنیم. کدام یک از توابع زیر،

حجم جعبه را برحسب x بیان می‌کند؟

$$V = x(12 - 2x)^2 \quad (2) \quad V = 2x(12 - x)^2 \quad (1)$$

$$V = x^2(12 - 2x) \quad (4) \quad V = x^2(12 - x) \quad (3)$$

2 با توجه به شکل، حجم جعبه را به دست می‌آوریم:



$$\Rightarrow V = x(12 - 2x)^2$$

• در صورت وجود اشتراک بین دامنه ضابطه‌ها، به‌ازای x های مشترک، باید y های یکسان داشته باشند.

• هر یک از ضابطه‌ها در بازه خود تابع باشند.

مثلاً رابطه $f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 2 \\ x+2 & ; x \leq 2 \end{cases}$ چون $x=2$ در دامنه دو

ضابطه وجود دارد ولی مقادیر y یکسانی تولید نمی‌کند:

$$\text{ضابطه بالا: } f(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{ضابطه پایین: } f(2) = 2 + 2 = 4$$

تست اگر رابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x & ; x \leq 2 \\ ax - 2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ مقدار $f(4)$

کدام است؟

10 (1) 12 (2) 14 (3) 16 (4)

1 دامنه دو ضابطه در $x=2$ اشتراک دارند، پس برای این‌که f تابع باشد، باید مقدار تابع در $x=2$ در ضابطه پایینی و بالایی با هم برابر باشند، یعنی:

$$a(2) - 2 = -(2)^2 + 4(2) \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

بنابراین ضابطه پایینی به صورت $3x - 2$ است و مقدار تابع در $x=4$

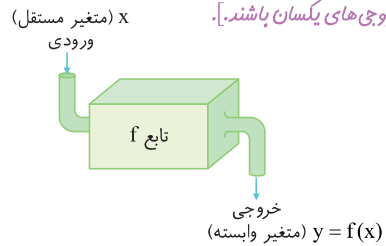
$$f(4) = 3(4) - 2 = 10$$

برابر است با:

مقدار تابع

می‌توانیم تابع را مانند ماشینی در نظر بگیریم که یک ورودی را دریافت می‌کند و به‌ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد [هر چند ممکن است چند

ورودی دارای خروجی‌های یکسان باشند].



منظور از $f(a)$ ، مقدار تابع f در نقطه $x=a$ است. بنابراین برای محاسبه مقدار تابع در $x=a$ ، باید در ضابطه تابع x را برداریم و به جای آن a قرار دهیم. اگر نمودار تابع f موجود باشد، $f(a)$ نشان‌دهنده عرض نقطه‌ای روی نمودار تابع f با طول $x=a$ است.

تست شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\frac{f(1) + f(f(-1))}{f(-5)}$ کدام

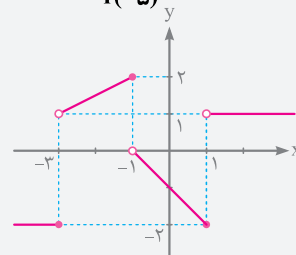
است؟

$-\frac{1}{3}$ (1)

-2 (2)

$\frac{1}{2}$ (3)

2 (4)



3 با توجه به نمودار، مقدار تابع در نقطه‌های خواسته شده در کسر را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\frac{f(1) + f(f(-1))}{f(-5)} = \frac{-2 + f(2)}{-2} = \frac{-2 + 1}{-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

دامنه تابع

به مجموعه ورودی‌های تابع f ، دامنه تابع f می‌گویند و آن را با D_f نشان می‌دهند.

۵ چون $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x \neq 0$ برقرار باشد،

بنابراین $D = \mathbb{R} - \{x = k\pi\} : (k \in \mathbb{Z})$

$y = 5 + 2 \cot x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi\}$

۶ در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد.

$y = \log \begin{cases} \bullet > 0 \\ \circ > 0, \circ \neq 1 \end{cases}$

$y = \log_{(3-x)}(x-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ 3-x > 0 \Rightarrow 3 > x \Rightarrow D_f = (1, 2) \cup (2, 3) \\ 3-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \end{cases}$

تذکره ۱ هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطه تابع را ساده کنید.

تذکره ۲ در توابع چندضابطه‌ای، دامنه تابع از اجتماع دامنه همه ضابطه‌ها به دست می‌آید.

مثلاً برای به دست آوردن دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{1-x^2}$ باید ریشه‌های مخرج را به دست آوریم:

$1-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

اما اگر ابتدا تابع را ساده کنیم به $y = \frac{1}{1-x}$ تبدیل می‌شود که دامنه آن به اشتباه $\mathbb{R} - \{1\}$ به دست می‌آید!

هنگام یافتن دامنه توابع، در صورتی که گزینه‌ها به صورت بازه بیان شده باشند، می‌توانیم با عددگذاری مناسب از گزینه‌ها، جواب را به دست آوریم. در انتخاب عدد باید دقت کنیم که این عدد باعث تفاوت در گزینه‌ها شود.

تست دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x}}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 2]$
- (۲) $(0, 2)$
- (۳) $(-\infty, 2] - \{0\}$
- (۴) $(-\infty, 3]$

۱ عدد $x = -1$ در گزینه‌های (۳) و (۴) وجود دارد که باعث منفی شدن عبارت زیر رادیکال می‌شود:

در تابع صدق نمی‌کند. $x = -1$

پس گزینه‌های (۳) و (۴) نادرست‌اند.

یکی از تفاوت‌های بین گزینه (۱) و گزینه (۲) عدد $x = 2$ است که در بازه گزینه (۱) قرار دارد ولی در بازه گزینه (۲) وجود ندارد.

$x = 2$ در دامنه تابع بوده \Rightarrow در تابع صدق می‌کند. $\Rightarrow x = 2$

پس گزینه (۲) نادرست است و گزینه (۱) پاسخ صحیح است.

قدرمطلق، جزء صحیح، رادیکال یا فرجه فرد، سینوس و کسینوس شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند.

تست دامنه تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^2+2x-3}}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

۳ رادیکال با فرجه فرد شرطی برای دامنه ایجاد نمی‌کند، پس برای

تعیین دامنه تابع f می‌توانیم دامنه $y = \frac{x^2-1}{x^2+2x-3}$ را به دست آوریم؛ پس:

$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$

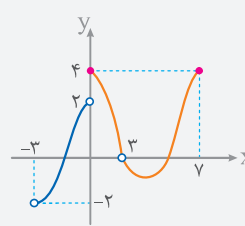
مشخص کردن دامنه تابع

<p>$D_f = [2, 4]$</p>	<p>نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور x ها</p>
<p>$D_f = \{1, 5\}$</p>	<p>نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که از اعضای آن، پیکان خارج شده</p>
<p>$f = \{(1, 2), (5, 0)\} \Rightarrow D_f = \{1, 5\}$</p>	<p>زوج مرتبی: مجموعه همه مؤلفه‌های اول</p>

تست نمودار تابع f به صورت مقابل

است. دامنه تابع f کدام است؟

- (۱) $(-3, 0) \cup [4, 7]$
- (۲) $(-3, 7)$
- (۳) $[-2, 4]$
- (۴) $(-3, 7] - \{3\}$



۴ با توجه به شکل، تصویر نمودار روی محور x برابر بازه $[-3, 7] - \{3\}$ است، پس:

دامنه توابع معروف

برای تعیین دامنه تابع f با داشتن ضابطه آن، به موارد زیر توجه کنید:

۱ دامنه تابع چندجمله‌ای $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ برابر \mathbb{R} است.

$f(x) = 2x^3 + 4x^2 - x - 10 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

۲ چون عبارت‌های کسری به ازای ریشه مخرج، تعریف نشده هستند؛ پس دامنه آن‌ها برابر است با:

$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

۳ در رادیکال‌های با فرجه زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

$y = \sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow D_f = (-\infty, 4]$

۴ چون $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x \neq 0$ برقرار باشد، بنابراین:

$D = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})\}$

$y = x + \tan x \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$

تست نمودار تابع f به صورت زیر است. بُرد تابع f کدام است؟

(۱) $(-\infty, 3] - \{-1, 1\}$
 (۲) $(-1, 1) \cup (1, 3]$
 (۳) $(-\infty, 1) \cup (1, 3]$
 (۴) $(-\infty, 3]$

۴ با توجه به شکل، تصویر نمودار روی محور y ها برابر بازه $(-\infty, 3]$ است، پس: $R_f = (-\infty, 3]$

یافتن برد تابع از روی ضابطه

برای تشخیص برد تابع از روی ضابطه، یکی از راه‌ها رسم شکل و استفاده از تصویر نمودار روی محور y هاست.

مثال برد تابع $f(x) = |x| + 2$ را به دست آورید.

برای تعیین برد تابع $f(x)$ نمودار را رسم می‌کنیم و داریم:

$\Rightarrow R_f = [2, +\infty)$

برد توابع خطی در حالت کلی برابر با \mathbb{R} است. اما اگر دامنه تابع محدود شده باشد.

می‌توانیم مقدار تابع را در نقطهٔ ابتدا و انتهای دامنه به دست آوریم و آن دو نقطه را به هم متصل کنیم.

مثال برد تابع $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ با دامنه $[-2, 2]$ را به دست آورید.

ابتدا $f(-2)$ و $f(2)$ را به دست می‌آوریم و داریم:

$\Rightarrow R_f = [2/3, 4/3]$

برای یافتن برد توابع درجه دوم به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، می‌توانیم عرض رأس سهمی را به دست آوریم، سپس با توجه به علامت a برد تابع را تعیین کنیم:

اگر $a < 0$ (پارابول رو به پایین): $R_f = (-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$

اگر $a > 0$ (پارابول رو به بالا): $R_f = [-\frac{\Delta}{4a}, +\infty)$

مثال برد تابع $f(x) = x^2 - 6x + 10$ را به دست آورید.

با توجه به این‌که ضریب x^2 مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالا است. پس عرض رأس سهمی را تعیین می‌کنیم و داریم:

$y = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36 - 4(10)}{4(1)} = 1 \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$

یافتن دامنهٔ توابع ساخته شده با $f(x)$

وقتی نمودار تابع f را در اختیار داریم، باید به موارد زیر توجه کنیم:

وضعیت x

- 1 منظور از $x > 0$ ، قسمت‌های سمت راست محور y است.
- ۲ منظور از $x < 0$ ، قسمت‌های سمت چپ محور y است.

وضعیت $f(x)$

- 1 منظور از $f(x) > 0$ ، قسمت‌های بالای محور x است.
- ۲ منظور از $f(x) < 0$ ، قسمت‌های پایین محور x است.

توجه

منظور از $f(x) = 0$ ، نقاط برخورد نمودار f با محور x است.

در بعضی از سؤالات، ضابطه یا نمودار تابع f را به ما می‌دهند و از ما دامنهٔ تابع $\sqrt{f(x)}$ یا $\sqrt{xf(x)}$ یا ... را می‌خواهند. در این سؤالات باید با توجه به ضابطه یا نمودار داده شده، مشخص کنیم عبارت زیر رادیکال در کدام ناحیه بزرگتر یا مساوی صفر است.

مثال اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ را تعیین کنید.

برای تعیین دامنهٔ $y = \sqrt{xf(x)}$ باید $xf(x) \geq 0$ باشد:

$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; f(x) \geq 0 \text{ ها} \\ x \leq 0; f(x) \leq 0 \text{ ها} \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = [-2, 0] \cup [1, 4]$

برد توابع

به مجموعهٔ خروجی‌هایی که از قرار دادن عضوهای دامنه در تابع f به دست می‌آید، بُرد تابع f می‌گویند و آن را با R_f نشان می‌دهند.

مشخص کردن بُرد تابع

<p>$R_f = [1, 3]$</p>	نمودار در دستگاه مختصات: تصویر نمودار روی محور y ها
<p>$R_f = \{0, 2\}$</p>	نمودار ون (پیکانی): مجموعه‌ای که به اعضای آن پیکان وارد شده
<p>$f = \{(1, 2), (5, 0)\} \Rightarrow R_f = \{0, 2\}$</p>	زوج مرتبی: مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم

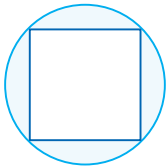
واجب ۶۹۶. اگر محیط یک مثلث متساوی الاضلاع را با P و مساحت آن را با S نمایش دهیم، کدام گزینه مساحت آن را برحسب محیط بیان می‌کند؟

- ۱ $\frac{P\sqrt{3}}{12}$ ۲ $\frac{P\sqrt{3}}{36}$ ۳ $\frac{P^2\sqrt{3}}{12}$ ۴ $\frac{P^2\sqrt{3}}{36}$

تست ۶۹۷. طول یک مستطیل ۳ واحد بیشتر از عرض آن است. تابعی که مساحت مستطیل (S) را برحسب محیط آن (P) بیان کند، کدام است؟

- ۱ $S(P) = \frac{P^2 - 36}{16}$ ۲ $S(P) = P^2 + 36$ ۳ $S(P) = \frac{P^2 - 36}{4}$ ۴ $S(P) = \frac{P^2 + 36}{16}$

واجب ۶۹۸. در شکل مقابل، مربعی درون یک دایره محاط شده است. کدام تابع ناحیه رنگی را برحسب شعاع دایره نشان می‌دهد؟

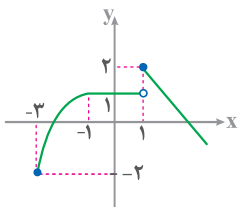


- ۱ $S = (\pi - 1)r^2$ ۲ $S = (\pi - 1)r$ ۳ $S = (\pi - 2)r^2$ ۴ $S = (\pi - 2)r$

دامنه و بُرد تابع

دامنه تابع یکی از مهم‌ترین بخش‌های تابع است. در تست‌های زیر همه حالت‌ها را براتون آوردیم تا روی این موضوع مسلط بشین.

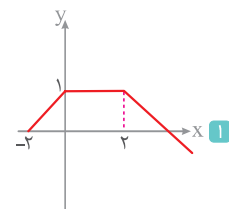
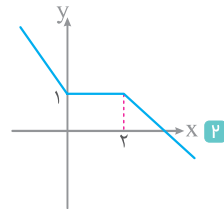
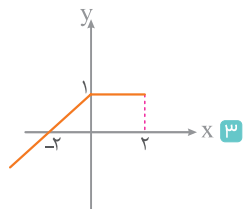
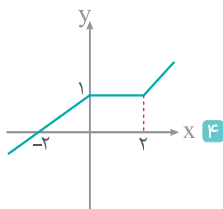
واجب ۶۹۹. نمودار تابع f به صورت مقابل است. دامنه و برد این تابع کدام است؟



- ۱ $R_f = [-2, 2], D_f = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$ ۲ $R_f = [-2, 2], D_f = [-3, +\infty)$ ۳ $R_f = (-\infty, 2], D_f = [-3, 1) \cup (1, +\infty)$ ۴ $R_f = (-\infty, 2], D_f = [-3, +\infty)$

واجب ۷۰۰. کدام نمودار مربوط به تابعی است که شامل همه شرایط زیر باشد؟

الف) دامنه تابع f برابر \mathbb{R} است. ب) $f(-2) = 0, f(2) = 1$ پ) تابع f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.



واجب ۷۰۱. دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{|x-2|-3}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ بی‌شمار

واجب ۷۰۲. اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+ax+b}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ باشد، a کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ -۲ ۳ ۲ ۴ ۱

واجب ۷۰۳. دامنه تابع $f(x) = \frac{2+x}{x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{2\}$ می‌باشد حاصل $a+2b$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۶ ۳ ۲ ۴ ۴

تست ۷۰۴. اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+ax+2}$ به صورت $\mathbb{R} - \{b\}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ ± 1 ۲ ± 2 ۳ ± 3 ۴ ± 4

واجب ۷۰۵. به ازای کدام مقادیر m دامنه تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x^2+mx+2}$ برابر \mathbb{R} است؟

- ۱ $-4 < m < 4$ ۲ $-2 < m < 2$ ۳ $m > 4$ یا $m < -4$ ۴ $m > 2$ یا $m < -2$

واجب ۷۰۶. دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{x-1}}$ شامل چند عدد حقیقی نیست؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۷۰۷. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ بی‌شمار

۷۰۸. دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x-1} + \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$ کدام است؟

- ۱ $[-2, 1)$ ۲ $(1, 4) \cup [-2, 1)$ ۳ $[-2, 4)$ ۴ $(2, 4)$

۷۰۹. دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x+2)}$ شامل چند عدد صحیح نیست؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۸

۷۱۰. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x-1}}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

۷۱۱. اگر دامنه تابع $f(x) = \sqrt{-x^2 + ax + b}$ به صورت بازه $[1, 4]$ باشد، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{5}{4}$ ۲ $-\frac{5}{4}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴ $-\frac{3}{4}$

۷۱۲. به ازای کدام مقدار a دامنه تابع $f(x) = \sqrt{ax^2 - 4x + 1}$ برابر \mathbb{R} است؟

- ۱ $a \geq 1$ ۲ $a \leq 1$ ۳ $a \geq 4$ ۴ $a \leq 4$

۷۱۳. اگر حاصل عبارت $\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- ۱ $[\frac{2}{3}, 2]$ ۲ $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ ۳ $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$ ۴ $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

۷۱۴. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x+|x|}}$ کدام است؟

- ۱ $(-\infty, +\infty) - \{0\}$ ۲ $(-\infty, 0)$ ۳ $(0, +\infty)$ ۴ $(-\infty, +\infty)$

۷۱۵. دامنه تابع $y = \sqrt{x+3} |x-1| - 6$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۴

۷۱۶. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$ چند عدد صحیح را شامل نمی‌شود؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ صفر ۴ بی‌شمار

۷۱۷. دامنه تابع $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 2|x|}}$ کدام است؟

- ۱ $(0, 2)$ ۲ $(-2, 0) \cup (0, 2)$ ۳ $\mathbb{R} - (-2, 2)$ ۴ $\mathbb{R} - [-2, 2]$

۷۱۸. اگر $f(x) = \sqrt{x+|x+2|}$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ کدام است؟

- ۱ $x \leq -1$ ۲ $x \geq -1$ ۳ $x \leq 1$ ۴ $x \geq 1$

۷۱۹. دامنه تابع $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{|x|}}$ به صورت $\mathbb{R} - (a, b)$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ ۱ ۳ -۲ ۴ ۲

۷۲۰. دامنه تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$ کدام است؟

- ۱ \mathbb{N} ۲ \emptyset ۳ \mathbb{Z} ۴ $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

۷۲۱. دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{2 \sin x - 1}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- ۱ $[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ ۲ $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ ۳ $[\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}]$ ۴ $[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$

۷۲۲. دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4^x - 2^{x+1}}}$ شامل چند عدد طبیعی نیست؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ بی‌شمار

واجب ۷۲۳. اگر $f(x) = 2^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{f(x) - f(\frac{1}{x})}$ به کدام صورت است؟

- ۱ $\mathbb{R} - (-1, 1)$ ۲ $[-1, 0) \cup (0, 1]$ ۳ $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ ۴ $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

داخل - ۹۳

واجب ۷۲۴. اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{x})^x$ باشد، دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟

- ۱ $[-1, 0]$ ۲ $(-\infty, 0)$ ۳ $(-\infty, +\infty)$ ۴ $(0, +\infty)$

واجب ۷۲۵. اگر $f(x) = 2^x - 2$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{\frac{xf(x)}{x-2}}$ شامل چند عدد طبیعی است؟

- ۱ ۳ ۲ ۵ ۳ ۱۰ ۴ بی شمار

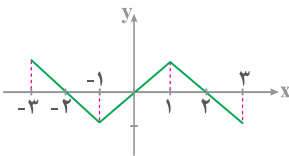
واجب ۷۲۶. دامنه تعریف تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x-1)}$ به کدام صورت است؟

- ۱ $(1, 2]$ ۲ $[2, 10]$ ۳ $[1, 11]$ ۴ $(1, 11]$

داخل - ۱۴۰۰

واجب ۷۲۷. دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\log^4(x^2 - x - 2)}{\sqrt{x^2 - 1} + 1}$ کدام است؟

- ۱ $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$ ۲ $(-1, 2)$ ۳ $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ۴ $(-2, 1)$

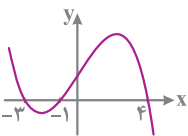


واجب ۷۲۸. شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{f(x)}{x}}$ کدام است؟

- ۱ $[-2, 0) \cup (0, 2]$ ۲ $[-2, 2]$ ۳ $[-3, 0) \cup (0, 3]$ ۴ $[-3, 3]$

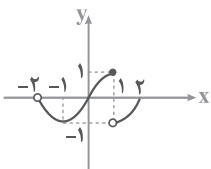
خارج - ۹۴

تسلط ۷۲۹. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{xf(x)}$ ، کدام است؟



- ۱ $[-1, 1] \cup [0, 6]$ ۲ $[-3, 1] \cup [0, 2]$ ۳ $[-5, -3] \cup [-1, 2]$ ۴ $[-5, -3] \cup [0, 2]$

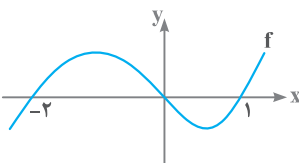
تسلط ۷۳۰. نمودار تابع $f(x)$ به صورت مقابل است. دامنه تابع با ضابطه $\sqrt{(x^2-1)f(x)}$ کدام است؟



- ۱ $[-1, 0]$ ۲ $[-1, 0] \cup \{1\}$ ۳ $[-1, 0] \cup \{1, 2\}$ ۴ $[-1, 0] \cup [1, 2]$

نوبت دوم - ۱۴۰۲

تسلط ۷۳۱. نمودار زیر، تابع f را نشان می‌دهد. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(x+2)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟



- ۱ ۳ ۲ ۶ ۳ ۴ ۴ ۵

در قسمت‌های زیر می‌خواهیم برد توابع را پیدا کنیم. برای پیدا کردن برد توابع روش‌های مختلفی وجود دارد که در ادامه آن‌ها را بررسی می‌کنیم.

واجب ۷۳۲. اگر برد تابع $f(x) = \frac{2x-1}{3}$ به صورت $\{-1, 0, 2\}$ باشد، مجموعه اعضای دامنه کدام است؟

- ۱ $\{-3, -1, \frac{7}{3}\}$ ۲ $\{-1, -\frac{1}{3}, 3\}$ ۳ $\{-1, \frac{1}{3}, 0\}$ ۴ $\{-1, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\}$

واجب ۷۳۳. اگر دامنه تابع $y = \frac{1}{x} + 1$ بازه $[-2, 2]$ باشد، برد آن شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ بی شمار

واجب ۷۳۴. تعداد عضوهای صحیح مشترک دامنه و بُرد $f(x) = 3 - \sqrt{2x+5}$ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۷

تسلط ۷۳۵. برد تابع $f(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$ به صورت بازه $[a, b]$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- ۱ ۶ ۲ ۳ ۳ ۸ ۴ ۱۰

واجب ۷۳۶. برد تابع $f(x) = (3x+1)^2 - (2x-1)^2$ کدام است؟

- ۱ $[-5, +\infty)$ ۲ $(-\infty, 5]$ ۳ $[5, +\infty)$ ۴ $(-\infty, -5]$

واجب ۷۳۷. برد تابع $f(x) = x|x| - 2x$ در بازه $(-2, 2)$ کدام است؟

- ۱ $(-2, 2)$ ۲ $[-1, 1]$ ۳ $(0, +\infty)$ ۴ $[-3, 3]$

واجب ۷۳۸. برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{x}$ در بازه $\{0\} - [-3, 3]$ کدام است؟

- ۱ $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ۲ $\mathbb{R} - (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ۳ $\mathbb{R} - [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ۴ $[-3, 3]$

تسلط ۷۳۹. برد تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ کدام است؟

- ۱ \mathbb{R} ۲ $\mathbb{R} - \{-1\}$ ۳ $\mathbb{R} - \{2\}$ ۴ $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

واجب ۷۴۰. برد تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \\ -x-1 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 3 & ; x > 1 \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ $\mathbb{R} - [0, 1)$ ۲ $[-2, 0] \cup (1, +\infty)$ ۳ $(-\infty, -2] \cup [0, 1)$ ۴ $[-2, +\infty)$

واجب ۷۴۱. برد تابع $f(x) = \begin{cases} |x-1|+2 & ; -3 \leq x < 2 \\ -x^2+6x-5 & ; 2 \leq x \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ $[2, +\infty)$ ۲ $[2, 6]$ ۳ $(-\infty, 6]$ ۴ $(-\infty, 4]$

واجب ۷۴۲. برد تابع $f(x) = 2 - \sqrt{\frac{x}{2} + |\frac{x}{2}|}$ کدام است؟

- ۱ $[0, 2]$ ۲ $[0, +\infty)$ ۳ $(-\infty, 2]$ ۴ $[2, +\infty)$

واجب ۷۴۳. برد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$ کدام است؟

- ۱ $(0, 1)$ ۲ $[1, +\infty)$ ۳ $(1, +\infty)$ ۴ $[0, +\infty)$

واجب ۷۴۴. برد تابع $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$ کدام است؟

- ۱ $(0, 2]$ ۲ $[1, 2)$ ۳ $[2, +\infty)$ ۴ $[1, +\infty)$

تساوی دو تابع

واجب ۷۴۵. اگر دو تابع $f = \{(2, -1), (c, d)\}$ و $g = \{(2a^2 - 1, b^2 + 1), (b+1, 2a-1)\}$ برابر باشند، $c+d$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ ۱

واجب ۷۴۶. دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی هستند؟

۱ $f(x) = 2 \log x, g(x) = \log x^2$ ۲ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}, g(x) = 1$

۳ $f(x) = (\sqrt{x})^2, g(x) = x$ ۴ $f(x) = \frac{x}{|x|}, g(x) = \frac{|x|}{x}$

واجب ۷۴۷. چه تعداد از جفت توابع زیر با هم مساوی هستند؟

الف) $g(x) = \sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}, f(x) = \sqrt{x^2-1}$

ب) $g(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, f(x) = x+2$

پ) $f(x) = \begin{cases} x & ; x \neq 2 \\ 3 & ; x = 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 3 & ; x = 2 \end{cases}$

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ صفر

خارج - ۹۱

واجب ۷۴۸. چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابر هستند؟

$g(x) = \frac{[x]}{x}, f(x) = \frac{x}{[x]}$ <p>ت</p>	$\begin{cases} f(x) = [x^2] \\ g(x) = [x]^2 \end{cases}$ <p>پ</p>	$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2} \\ g(x) = x\sqrt{x} \end{cases}$ <p>ب</p>	$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \end{cases}$ <p>الف</p>
۴	۳	۲	۱

۴ صفر

۳

۲

۱

واجب ۷۴۹. چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}, g(x) = x + 1$ <p>ب</p>	$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = \tan x \cdot \cot x$ <p>الف</p>
$f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}, g(x) = \cos x$ <p>پ</p>	

۴ صفر

۳

۲

۱

خارج - ۹۷

واجب ۷۵۰. کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ برابر است؟

$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$ <p>۴</p>	$\frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$ <p>۳</p>	$\log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$ <p>۲</p>	$\log(x-2) - \log x$ <p>۱</p>
--	--	--	-------------------------------

واجب ۷۵۱. چه تعداد از عبارات‌های زیر درست است؟

الف) مجموع دو تابع f و g ، یک تابع است.

ب) دامنه تابع‌های f و f^2 برابر هستند.

پ) اگر $f \in (1, 2), g \in (1, 3)$ باشد، آنگاه $f + g \in (2, 5)$ است.

۴

۳

۲

۱ صفر

واجب ۷۵۲. اگر توابع $f(x) = 2x + 4$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + a}{x-2} & ; x \neq 2 \\ b & ; x = 2 \end{cases}$ مساوی باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۴

۳ -۴

۲ ۱۶

۱ صفر

تسلط ۷۵۳. اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & ; x \neq a \\ b & ; x = a \end{cases}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ برابر باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟

۴

۳ $\frac{3}{2}$

۲ ۱

۱ $\frac{1}{2}$

واجب ۷۵۴. اگر تابع $f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4}$ و $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر باشند، مقدار $a + b + c$ کدام است؟

۴

۳ ۶

۲ ۴

۱ ۳

تسلط ۷۵۵. دو تابع $f(x) = \sqrt{x|x|}$ و $g(x) = \sqrt{|x|} \times \sqrt{|x|}$ با کدام دامنه با هم مساوی‌اند؟

۴ $(-\infty, 0]$

۳ $(0, +\infty)$

۲ $[0, +\infty)$

۱ \mathbb{R}

واجب ۷۵۶. اگر $f(x) = [x] + [-x]$ باشد، آنگاه تابع $f^2(x)$ با چه تعداد از توابع زیر، برابر است؟

۴ $f(-x)$ پ

۳ $\frac{1}{f(x)}$ ب

۲ $\sqrt{f(x)}$ الف

۴ صفر

۳

۲

۱

انواع تابع

واجب ۷۵۷. اگر $f = \{(-1, a+4), (-1, 3), (4, b^2 - 2b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $|a+b|$ کدام است؟

۴

۳

۲

۱

تسلط ۷۵۸. اگر $f = \{(3, n^2 - 2n), (m, 8), (2n - 5, t), (4, 3m + 2)\}$ یک تابع ثابت سه‌عضوی باشد، مقدار $m + n + t$ کدام است؟

۴ ۱۴

۳ ۱۲

۲ ۱۱

۱ ۸

۱۴۶۴. واجب حاصل $\frac{\sin(-\frac{9\pi}{4}) - \tan(3\pi)}{\sin(-6\pi) + \cos(\frac{9\pi}{4})}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ -۲

۱۴۶۵. واجب اگر $\sin x = 0/7$ باشد، حاصل عبارت $\sin(x - \pi) \cos(\frac{3\pi}{4} - x)$ کدام است؟

- ۱ ۰/۴ ۲ ۰/۴۹ ۳ ۰/۵۲ ۴ ۰/۵۸

داخل - ۹۹

۱۴۶۶. واجب حاصل عبارت $\tan(30^\circ) \cos(21^\circ) + \tan(48^\circ) \sin(84^\circ)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ صفر ۳ ۲ ۴ ۱

۱۴۶۷. واجب حاصل $\tan(10\pi + \frac{\pi}{6}) \cot(3\pi + \frac{\pi}{6}) + \cos(4\pi - \frac{\pi}{6}) \sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6})$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴ $\frac{7}{4}$

۱۴۶۸. واجب حاصل عبارت $\sqrt{3} \sin \frac{137\pi}{3} + \cos \frac{137\pi}{3}$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ -۲

۱۴۶۹. واجب حاصل عبارت $2 \tan 31^\circ + \cot 22^\circ - 5 \tan 13^\circ - 2 \cot 32^\circ$ کدام است؟

- ۱ $2 \tan 5^\circ$ ۲ $6 \tan 5^\circ$ ۳ $3 \cot 5^\circ$ ۴ $6 \cot 5^\circ$

داخل - ۹۸

۱۴۷۰. واجب حاصل عبارت $\sin(\frac{17\pi}{3}) \cos(\frac{-17\pi}{6}) + \tan(\frac{19\pi}{4}) \sin(\frac{-11\pi}{6})$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{4}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{2}$

۱۴۷۱. واجب اگر $\cos \theta = 0/8$ و انتهای کمان θ در ربع اول باشد، حاصل $\tan(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{3}{2}$ ۳ $-\frac{4}{3}$ ۴ $-\frac{3}{4}$

۱۴۷۲. واجب اگر $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ و $\sin \alpha < 0$ باشد، حاصل $\sin(\frac{9\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{3\pi}{4} + \alpha)$ کدام است؟

- ۱ ۰/۸ ۲ ۰/۲ ۳ ۰/۸ ۴ ۰/۲

۱۴۷۳. واجب اگر $\tan(\frac{3\pi}{4} - \theta) = 2$ و انتهای کمان θ در ربع سوم باشد، حاصل $\sin(\theta - \pi)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۲ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳ $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ۴ $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۴۷۴. واجب نمودار خط d به معادله $3x + 2y = 4$ به صورت مقابل است. حاصل $\tan(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $-\frac{3}{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

- ۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ $-\frac{2}{3}$ ۳ $-\frac{3}{2}$ ۴ $-\frac{2}{3}$

۱۴۷۵. واجب در شکل مقابل، طول ضلع مربع های کوچک برابر ۱ واحد است. مقدار $\tan \theta$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $-\frac{3}{4}$ ۳ $-\frac{4}{5}$ ۴ $-\frac{5}{6}$

- ۱ $-\frac{4}{5}$ ۲ $-\frac{5}{6}$ ۳ $-\frac{6}{7}$ ۴ $-\frac{7}{8}$

۱۴۷۶. واجب اگر مساحت مثلث مقابل ۱۵ باشد، مقدار $\cot(\frac{5\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

- ۱ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۲ $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

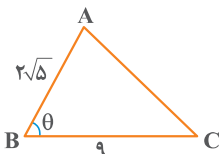
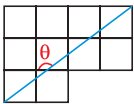
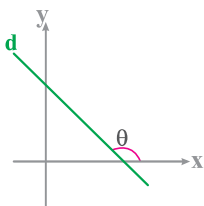
۱۴۷۷. واجب اگر $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و انتهای کمان α در ربع چهارم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\cos(\frac{3\pi}{4} - \alpha) \sin(\frac{5\pi}{4} + \alpha) - \tan(\pi - \alpha)$

- ۱ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۲ $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۳ $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ۴ $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۱۴۷۸. واجب اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟ $\sin(\frac{9\pi}{4} + \alpha) \cos(\frac{7\pi}{4} - \alpha) - \tan(\alpha - \frac{3\pi}{4})$

- ۱ $-1/23$ ۲ $-0/52$ ۳ $0/27$ ۴ $0/48$

خارج - ۹۸



۱۴۷۹. **واجب** روی دایره مثلثاتی نقطه $A(0, 1)$ به اندازه $\frac{37\pi}{6}$ در جهت مثلثاتی حول مبدأ دوران می‌کند. مختصات نقطه حاصل از دوران کدام است؟

- ۱ $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ۲ $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ۳ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ ۴ $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

۱۴۸۰. **واجب** اگر $\tan 15^\circ = m$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\sin 75^\circ + 3 \cos 195^\circ}{\cos 105^\circ - \cos 285^\circ}$ کدام است؟

- ۱ m ۲ $\frac{1}{m}$ ۳ $\frac{2}{m}$ ۴ $2m$

۱۴۸۱. **واجب** اگر $\sin 10^\circ = a$ باشد، حاصل $\cos 17^\circ$ کدام است؟

- ۱ $1+a$ ۲ $1-a$ ۳ a ۴ $-a$

داخل - ۹۴

۱۴۸۲. **واجب** حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ با فرض $\tan 15^\circ = 0.28$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{16}{9}$ ۲ $-\frac{9}{16}$ ۳ $\frac{9}{16}$ ۴ $\frac{16}{9}$

داخل - ۹۱

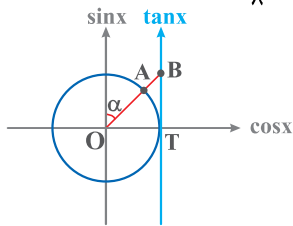
۱۴۸۳. **واجب** اگر $\tan \theta = 0.2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ کدام است؟

- ۱ $1/2$ ۲ 2 ۳ -2 ۴ 3

خارج - ۹۴

۱۴۸۴. **واجب** حاصل عبارت $\frac{\sin 25^\circ + \sin 70^\circ}{\cos 56^\circ - \cos 11^\circ}$ با فرض $\tan 2^\circ = 0.4$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{7}{3}$ ۴ $\frac{5}{8}$



۱۴۸۵. **واجب** در دایره مثلثاتی مقابل، پاره خط AB کدام است؟

- ۱ $1 - \sin \alpha$
۲ $\frac{1}{\sin \alpha} - 1$
۳ $1 - \cos \alpha$
۴ $\frac{1}{\cos \alpha} - 1$

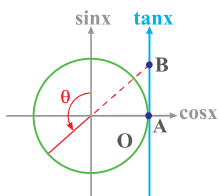
۱۴۸۶. **واجب** اگر a و b دوزاویه حاده و $a + b = \frac{\pi}{4}$ و $\sin b = \frac{2}{3}$ باشد، حاصل $\frac{\sin(3a + 2b) - \cos(4a + 3b)}{\tan(2a + 2b) + \tan(2a + 3b)}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{11}{19}$ ۲ $-\frac{10\sqrt{3}}{27}$ ۳ $-\frac{20}{27}$ ۴ $-\frac{16\sqrt{3}}{19}$

خارج - ۱۴۰۰

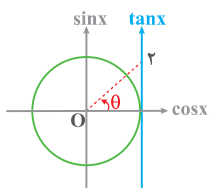
۱۴۸۷. **واجب** فرض کنید زاویه α در ناحیه چهارم مثلثاتی و $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ باشد. حاصل عبارت $\frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2(\alpha) - 1|}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3}$ ۲ $\frac{4(-2 + \sqrt{5})}{3}$ ۳ $\frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$ ۴ $-\frac{4(2 + \sqrt{5})}{3}$



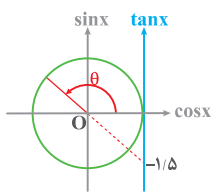
۱۴۸۸. **واجب** با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، طول پاره خط AB کدام است؟

- ۱ $\tan \theta$
۲ $-\tan \theta$
۳ $\frac{1}{\tan \theta}$
۴ $-\frac{1}{\tan \theta}$



۱۴۸۹. **واجب** با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، حاصل $\sin(\frac{7\pi}{4} - \theta) - \cos(\frac{3\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۲ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۳ $\frac{3}{\sqrt{5}}$ ۴ $-\frac{3}{\sqrt{5}}$



۱۴۹۰. **واجب** با توجه به دایره مثلثاتی مقابل، حاصل $\sin(\frac{\pi}{4} + \theta)$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{\sqrt{13}}$ ۲ $\frac{2}{\sqrt{13}}$ ۳ $\frac{3}{\sqrt{13}}$ ۴ $-\frac{3}{\sqrt{13}}$

روابط 2α

قبل از حل تست‌های این بخش، حتماً روابط مثلثاتی 2α را بررسی کنید.

- واجب ۱۴۹۱.** اگر $\sin 2\alpha > 0$ و $\cos(\frac{3\pi}{4} - \alpha) > 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟
 ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم
- واجب ۱۴۹۲.** اگر $\sin 2\alpha < 0$ و $\sin \alpha \tan \alpha > 0$ باشد، آنگاه انتهای کمان α در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار دارد؟
 ۱ اول ۲ دوم ۳ سوم ۴ چهارم
- واجب ۱۴۹۳.** حاصل $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ کدام است؟
 ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{6}$
- واجب ۱۴۹۴.** اگر $\sin 10^\circ = a$ و $\cos 10^\circ = b$ باشد، حاصل $\cos 70^\circ$ کدام است؟
 ۱ ab ۲ $2ab$ ۳ $a^2 - b^2$ ۴ $b^2 - a^2$
- واجب ۱۴۹۵.** حاصل $\sin^2 75^\circ - \sin^2 15^\circ$ کدام است؟
 ۱ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{3}{5}$
- واجب ۱۴۹۶.** حاصل $\cos^4 \frac{\pi}{8} - \sin^4 \frac{\pi}{8}$ کدام است؟
 ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $-\sqrt{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- واجب ۱۴۹۷.** اگر $\sin^2 10^\circ = a$ باشد، مقدار $\sin 70^\circ$ کدام است؟
 ۱ $1 - 2a$ ۲ $2a - 1$ ۳ $1 + 2a$ ۴ $1 - a$
- واجب ۱۴۹۸.** اگر $\cos 5^\circ = a$ باشد، مقدار $\cos 80^\circ$ کدام است؟
 ۱ $a\sqrt{1-a^2}$ ۲ $\frac{a\sqrt{1+a^2}}{2}$ ۳ $2a\sqrt{1-a^2}$ ۴ $2\sqrt{1-a^2}$
- واجب ۱۴۹۹.** حاصل عبارت $\frac{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$ کدام است؟
 ۱ $\sqrt{3}$ ۲ $2\sqrt{3}$ ۳ $-\sqrt{3}$ ۴ $-2\sqrt{3}$
- واجب ۱۵۰۰.** حاصل $\frac{\cos^4 20^\circ - \sin^4 20^\circ}{\cos 50^\circ}$ کدام است؟
 ۱ $\tan 40^\circ$ ۲ $\tan 50^\circ$ ۳ $2 \tan 40^\circ$ ۴ $2 \tan 50^\circ$
- واجب ۱۵۰۱.** حاصل $\frac{\sin 40^\circ}{\cos 10^\circ \cos 20^\circ}$ کدام است؟
 ۱ $3 \sin 10^\circ$ ۲ $4 \sin 10^\circ$ ۳ $2 \cos 20^\circ$ ۴ $3 \cos 20^\circ$
- واجب ۱۵۰۲.** حاصل عبارت $\frac{2 \cos^2 25^\circ - 1}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$ کدام است؟
 ۱ 2 ۲ -2 ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{1}{2}$
- واجب ۱۵۰۳.** ساده شده عبارت $(2 \cos^2 5^\circ - 1) \sin 5^\circ \cos 5^\circ$ کدام است؟
 ۱ $\frac{1}{4} \sin 20^\circ$ ۲ $\frac{1}{4} \sin 2^\circ$ ۳ $\frac{1}{4} \sin 25^\circ$ ۴ $\frac{1}{4} \sin 25^\circ$
- واجب ۱۵۰۴.** ساده شده عبارت $\frac{\sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1}$ کدام است؟
 ۱ $\sin \alpha$ ۲ $\cos \alpha$ ۳ $\sin^2 \alpha$ ۴ $\cos^2 \alpha$
- واجب ۱۵۰۵.** حاصل $\sin 7/5^\circ \cos 7/5^\circ \cos 15^\circ$ کدام است؟
 ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{16}$
- تست ۱۵۰۶.** حاصل $\cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ$ کدام است؟
 ۱ $\tan 80^\circ$ ۲ $8 \tan 10^\circ$ ۳ $\frac{1}{8} \tan 80^\circ$ ۴ $\tan 10^\circ$
- واجب ۱۵۰۷.** حاصل $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$ کدام است؟
 ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{1}{4}$

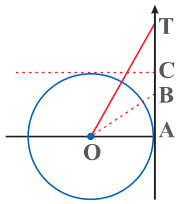
- ۱۵۲۴ واجب** در تابع $f(x) = \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x)$ مقدار $f(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟
- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{8}$
- ۱۵۲۵ تست** اگر $f(x) = \cos^2 x - \cos^4 x$ باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{8})$ کدام است؟
- ۱ $\frac{2}{5}$ ۲ $\frac{1}{8}$ ۳ $\frac{2}{9}$ ۴ $\frac{2}{10}$
- ۱۵۲۶ واجب** اگر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ و $f(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x \cos x$ باشد، مقدار $f(\frac{\sqrt{2}}{4})$ کدام است؟
- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- ۱۵۲۷ واجب** اگر $\tan \alpha = -3$ و انتهای کمان α در ربع دوم باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟
- ۱ $\frac{6}{5}$ ۲ $-\frac{6}{5}$ ۳ $\frac{8}{5}$ ۴ $-\frac{8}{5}$
- ۱۵۲۸ واجب** اگر $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ و انتهای کمان α در ربع اول باشد، مقدار $\tan 2\alpha$ کدام است؟
- ۱ $2\sqrt{5}$ ۲ $\sqrt{5}$ ۳ $8\sqrt{5}$ ۴ $4\sqrt{5}$
- ۱۵۲۹ تست** اگر $\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = -2$ و α زاویه‌ای در ربع سوم باشد، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟
- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{3}{5}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{3}{5}$
- ۱۵۳۰ واجب** اگر $\tan(\frac{\alpha}{4}) = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $\frac{\tan(\alpha) - \sin(\alpha)}{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}$ کدام است؟
- ۱ $-\frac{91}{105}$ ۲ $-\frac{16}{105}$ ۳ $\frac{16}{105}$ ۴ $\frac{91}{105}$
- ۱۵۳۱ واجب** اگر زاویه α در ناحیه سوم مثلثاتی و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ باشد، مقدار $\frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) + \cos(\alpha + \pi)}{\cot 2\alpha}$ کدام است؟
- ۱ $-\frac{96}{175}$ ۲ $\frac{1056}{175}$ ۳ $\frac{96}{175}$ ۴ $-\frac{1056}{175}$
- ۱۵۳۲ تست** اگر $\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = -3$ باشد، مقدار $\sin 2\theta$ کدام است؟
- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $-\frac{4}{5}$ ۴ $\frac{4}{5}$
- ۱۵۳۳ واجب** اگر انتهای کمان x در ربع سوم و $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4$ باشد، مقدار صحیح $\tan \frac{x}{4}$ کدام است؟
- ۱ 2 ۲ -2 ۳ 3 ۴ -3
- ۱۵۳۴ واجب** اگر $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام عدد می‌تواند باشد؟
- ۱ $-\frac{1}{3}$ ۲ -2 ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ 3
- ۱۵۳۵ واجب** اگر $\cos(\frac{3\pi}{4} + \alpha) = \frac{2}{3}$ و α زاویه‌ای در ربع اول باشد، مقدار $\sin(\pi + 2\alpha)$ کدام است؟
- ۱ $\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ۲ $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ ۳ $-\frac{2\sqrt{5}}{9}$ ۴ $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- ۱۵۳۶ تست** اگر x در ربع سوم دایره مثلثاتی و $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$ باشد، مقدار $\cos(\frac{3\pi}{4} + 2x)$ کدام است؟
- ۱ $\frac{8}{5}$ ۲ $\frac{6}{5}$ ۳ $\frac{7}{5}$ ۴ $\frac{8}{75}$
- ۱۵۳۷ واجب** اگر $\frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = 3$ و انتهای کمان x در ناحیه سوم باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟
- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴ $\frac{4}{3}$
- ۱۵۳۸ IQ** حاصل $\frac{4 \tan^2 15^\circ}{1 - \tan^4 15^\circ}$ کدام است؟
- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}}{6}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}}{6}$
- ۱۵۳۹ IQ** اگر $\cos x = 2 \cdot \sin x$ (۰/۲۵) باشد، مقدار $\tan 2x$ کدام است؟
- ۱ $\frac{4}{3}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{3}{2}$

ریاضی داخل - ۱۴۰۰

داخل - ۱۴۰۰

خارج - ۱۴۰۱

خارج - ۱۴۰۱



۱۵۴۰. $\text{if } 0 < x < \frac{\pi}{4}$ and $\tan 2x = \frac{3}{4}$, find the value of $\cot x$?

۱ $\frac{2}{5}$ ۲ 3 ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

۱۵۴۱. In a circle, \widehat{AOB} and \widehat{TOB} are equal. $AT = \frac{2}{4}$. Find the length of the arc BC .

۱ $\frac{2}{5}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{2}{7}$

روابط طلایی

روابط طلایی از رابطه $\cos 2\alpha$ نتیجه‌گیری می‌شوند، اما به اندازه فرمول‌های اصلی $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ مهم و کاربردی هستند.

۱۵۴۲. حاصل $\sqrt{\frac{1+\cos 40^\circ}{2}}$ کدام است؟
- ۱ $\sin 70^\circ$ ۲ $\sin 80^\circ$ ۳ $\cos 70^\circ$ ۴ $\cos 80^\circ$
۱۵۴۳. اگر $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ باشد، حاصل $\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\sin x}$ کدام است؟
- ۱ $\sqrt{2} \cot x$ ۲ $\sqrt{2} \tan x$ ۳ $-\sqrt{2} \cot x$ ۴ $-\sqrt{2} \tan x$
۱۵۴۴. حاصل $\frac{\sin 40^\circ}{1+\cos 40^\circ}$ کدام است؟
- ۱ $\tan 20^\circ$ ۲ $\cot 20^\circ$ ۳ $2 \tan 20^\circ$ ۴ $2 \cot 20^\circ$
۱۵۴۵. عبارت $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \times \frac{\cos x}{1+\cos x}$ برابر کدام است؟
- ۱ $\tan \frac{x}{2}$ ۲ $\tan x$ ۳ $\cot x$ ۴ $\cot \frac{x}{2}$
۱۵۴۶. حاصل عبارت $\frac{1+\cos 40^\circ}{\cos 55^\circ \cos 35^\circ}$ کدام است؟
- ۱ $4 \cos 20^\circ$ ۲ $2 \cos 20^\circ$ ۳ $4 \sin 20^\circ$ ۴ $2 \sin 20^\circ$
۱۵۴۷. عبارت $(1+\sin 50^\circ) \cot 70^\circ$ برابر کدام است؟
- ۱ $\sqrt{2} \sin 20^\circ$ ۲ $\sin 40^\circ$ ۳ $\frac{1}{2} \sin 65^\circ$ ۴ $\sin 50^\circ$
۱۵۴۸. حاصل عبارت $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$ کدام است؟
- ۱ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ ۴ $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$
۱۵۴۹. اگر $\frac{\sin x}{1-\cos x} = 2$ باشد، مقدار $\tan x$ کدام است؟
- ۱ $\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{4}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ 2
۱۵۵۰. اگر $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} = 3$ باشد، حاصل $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$ کدام است؟
- ۱ 2 ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ 3 ۴ 5
۱۵۵۱. ساده‌شده عبارت $\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\tan 2x}$ کدام است؟
- ۱ $\cos 2x$ ۲ $\cos x$ ۳ $\tan 2x$ ۴ $\tan x$
۱۵۵۲. ساده‌شده عبارت $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha} \times \frac{\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$ کدام است؟
- ۱ $\cos 4\alpha$ ۲ 1 ۳ $\cot \alpha$ ۴ $2 \tan \alpha$
۱۵۵۳. اگر انتهای کمان α در ناحیه دوم باشد، ساده‌شده عبارت $\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ کدام است؟
- ۱ $\tan \alpha$ ۲ $-\tan \alpha$ ۳ $\cot \alpha$ ۴ $-\cot \alpha$

۱۸۲۰. تسلیق حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 5x + 6|}{x^2 - 2x}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$

۱۸۲۱. واجب حاصل کدام یک از حدود زیر به درستی محاسبه نشده است؟

۱ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|} = -4$

۲ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2} = 8$

۳ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - [2x]}{x^2 - x - 2} = \frac{2}{3}$

۴ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x[-x] + 4}{|1 - x| - 1} = 2$

۱۸۲۲. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]}$ کدام است؟

۱ $-\infty$ ۲ صفر

۱۸۲۳. تسلیق حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{|x^2-1|}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۱

۱۸۲۴. واجب در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+|x|}{x-|x|}$ کدام بیان درست است؟

۱ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ۲ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$

۳ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$

۴ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$

۱۸۲۵. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + [\cos \pi x]}{3 - \sqrt{2x+7}}$ کدام است؟

۱ -6 ۲ ۶

۳ -3 ۴ ۳

۱۸۲۶. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{2x^2 + 3x + 1}$ کدام است؟

۱ ۲ ۲ ۱

۳ -2 ۴ -1

۱۸۲۷. تسلیق حد تابع $f(x) = \frac{[x]-3}{x-3} \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ وقتی $x \rightarrow 3^-$ کدام است؟

۱ ۱ ۲ -1

۳ ۳ ۴ -3

۱۸۲۸. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x+1}}{x-1}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۱

۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $-\frac{1}{4}$

۱۸۲۹. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2}$ کدام است؟

۱ $\frac{2}{2}$ ۲ $\frac{5}{2}$

۳ $-\frac{3}{2}$ ۴ $-\frac{5}{2}$

۱۸۳۰. تسلیق حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{x+12}}{x^2 + 2x - 3}$ کدام است؟

۱ $-\frac{5}{12}$ ۲ $-\frac{7}{12}$

۳ $-\frac{5}{24}$ ۴ $-\frac{7}{24}$

۱۸۳۱. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{x}$ کدام است؟

۱ ۱ ۲ $\frac{1}{2}$

۳ -1 ۴ $-\frac{1}{2}$

۱۸۳۲. واجب حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۱

۳ $\frac{1}{4}$ ۴ ۲

خارج - ۱۴۰۱

۱۸۳۳. تست ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{3}{4}$

۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{3}{2}$

ریاضی داخل - ۹۹

۱۸۳۴. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}}$ کدام است؟

۱ $-1/5$ ۲ $-1/2$

۳ $-5/8$ ۴ $-5/6$

۱۸۳۵. واجب ۱. اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x-1)}$ کدام است؟

۱ -1 ۲ $-\frac{1}{2}$

۳ $\frac{1}{2}$ ۴ 1

خارج - ۱۴۰۱

۱۸۳۶. تست ۱. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = a\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱ 2 ۲ 4

۳ 8 ۴ 10

۱۸۳۷. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2 - x - 2}$ کدام است؟

۱ $-\frac{1}{8}$ ۲ $-\frac{1}{9}$

۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{9}$

داخل - ۹۸

۱۸۳۸. واجب ۱. حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ وقتی $x \rightarrow -8$ کدام است؟

۱ -24 ۲ -18

۳ -12 ۴ -6

۱۸۳۹. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{64\sqrt{x} - 8}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{12}$ ۲ $\frac{1}{8}$

۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{1}{4}$

ریاضی داخل - ۱۴۰۱

۱۸۴۰. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt[3]{x}}$ کدام است؟

۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ 3

۳ $\frac{1}{2}$ ۴ -2

۱۸۴۱. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16}}{[-x](x-4)}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{1}{4}$

۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{1}{4}$

۱۸۴۲. تست ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

۱ $-\frac{1}{6}$ ۲ $-\frac{1}{12}$

۳ $\frac{1}{6}$ ۴ $\frac{1}{12}$

۱۸۴۳. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 12}}{|x^2 + x - 6|}$ کدام است؟

۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{3}{10}$

۳ $\frac{3}{5}$ ۴ $\frac{2}{4}$

۱۸۴۴. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3x}}{x + [x^2 - 2x]}$ کدام است؟

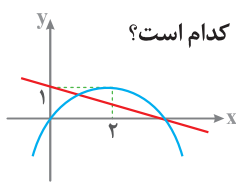
۱ $-\frac{3}{4}$ ۲ $\frac{3}{4}$

۳ $-\frac{5}{4}$ ۴ $\frac{5}{4}$

۱۸۴۵. واجب ۱. حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{16 + \sqrt{x}} - 4}$ کدام است؟

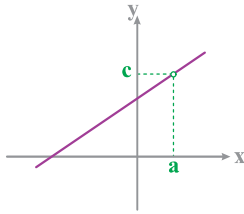
۱ 8 ۲ 4

۳ 2 ۴ 1



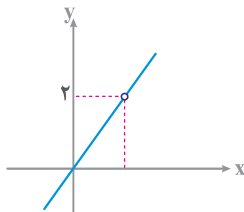
۱۸۵۷. نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل مقابل داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)+g(x)}{4-x}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{2}$
 ۲ $-\frac{5}{4}$
 ۳ $\frac{5}{4}$
 ۴ $\frac{3}{2}$



۱۸۵۸. نمودار مقابل مربوط به تابع $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+b}$ است. مقدار $a-b+c$ کدام است؟

- ۱ ۴
 ۲ ۲
 ۳ ۳
 ۴ ۶



۱۸۵۹. نمودار تابع $f(x) = \frac{2x^2+ax+b}{x-1}$ به صورت مقابل است. مقدار $a^2 + b^2$ کدام است؟

- ۱ ۱
 ۲ ۴
 ۳ ۹
 ۴ ۱۶

حدهای پارامتری هم خیلی مهم هستند و طراح‌های کنکور سراسری هم خیلی بهشون علاقه دارن.

۱۸۶۰. اگر a و b اعدادی حقیقی و مخالف صفر باشند و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x+a} = b$ باشد، مقدار b کدام است؟

- ۱ ۱
 ۲ ۲
 ۳ ۳
 ۴ ۴

۱۸۶۱. اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

- ۱ -۲
 ۲ -۱
 ۳ ۲
 ۴ ۱

۱۸۶۲. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+1}{bx-b} = 2$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax + \sqrt{3x-2}}{x^2-x-2}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{6}$
 ۲ $-\frac{1}{8}$
 ۳ $-\frac{1}{10}$
 ۴ $-\frac{1}{12}$

۱۸۶۳. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، b کدام است؟

- ۱ -۸
 ۲ -۶
 ۳ ۴
 ۴ ۵

نوبت دوم - ۱۴۰۲

۱۸۶۴. مقدار غیرصفر حد $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{b\sqrt{2+\sqrt{x}} - 2b}{ax-b}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{12}$
 ۲ $\frac{1}{6}$
 ۳ $\frac{1}{48}$
 ۴ $\frac{1}{24}$

۱۸۶۵. اگر $f(x) = ax+1$ و $g(x) = ax-1$ و حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(g(x))}{x}$ عددی حقیقی باشد، مقدار a کدام است؟

- ۱ ۱
 ۲ ۲
 ۳ ۳
 ۴ ۴

حالا نوبت سوالات ابهام صفر صفرم مثلثاتیه که نیاز به فرمول‌های مثلثاتی هم دارن.

۱۸۶۶. حاصل چه تعداد از حدهای زیر درست است؟

- الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{2}$ (ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = 6$ (پ) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{\cos x + \cos^2 x} = -2$
 ۱ ۱
 ۲ ۲
 ۳ ۳
 ۴ صفر

فاکتوریل

فاکتوریل: حاصل ضرب اعداد طبیعی از ۱ تا n را به صورت n! نشان می‌دهند و آن را «n فاکتوریل» می‌خوانند. بنابراین:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

تذکر

با توجه به تعریف فاکتوریل می‌دانیم $1! = 1$ است. طبق قرارداد $0! = 1$ است. بهتر است فاکتوریل‌های زیر را حفظ باشید:

$$0! = 1 \quad 1! = 1 \quad 2! = 2 \quad 3! = 6 \quad 4! = 24 \quad 5! = 120 \quad 6! = 720$$

مثال چه تعداد از عبارات زیر درست است؟

الف) $6! = 3! + 3!$ (پ)
ب) $8! = 4! + 2!$ (ب)
ت) $(n+1)! = (n+1) \times n!$

همه عبارات را بررسی می‌کنیم:

الف) $\begin{cases} 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \\ 3! + 3! = 6 + 6 = 12 \end{cases}$

ب) $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4! \neq 4! + 2!$

پ) $(3!)^2 = 3! \times 3! = 6 \times 6 \neq 9!$

ت) $(n+1)! = (n+1) \times n!$

جایگشت

اگر چند شیء متمایز داشته باشیم، به هر حالت چیدن آن‌ها در کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم.

مثلاً، سه نفر با اسامی A و B و C به حالت‌های زیر می‌توانند در یک ردیف بنشینند:

ABC ACB BAC BCA CBA CAB

برای محاسبه تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز، n خانه در نظر می‌گیریم. خانه اول را به n طریق، خانه بعدی را به n-1 طریق و ... و خانه آخر را به 1 طریق می‌توان پُر کرد. بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$$n! = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$$

مثلاً، تعداد حالت‌هایی که 4 نفر می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، برابر $4! = 24$ است.

انواع جایگشت

1 جایگشت با تکرار: اگر بخواهیم جایگشت n شیء را پیدا کنیم که n_1 تای آن‌ها شبیه هم، n_2 تای دیگر نیز شبیه هم، ... و n_k تای آن‌ها شبیه هم باشند، تعداد راه‌های ممکن برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

تست با حروف کلمه «DAMDAR» چند کلمه 6 حرفی می‌توان نوشت؟

۳۰ (۱) ۹۶ (۲) ۱۸۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۳ از حرف A دو تا و از حرف D نیز دو تا داریم، پس:

$$\frac{6!}{2!2!} = 180$$

نکته تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی از n شیء با تعداد جایگشت‌های n تایی آن‌ها برابر است. این نکته هم برای اشیاء تکراری و هم برای اشیاء غیرتکراری برقرار است.

تست با حروف کلمه «Colour» چند کلمه 5 حرفی می‌توان ساخت؟

۲۷۰ (۱) ۲۹۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۴ کلمه «Colour» از 6 حرف تشکیل شده است؛ بنابراین تعداد کلمات 5 حرفی که می‌توان با حروف آن ساخت برابر با تعداد کلمات 6 حرفی است. پس:

$$360 = \frac{6!}{1!} = \text{تعداد جایگشت‌های 6 تایی} = \text{تعداد جایگشت‌های 5 تایی}$$

۲ جایگشت یکی در میان: برای این‌که بتوانیم دو گروه از اشیاء را به صورت یکی در میان کنار هم قرار دهیم، دو حالت داریم:

الف) اگر تعداد اعضای دو گروه، یک واحد اختلاف داشته باشد، باید چیدن با گروهی شروع شود که تعداد عضو بیش‌تری دارد. در این حالت جایگشت‌های هر گروه را محاسبه کرده و در هم ضرب می‌کنیم.

$\square \circ \square \circ \square \circ \square \Rightarrow 4! \times 3!$

ب) اگر تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشند، به دو حالت می‌توانیم آن‌ها را کنار هم قرار دهیم. در این حالت باید تعداد جایگشت‌های هر گروه را محاسبه و جواب را در 2 ضرب کنیم.

$\square \circ \square \circ \square \circ \square \Rightarrow 2 \times 3! \times 3!$

$\circ \square \circ \square \circ \square \circ \Rightarrow 2 \times 3! \times 3!$

تست با جابه‌جایی ارقام «۵۷۶۲۲۲» چند عدد شش‌رقمی می‌توان تشکیل داد، به طوری که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟

۹ (۱) ۱۲ (۲) ۱۸ (۳) ۳۴ (۴)

۲ چون می‌خواهیم ۲ها یکی در میان قرار گیرند، دو حالت داریم:

$2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \circ 2 \Rightarrow 3! + 3! = 12$

۳ کنار هم بودن: اگر بخواهیم جایگشت n شیء را پیدا کنیم به طوری که چند شیء مشخص کنار هم باشند، ابتدا آن اشیاء را درون یک بسته قرار می‌دهیم و این بسته را به عنوان یک عضو در نظر می‌گیریم و جایگشت آن را با بقیه اعضا محاسبه می‌کنیم، سپس حاصل را در جایگشت اشیاء درون بسته ضرب می‌کنیم.

مثال ۳ دختر و ۴ پسر به چند طریق می‌توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری که:

الف) دخترها کنار هم باشند؟

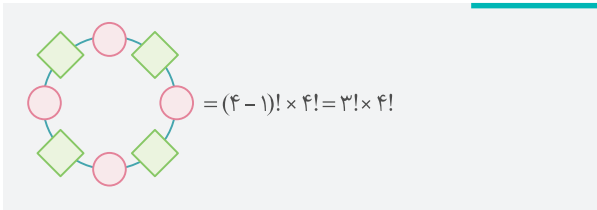
۳ دختر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت بسته و ۴ پسر را محاسبه و آن را در جایگشت دخترها ضرب می‌کنیم:

$\square \square \square \square \square \Rightarrow 5! \times 3! = 720$

ب) دخترها کنار هم نباشند؟

تعداد جایگشت‌هایی که ۳ دختر کنار هم هستند را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$$7! - 5! \times 3! = 7 \times 6 \times 5! - 6 \times 5! = (7-1) \times 6 \times 5! = 4 \times 3 \times 2 \times 5! = 4 \times 3 \times 2 \times 120 = 2880$$



۵ تقدم و تأخر: می خواهیم تعداد جایگشت های n شیء را حساب کنیم به طوری که A بعد از B (نه لزوماً بلافاصله بعد از B) قرار گیرد.

از آن جایی که A و B بدون توجه به جایگاهشان به $2!$ حالت می توانند با هم جابه جا شوند و ما فقط 1 حالت آن یعنی حالتی که A قبل از B قرار می گیرد را می خواهیم، پس تعداد جایگشت ها برابر است با:

$$\frac{1}{2!} \times n! = \frac{n!}{2!}$$

مثال پنج نفر به اسمی E و D و C و B و A به چند طریق می توانند در یک صف بایستند به طوری که A قبل از B باشد؟

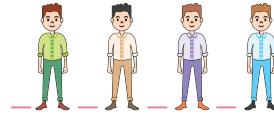
$$A, B, C, D, E \Rightarrow \frac{5!}{2!} = 60$$

یک راهکار سریع برای حل این مسائل این است که A و B را یکسان فرض کنیم و از جایگشت اشیاء تکراری استفاده کنیم. (این روش را برای تعداد اشیاء بیش تر نیز می توان به کار برد.)

مثلاً، برای حل این سؤال می توانیم A و B را یکسان فرض کنیم:

$$A, \overset{A}{B}, C, D, E \Rightarrow \frac{5!}{2!} = 60$$

در مثال قبل، اگر بخواهیم هیچ دو دختری کنار هم نباشند باید بین پسرها جای خالی در نظر بگیریم و جایگشت 4 پسر را حساب کنیم. حال پنج جای خالی ایجاد شده است که باید 3 دختر را طبق اصل ضرب در آن ها قرار دهیم.



دختر اول 5 انتخاب دارد، دختر دوم 4 انتخاب و دختر بعدی 3 انتخاب،

یعنی:

$$\Rightarrow 4! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

۴ جایگشت دایره ای: اگر n نفر بخواهند دور یک میز دایره ای بنشینند، تعداد کل حالت های ممکن برابر با $(n-1)!$ است.

مثال 3 دختر و 2 پسر به چند طریق می توانند دور یک میز گرد قرار گیرند؟ چون هیچ محدودیتی برای قرار گرفتن این 5 نفر دور میز گرد وجود ندارد، پس تعداد حالت ها برابر است با: $5! = 120$

نکته در میز گرد، اگر شخص (یا اشخاصی) در جای مشخصی دور میز قرار گیرند، جایگشت بقیه افراد را مانند جایگشت خطی در نظر می گیریم.

مثال 4 پسر و 4 دختر به چند طریق می توانند به صورت یک در میان دور یک میز گرد قرار بگیرند؟ ابتدا 4 پسر به $(4-1)!$ حالت دور میز گرد قرار می گیرند. اما چون جایگاه پسرها در میز گرد مشخص شد، 4 دختر باید به $4!$ حالت در 4 جای خالی بنشینند و دیگر با میز گرد مواجه نیستند.

فاکتوریل و جایگشت

پرسش های چهارگزینه ای

درس
۲

فاکتوریل و انواع جایگشت

برای شروع این مبحث، باید اول محاسبه فاکتوریل را یاد بگیریم.

واجب ۲۵۳۵. حاصل $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5! + 8 \times 7 \times 6! + 8 \times 7!}{8! + 8 \times 7!}$ کدام است؟

- ۱) ۰/۷۵ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۵ ۴) ۱/۷۵

واجب ۲۵۳۶. تعداد جواب های معادله $(x^2 - 2x)! = 1$ کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

واجب ۲۵۳۷. از معادله $\frac{2(n!) + (n+1)!}{(n+1)! + (n+2)!} = \frac{1}{7}$ چند مقدار قابل قبول برای n وجود دارد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

تسلک ۲۵۳۸. اگر n عددی طبیعی و m عدد طبیعی دورقمی و $m = \left(\frac{3n+2}{n-1}\right)!$ باشد، مقدار $\frac{m}{n}$ کدام است؟

- ۱) ۲! ۲) $3! - 2!$ ۳) $3!$ ۴) $5! - 4!$

در تست های بعدی می خواهیم افراد یا اشیا را جایگشت دهیم. جایگشت انواع مختلفی دارد که اون ها رو به ترتیب براتون قرار دادیم.

واجب ۲۵۳۹. رضا و جواد به همراه چهار دوست خود به چند طریق می توانند کنار یکدیگر بایستند و عکس یادگاری بگیرند؟

- ۱) ۴۶۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۵۲۰ ۴) ۹۶۰

واجب ۲۵۴۰. با حروف کلمه «ACTION» چند کلمه 6 حرفی می توان ساخت به طوری که با حرف صدادار شروع و به حرف T ختم شود؟

- ۱) ۴۸ ۲) ۵۶ ۳) ۶۶ ۴) ۷۲

واجب ۲۵۴۱. با حروف کلمه «جایگشت» چند کلمه چهارحرفی می توان ساخت به طوری که با حرف نقطه دار شروع شود؟

- ۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۲۸۰

واجب ۲۵۴۲. با حروف کلمه CALCULUS چند کلمه 8 حرفی می توان ساخت به طوری که با C شروع و به S ختم شود؟

- ۱) ۸۰ ۲) ۱۵۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۶۰

۲۵۴۳ واجب یک گوی قرمز، دو گوی سبز یکسان و سه گوی آبی یکسان را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که در ابتدا و انتها گوی آبی قرار گیرد؟

۶ ۱ ۹ ۲ ۱۲ ۳ ۱۵ ۴

۲۵۴۴ واجب با ارقام ۱, ۲, ۲, ۲, ۵, ۹, ۹, ۹ چند عدد ۷ رقمی می‌توان ساخت به طوری که با ۹ شروع و به ۲ ختم شوند؟

۳۰ ۱ ۶۰ ۲ ۱۲۰ ۳ ۱۵۰ ۴

۲۵۴۵ تست رضا شمارهٔ تلفن هفت رقمی دوست خود را فراموش کرده است. تنها چیزی که به یاد دارد، این است که شمارهٔ تلفن دوستش شامل سه رقم ۴، ۵ و دو رقم ۶ است. رضا حداکثر باید چند شماره را امتحان کند تا بتواند با دوستش تماس بگیرد؟

۱۵۰ ۱ ۲۱۰ ۲ ۲۴۰ ۳ ۳۶۰ ۴

۲۵۴۶ واجب با ارقام ۳, ۳, ۳, ۳, ۰, ۰, ۰ چند عدد ۶ رقمی زوج می‌توان ساخت؟

۸ ۱ ۱۰ ۲ ۱۵ ۳ ۱۸ ۴

 هر موقع لازم شد چند شیء کنار هم باشند، باید اون اشیا رو در یک بسته قرار بدیم!

۲۵۴۷ واجب حروف A, A, A, B, B, C را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که سه حرف A کنار هم باشند؟

۸ ۱ ۱۰ ۲ ۱۲ ۳ ۱۶ ۴

۲۵۴۸ واجب با کنار هم قرار دادن ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت به طوری که رقم‌های فرد کنار هم باشند؟

۱۲ ۱ ۲۴ ۲ ۳۶ ۳ ۴۸ ۴

۲۵۴۹ واجب با حروف کلمه «LAGRANGE» چند جایگشت ۸ حرفی می‌توان ساخت که حروف یکسان کنار هم باشند؟

۲۴۰ ۱ ۳۶۰ ۲ ۷۲۰ ۳ ۹۶۰ ۴

۲۵۵۰ واجب به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متفاوت را در یک قفسهٔ کتاب کنار هم قرار داد، به طوری که دو کتاب A و B کنار هم نباشند؟

۷۲ ۱ ۸۰ ۲ ۸۵ ۳ ۹۶ ۴

۲۵۵۱ واجب تعداد جایگشت‌های حروف کلمه «SYSTEM» به طوری که Sها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱۲۰ ۱ ۱۸۰ ۲ ۲۴۰ ۳ ۳۶۰ ۴

۲۵۵۲ واجب سه زن و شوهر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم قرار گیرند، به طوری که هر مرد کنار همسرش باشد؟

۸ ۱ ۲۴ ۲ ۴۸ ۳ ۵۶ ۴

۲۵۵۳ واجب با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که در آن «جهان» دیده شود؟

۲۴ ۱ ۷۲ ۲ ۱۲۰ ۳ ۱۶۰ ۴

۲۵۵۴ واجب با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حروف کلمه «جهان» کنار هم قرار گیرند؟

۶! ۱ ۴! × ۵! ۲ ۴ × ۵! ۳ ۹! ۴

۲۵۵۵ تست با حروف کلمه «FUNCTION» چند کلمهٔ ۸ حرفی می‌توان ساخت که سه حرف صدادار کنار هم نباشند؟

۲۵ × ۶! ۱ ۳ × ۷! ۲ ۵ × ۶! ۳ ۴ × ۷! ۴

۲۵۵۶ واجب با حروف کلمه «گل پیرا» چند کلمهٔ ۶ حرفی می‌توان نوشت به طوری که با «گل» شروع شود و دو حرف «پ» و «ر» کنار هم نباشند؟

۶ ۱ ۹ ۲ ۱۲ ۳ ۱۶ ۴

۲۵۵۷ واجب با ارقام ۱, ۲, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت به طوری که دو رقم ۲ کنار هم باشند اما رقم‌های ۱ و ۴ کنار هم نباشند؟

۱۲ ۱ ۱۶ ۲ ۲۰ ۳ ۲۴ ۴

۲۵۵۸ تست با ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت به طوری که در آن ۱۲ دیده شود اما ۳۴ دیده نشود؟

۳۶ ۱ ۷۸ ۲ ۹۶ ۳ ۱۴۴ ۴

۲۵۵۹ واجب با ارقام ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ چند عدد شش رقمی می‌توان نوشت به طوری که هیچ دو رقم زوجی کنار هم نباشند؟

۱۳۲ ۱ ۱۴۴ ۲ ۱۵۶ ۳ ۱۹۶ ۴

۲۵۶۰ تست ۴ پرستار و ۳ پزشک به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بنشینند به طوری که هیچ دو پزشکی کنار هم نباشند؟

۱۷۲۰ ۱ ۱۶۸۰ ۲ ۱۵۶۰ ۳ ۱۴۴۰ ۴

 عبارت (یکی در میان) در تست‌ها معمولاً نشانهٔ جایگشت یکی در میان است. البته گاهی اوقات طراح‌ها با عبارتهای دیگری همین منظور را به ما می‌رسون.

۲۵۶۱ واجب با ارقام ۳, ۴, ۵, ۶, ۷ چند عدد پنج رقمی می‌توان ساخت به طوری که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار گیرند؟

۱۶ ۱ ۲۰ ۲ ۱۲ ۳ ۲۴ ۴

۲۵۶۲ واجب چند عدد طبیعی پنج رقمی با ارقام غیر تکراری می‌توان نوشت که ارقام آن یک در میان زوج و فرد باشند؟

۲۴۰۰ ۱ ۱۸۴۰ ۲ ۱۹۲۰ ۳ ۲۱۶۰ ۴

۲۵۶۳ واجب هریک از اعداد ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ بر روی شش گوی یکسان نوشته شده است. به طور متوالی هم یک گوی از جعبه خارج می‌کنیم. در چند حالت اعداد زوج یا فرد یک در میان خارج می‌شوند؟

داخل - ۹۴

۱ ۳۶ ۲ ۲۴ ۳ ۷۲ ۴ ۴۸

۲۵۶۴ واجب در کیسه‌ای ۵ مهره با شماره‌های ۱ تا ۵ وجود دارد. این مهره‌ها را به طور پی در پی از کیسه خارج می‌کنیم. در چند حالت دو مهره با شماره‌های فرد متوالیاً خارج نمی‌شود؟

۱ ۱۵ ۲ ۱۲ ۳ ۲۱ ۴ ۲۴

در بعضی از سوالات جایگشت هم لازمه حالت‌های مختلف قرارگیری افراد یا اشیا را به صورت کلی بنویسیم و با توجه به حالت‌های خواسته شده، سؤال را حل کنیم.

۲۵۶۵ واجب ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز با موضوع آمار را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به طوری که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به جز کتاب اول و آخر)، متفاوت باشد؟

خارج - ۱۴۰

۱ ۹۶ ۲ ۷۲ ۳ ۴۸ ۴ ۲۴

۲۵۶۶ واجب پارسا ۶ صندلی کنار هم را در یک استادیوم برای تماشای مسابقه بسکتبال برای خود و ۵ نفر از دوستانش رزرو کرده است. اگر فقط ۳ نفر از دوستانش به استادیوم بیایند، در چند حالت این ۴ نفر می‌توانند در صندلی‌های متوالی کنار هم بنشینند؟

۱ ۲۸ ۲ ۵۶ ۳ ۶۸ ۴ ۷۲

۲۵۶۷ واجب هریک از ارقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ را در یکی از ۶ خانه هم‌ردیف قرار می‌دهیم. در چند حالت در خانه‌های متوالی و دورقم زوج کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱ ۲۴ ۲ ۴۸ ۳ ۹۶ ۴ ۱۴۴

۲۵۶۸ واجب با حروف کلمه «گل پیرا» چند کلمه شش حرفی می‌توان نوشت به طوری که حرف «ی» بین دو حرف «پ» و «ر» قرار گیرد؟

۱ ۶ ۲ ۲۴ ۳ ۳۶ ۴ ۴۸

۲۵۶۹ واجب در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت‌نام کرده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آنان وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b از آنان فقط یک نفر سخنرانی کند؟

۱ ۲۰ ۲ ۲۴ ۳ ۳۶ ۴ ۴۰

در سوالات زیر، لازمه یک ترتیب خاص برای اعضا ایجاد کنید که برای حل می‌توانید از جایگشت‌های با تکرار هم کمک بگیرید!

۲۵۷۰ واجب چهار دوندۀ A, B, C, D در یک مسابقه دو میدانی شرکت کرده‌اند. به چند طریق دوندۀ A بعد از دوندۀ B به خط پایان می‌رسد؟ (دونده‌ها همزمان به خط پایان نمی‌رسند.)

۱ ۳ ۲ ۶ ۳ ۹ ۴ ۱۲

۲۵۷۱ واجب اشخاص A, B, C, D, E در صف خرید یک فروشگاه هستند. در چند حالت A زودتر از B و دیرتر از C خرید می‌کند؟

۱ ۱۰ ۲ ۲۰ ۳ ۶ ۴ ۱۵

۲۵۷۲ تست در جلسه‌ای ۵ نفر جهت سخنرانی دعوت شده‌اند. چند طریق ترتیب سخنرانی برای آن‌ها وجود دارد به طوری که دو فرد A و B قبل از فرد C سخنرانی کنند؟

۱ ۲۵ ۲ ۴۰ ۳ ۸۰ ۴ ۱۲۰

سوالات بعدی مربوط به جایگشت میزگرد هست. برای حل لازمه فرمول جایگشت دوری را بلد باشید.

۲۵۷۳ واجب ۶ نفر به چند طریق می‌توانند دور یک میزگرد کنار هم بنشینند؟

۱ ۷۲ ۲ ۹۰ ۳ ۱۲۰ ۴ ۱۵۰

۲۵۷۴ واجب رضا و حسن به همراه ۴ دوست خود به چند طریق می‌توانند دور یک میزگرد بنشینند به طوری که رضا و حسن کنار هم باشند؟

۱ ۳۶ ۲ ۴۸ ۳ ۵۴ ۴ ۶۰

۲۵۷۵ تست به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر می‌توانند دور یک میزگرد بنشینند به طوری که افراد هم‌تیمی کنار هم باشند؟

خارج - ۱۴۰۰

۱ ۷۲ ۲ ۱۴۴ ۳ ۲۱۶ ۴ ۴۳۲

۲۵۷۶ تست ۴ زن و شوهر به چند طریق می‌توانند دور یک میزگرد بنشینند، به طوری که هر مرد کنار همسرش باشد؟

۱ ۲۴ ۲ ۴۸ ۳ ۹۶ ۴ ۱۱۲

۲۵۷۷ تست ۴ دختر و ۴ پسر به چند طریق می‌توانند به صورت یک در میان دور یک میزگرد بنشینند؟

۱ ۷۲ ۲ ۱۴۴ ۳ ۱۶۰ ۴ ۱۸۶

۲۵۷۸ تست به چند طریق می‌توان ۸ حرف A, B, C, D, E, F, G, H را روی نقاط دایره زیر نوشت، به طوری که دو

حرف G و H کنار هم قرار نگیرند؟

۱ $۵ \times ۶!$ ۲ $۶ \times ۵!$ ۳ $۸!$ ۴ $۷!$



۳ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{5, 6, 7, 7}_{\text{نیمه اول}}, \underbrace{8, 10, 11, 13, 13}_{\text{نیمه دوم}}$$

پس باید واریانس داده‌های رنگی را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{8+10+11+13+13}{5} = \frac{55}{5} = 11 \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{(8-11)^2 + (10-11)^2 + (11-11)^2 + (13-11)^2 + (13-11)^2}{5} \\ \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{9+1+0+4+4}{5} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}\end{aligned}$$

تذکر اگر تمام داده‌های آماری با هم برابر باشند، واریانس و انحراف معیار (و سایر شاخص‌های پراکندگی) برابر صفر است.

تست اگر انحراف معیار داده‌های ad و fc و fb و $2a$ و 8 برابر

صفر باشد، واریانس داده‌های d و c و $2b$ و $a+1$ کدام است؟

$$2/5 \quad (4) \quad 2/2 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1/8 \quad (1)$$

۴ چون انحراف معیار داده‌های ad و fc و fb و $2a$ و 8 برابر صفر است، پس این داده‌ها با هم برابر هستند:

$$2a = fb = fc = ad = 8 \Rightarrow a = 4, b = 2, c = 2, d = 1$$

بنابراین داده‌های d و c و $2b$ و $a+1$ به صورت 1 و 2 و 4 و 5 هستند و برای به دست آوردن واریانس آن‌ها داریم:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1+2+4+5}{4} = 3 \\ \sigma^2 &= \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{4} = 2/5\end{aligned}$$

نکته ۱ در سؤالاتی که صحبت از مجموع مربعات داده‌ها است، می‌توانیم واریانس را از رابطه زیر (که نتیجه‌ای از رابطه اصلی است) به دست آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - (\bar{x})^2$$

نکته ۲ اگر x_1, x_2, \dots, x_n اضلاع تعدادی مربع باشند، آن‌گاه میانگین اضلاع آن‌ها برابر \bar{x} است و با توجه به رابطه بالا، داریم:

$$\begin{aligned}(\bar{x})^2 &: \text{مربع میانگین اضلاع} \\ \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} &: \text{میانگین مساحت مربع‌ها}\end{aligned}$$

تست مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات این

داده‌ها ۳۴۰ است. انحراف معیار این داده‌ها کدام است؟

$$2/5 \quad (4) \quad 2/25 \quad (3) \quad 1/5 \quad (2) \quad 1/25 \quad (1)$$

۲ چون مجموع مربعات داده‌ها را داریم، از رابطه دوم واریانس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{40}^2}{40} - (\bar{x})^2 = \frac{340}{40} - \left(\frac{100}{40}\right)^2 = 8\frac{1}{2} - (2\frac{1}{2})^2 \\ &= 8\frac{1}{2} - 6\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4} \Rightarrow \sigma = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}\end{aligned}$$

اعدادی که چگونگی پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهند، معیارهای پراکندگی نام دارند. دامنه تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم را به عنوان معیارهای پراکندگی بررسی می‌کنیم.

دامنه تغییرات

اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده را دامنه تغییرات می‌گویند و آن را با R نشان می‌دهند.

$$R = \text{کوچک‌ترین داده} - \text{بزرگ‌ترین داده}$$

تذکر اگر دامنه تغییرات داده‌ها صفر باشد، تمام داده‌ها با هم برابر هستند و برعکس.

تست اگر دامنه تغییرات داده‌های $3, 7, a, 9, 15, 10, 6, 11$

برابر ۱۲ باشد، داده a چه تعداد از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

$$\text{الف) } 14 \quad \text{ب) } 8 \quad \text{پ) } 2$$

در میان داده‌های معلوم، عدد ۳ و ۱۵ به ترتیب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین داده هستند که دامنه تغییرات برابر $15 - 3 = 12$ است. بنابراین a هر عدد در بازه $[3, 15]$ می‌تواند باشد، پس (الف) و (ب) قابل قبول هستند.

واریانس

اگر داده‌ها برابر x_1, x_2, \dots, x_n باشند، واریانس آن‌ها را با نماد σ^2 نشان می‌دهند و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

انحراف معیار

جزر مثبت واریانس را انحراف معیار می‌نامند و با σ نشان می‌دهند.

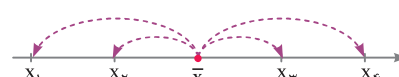
تذکر واریانس و انحراف معیار اعداد حقیقی نامنفی (بزرگ‌تر یا مساوی صفر) هستند. هر چه واریانس و انحراف معیار کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر

باشند، داده‌ها به هم نزدیک‌تر هستند و هر چه این شاخص‌ها بزرگ‌تر باشند، داده‌ها از هم دورتر هستند و پراکندگی بیش‌تری دارند.

۱ واریانس کوچک‌تر، پراکندگی کم‌تر



۲ واریانس بزرگ‌تر، پراکندگی بیش‌تر



تست در داده‌های آماری $11, 6, 5, 13, 8, 7, 10, 7, 13$ داده‌های

کم‌تر از میانه را حذف می‌کنیم. واریانس داده‌های باقی‌مانده کدام است؟

$$4/5 \quad (4) \quad 3/6 \quad (3) \quad 3/2 \quad (2) \quad 2/8 \quad (1)$$

تست ضریب تغییرات داده‌های ۱۰ و ۹ و ۶ و ۴ و ۳ کدام است؟

$$(1) \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (2) \frac{\sqrt{5}}{6} \quad (3) \frac{\sqrt{5}}{3} \quad (4) \frac{\sqrt{5}}{6}$$

۱۴ برای سادگی محاسبه واریانس، از همه داده‌ها ۶ واحد کم می‌کنیم:

$$x - 6: -3, -2, -2, 0, 3, 4$$

$$1) \bar{x} - 6 = \frac{(-3) + (-2) + (-2) + 0 + 3 + 4}{6} = 0 \Rightarrow \bar{x} = 6$$

$$2) \sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-2)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 3^2 + 4^2}{6} \\ = \frac{9 + 4 + 4 + 0 + 9 + 16}{6} = 7 \Rightarrow \sigma = \sqrt{7}$$

$$3) CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

تذکره ۱ اگر همه داده‌ها در یک عدد مثبت ضرب شوند، ضریب تغییرات تغییر نمی‌کند، اما اگر همه داده‌ها در یک عدد منفی ضرب شوند، ضریب تغییرات قرینه می‌شود.

تذکره ۲ اگر داده‌ها از x_i به $ax_i + b$ تغییر کنند، ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV = \frac{|a| \sigma}{a\bar{x} + b}$$

تست ضریب تغییرات تعدادی داده آماری برابر $1/35$ است. اگر به

دو برابر این داده‌های آماری، عدد $\frac{1}{4}$ میانگین آن‌ها افزوده شود؛

ضریب تغییرات داده‌های جدید چقدر است؟ (خارج - ۹۴)

$$(1) 0.96 \quad (2) 1.08 \quad (3) 1.15 \quad (4) 1.2$$

۱۴ ضریب تغییرات داده‌های اولیه برابر $1/35$ است. حال در داده‌های جدید داریم:

$$CV_{new} = \frac{2\sigma}{2\bar{x} + \frac{1}{4}\bar{x}} = \frac{2\sigma}{\frac{9}{4}\bar{x}} = \frac{\lambda}{9} \times \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\lambda}{9} \times 1/35 = 1/2$$

مقایسه دقت کاری

به وسیله ضریب تغییرات می‌توانیم میزان پراکندگی در دو گروه مختلف از داده‌ها را با هم مقایسه کنیم. گروهی که ضریب تغییرات کم‌تری داشته باشد، عملکرد و دقت کاری بالاتری دارد.

نکته اگر میانگین دو گروه یکسان باشد، برای مقایسه دقت کاری می‌توانیم به جای مقایسه ضریب تغییرات، واریانس آن‌ها را مقایسه کنیم. گروهی که واریانس آن کم‌تر باشد، دقت کاری بالاتری دارد.

تست در یک کارگاه دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات

مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۴۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۳۳ و ۹ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

$$(1) \text{ گروه اول} \quad (2) \text{ گروه دوم}$$

$$(3) \text{ یکسان} \quad (4) \text{ اظهار نظر نمی‌توان کرد.}$$

۲ گروهی بهتر است که ضریب تغییرات کم‌تری داشته باشد:

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\sqrt{25}}{40} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \quad \text{گروه اول} \\ CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{9}}{33} = \frac{3}{33} = \frac{1}{11} \quad \text{گروه دوم} \\ \Rightarrow \frac{1}{11} < \frac{1}{8}$$

چون $CV_2 < CV_1$ است، بنابراین گروه دوم بهتر است.

نکته اگر n داده آماری تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت d بدهند، می‌توانیم انحراف معیار را از رابطه زیر به دست آوریم:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \times d$$

تست انحراف معیار داده‌های ۳۲ و ۲۷ و ۲۲ و ۱۷ و ۱۲ و ۷ و ۲ کدام است؟

$$(1) 5 \quad (2) 6/5 \quad (3) 8/5 \quad (4) 10$$

۱۴ این داده‌ها، ۷ جمله متوالی یک دنباله حسابی با قدرنسبت ۵ هستند:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{12}} \times d \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{7^2 - 1}{12}} \times 5 = \sqrt{4} \times 5 = 10$$

تذکره اگر همه داده‌ها را با یک عدد ثابت جمع یا تفریق کنیم، واریانس و انحراف معیار هیچ تغییری نمی‌کنند. اما اگر همه داده‌ها را در a ضرب کنیم، واریانس داده‌ها در a^2 و انحراف معیار آن‌ها در $|a|$ ضرب می‌شود.

اگر واریانس داده‌های x_1, x_2, \dots, x_n برابر σ^2 باشد، واریانس و انحراف معیار داده‌های $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ برابر هستند با:

$$\sigma_{new}^2 = a^2 \sigma^2$$

$$\sigma_{new} = |a| \sigma$$

تست اگر انحراف معیار داده‌های x_1, x_2, \dots, x_6 برابر ۶ باشد، انحراف

معیار کدام یک از گروه‌های زیر برابر ۸ است؟

$$(الف) \frac{4}{3}x_1 + 4, \frac{4}{3}x_2 + 4, \dots, \frac{4}{3}x_6 + 4$$

$$(ب) 2x_1 - 4, 2x_2 - 4, \dots, 2x_6 - 4$$

$$(پ) \frac{1}{4}x_1 + 5, \frac{1}{4}x_2 + 5, \dots, \frac{1}{4}x_6 + 5$$

۱ می‌دانیم اگر همه داده‌های آماری را a برابر کنیم و سپس همه آن‌ها را با عدد b جمع کنیم، انحراف معیار $|a|$ برابر می‌شود. پس:

$$(الف) \sigma_A = \frac{4}{3} \times 6 = 8$$

$$(ب) \sigma_B = 2 \times 6 = 12$$

$$(پ) \sigma_C = \frac{1}{4} \times 6 = 3$$

ضریب تغییرات

به میزان پراکندگی به ازای یک واحد از میانگین، ضریب تغییرات گفته می‌شود و با نماد CV نشان داده می‌شود و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

تذکره از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود.

بعضی وقتا لازمه داده‌های آماری رو با کمک اطلاعات مسئله پیدا کنیم و بعدش واریانس این داده‌ها رو محاسبه کنیم. ممکنه این تیپ تست رو در کنکورهای

بعدی ببینید!

تک ۲۹۸۸. داده‌های آماری، ریشه‌های معادلات $x^2 - 9x + 14 = 0$ و $x^2 - 11x + 24 = 0$ هستند. واریانس این داده‌ها چقدر است؟

- ۱ ۶ ۲ ۶/۵ ۳ ۷ ۴ ۷/۵

تک ۲۹۸۹. انحراف معیار داده‌های $\log_2 3, \log_5 8, \tan^2 \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{3}, \log_3 \sqrt{3}$ کدام است؟

- ۱ ۱/۲ ۲ ۱/۴ ۳ ۱/۷ ۴ ۱/۹

تک ۲۹۹۰. انحراف معیار اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۱۳ کدام است؟

- ۱ ۳۰ ۲ ۲۶ ۳ ۲۱ ۴ ۱۵

تک ۲۹۹۱. اعداد طبیعی زوج را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شماره آن دسته باشد، یعنی $\{1, 2, 3, \dots, 12, 10, 8, 6, 4, 2\}$. در این صورت واریانس جملات دسته هفتم کدام است؟

- ۱ ۷ ۲ ۹ ۳ ۱۶ ۴ ۱۸

در ۳ سؤال زیر، مقادیر اختلاف داده‌ها از میانگین داده‌شده که سؤالای مهمی هستند.

واجب ۲۹۹۲. اگر ۷ داده آماری داشته باشیم و مقادیر اختلاف از میانگین ۶ تای آن‌ها به صورت ۲، ۱، ۳، ۴، ۲، -۲، -۱ باشد، واریانس این ۷ داده چقدر است؟

- ۱ ۱۱/۲ ۲ ۱۱/۷ ۳ ۱۲ ۴ ۱۲/۴

واجب ۲۹۹۳. انحراف معیار شش داده آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر $a, 0, -1, b, -1, 3$ است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار b کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۲ ۳ -۲ ۴ -۳

واجب ۲۹۹۴. میانگین شش داده آماری، عددی طبیعی است و توان دوم انحراف از میانگین این داده‌ها، به صورت $1, b^2, 9, 0, a^2, 9$ است. اگر واریانس این داده‌ها برابر ۴ باشد، مقدار ab کدام است؟ ($a, b \in \mathbb{Z}$)

- ۱ -۲ ۲ -۴ ۳ ۴ ۴ ۲

در ۲ سؤال زیر بهتره از رابطه دوم واریانس استفاده کنید. هر چند این رابطه در کتاب درسی نیست، اما احتمال طرح تست از آن وجود داره.

واجب ۲۹۹۵. میانگین ۱۱ داده آماری برابر ۱۴ و مجموع مجزورات این داده‌ها ۲۲۰۰ می‌باشد. واریانس کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

واجب ۲۹۹۶. میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۲ و واریانس آن‌ها ۵ می‌باشد. میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟

- ۱ ۱۲۴ ۲ ۱۳۴ ۳ ۱۴۹ ۴ ۱۶۹

اثر تغییر داده‌ها یا اضافه و کم کردن تعدادی داده بر واریانس و انحراف معیار

تو این بخش می‌خواهیم روی همه داده‌ها، تغییراتی اعمال کنیم و بعدش واریانس و انحراف معیار داده‌های جدید رو پیدا کنیم.

واجب ۲۹۹۷. واریانس داده‌های ۲۴۱، ۲۴۲، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۵۰ کدام است؟

- ۱ ۹/۵ ۲ ۱۰/۴ ۳ ۱۰/۸ ۴ ۱۱/۳

واجب ۲۹۹۸. در ۱۰۰ داده آماری با میانگین ۱۸ و انحراف معیار ۲ تمام داده‌ها را در ۱/۵ ضرب می‌کنیم. واریانس داده‌های جدید کدام است؟

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۸ ۴ ۹

واجب ۲۹۹۹. اگر واریانس داده‌های $1, 3x_1 - 1, 3x_2 - 1, 3x_3 - 1, 3x_4 - 1$ برابر ۳۶ باشد، واریانس داده‌های $1, \frac{1}{3}x_1 + 1, \frac{1}{3}x_2 + 1, \frac{1}{3}x_3 + 1, \frac{1}{3}x_4 + 1$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

واجب ۳۰۰۰. واریانس داده‌های گروه $A: 5, 7, 9, 11, 15$ چند برابر واریانس داده‌های گروه $B: 2, 3, 4, 5, 7$ است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۴ ۴ ۹

تو بخش زیر می‌خواهیم تعدادی داده جدید به داده‌های اولیه اضافه کنیم یا از بین اون‌ها حذف کنیم. این تست‌ها دقت زیادی لازم داره.

واجب ۳۰۰۱. هشت داده آماری با واریانس ۴ و میانگین ۱۵ مفروض‌اند. اگر دو داده ۱۲ و ۱۸ به آن‌ها اضافه شوند، واریانس ۱۰ داده جدید کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۴/۵ ۳ ۴/۸ ۴ ۵

واجب ۳۰۰۲. انحراف معیار ۲۶ داده آماری برابر ۲ است. اگر یکی از داده‌ها که با میانگین برابر است از بین آن‌ها حذف شود، واریانس ۲۵ داده دیگر کدام است؟

- ۱ ۳/۹۶ ۲ ۴/۰۸ ۳ ۴/۱۲ ۴ ۴/۱۶

واجب ۳۰۰۳. میانگین و انحراف معیار ۱۸ داده آماری به ترتیب ۲۵ و ۳ است. اگر داده‌های ۲۸، ۲۷، ۲۰ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ۲۱ داده جدید کدام است؟

- ۱ ۹/۲۵ ۲ ۹/۳۶ ۳ ۹/۵۲ ۴ ۹/۶۳

واجب ۳۰۰۴. در ۲۵ داده آماری میانگین و انحراف معیار به ترتیب ۳۰ و ۸ می باشد. اگر داده های ناچور ۵۰، ۴۵، ۱۵، ۱۰ از بین آن ها حذف شود، واریانس داده های باقی مانده کدام است؟

۱ ۱۴/۷۲ ۲ ۱۴/۸۱ ۳ ۱۵/۳۳ ۴ ۱۶/۶۶

واجب ۳۰۰۵. میانگین و انحراف معیار ۱۲ داده آماری به ترتیب ۱۵ و ۳ است. اگر داده های ۲۲، ۱۲، ۱۱ از میان آن ها حذف و داده های ۲۱، ۹ به آن ها اضافه شود، واریانس ۱۱ داده جدید کدام است؟

۱ ۹/۲ ۲ ۹/۶ ۳ ۱۰/۴ ۴ ۱۱/۲

واجب ۳۰۰۶. اگر انحراف معیار پنج داده برابر صفر باشد و با ترکیب داده های ۸، ۵، ۱۱ با پنج داده اولیه، میانگین هشت داده تغییر نکند، انحراف معیار این هشت داده کدام است؟

۱ ۱/۲۵ ۲ ۱/۵ ۳ ۲/۲۵ ۴ ۲/۵

تسلط ۳۰۰۷. در ۱۷ داده آماری، میانگین داده های قبل از چارک اول برابر میانگین داده های بعد از چارک سوم است. اگر داده های ۲۵، ۱۲، ۸ به آن ها اضافه شود، میانگین داده ها تغییر نمی کند. واریانس داده های جدید کدام است؟

۱ ۷/۳ ۲ ۷/۹ ۳ ۸/۱ ۴ ۸/۴

تسلط ۳۰۰۸. دو گروه داده آماری با میانگین یکسان در اختیار داریم. گروه A شامل ۱۲ داده آماری با واریانس ۱۲/۶ و گروه B شامل ۲۴ داده آماری با واریانس ۷/۲ است. با ترکیب داده های این دو گروه، انحراف معیار ۳۶ داده با هم چقدر است؟

۱ ۲/۹ ۲ ۳ ۳ ۳/۱ ۴ ۳/۲

ضریب تغییرات

اگر بخش های قبلی رو خوب یاد گرفته باشید، این بخش براتون خیلی آسون میشه. برای محاسبه ضریب تغییرات باید میانگین و انحراف معیار داده ها رو پیدا کنیم.

واجب ۳۰۰۹. مجموع ۸ داده آماری برابر ۴۸ و ضریب تغییرات آن ها ۵/۰ است. واریانس این داده ها کدام است؟

۱ ۴ ۲ ۹ ۳ ۱۶ ۴ ۲۵

واجب ۳۰۱۰. داده های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰، ۱۰، ۱۰ مفروض اند. ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟ $(\sqrt{\frac{2}{7}} \approx 0.534)$

۱ ۰/۱۵ ۲ ۰/۲۰ ۳ ۰/۲۵ ۴ ۰/۳۰

واجب ۳۰۱۱. در داده های آماری ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۹، ۸، ۸، ۶، ۶، ۴، ۳، ۲ داده های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف می کنیم. ضریب تغییرات داده های باقی مانده کدام است؟

۱ ۰/۱۵ ۲ ۰/۱۷ ۳ ۰/۲۱ ۴ ۰/۲۵

واجب ۳۰۱۲. میانگین داده های $a, a, a, 2, 1$ برابر ۳ است. ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟

۱ $\frac{4}{3\sqrt{10}}$ ۲ $\frac{3\sqrt{10}}{8}$ ۳ $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}}$ ۴ $\frac{\sqrt{15}}{2\sqrt{2}}$

واجب ۳۰۱۳. ضریب تغییرات داده های آماری به صورت جدول زیر، کدام است؟

۱ ۰/۱۲ ۲ ۰/۱۵

۳ ۰/۱۷ ۴ ۰/۱۸

واجب ۳۰۱۴. در ۵۰ داده آماری، مجموع اختلاف داده ها از عدد ۱۲ برابر صفر است و مجموع مجذورات اختلاف داده ها از عدد ۱۲ برابر ۴۵۰ است. ضریب تغییرات این داده ها کدام است؟

۱ ۰/۲ ۲ ۰/۲۵ ۳ ۰/۳ ۴ ۰/۳۵

تسلط ۳۰۱۵. اگر در داده های آماری X_1, X_2, \dots, X_n انحراف معیار ۳ برابر ضریب تغییرات باشد، میانگین داده های $5 - 2X_1, 5 - 2X_2, \dots, 5 - 2X_n$ کدام است؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

تسلط ۳۰۱۶. کوچک ترین ضریب تغییرات دسته های سه تایی از اعداد زوج متوالی دورقمی با رقم دهگان یکسان، کدام است؟

۱ $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ ۲ $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ ۳ $\frac{1}{12\sqrt{6}}$ ۴ $\frac{1}{24\sqrt{6}}$

تسلط ۳۰۱۷. میانگین سه داده X_1, X_2, X_3 برابر ۵ است. اگر داده ۱ را به آن ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات چهار داده جدید ۲/۵ برابر ضریب تغییرات داده های اولیه می شود. واریانس داده های جدید چند برابر واریانس داده های اولیه است؟

۱ ۲ ۲ $\sqrt{2}$ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ ۴

واجب ۳۰۱۸. در ۳۰ داده آماری، مجموع تمام داده ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها ۲۱۹۰ می باشد. ضریب تغییرات کدام است؟

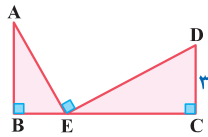
۱ ۰/۲۵۵ ۲ ۰/۲۷۵ ۳ ۰/۳۲۵ ۴ ۰/۳۷۵

- واجب ۳۰۱۹.** میانگین اضلاع مربع‌هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن‌ها $۶۵/۴۴$ می‌باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع‌ها کدام است؟
 ۱) $۰/۱۲$ ۲) $۰/۱۵$ ۳) $۰/۲$ ۴) $۰/۲۵$ خارج - ۹۴
- واجب ۳۰۲۰.** اگر میانگین و ضریب تغییرات اندازه‌ی اضلاع مربع‌هایی به ترتیب ۱۵ و $۰/۲$ باشد، میانگین مساحت این مربع‌ها کدام است؟
 ۱) ۲۲۷ ۲) ۲۲۹ ۳) ۲۳۲ ۴) ۲۳۴ داخل - ۹۵
- واجب ۳۰۲۱.** ضریب تغییرات در داده‌های آماری $۰/۰۸$ محاسبه شده است. اگر به هریک از داده‌ها ۵ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات حاصل $۰/۰۷۵$ خواهد شد. میانگین داده‌های اولیه کدام است؟
 ۱) ۵۶ ۲) ۶۴ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰ داخل - ۹۱
- واجب ۳۰۲۲.** مجموع ۶۰ داده‌ی آماری برابر ۱۸۰ و واریانس برابر $۱/۴۴$ است. اگر به همه‌ی داده‌ها ۹ واحد اضافه شود، ضریب تغییرات داده‌های جدید کدام است؟
 ۱) $۰/۱$ ۲) $۰/۲$ ۳) $۰/۳$ ۴) $۰/۴$
- واجب ۳۰۲۳.** در ۱۵۰ داده‌ی آماری با میانگین ۱۲ به دو برابر هریک از داده‌ها ۳ واحد اضافه می‌کنیم تا داده‌های جدیدی حاصل شود. ضریب تغییرات داده‌های جدید چند برابر ضریب تغییرات داده‌های قبلی است؟
 ۱) $\frac{7}{9}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{4}{8}$ ۴) $\frac{8}{9}$ داخل - ۹۲
- واجب ۳۰۲۴.** داده‌های $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$ مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های $u_i = 12x_i + 6$ کدام است؟
 ۱) $۰/۴$ ۲) $۰/۴۸$ ۳) $۰/۵۲$ ۴) $۰/۶$ داخل - ۹۵
- واجب ۳۰۲۵.** میانگین و انحراف معیار قیمت محصولات موجود در یک فروشگاه مواد غذایی به ترتیب برابر ۵۰ و ۲۰ هزار تومان است. اگر قیمت همه‌ی این محصولات به اندازه‌ی ۲۵ درصد افزایش یابد، ضریب تغییرات قیمت‌ها چقدر می‌شود؟
 ۱) $۰/۲۵$ ۲) $۰/۳۲$ ۳) $۰/۴$ ۴) $۰/۵۵$
- واجب ۳۰۲۶.** میانگین سن بازیکنان تیم ملی والیبال ایران ۲۴ سال است. اگر پس از گذشت ۶ سال، ضریب تغییرات سن بازیکنان $۰/۰۴$ شود، انحراف معیار سن آن‌ها چقدر می‌شود؟
 ۱) $۱/۱$ ۲) $۱/۲$ ۳) $۱/۲۵$ ۴) $۱/۴$
- واجب ۳۰۲۷.** اگر انحراف معیار داده‌های $1, 2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1$ و میانگین داده‌های $2 + x_1, 2 + x_2, \dots, 2 + x_n$ برابر ۸ باشد، ضریب تغییرات داده‌های $2 - 2x_1, 2 - 2x_2, \dots, 2 - 2x_n$ کدام است؟
 ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{5}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{5}$
- واجب ۳۰۲۸.** مجموع ۱۳ داده‌ی آماری برابر ۶۵ و ضریب تغییرات آن‌ها $۰/۴$ است. اگر داده‌های ۸ و ۲ را به آن‌ها اضافه کنیم، ضریب تغییرات ۱۵ داده‌ی جدید کدام است؟
 ۱) $۰/۴۳۲$ ۲) $۰/۳۸۴$ ۳) $۰/۲۱۶$ ۴) $۰/۱۶۴$

مقایسه دقت کاری

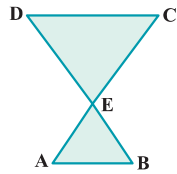
یکی از مهم‌ترین بخش‌های فصل آمار، مقایسه‌ی دقت کاری است. چنتا تست زیر رو با دقت زیادی بررسی کنید. طراح‌ها علاقه زیادی به این موضوع دارند!

- واجب ۳۰۲۹.** دستگاه A کالایی با میانگین وزنی ۱۵۰ و انحراف معیار $۳/۶$ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزنی ۱۶۰ و انحراف معیار $۳/۸۴$ بسته‌بندی می‌کند، کدام دستگاه دقیق‌تر عمل می‌کند؟
 ۱) یکسان ۲) A ۳) B ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد. خارج - ۹۵
- واجب ۳۰۳۰.** حقوق ماهیانه‌ی دو کارمند با وظایف یکسان در شرکت A به ترتیب ۴ و ۸ میلیون تومان و حقوق ماهیانه‌ی دو کارمند با وظایف یکسان در شرکت B به ترتیب ۱۰ و ۱۵ میلیون تومان است. در کدام شرکت، پرداخت حقوق به کارمندان عادلانه‌تر است؟
 ۱) A ۲) B ۳) یکسان ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد. برگرفته از کتاب درسی
- واجب ۳۰۳۱.** در یک کارگاه، سه گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵، در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ و در گروه سوم ۴۵ و ۹ است. کدام گروه بهتر است؟
 ۱) گروه اول ۲) گروه دوم ۳) گروه سوم ۴) نمی‌توان اظهار نظر کرد. برگرفته از کتاب درسی
- واجب ۳۰۳۲.** امتیازات مهارت کاری دو فرد A و B در ۵ روز متوالی به صورت مقابل است:
 دقت عمل کدام فرد بیشتر است؟
 A ۱) ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۷, ۲۹
 B ۲) ۲۱, ۲۴, ۲۵, ۲۷, ۲۸
 ۳) یکسان ۴) غیرقابل بررسی
- واجب ۳۰۳۳.** نمرات مهارت برای کارگر (A): $2 + x, x + 1, x - 1, x - 2$ و برای کارگر (B): $6 + 2x, 1 - 2x, 2 - 2x, 3 - 2x$ است. دقت عمل کدام بیشتر است؟
 ۱) A ۲) B ۳) یکسان ۴) بستگی به مقدار x دارد.



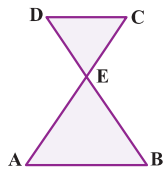
3184 واجب در شکل مقابل $\angle ED = 3AE$ و $CD = 3$ و $BC = 8$ است. اندازه DE کدام است؟

- 1 $4\sqrt{3}$
- 2 $5\sqrt{3}$
- 3 $3\sqrt{5}$
- 4 $4\sqrt{5}$



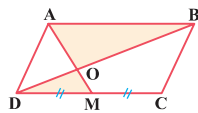
3185 تسلط در شکل مقابل $DC \parallel AB$ و $\angle EC = 3AE$ و $BD = 30$ است. طول پاره خط DE کدام است؟

- 1 18
- 2 19
- 3 20
- 4 21



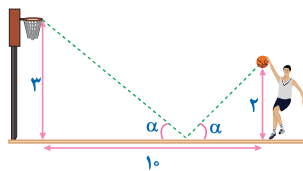
3186 تسلط در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AE}{EC} = 3$ و $AB + CD = 20$ است. اندازه AB کدام است؟

- 1 12
- 2 15
- 3 18
- 4 21



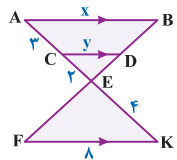
3187 واجب در متوازی‌الاضلاع ABCD نقطه M وسط ضلع CD قرار دارد و $BD = 9$ است. اندازه BO چقدر است؟

- 1 $4/5$
- 2 5
- 3 $6/5$
- 4 $6/15$



3188 تسلط مطابق شکل بسکتبالیستی به فاصله 10 متری از یک حلقه با طول 3 متر قرار دارد. این بازیکن توپ را از فاصله 2 متری، به زمین پرتاب می‌کند و این توپ روی مسیر مشخص شده به سمت حلقه می‌رود. اگر زاویه برخورد توپ با زمین برابر با زاویه برگشت توپ از سطح زمین باشد، توپ چه مسافتی را طی می‌کند تا به حلقه برسد؟

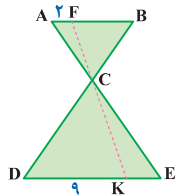
- 1 $8\sqrt{2}$
- 2 $5\sqrt{5}$
- 3 $6\sqrt{2}$
- 4 $4\sqrt{5}$



شبییه‌ساز داخل - 1400

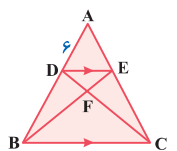
3189 تسلط در شکل مقابل $AB \parallel CD \parallel FK$ است. حاصل $x + y$ کدام است؟

- 1 11
- 2 12
- 3 13
- 4 14



3190 i در شکل مقابل $AB \parallel DE$ ، $\frac{BF}{KE} = 2$ ، $AF = 2$ و $DK = 9$ می‌باشد. طول KE کدام است؟

- 1 1
- 2 2
- 3 3
- 4 4

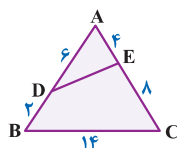


3191 i در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است، $\frac{BF}{FE} = \frac{5}{2}$ و $AD = 6$ می‌باشد. طول BD کدام است؟

- 1 5
- 2 6
- 3 7
- 4 9

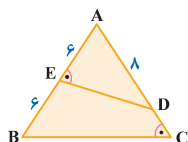
تشابه در مثلث‌های تو در تو

پیدا کردن زاویه مشترک در مثلث‌های تو در تو، اولین قدم حل این تیپ تست‌ها است.



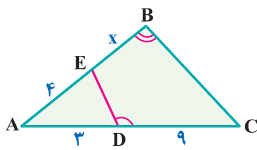
3192 واجب در شکل مقابل، محیط مثلث ADE کدام است؟

- 1 17
- 2 18
- 3 19
- 4 20



3193 واجب در مثلث مقابل $\hat{AED} = \hat{ACB}$ و $AE = BE = 6$ و $AD = 8$ است. طول پاره خط CD کدام است؟

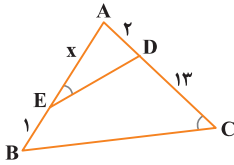
- 1 $0/75$
- 2 1
- 3 $1/5$
- 4 2



۳۱۹۴. واجب در شکل زیر، دو زاویهٔ مقابل چهارضلعی مکمل اند. اندازهٔ x کدام است؟

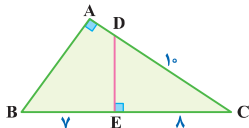
- ۱ ۵
۲ ۵/۵
۳ ۲
۴ ۴/۵

نوبت اول - ۱۴۰۲



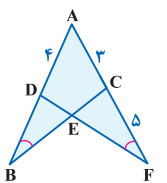
۳۱۹۵. واجب در شکل زیر، $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ است. مقدار x کدام است؟

- ۱ ۷
۲ ۶
۳ ۵
۴ ۴



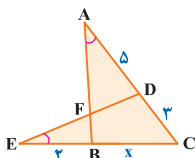
۳۱۹۶. واجب در مثلث مقابل $CD = 10$ و $BE = 7$ و $EC = 8$ است. طول پاره خط AB کدام است؟

- ۱ ۶
۲ ۹
۳ ۱۲
۴ ۱۵



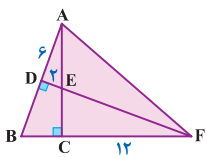
۳۱۹۷. تسلط در شکل مقابل $\widehat{ABC} = \widehat{AFD}$ می باشد و $AD = 4$ و $AC = 3$ و $CF = 5$ واحد می باشد. طول BD کدام است؟

- ۱ ۱
۲ ۲
۳ ۳
۴ ۴



۳۱۹۸. تسلط در دو مثلث مقابل $\widehat{CAB} = \widehat{DEC}$ ، $AD = 5$ ، $DC = 3$ و $EB = 2$ واحد است. اندازهٔ x کدام است؟

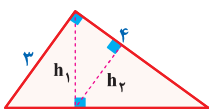
- ۱ ۴
۲ ۵
۳ ۹/۲
۴ ۱۰/۳



۳۱۹۹. تسلط در شکل مقابل $AD = 6$ ، $DE = 2$ و $CF = 12$ واحد می باشد. طول EC کدام است؟

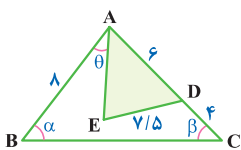
- ۱ ۲
۲ ۳
۳ ۴
۴ ۵

داخل - ۹۸



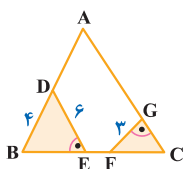
۳۲۰۰. واجب در شکل زیر h_1 و h_2 ارتفاع های دو مثلث قائم الزاویه هستند. نسبت h_2/h_1 کدام است؟

- ۱ ۳/۵
۲ ۴/۵
۳ ۲/۳
۴ ۳/۴



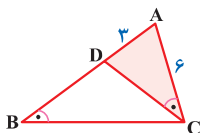
۳۲۰۱. واجب در شکل مقابل \widehat{ADE} کدام است؟

- ۱ $\alpha + \theta$
۲ $\alpha - \theta$
۳ $\beta + \theta$
۴ $\beta - \theta$



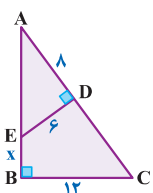
۳۲۰۲. واجب در مثلث مقابل $\widehat{DEB} = \widehat{FGC}$ و $AB = AC$ است. طول پاره خط CF کدام است؟

- ۱ ۱
۲ ۲
۳ ۳
۴ ۴



۳۲۰۳. واجب در شکل مقابل $\widehat{ACD} = \widehat{ABC}$ بوده و $AC = 6$ و $AD = 3$ واحد می باشد. طول BD کدام است؟

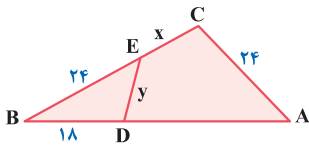
- ۱ ۶
۲ ۹
۳ ۱۲
۴ ۱۵



۳۲۰۴. واجب در شکل مقابل $AD = 8$ و $ED = 6$ و $BC = 12$ واحد می باشد. اندازهٔ BE کدام است؟

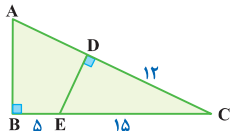
- ۱ ۶
۲ ۷
۳ ۸
۴ ۹

خارج - ۱۴۰۱



واجب ۳۲۰۵. در شکل زیر $\hat{E}CA = \hat{B}DE$ و $AB = 48$ است. مقدار $\frac{x}{y}$ کدام است؟

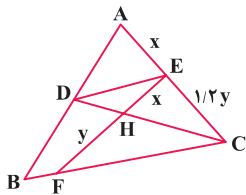
- ۱ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴



تسلط ۳۲۰۶. در مثلث مقابل $CD = 12$ و $EC = 3BE = 15$ است. مقدار $AB - AD$ کدام است؟

- ۱ ۱
- ۲ ۲
- ۳ ۳
- ۴ ۴

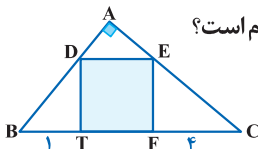
نوبت اول - ۱۴۰۱



واجب ۳۲۰۷. در شکل زیر، $DE \parallel BC$ و $3y = 5x$ است. اگر $BF = 3$ باشد، اندازه BC کدام است؟

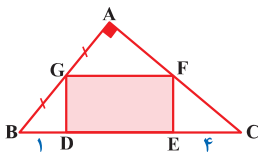
- ۱ ۶/۷۵
- ۲ ۶/۲۵
- ۳ ۵/۷۵
- ۴ ۵/۲۵

اگر مربع، مستطیل یا متوازی الاضلاع درون مثلث قرار گیرد، از موازی بودن اضلاع آن‌ها استفاده کنید.



تسلط ۳۲۰۸. در شکل مقابل چهارضلعی DEFT یک مربع است. اگر $BT = 1$ و $FC = 4$ واحد باشد، طول ضلع مربع کدام است؟

- ۱ ۲
- ۲ ۳
- ۳ ۴
- ۴ ۵

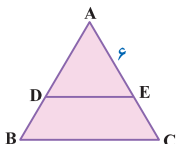


تسلط ۳۲۰۹. در شکل مقابل چهارضلعی GFDE یک مستطیل است. اگر $AG = GB$ ، $BD = 1$ و $EC = 4$ واحد باشد، محیط مستطیل GFED کدام است؟

- ۱ ۱۴
- ۲ ۱۶
- ۳ ۱۸
- ۴ ۲۰

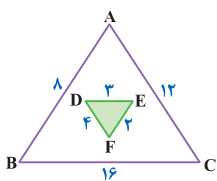
تشابه و مساحت

نسبت مساحت دو مثلث متشابه، توان دوم نسبت تشابه است.



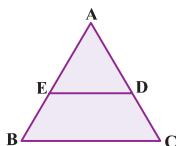
واجب ۳۲۱۰. در شکل زیر $DE \parallel BC$ است. اگر مساحت مثلث ADE برابر ۱۶ واحد و مساحت دوزنقه BCDE برابر ۹ واحد و $AE = 6$ واحد باشد، طول ضلع EC کدام است؟

- ۱ ۱/۵
- ۲ ۲
- ۳ ۲/۵
- ۴ ۳



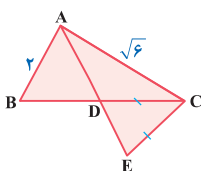
واجب ۳۲۱۱. در شکل مقابل، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث DEF است؟

- ۱ ۱۲
- ۲ ۱۴
- ۳ ۱۶
- ۴ ۱۸



واجب ۳۲۱۲. در مثلث روبرو DE و BC موازی هستند. اگر مساحت مثلث ADE و مساحت دوزنقه BCDE برابر باشند، نسبت $\frac{AB}{AE}$ چقدر است؟

- ۱ ۲
- ۲ $1 + \sqrt{2}$
- ۳ $\sqrt{2}$
- ۴ $2 + \sqrt{2}$



واجب ۳۲۱۳. در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE کدام است؟

- ۱ ۱/۳
- ۲ ۲/۳
- ۳ ۳/۴
- ۴ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

داخل - ۹۹

واجب ۳۲۱۴. مثلثی با اضلاع ۵، ۱۲، ۱۳ با مثلث دیگری به مساحت $\frac{7}{5}$ متشابه است. کوچک‌ترین ضلع مثلث دوم کدام است؟

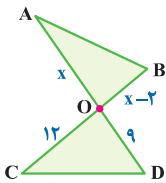
- ۱) ۲ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) ۳ ۴) $\frac{4}{5}$

واجب ۳۲۱۵. نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{49}{128}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچک‌تر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگ‌تر چند سانتی‌متر است؟

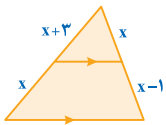
- ۱) $21\sqrt{2}$ ۲) $21\sqrt{3}$ ۳) $24\sqrt{2}$ ۴) $24\sqrt{3}$

واجب ۳۲۱۶. در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 70^\circ$ و $\hat{B} = 50^\circ$ و ضلع $AB = 18$. در مثلث MNP داریم $\hat{M} = 70^\circ$ و $\hat{N} = 60^\circ$ ، اگر مساحت مثلث ABC برابر $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چقدر است؟

- ۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷



مشابه خارج - ۹۹



واجب ۳۲۱۷. در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت دو مثلث کدام است؟

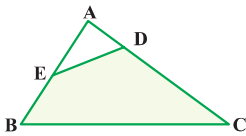
- ۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{9}{16}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

واجب ۳۲۱۸. در شکل زیر، مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

- ۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{14}{9}$ ۳) $\frac{16}{9}$ ۴) $\frac{17}{9}$

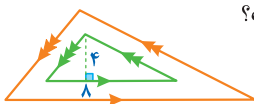
تسلک ۳۲۱۹. در چهارضلعی BCDE، زاویه‌های روبه‌رو مکمل هم‌اند. اگر $BC = 20$ و $DE = 12$ ، آن‌گاه مساحت چهارضلعی چند برابر مساحت مثلث ABC است؟

- ۱) $\frac{5}{6}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) $\frac{1}{8}$



تسلک ۳۲۲۰. در شکل مقابل، خطوط موازی مشخص شده‌اند. اگر مساحت مثلث بزرگ‌تر ۸۱ باشد، ارتفاع آن کدام است؟

- ۱) $\frac{7}{5}$ ۲) ۸ ۳) $\frac{8}{5}$ ۴) ۹

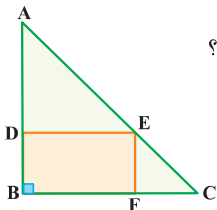


واجب ۳۲۲۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر $\frac{1}{5}$ مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

- ۱) $\frac{4}{5}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

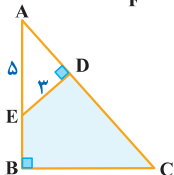
تسلک ۳۲۲۲. در شکل مقابل $2BF = 2BC$ و مساحت مثلث ADE برابر ۱۶ است. مساحت مستطیل BFED چقدر است؟

- ۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶



تسلک ۳۲۲۳. در مثلث زیر $AE = 5\text{ cm}$ و $ED = 3\text{ cm}$ و مساحت چهارضلعی BCDE برابر 18 cm^2 است. اندازه DC چقدر است؟

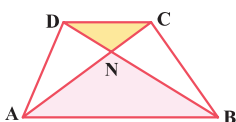
- ۱) ۶ ۲) $\frac{6}{5}$ ۳) ۷ ۴) $\frac{7}{5}$



اگر قطرهای دوزنقه رو رسم کنیم، چهار مثلث ایجاد میشه. دو مثلث محصور به قاعده‌ها و همچنین دو مثلث محصور به ساق‌ها دوه‌دو متشابه‌اند.

واجب ۳۲۲۴. در شکل زیر $CD \parallel AB$ مساحت مثلث ABN برابر 27 cm^2 و مساحت مثلث DCN برابر 12 cm^2 است. مساحت چهارضلعی ABCD چند سانتی‌متر مربع است؟

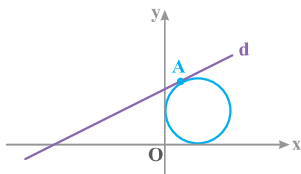
- ۱) ۶۰ ۲) ۶۵ ۳) ۷۰ ۴) ۷۵



۳۵۰۱. دایره‌ای به معادله $x^2 + y^2 - ax + 2y + 6 = 0$ بر خط $x = 2$ مماس است. مقدار a کدام است؟

- ۱ $\frac{7}{2}$ ۲ $\frac{9}{2}$ ۳ $\frac{5}{3}$ ۴ $\frac{8}{3}$

۳۵۰۲. در شکل مقابل، خط $d: 4y - 3x - 24 = 0$ در نقطه A بر دایره C مماس است. شعاع دایره چقدر است؟



- ۱ ۴
۲ ۵
۳ ۶
۴ ۷

با داشتن موقعیت یک خط نسبت به دایره، می‌تونیم کمترین و بیشترین فاصله خط از دایره را پیدا کنیم.

۳۵۰۳. فاصله دورترین نقطه دایره $x^2 + y^2 - 6y - 7 = 0$ از خط $4y - 3x - 82 = 0$ چقدر است؟

- ۱ ۱۶ ۲ ۱۸ ۳ ۲۰ ۴ ۲۲

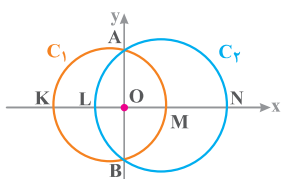
۳۵۰۴. دایره‌ای به مرکز $O(-1, 2)$ بر خط به معادله $y = 2x - 1$ مماس است. بیش‌ترین فاصله نقاط این دایره از محور x ها کدام است؟

- ۱ $2 + \sqrt{5}$ ۲ $3 + \sqrt{2}$ ۳ ۵ ۴ ۶

خارج - ۹۰

۳۵۰۵. فاصله نزدیک‌ترین نقاط دایره به معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ از خط به معادله $3x + 4y = 15$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۱ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ ۲

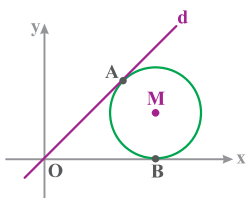


۳۵۰۶. مرکز دو دایره C_1 و C_2 روی محور x ها قرار دارد. این دایره‌ها محور y ها را در دو نقطه A و B قطع می‌کنند. اگر $OL = 1$ ، $OM = 2$ و $MN = 14$ باشد، طول پاره خط KL کدام است؟

مشابه خارج - ۱۴۰۰

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۳۵۰۷. در شکل مقابل، دایره C با مرکز $M(4, 2)$ بر محور x ها و خط d مماس است. شیب خط d کدام است؟



- ۱ ۲ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{3}{2}$

وضعیت نسبی دو دایره

با داشتن فاصله مرکزهای دو دایره و شعاع دو دایره، می‌تونیم وضعیت دو دایره نسبت به هم رو متوجه بشیم.

خارج - ۱۴۰۱

۳۵۰۸. دو دایره $x^2 + y^2 - 2y = 2$ و $x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0$ ، نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

- ۱ مماس بیرون ۲ متقاطع ۳ متخارج ۴ متداخل

۳۵۰۹. دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ چند نقطه مشترک دارند؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ هیچ ۴ بی‌شمار

۳۵۱۰. دو دایره $C_1: (x+a)^2 + (y+b)^2 = 4$ و $C_2: x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ هم‌مرکز و شعاع دایره C_1 دو برابر شعاع دایره C_2 است.

مقدار $\frac{k}{a+b}$ کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ ۱۰ ۳ ۱۲ ۴ ۱۴

۳۵۱۱. دایره $(x-a)^2 + y^2 = 36$ در داخل ناحیه دایره $x^2 + (y+2)^2 = 81$ قرار دارد و این دو دایره، نقطه مشترکی ندارند. بزرگ‌ترین مقدار

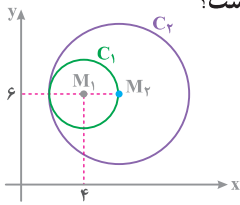
طبیعی a کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۳۵۱۲. اگر دو دایره $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ و $x^2 + y^2 = r^2$ مماس داخل باشند، بیش‌ترین مقدار r کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۵ ۳ ۷ ۴ ۱۱

۳۵۱۳. IQ مطابق شکل، دایره C_1 به مرکز M_1 و دایره C_2 به مرکز M_2 و شعاع ۴ مماس درون هستند. معادله دایره C_1 کدام است؟



شبه‌ساز داخل - ۱۴۰۱

۱ $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 16$

۲ $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 4$

۳ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 16$

۴ $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 4$

خارج - ۹۳

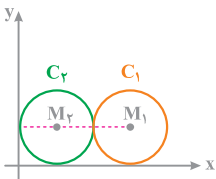
۳۵۱۴. واجب شعاع دایره‌ای به مرکز $O(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

۱ $2\sqrt{2}$ ۲ ۳ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ ۴

۳۵۱۵. واجب دایره C به معادله $(x-8)^2 + (y+6)^2 = r^2$ بر محور y مماس است. کدام یک از دایره‌های زیر، مماس خارج با دایره C است؟

۱ $x^2 + y^2 = 1$ ۲ $x^2 + y^2 = 4$ ۳ $x^2 + y^2 = 9$ ۴ $x^2 + y^2 = 16$

۳۵۱۶. IQ در شکل مقابل نقطه $M_1(6, 2)$ مرکز دایره C_1 است. معادله دایره C_2 کدام است؟



۱ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

۲ $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 16$

۳ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$

۴ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$

۳۵۱۷. واجب به ازای کدام مقدار b ، دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x = 3$ و $x^2 + y^2 + 4\sqrt{6}y + b = 0$ مماس خارج اند؟

۱ ۸ ۲ ۱۳ ۳ ۱۵ ۴ ۲۰

۳۵۱۸. واجب اگر دو دایره $C_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y - a = 0$ و $C_2: x^2 + y^2 + 8x - 20y + b = 0$ مماس خارج باشند، حداکثر فاصله بین دو نقطه

روی دایره چقدر است؟

۱ ۲۸ ۲ ۲۶ ۳ ۱۹ ۴ ۱۵

۳۵۱۹. تسلط به ازای چند مقدار طبیعی a دو دایره $C_1: x^2 + y^2 = 9$ و $C_2: (x-a)^2 + (y+8)^2 = 49$ متقاطع اند؟

۱ ۴ ۲ ۵ ۳ ۶ ۴ ۷

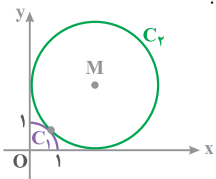
۳۵۲۰. واجب فرض کنید طول خط‌المركزین دو دایره با شعاع‌های $1-6a$ و $2-a^2$ برابر با ۶ واحد باشد. اگر دو دایره مماس درون باشند، چند مقدار برای

a وجود دارد؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

شبه‌ساز داخل - ۱۴۰۰

۳۵۲۱. IQ مطابق شکل، ربع دایره C_1 به مرکز $O(0, 0)$ و دایره C_2 به مرکز M بر یکدیگر مماس اند. شعاع دایره C_2 کدام است؟



۱ $\sqrt{2}$

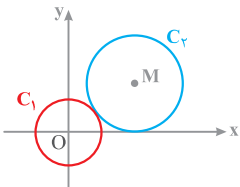
۲ ۲

۳ $1 + \sqrt{2}$

۴ $2 + \sqrt{2}$

۳۵۲۲. IQ مطابق شکل، دو دایره $C_1: x^2 + y^2 = r^2$ و $C_2: (x-8)^2 + (y-6)^2 = R^2$ بر یکدیگر مماس اند.

مقدار r کدام است؟



۱ ۲ ۲ $2\sqrt{2}$

۳ ۴ ۴ $4\sqrt{2}$

۳۵۲۳. تسلط دایره C_1 به معادله $(x+5)^2 + (y+a)^2 = 9$ بر محور x ها و دایره C_2 به معادله $(x+b)^2 + (y+4)^2 = 4$ بر محور y مماس است.

بیش‌ترین فاصله ممکن بین مرکز این دو دایره چقدر است؟

۱ $5\sqrt{2}$ ۲ $7\sqrt{2}$ ۳ $5\sqrt{3}$ ۴ $7\sqrt{3}$

شبه‌ساز خارج - ۱۴۰۱

۳۵۲۴. تسلط شعاع کوچک‌ترین دایره‌ای که بر هر دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ و $x^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 = 1$ مماس است، کدام است؟

۱ $\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2$ ۲ $\frac{2}{3}\sqrt{2} - 2$ ۳ $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 2$ ۴ $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 2$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{(x-1)(x+1)}}{1-x} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x+1}}{1-x} = 1$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x-1 \xrightarrow{x \geq 1} 4(x+1) = (x-1)^2$$

توجه کنید چون $x-1$ در سمت راست معادله قرار دارد، پس باید $x \geq 1$ باشد:

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 12 + 4\sqrt{3} & \checkmark \\ x = 12 - 4\sqrt{3} & \times \end{cases}$$

پس این معادله دارای ۱ ریشه مثبت است.

۱ ۴۱۴

$$\frac{1}{2+\sqrt{2-x}} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{\sqrt{2-x}}{5\sqrt{2-x}}$$

$$\Rightarrow \frac{(2-\sqrt{2-x}) - (2+\sqrt{2-x})}{4-(2-x)} = \frac{\sqrt{2-x}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-2\sqrt{2-x}}{2+x} = \frac{\sqrt{2-x}}{5} \xrightarrow{x < 2} x+2 = -1 \Rightarrow x = -12$$

این معادله ریشه مثبت ندارد.

۳ ۴۱۵

در سمت چپ معادله، مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}} = \frac{(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x}) - (\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})}{(\sqrt{x^2-2x}-\sqrt{x^2+2x})(\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{x^2+2x})}$$

$$= \frac{2\sqrt{x^2+2x}}{(x^2-2x)-(x^2+2x)} = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-4x}$$

حال معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{x^2+2x}}{-4x} = \frac{x+5}{\sqrt{x^2+2x}} \Rightarrow x^2+2x = -2x^2-10x$$

$$\Rightarrow 3x^2+12x = 0 \Rightarrow 3x(x+4) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases} \checkmark$$

به ازای $x=0$ مخرج کسر صفر می‌شود، پس معادله فقط دارای یک جواب است.

۲ ۴۱۶

با فرض $\sqrt{x+1} = t$ داریم:

$$t = \frac{2}{t} + 1 \xrightarrow{xt} t^2 = 2+t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 = -1 \xrightarrow{t=\sqrt{x+1}} \sqrt{x+1} = -1 & \times \\ t_2 = 2 \xrightarrow{t=\sqrt{x+1}} \sqrt{x+1} = 2 \rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

پس معادله، یک جواب قابل قبول دارد.

۱ ۴۱۷

ابتدا طرفین معادله را به علاوه ۱ می‌کنیم و سپس از تغییر متغیر $t = \sqrt{x+6} + 1$ استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{x+6} + 1 + \frac{4}{\sqrt{x+6} + 1} = 4 \Rightarrow t + \frac{4}{t} = 4$$

$$\xrightarrow{xt} t^2 + 4 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+6} + 1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x+6} = 1 \Rightarrow x+6 = 1 \Rightarrow x = -5$$

۴ ۴۰۷

چون عبارت‌های $x-2$ و $4-x$ زیر رادیکال با فرجه ۲ قرار دارند، پس باید $x \geq 2$ و $x \leq 4$ یعنی x در بازه $[2, 4]$ باشد. در این بازه، علامت عبارت $x^2 - 5x$ منفی است، پس این معادله جواب ندارد.

۳ ۴۰۸

با فاکتورگیری از $\sqrt{3-x^2}(x+5) = 0$ معادله را به صورت $\sqrt{3-x^2} = 0$ یا $x+5 = 0$ می‌نویسیم، حال چون حاصل ضرب $\sqrt{3-x^2}$ و $x+5$ برابر با صفر است، پس:

۱ $\sqrt{3-x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

۲ $x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$ \times (در معادله صدق نمی‌کند.)

۲ ۴۰۹

چون مجموع دو رادیکال با فرجه زوج برابر صفر شده، پس هر دو رادیکال باید صفر باشند:

۱ $\sqrt{x^2+3x} = 0 \Rightarrow x^2+3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = -3$

۲ $\sqrt{x^2+4x+3} = 0 \Rightarrow x^2+4x+3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -3$

جواب مشترک $x = -3$ است. پس معادله یک جواب دارد.

۲ ۴۱۰

اگر مجموع چند رادیکال با فرجه زوج برابر صفر شود، عبارت‌های زیر رادیکال باید صفر باشند، پس می‌توان نوشت:

۱ $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

۲ $x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$

۳ $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $x = 1$ می‌باشد، پس معادله تنها یک جواب دارد.

۳ ۴۱۱

چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر است، پس باید تک تک آن‌ها برابر صفر باشد. از آن جایی که $x^2 - 5x + 6 = 0$ به ازای $x = 2$ و $x = 3$ برابر صفر است، پس عبارت $x^2 - ax + 3 = 0$ به ازای یکی از اعداد $x = 2$ یا $x = 3$ برابر صفر می‌شود:

۱ $x = 2: 4 - 2a + 3 = 0 \Rightarrow 2a = 7 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$

۲ $x = 3: 9 - 3a + 3 = 0 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4$

۳ ۴۱۲

طرفین معادله را در $(\sqrt{x-1} + 1)$ ضرب می‌کنیم:

$$3 = (\sqrt{x-1} + 1)(3 - \sqrt{x-1}) \Rightarrow 2\sqrt{x-1} = x - 1$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} 4x - 4 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 5$$

با توجه به دامنه، هر دو مقدار جواب قابل قبول است و مجموع جواب‌ها $1+5=6$ می‌باشد.

۲ ۴۱۳

$$\frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{9-(x-1)} = \sqrt{x-1}$$

۷۴۴ ۲

ابتدا صورت کسر را به صورت $\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1$ می نویسیم و سپس کسر را تفکیک می کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + 1$$

همچنین واضح است که $0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} < 1$ است، پس:

$$0 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} < 1 \xrightarrow{+1} 1 \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + 1 < 2 \Rightarrow 1 \leq f(x) < 2$$

پس برد این تابع به صورت بازه $R_f = [1, 2)$ است.

۷۴۵ ۴

برای آن که دو تابع $f = \{(c, d), (r, -1)\}$ و $g = \{(2a^2 - 1, b^2 + 1), (b + 1, 2a - 1)\}$ مساوی باشند، داریم:

$$b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1, 2a - 1 = -1 \Rightarrow a = 0$$

$$c = 2a^2 - 1 \xrightarrow{a=0} c = -1, d = b^2 + 1 \xrightarrow{b=1} d = 2$$

پس $c + d = -1 + 2 = 1$ است.

۷۴۶ ۴

بررسی گزینه ها:

- ۱ $D_f = (0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f \neq g$
- ۲ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$
- ۳ $D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} \Rightarrow f \neq g$
- ۴ $D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f = g$

۷۴۷ ۱

بررسی عبارات:

- الف $D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), D_g = [1, +\infty)$
- ب $D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

ب به ازای $x \neq 2$ داریم:

$$g(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{x(x - 2)}{x - 2} = x$$

بنابراین توابع f و g برابرند.

۷۴۸ ۱

به بررسی عبارات می پردازیم:

$$\text{الف} \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \end{cases} \Rightarrow D_f = (1, +\infty) \\ g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \Rightarrow \frac{x}{x-1} \geq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \end{cases}$$

$$\text{ب} \begin{cases} f(x) = \sqrt{x^3} \Rightarrow x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ g(x) = x\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = [0, +\infty)$$

در گزینه ب دامنه هر دو تابع برابر \mathbb{R} است، اما مقدار تابع به ازای x های یکسان تفاوت دارد:

$$\begin{cases} f(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}] = 2 \\ g(\sqrt{2}) = [\sqrt{2}]^2 = 1 \end{cases}$$

$$\text{ت} \begin{cases} f(x) = \frac{x}{[x]} \Rightarrow [x] \neq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ g(x) = \frac{[x]}{x} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

۷۴۹ ۴

بررسی عبارات:

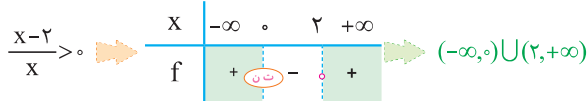
$$\text{الف} D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{x | x = \frac{k\pi}{2}\}$$

$$\text{ب} f(x) = \sqrt{(x+1)^2} = |x+1|, g(x) = x+1$$

$$\text{پ} f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{\cos^2 x} = |\cos x|, g(x) = \cos x$$

۷۵۰ ۴

دامنه تابع $f(x) = \log(\frac{x-2}{x})$ را به دست می آوریم:



حال دامنه هریک از گزینه ها را مشخص می کنیم:

$$\text{۱} y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 2$$

$$\text{۲} y = \log \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\}$$

$$\text{۳} y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2 \Rightarrow D_y = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

$$\text{۴} y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} \Rightarrow D_y = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

میانبر $x = -2$ در تابع f صدق می کند، اما در ۱ و ۲ صدق نمی کند. از طرفی $x = 1$ در ۳ صدق می کند، اما در f صدق نمی کند.

۷۵۱ ۳

عبارات های الف و ب درست هستند. اما در عبارت پ داریم:

$$\begin{cases} (1, 2) \in f \\ (1, 5) \in f + g \\ (1, 3) \in g \end{cases} \Rightarrow (1, 5) \in f + g$$

۷۵۲ ۱

برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:

۱ به ازای هر مقدار x با هم برابر باشند، پس به ازای $x = 2$ داریم:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2(2) + 4 = b \Rightarrow b = 8$$

۲ ضابطه هر دو تابع یکسان باشد، پس:

$$\frac{2x^2 + a}{x - 2} = 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 + a = 2(x + 2)(x - 2) \Rightarrow a = -8$$

بنابراین $a + b = 0$ است.

۷۵۳ ۳

برای این که دو تابع f و g مساوی باشند، باید:

به ازای هر مقدار x دارای مقادیر y یکسان باشند. چون دامنه ضابطه

$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ وجود ندارد، پس $a = 1$ بوده و به ازای $x = 1$ داریم:

$$f(1) = g(1) \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

۷۵۴ ۳

دامنه تابع $g(x) = \frac{c}{x+2}$ برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ است. در نتیجه دامنه تابع

$f(x) = \frac{bx+2}{x^2+ax+4}$ نیز باید برابر $\mathbb{R} - \{-2\}$ باشد، پس $x = -2$ ریشه مخرج تابع f نیز هست:

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^2 + a(-2) + 4 = -2a + 8 = 0 \Rightarrow a = 4$$

۱۵۲۶

می‌دانیم $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ و $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ است؛ پس:

$$f(\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin x \cos x \Rightarrow f(\cos 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

حال برای به دست آوردن $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ باید $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، پس $2x = \frac{\pi}{4}$

$$f(\cos \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۵۲۷

برای به دست آوردن $\sin 2\alpha$ باید $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ را به دست آوریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

از آنجایی که انتهای کمان α در ربع دوم قرار دارد، پس $\sin \alpha > 0$ و

$$\cos \alpha < 0$$
 است؛ بنابراین $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ و $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ است؛ پس:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{4}{5} = -0.8$$

۱۵۲۸

می‌دانیم $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ است. حال با توجه به این که $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$

و انتهای کمان α در ربع اول قرار دارد، $\tan \alpha$ را به دست می‌آوریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{(\frac{\sqrt{5}}{3})^2} = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{1 - (\frac{2}{\sqrt{5}})^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{5}} = \frac{4 \times 5}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

۱۵۲۹

ربع دوم

$$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha \Rightarrow -\cot \alpha = -2 \Rightarrow \cot \alpha = 2 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2}$$

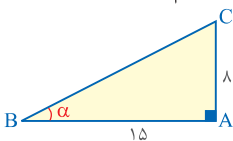
حال با استفاده از رابطه $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ داریم:

$$1 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{5}{4} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{4}{5} \right) - 1 = \frac{3}{5}$$

۱۵۳۰

$$\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2(\frac{1}{4})}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{8}{15}$$



$$\text{فیبئاغورس} \rightarrow BC = 17 \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{8}{17} \\ \cos \alpha = \frac{15}{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\frac{8}{15} - \frac{8}{17}}{\frac{8}{17} - \frac{15}{17}} = \frac{\frac{8(17-15)}{17 \times 15}}{-\frac{7}{17}} = -\frac{16}{105}$$

۱۵۲۰

ابتدا طرفین تساوی $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin x + \cos x)^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \Rightarrow 1 + \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(\pi + 2x) + \cos(2x - \frac{\pi}{2}) = -\sin 2x - \sin 2x = -2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۱۵۲۱

از رابطه $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ نتیجه می‌گیریم $\alpha = \frac{\pi}{4} + \beta$ پس:

$$\sin 2\alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\beta) = \cos 2\beta$$

حال با استفاده از رابطه $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ داریم:

$$\cos 2\beta = \frac{1 - (\frac{1}{2})^2}{1 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

۱۵۲۲

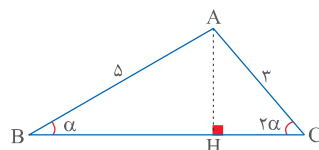
ربع دوم

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

۱۵۲۳

با رسم ارتفاع AH داریم:



$$\left. \begin{aligned} \text{مثلث ABH: } \sin \alpha &= \frac{AH}{\delta} \Rightarrow AH = \delta \sin \alpha \\ \text{مثلث ACH: } \sin 2\alpha &= \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = 3 \sin 2\alpha \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3 \sin 2\alpha = \delta \sin \alpha$$

$$\Rightarrow 3 \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = \delta \sin \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\delta}{6}$$

از طرفی می‌دانیم $\sin(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$ است؛ پس:

$$-\cos 2\alpha = -(\cos^2 \alpha - 1) = -(2 \times \frac{\delta}{6} - 1) = -\frac{1\delta}{3} + 1 = -\frac{\delta}{3} + 1$$

۱۵۲۴

می‌دانیم $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ است؛ پس:

$$f(x) = \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$$

$$f(\frac{\pi}{16}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

۱۵۲۵

ابتدا از $\cos^2 x$ فاکتور می‌گیریم و ضابطه f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \cos^2 x - \cos^4 x = \cos^2 x (1 - \cos^2 x) = (\cos x \sin x)^2$$

$$= (\frac{1}{2} \sin 2x)^2 \Rightarrow f(\frac{\pi}{8}) = (\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{4})^2 = (\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{4})^2$$

$$= \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

حال باید $\cos \alpha$ را به دست آوریم:

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

بنابراین $-\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$ است.

۱ ۱۵۳۶

از معادله داده شده داریم:

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = -1 \\ \tan x = 2 \end{cases}$$

$(\tan x + 1)(\tan x - 2)$

چون x در ربع سوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس $\tan x = 2$ قابل قبول است.

از طرفی می‌دانیم $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2x\right) = \sin 2x$ است. پس با توجه به رابطه

$$\sin 2x \text{ بر حسب } \tan x \text{ داریم:}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۳ ۱۵۳۷

$$\frac{1 - \tan^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{2}{3}$$

حال چون انتهای کمان x در ناحیه سوم قرار دارد، پس $\sin x$ و $\cos x$ هر

دو منفی هستند، پس $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ و $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ است:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۴ ۱۵۳۸

$$\frac{4 \tan^2 15^\circ}{1 - \tan^4 15^\circ} = \frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ} \times \frac{2 \tan 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$$

$$= \tan 30^\circ \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

۱ ۱۵۳۹

به جای 0.25 می‌نویسیم $3^{-2} = \frac{1}{9}$ و داریم:

$$(0.25)^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} = 1 \Rightarrow (2^{-2})^{\sin x} \cdot 2^{\cos x} = 1$$

$$\Rightarrow 2^{-2 \sin x + \cos x} = 1 \Rightarrow -2 \sin x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 2 \sin x \Rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

۲ ۱۵۴۰

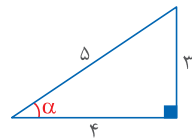
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3 - 3 \tan^2 x = 4 \tan x$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 x + 4 \tan x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{3} \checkmark \\ \tan x = -3 \times \end{cases}$$

چون $0 < x < \frac{\pi}{4}$ پس $\tan x$ مثبت است و $\tan x = \frac{1}{3}$ قابل قبول است:

بنابراین $\cot x = 3$ است.

۲ ۱۵۳۱



چون α در ناحیه سوم و $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ است، پس:

$$\Rightarrow \sin \alpha = -\frac{3}{5}, \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

از طرفی می‌دانیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{24}{7} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{7}{24}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi + \alpha)}{\cot 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cot 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha - \cos \alpha}{\cot 2\alpha}$$

$$= \frac{2 \left(-\frac{3}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{16}{5} + \frac{4}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{\frac{20}{5}}{\frac{7}{24}} = \frac{106}{175}$$

۴ ۱۵۳۲

$$\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = -3 \Rightarrow 1 + \tan \theta = -3 + 3 \tan \theta$$

$$\Rightarrow 2 \tan \theta = 4 \Rightarrow \tan \theta = 2$$

حال با استفاده از رابطه $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ داریم:

$$\sin 2\theta = \frac{2 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

۴ ۱۵۳۳

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 4 \Rightarrow 4 + 4 \sin x = 1 - \sin x$$

$$\Rightarrow 5 \sin x = -3 \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$$

حال با توجه به رابطه $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ داریم:

$$\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = -\frac{3}{5} \Rightarrow 10 \tan \frac{x}{2} = -3 - 3 \tan^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 3 \tan^2 \frac{x}{2} + 10 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3 \tan \frac{x}{2} + 1)(\tan \frac{x}{2} + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan \frac{x}{2} = -\frac{1}{3} \\ \tan \frac{x}{2} = -3 \end{cases}$$

۳ ۱۵۳۴

با توجه به رابطه $10(\sin x + \cos x) = 6\sqrt{5}$ داریم:

$$\sin x + \cos x = \frac{3\sqrt{5}}{5} \xrightarrow{\text{توان 2}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{4}{5} \Rightarrow \underbrace{2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2}_{(2 \tan x - 1)(\tan x - 2)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \frac{1}{2} \\ \tan x = 2 \end{cases}$$

با توجه به گزینه‌ها $\tan x = \frac{1}{2}$ مناسب است.

۴ ۱۵۳۵

ابتدا عبارات‌های داده شده و خواسته شده را ساده می‌کنیم:

$$\textcircled{1} \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = +\sin \alpha = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \textcircled{2} \sin(\pi + 2\alpha) = -\sin 2\alpha$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{(x^2+x)}^{x^2+x} - 1}{x(\sqrt{x^2+x+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x(\sqrt{x^2+x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

میانبر با کمک قاعده هوییتال نیز می‌توانیم به جواب برسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \stackrel{\text{HOP}}{\div} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{0+0+1}} = \frac{1}{2}$$

۲ ۱۸۳۲

حد دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام در صورت کسر از \sqrt{x} فاکتور می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = 1$$

میانبر می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \stackrel{\text{HOP}}{\div} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}-0} = \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

۳ ۱۸۳۳

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}} \times \frac{3+\sqrt{2x+1}}{3+\sqrt{2x+1}} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4-x)}{(4-x)(3+\sqrt{2x+1})} \times (2+\sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(2+\sqrt{x})}{3+\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2(2+\sqrt{4})}{3+\sqrt{9}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

میانبر با کمک قاعده هوییتال خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{2x+1}}{2-\sqrt{x}} \stackrel{\text{HOP}}{\div} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{\frac{-2}{2\sqrt{9}}}{\frac{-1}{2\sqrt{4}}} = \frac{4}{3}$$

۲ ۱۸۳۴

با جای‌گذاری $x=1$ در کسر داده شده به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، پس با استفاده از قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-7\sqrt{x}+5}{2x-\sqrt{2x+1}} \stackrel{\text{HOP}}{\div} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-7 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}} = \frac{2-7 \times \frac{1}{2}}{2-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2-\frac{7}{2}}{2-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = -\frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1} = -\frac{3\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}$$

۱ ۱۸۳۷

می‌دانیم $\sqrt{x^2-6x+9} = |x-3|$ است، از طرفی وقتی $x \rightarrow 3^-$ ، آنگاه $[x]=2$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} \times |x-3| \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2-3}{x-3} \times -(x-3) = 1$$

۱ ۱۸۳۸

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

میانبر می‌توانیم از قاعده هوییتال استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1} \stackrel{\text{HOP}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\frac{3}{2\sqrt{x}}}{1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

۱ ۱۸۳۹

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2} \times \frac{x-\sqrt{2x+8}}{x-\sqrt{2x+8}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-(2x+8)}{(x+2)(x-\sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)(x+2)}{(x+2)(x-\sqrt{2x+8})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{x-\sqrt{2x+8}} = \frac{-6}{-2-\sqrt{4}} = \frac{-6}{-2-2} = \frac{3}{2}$$

میانبر با کمک قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{2x+8}}{x+2} \stackrel{\text{HOP}}{\div} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

۴ ۱۸۳۰

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3} \times \frac{x-\sqrt{x+12}}{x-\sqrt{x+12}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-4)(x+3)}{x^2-(x+12)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-4}{(x-1)(x+3)(x-\sqrt{x+12})}$$

$$= \frac{-7}{(-4)(-3-2)} = \frac{-7}{24}$$

میانبر با کمک قاعده هوییتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{x+12}}{x^2+2x-3} \stackrel{\text{HOP}}{\div} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+12}}}{2x+2} = \frac{1+\frac{1}{6}}{-4} = \frac{-7}{24}$$

۲ ۱۸۳۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}$$

پاسخ نامه تشریحی فصل یازدهم

۳ ۲۵۶۱

چون تعداد رقم‌های فرد یکی بیشتر از رقم‌های زوج است، پس فقط به صورت زیر می‌توانند یکی در میان قرار گیرند:

$$\circ \square \circ \square \circ \Rightarrow 3! \times 2! = 12$$

۴ ۲۵۶۲

ارقام زوج {۲, ۴, ۶, ۸} و ارقام فرد {۱, ۳, ۵, ۷, ۹} هستند. حال برای این‌که ارقام زوج و فرد یکی در میان قرار گیرند باید به یکی از حالت‌های زیر باشند:

$$\text{فرد} \text{ زوج} \text{ فرد} \text{ زوج} \text{ فرد} \Rightarrow 5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 1200$$

$$\Rightarrow 1200 + 960 = 2160$$

$$\text{زوج} \text{ فرد} \text{ زوج} \text{ فرد} \text{ زوج} \Rightarrow 4 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 = 960$$

صفر نباید

۳ ۲۵۶۳

چون تعداد ارقام زوج و فرد یکسان است، برای این‌که اعداد زوج یا فرد یک در میان خارج شوند، دو حالت داریم:

$$\begin{array}{c} \circ \square \circ \square \circ \square \\ \square \circ \square \circ \square \circ \end{array} \Rightarrow 3! \times 3! \times 2 = 72$$

۲ ۲۵۶۴

برای این‌که شماره‌های فرد متوالیاً خارج نشوند، باید ترتیب خارج شدن فردها و زوج‌ها به صورت یکی در میان باشد:

$$\circ \square \circ \square \circ \Rightarrow 3! \times 2! = 12$$

۳ ۲۵۶۵

تنها راه ممکن این است که ۲ کتاب ریاضی در سمت چپ، ۲ کتاب ریاضی در سمت راست و ۲ کتاب آمار در وسط قرار گیرند:

$$\text{ریاضی} \text{ آمار} \text{ ریاضی} \text{ آمار} \text{ ریاضی} \text{ آمار} \text{ ریاضی} \Rightarrow 4! \times 2! = 48$$

۴ ۲۵۶۶

چون این ۴ نفر می‌خواهند در صندلی‌های متوالی کنار هم بنشینند باید به یکی از سه حالت زیر روی صندلی‌ها قرار گیرند:

$$\begin{array}{c} \square \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \square \\ \square \square \square \square \square \end{array} \Rightarrow 4! \times 3 = 72$$

۳ ۲۵۶۷

برای این‌که ارقام در خانه‌های متوالی قرار گیرند، باید یا خانه اول خالی بماند یا خانه آخر:

$$\square \square \square \square \square \text{ یا } \square \square \square \square \square$$

$$\Rightarrow 4! \times 2! \times 2 = 96$$

۴ ۲۵۶۸

سه حرف پ، ر، ی را یک بسته در نظر می‌گیریم. دو حرف پ و ر درون بسته می‌توانند جایگشت کنند و همچنین بسته و ۳ حرف دیگر نیز می‌توانند با یکدیگر جایگشت کنند:

$$\text{پ} \text{ ر} \text{ ی} \square \square \square \Rightarrow 2! \times 4! = 48$$

۳ ۲۵۵۲

هر زن و شوهر را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$$\text{زن و شوهر} \text{ زن و شوهر} \text{ زن و شوهر} \Rightarrow 3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$$

۳ ۲۵۵۳

می‌توانیم «جهان» را یک بسته در نظر بگیریم و جایگشت آن را با ۴ حرف {گ، ر، د، ی} محاسبه کنیم:

$$\text{جهان} \text{ گ} \text{ ر} \text{ د} \text{ ی} \Rightarrow 5! = 120$$

۲ ۲۵۵۴

حروف ج، ه، ا، ن را درون یک بسته قرار می‌دهیم و جایگشت آن‌ها را محاسبه می‌کنیم. سپس جایگشت این بسته و ۴ حرف گ، ر، د، ی را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\text{ج ا ن ه} \text{ گ} \text{ ر} \text{ د} \text{ ی} \Rightarrow 4! \times 5!$$

۱ ۲۵۵۵

تعداد حالت‌هایی که سه حرف U, I, O کنار هم هستند را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{U, I, O} \text{ N N F C T} \Rightarrow \frac{6! \times 2!}{2!} = 3 \times 6!$$

حال تعداد کل جایگشت‌ها را منهای جایگشت‌هایی که ۳ حرف صدادر کنار هم هستند می‌کنیم:

$$\frac{8!}{2!} - 3 \times 6! = 28 \times 6! - 3 \times 6! = 25 \times 6!$$

۳ ۲۵۵۶

چون کلمه با «گل» شروع می‌شود، پس دو جایگاه اول مربوط به کلمه «گل» است و حرف‌های «گ» و «ل» در جایگشت محاسبه نمی‌شوند. حال با داشتن ۴ حرف دیگر، تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف «پ» و «ر» کنار هم هستند را از تعداد کل جایگشت‌ها کم می‌کنیم:

$$\text{ر} \text{ پ} \text{ ی} \text{ ا} - \text{پ} \text{ ر} \text{ ی} \text{ ا} \Rightarrow 4! - 3! \times 2! = 12$$

۱ ۲۵۵۷

$$\text{۲, ۲} \text{ ۱} \text{ ۴} \text{ ۳} - \text{۲, ۲} \text{ ۱, ۴} \text{ ۳} \Rightarrow 4! - 3! \times 2! = 12$$

۳ ۲۵۵۸

$$\text{۱۲} \text{ ۳} \text{ ۴} \text{ ۵} \text{ ۶} - \text{۱۲} \text{ ۳۴} \text{ ۵} \text{ ۶} \Rightarrow 5! - 4! = 120 - 24 = 96$$

۲ ۲۵۵۹

چون می‌خواهیم هیچ دو رقم زوجی کنار هم نباشند باید بین رقم‌های فرد جای خالی در نظر بگیریم. حال رقم‌های زوج می‌توانند در این جاهای خالی قرار بگیرند:

$$\circ \text{ ۳} \circ \text{ ۵} \circ \text{ ۷} \circ \Rightarrow \underbrace{4 \times 3 \times 2 \times 3!}_{\text{رقم‌های زوج}} = 144$$

۴ ۲۵۶۰

بین پرستارها جای خالی در نظر می‌گیریم. حال پزشک‌ها می‌توانند در این جاهای خالی قرار گیرند و ۴ پرستار نیز با یکدیگر جابه‌جا شوند:

$$\circ \text{ پرستار} \circ \text{ پرستار} \circ \text{ پرستار} \circ \text{ پرستار} \Rightarrow \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 4!}_{\text{پزشک‌ها}} = 1440$$

۲ ۲۵۶۹

دو شخص a و b به همراه یک نفر که بین آن‌ها سخنرانی می‌کند را یک بسته در نظر می‌گیریم. سپس جایگشت بسته و ۲ فرد دیگر را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$\boxed{a} \quad \boxed{b} \quad \boxed{\quad} \quad \boxed{\quad} \rightarrow \underbrace{3 \times 2!}_{\text{بسته}} \times 3! = 36$$

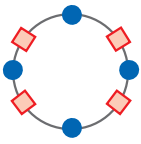
۱ ۲۵۷۸

این چهار دونه به ۴! حالت می‌توانند به خط پایان برسند. حال ۲ دونه A و B بدون توجه به جایگاهشان به ۲! حالت می‌توانند با هم جابه‌جا شوند که طبق صورت سؤال، فقط ۱ حالت آن یعنی حالتی که A قبل از B قرار می‌گیرد، مد نظر است. پس:

$$\frac{1}{2!} \times 4! = 12$$

۲ ۲۵۷۷

ابتدا ۴ پسر به $(4-1)!$ حالت می‌توانند دور میزگرد بنشینند. اما دخترها باید به ۴! حالت در ۴ جای خالی ایجادشده بین پسرها بنشینند و دیگر با میزگرد مواجه نیستند:



$$\rightarrow (4-1)! \times 4! = 6 \times 24 = 144$$

۳ ۲۵۷۶

میانبر یک راهکار سریع‌ترین است که دونه‌های A و B را یکسان در نظر می‌گیریم و داریم:

$$A, B, C, D \rightarrow \frac{4!}{2!} = 12$$

۲ ۲۵۷۱

افراد A و B و C را یکسان در نظر می‌گیریم و از جایگشت با تکرار استفاده می‌کنیم:

$$A, B, C, D, E \rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$$

۳ ۲۵۷۲

افراد A, B, C را یکسان در نظر می‌گیریم و از جایگشت با تکرار استفاده می‌کنیم. در ضمن چون A و B نسبت به هم شرط خاصی ندارند، بنابراین جواب را در ۲! ضرب می‌کنیم:

$$A, B, C, D, E \rightarrow \frac{5!}{3!} \times 2! = 40$$

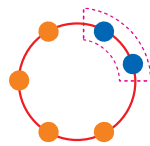
۳ ۲۵۷۳

تعداد حالت‌هایی که ۶ نفر می‌توانند دور یک میزگرد کنار هم بنشینند برابر است با:

$$(6-1)! = 120$$

۲ ۲۵۷۴

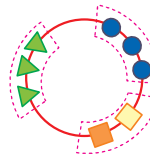
رضا و حسن را درون یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت دوری بسته و ۴ نفر دیگر را محاسبه می‌کنیم:



$$\rightarrow (5-1)! \times 2! = 4! \times 2! = 48$$

۲ ۲۵۷۵

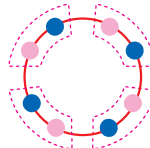
بازنیکان هر رشته را در یک بسته کنار هم قرار می‌دهیم. سپس جایگشت بسته‌ها را محاسبه و در جایگشت افراد درون هر بسته ضرب می‌کنیم:



$$\rightarrow (3-1)! \times 3! \times 2! \times 3! = 144$$

۳ ۲۵۷۶

هر زن و شوهر را درون یک بسته در نظر می‌گیریم و جایگشت دوری ۴ بسته را در جایگشت هر زن و شوهر درون بسته ضرب می‌کنیم:



$$\rightarrow (4-1)! \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 6 \times 16 = 96$$

۲ ۲۵۷۷

۱ ۲۵۷۸

۲ ۲۵۷۹

۳ ۲۵۸۰

۴ ۲۵۸۱

۴ ۲۵۸۲

۳ ۲۵۸۳

$$1 \quad P(n, 2) = 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 12 \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 12$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 12 \xrightarrow{4 \times 3 = 12} n = 4$$

$$2 \quad P(m, m-2) = 60 \Rightarrow \frac{m!}{2!} = 60 \Rightarrow m! = 120 \xrightarrow{5! = 120} m = 5$$

$$\rightarrow C(m, n) = C(5, 4) = \frac{5!}{1!(5-4)!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$C(n, 5) < P(n, 4) \Rightarrow \frac{n!}{5!(n-5)!} < \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5!(n-5)!} < \frac{1}{(n-4)(n-5)!} \Rightarrow 5! > n-4$$

$$\Rightarrow 120 > n-4 \Rightarrow n < 124$$

از طرفی در عبارت $C(n, 5)$ شرط $n \geq 5$ برقرار است، پس ۱۱۹ مقدار مختلف به صورت $n = 5, 6, 7, \dots, 123$ قابل قبول است.

$$C(n, 2) + P(n, 2) = 18 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 18$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 18 \Rightarrow n(n-1) = 12 \xrightarrow{4 \times 3 = 12} n = 4$$

$$\rightarrow \binom{2n}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

$$\binom{9}{x} = 4 \binom{7}{x-1} \Rightarrow \frac{9!}{x!(9-x)!} = 4 \times \frac{7!}{(x-1)!(8-x)!}$$

$$\Rightarrow \frac{9 \times 8 \times 7!}{x(x-1)!(9-x)(8-x)!} = 4 \times \frac{7!}{(x-1)!(8-x)!}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{x(9-x)} = 4 \Rightarrow 18 = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 18 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=6 \end{cases}$$

$$\binom{7}{4} = 35$$

از بین ۷ نفر موجود، ۴ نفر انتخاب می‌کنیم: