«هر انسانی لبخندی از خداست.
تقدیم به تو که زیباترین لبخند خدایی»

مقدمه مؤلّفان

سلام عزیزان، امیدواریم همیشه شاد و تندرست باشید و ایام به کامتون باشه.

خردادماه ۱۴۰۱ مسئولین، زحمت یه مصوبه‌ای را کشیدن که کمی کنکور رو از ریل یکنواخت قدیمی جداش کرد و نقش سوابق تحصیلی رو تو کنکور پررنگ کرد. مصوبه می‌گه که نمرهٔ سوابق تحصیلی واسه سنجش و پذیرش تو رشته‌های پرمتقاضی دانشگاه‌ها قراره به صورت جدول زیر اجرا بشه:

سال تحصیلی دوازدهم	پایهٔ تحصیلی	میزان تأثیر
۱۴۰۱-۱۴۰۲	فقط دوازدهم	۴۰ درصد قطعی
۱۴۰۲-۱۴۰۳	فقط دوازدهم	۵۰ درصد قطعی
۱۴۰۳-۱۴۰۴	یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی
۱۴۰۴-۱۴۰۵ و بعد از آن	دهم، یازدهم و دوازدهم	۶۰ درصد قطعی

با این حساب سوابق تحصیلی یا همون نمرات امتحانای نهایی می‌تونه تو نتیجهٔ کنکور مؤثر واقع بشه. یعنی اگه نمرهٔ نهایی خوب باشه، نمرهٔ کنکور رو بالا می‌بره و اگه بد باشه، نمرهٔ کنکور رو پایین میاره.

یه مثالی واستون می‌زنیم تا بهتر متوجه موضوع بشید:

فرض کنین ترازتون تو کنکور ۶۵۰۰ باشه و نمرهٔ امتحاناتتون تو نهایی خیلی خوب باشه و بعد از تبدیل به تراز، ترازش ۷۵۰۰ بشه.

اون‌وقت تراز امتحانتون تو کنکور با احتساب ۴۰ درصد قطعی، به صورت زیر محاسبه می‌شه:

$$6500\times\frac{60}{100}+7500\times\frac{40}{100}=3900+3000=6900$$

یعنی نمرهٔ نهایی تونسته، ۴۰۰تا ترازتون رو بالا بکشه!

با این اوضاع می‌بایست هر دو جنبهٔ نهایی و کنکور رو تقویت کنین.

هدف ما هم از نگارش این کتاب دقیقاً همینه که بتونه شما رو به طور عالی واسه نهایی آماده کنه.

ویژگی‌های این کتاب:

۱ پوشش کامل سؤالای نهایی داخل و خارج از دی ۹۷ تا الان

۲ پوشش کامل مثالا، تمرینا، کار در کلاسا و حتی متن کتاب درسی

۳ ارائهٔ یه درس‌نامهٔ توپ و کامل و روان، اما مختصر و مفید

۴ پاسخ‌های تشریحی با رویکرد آموزشی

۵ ارائهٔ چند دوره امتحان نهایی به همراه پاسخ و بارم‌بندی نمونهٔ نهایی واسه آماده‌سازی بهتر شما

۶ ارائهٔ تحلیل آماری از سؤالات نهایی که وزن و سهم هر فصل و هر قسمت رو تو نهایی نشون می‌ده

۷ حذف سؤالای تکراری و ادغام سؤالات خیلی مشابه

لازمه تشکر و قدردانی کنیم از:

۱ آقایان دکتر ابوذر نصری و دکتر کمیل نصری

۲ تیم خوب تولید خیلی‌سبز که زحمت کتاب رو دوش اون‌ها بود.

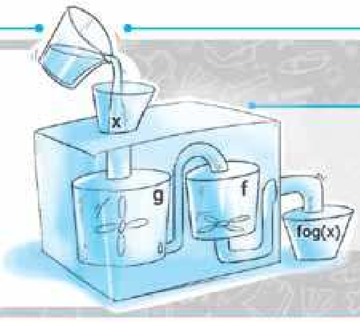
۳ ویراستاران خوب کتاب خانم‌ها مریم بیوک‌زاده، نرجس تیمناک و زهرا فتحی

۴ سرکار خانم لولاو مرادی که مسئولیت هماهنگی کتاب را بر عهده داشتند.

با احترام

ابوالقاسم شعبانی ــ علیرضا برائی نژاد

فهرست مطالب



فصل ۱ تابع

مشاوره

سلام مهندس جان! قبل از هر چیز براتون سلامتی، موفقیت و شادمانی آرزو می‌کنیم.

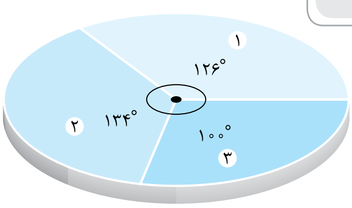
اولین فصل کتاب اختصاص داره به یار دیرینه‌تون! یعنی تابع بزرگوار. توی کتاب درسی این فصل دوتا درس داره. واسه سهولت توی خوندن اون، درس دوم رو به دو قسمت تقسیم کردیم. مباحثی که تو این فصل باهاشون مواجه‌ایم اینان:

۱) تبدیل نمودار توابع ۲) تابع درجه‌سوم و توابع یکنوا ۳) بخش‌پذیری و تقسیم

بارم‌بندی این فصل توی امتحانای داخلی و نهایی مطابق جدول زیر هستش:

دی (داخلی)	خرداد (نهایی)	شهریور و دی (نهایی)
۷ نمره	۲/۵ نمره	۳/۵ نمره

وزن هر کدوم از قسمتایی که جداشون کرده بودیم توی امتحانای نهایی رو توی نمودار دایره‌ای می‌بینید:



درس ۱ تبدیل نمودار توابع

صفحهٔ ۲ تا ۱۲ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۱ را در صفحهٔ ۴۹ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱- دامنهٔ تابع $y=kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y=f(x)$ است. (تجربی دی ۹۹ و شهریور ۹۹)

۲- دامنهٔ تابع $y=-kf(\frac{x}{2})$ همان دامنهٔ تابع $y=-kf(x)$ می‌باشد. (تجربی خرداد ۹۹ خارج)

۳- برد تابع $y=kf(x)$ همان برد تابع $y=f(x)$ است. (تجربی دی ۹۸)

۴- اگر دامنهٔ تابع f برابر $[-1,3]$ باشد، دامنهٔ تابع $g(x)=-3f(2x)$ بازهٔ $[-\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ است. (دی ۹۵)

۵- اگر بازهٔ $[-2,1]$ دامنهٔ تابع $f(3x+1)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $[-5,4]$ است. (دی ۹۹ خارج)

۶- نمودار تابع $y=(x+2)^3$ را می‌توان با ۲ واحد انتقال نمودار $y=x^3$ به سمت چپ رسم کرد. (خرداد ۹۹ خارج)

۷- برای رسم نمودار تابع $f(\frac{x}{2})$ با استفاده از نمودار $f(x)$ کافی است طول نقاط نمودار $f(x)$ را نصف کنیم. (خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۸- نمودار تابع $y=f(-x)$، قرینهٔ نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها است. (دی ۱۴۰۰ خارج و مشابه دی ۹۹ خارج)

۹- اگر $0<k<1$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. (مشابه خرداد ۹۸)

۱۰- برای رسم تابع $g(x)=|x+1|-2$ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=|x|$، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به راست و ۲ واحد به پایین حرکت می‌کند. (دی ۹۶)

جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید.

۱۱- اگر بازهٔ $[-2,1]$ دامنهٔ تابع $f(x)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(3x+1)$ برابر .... است. (شهریور ۹۹)

۱۲- اگر بازهٔ $[-4,2]$ دامنهٔ تابع $f(2x+1)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر .... است. (دی ۹۸ خارج)

۱۳- تابع $y=f(x)$ با دامنه $[-2,1]$ را در نظر بگیرید، دامنهٔ $y=-f(2x)+1$ بازهٔ .... است. (شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۴- اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ باشد، برد این تابع .... است. (شهریور ۹۵)

۱۵- نقطهٔ $(۲,-۱)$ در تابع $y=-f(۲x+۱)-۱$ متناظر با نقطهٔ .... در تابع $f(x)$ است. (خرداد ۹۹ خارج)

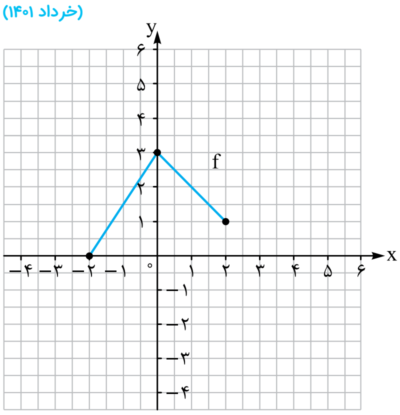
۱۶- نمودار تابع $y=-f(x)$ قرینهٔ نمودار تابع $y=f(x)$ نسبت به محور .... است. (مشابه شهریور ۹۸ خارج)

۱۷- اگر $k>۱$ باشد، نمودار $y=f(kx)$ از .... نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. (شهریور ۱۴۰۰ و شهریور ۹۸ خارج)

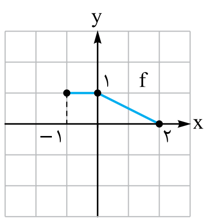
۱۸- در رسم نمودار $y=af(x)$ از روی نمودار $y=f(x)$، اگر $۰<a<۱$، نمودار در امتداد محور yها .... می‌شود.
(مشابه شهریور ۱۴۰۰ خارج و مشابه دی ۹۹ خارج)

در هر یک از سؤالات زیر نمودار تابع f رسم شده است. نمودار تابع خواسته‌شده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

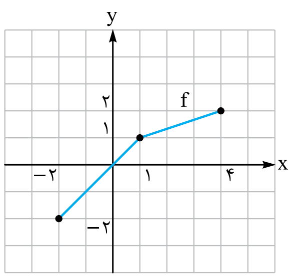
۱۹- $g(x)=f(x-۱)$ (خرداد ۱۴۰۱)



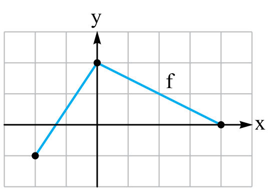
۲۰- $g(x)=f(x-۱)+۲$ (دی ۱۴۰۰ و مشابه خرداد ۹۹ خارج)



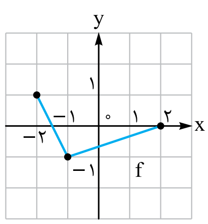
۲۱- $g(x)=f(۲x)-۱$ (دی ۱۴۰۰ خارج، خرداد ۹۹ و خرداد ۹۸ خارج)



۲۲- $g(x)=-f(۲x)$ (دی ۹۷ و مشابه دی ۹۷ خارج)

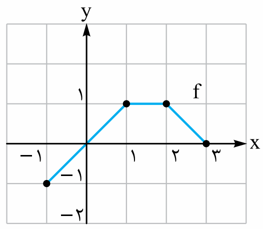


۲۳- $g(x)=۲f(x+۱)$ (شهریور ۱۴۰۰، مشابه خرداد ۱۴۰۱ خارج، مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج و مشابه خرداد ۹۸)



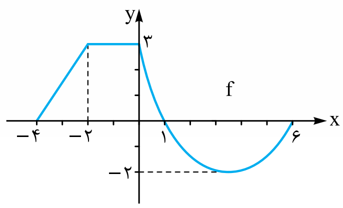
-۲۴ $g(x)=f(۲x-۱)$

(دی ۹۹ و مشابه دی ۹۸)



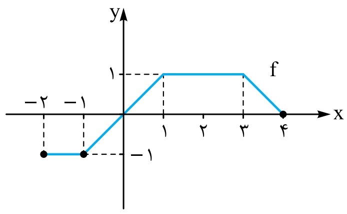
-۲۵ $g(x)=f(۳-x)$

(دی ۹۸ خارج، مشابه دی ۹۹ خارج و مشابه شهریور ۹۸)

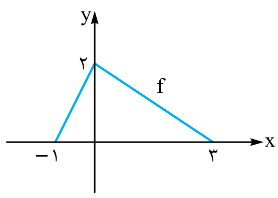


-۲۶ $g(x)=۲f(۳x+۱)-۱$

(خرداد ۱۴۰۰ خارج)



-۲۷ $g(x)=-f(۱-\frac{x}{۲})$



-۲۸ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x+۱$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین، سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (تجربی شهریور ۱۴۰۰)

-۲۹ الف) نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در بازهٔ $[۰,۴]$ رسم کنید.

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید و سپس دامنه و برد g را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

نمودار توابع زیر را به کمک نمودار تابع $y=\cos x$ رسم کنید.

-۳۰ $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ (خرداد ۱۴۰۰)

-۳۱ $y=\cos(۲x)-۱$ (شهریور ۹۹)

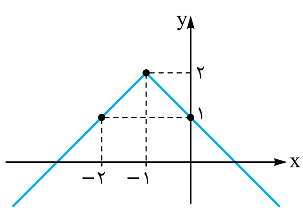
به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، نمودار توابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به دست آورید. (مشابه فعالیت کتاب درسی)

-۳۲ $y=\frac{۱}{۳}\sin(x+۱)$

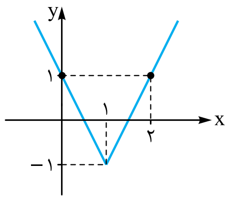
-۳۳ $y=-۲\sin(\frac{x}{۲})+۱$

نمودارهای زیر از قرینه‌یابی و تبدیل تابع $y=|x|$ به دست آمده‌اند، ضابطهٔ نمودارها را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

-۳۴

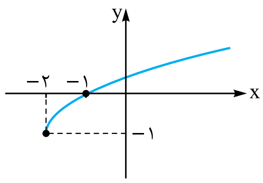


-۳۵

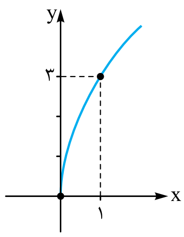


▨ با توجه به نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ ، ضابطهٔ مربوط به هر یک از نمودارهای زیر را بنویسید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

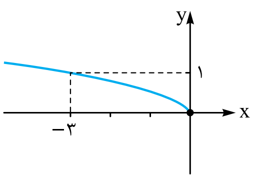
-۳۶



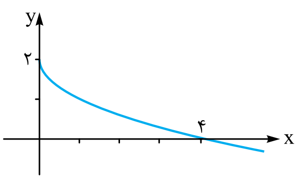
-۳۷



-۳۸



-۳۹



▨ نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

-۴۰ $y=-\sqrt{\frac{x}{۲}}$

-۴۱ $y=\sqrt{-x}-۲$

-۴۲ $y=-|x+۲|-۱$

-۴۳ $y=|-۲x+۴|$

-۴۴ $y=۲^{-x}+۱$

-۴۵ $y=-\log(x+۲)$

-۴۶ $y=۱+\log ۴x$

-۴۷ $y=\sqrt{۲-x}$

-۴۸ $y=(۲x-۱)^۲$

-۴۹ نقطهٔ $A(۲,-۱)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. مختصات نقطهٔ متناظر نقطهٔ A را روی نمودار $y=-۲f(۳x-۱)+۱$ به دست آورید.

-۵۰ ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را یک واحد به چپ منتقل کرده، سپس آن را نسبت محور yها قرینه کرده و در نهایت ۲ واحد در راستای محور yها به بالا منتقل می‌کنیم. ضابطهٔ تابع جدید را بنویسید.

-۵۱ نمودار $y=x^۲+x$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار حاصل را بنویسید.

درس ۲ قسمت دوم: بخش‌پذیری و تقسیم

صفحهٔ ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۲ - قسمت دوم را در صفحهٔ ۶۲ ببینید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

۹۹- در تقسیم $f(x)=x^{3}+2$ بر $p(x)=2x-1$ باقی‌مانده برابر صفر است. (خرداد ۹۹ خارج)

۱۰۰- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^{3}+2x^{2}+3$ بر $x+2$ برابر با ۳ است. (خرداد ۹۸ خارج)

۱۰۱- عبارت $x^{n}+a^{n}$ با شرط زوج‌بودن n، بر $x+a$ بخش‌پذیر است. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۰۲- عبارت $x^{n}-a^{n}$ همواره بر $x-a$ بخش‌پذیر است. (خرداد ۹۵ و مشابه فعالیت کتاب درسی)

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۱۰۳- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)=x^{2}+kx-1$ بر $x+1$ برابر با ۲ باشد، مقدار k برابر .... است. (دی ۹۷)

۱۰۴- در تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ از درجهٔ n بر چندجمله‌ای درجه‌دوم $q(x)$، درجهٔ چندجمله‌ای باقی‌مانده .... است.

۱۰۵- اگر $p(x)$ یک چندجمله‌ای باشد به طوری که $p(k)=-3$، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای .... برابر -3 است.

۱۰۶- عبارت $x^n - a^n$ با شرط .... بر $x + a$ بخش‌پذیر است. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۱۰۷- باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = 8x^3 - 4x^2 + 2$ را بر $2x + 1$ به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱ و مشابه شهریور ۹۸ خارج)

۱۰۸- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

۱۰۹- باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $x + 2$ یکسان می‌باشد. مقدار a را بیابید.
(خرداد ۱۴۰۰ و مشابه خرداد ۱۴۰۱ خارج)

۱۱۰- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد.
(خرداد ۹۹، شهریور ۹۸، دی ۹۸ و ۹۹ خارج و مشابه دی ۱۴۰۰)

۱۱۱- در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۴ باشد و بر $x + 2$ بخش‌پذیر باشد.
(دی ۹۸، خرداد و دی ۹۹ خارج)

۱۱۲- اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ را به دست آورید. (خرداد ۹۸)

۱۱۳- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x + 1$ برابر ۳ باشد. (شهریور ۹۹، خرداد ۱۴۰۰ خارج، مشابه شهریور ۱۴۰۰ خارج و مشابه دی ۹۷ خارج)

۱۱۴- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x) = x^3 + x^2 + ax + b$ بر $x - 1$ و $x + 1$ به ترتیب ۴ و ۶ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x - 2$ را بیابید.
(خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۱۵- اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x - 1$ و $x + 1$ به ترتیب برابر ۱ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $x^2 - 1$ به دست آورید.

۱۱۶- اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $x^2 + x - 2$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ را بر $x - 2$ به دست آورید.

هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته‌شده تجزیه کنید.

۱۱۷- $x^6 - 1$ بر عامل $x - 1$ (دی ۹۹، خرداد ۹۸، دی ۹۷ و مشابه خرداد ۹۸ خارج)

۱۱۸- $x^5 + 1$ بر عامل $x + 1$ (دی ۹۷، خرداد ۹۸ خارج و مشابه خرداد ۹۹ خارج)

۱۱۹- $x^5 + 32$ بر عامل $x + 2$ (شهریور ۱۴۰۰ و ۱۴۰۱)

۱۲۰- $x^6 - 64$ بر عامل $x + 2$ (دی ۱۴۰۰ خارج)

هر یک از چندجمله‌ای‌های داده‌شده را تجزیه کنید.

۱۲۱- $x^5 - 1$ (دی ۹۹ خارج)

۱۲۲- $x^7 + 1$

فصل ۱ درس ۱

تبدیل نمودار توابع

صفحهٔ ۲ تا ۱۲ کتاب درسی

سخن دبیر

تبدیل نمودار که خیلیا اونو با انتقال می‌شناسن، مبحثیه که از سال دهم تا حالا باهاش خاطره داریم. مبحث بسیار جذابی که اگه بهش مسلط بشی خیلی از نمودارها رو می‌تونی تو سه سوت رسمش کنی. از این مبحث همیشه تو نهایی سؤال اومده.

تبدیل نمودار توابع

تبدیل نمودارها در دو راستا صورت می‌گیرد:

۱ در راستای محور xها که به صورت چپ و راست انجام می‌شود.

۲ در راستای محور yها که به صورت بالا و پایین انجام می‌شود.

نکته در تبدیل نمودار توابع، دانستن مطالب زیر ضروری و کارگشا است:

۱ در تبدیلات مربوط به محور yها، همه‌چیز و از جمله ترتیب ۴ عمل اصلی، **مستقیم** عمل می‌کند.

۲ در تبدیلات مربوط به محور xها، همه‌چیز و حتی ترتیب ۴ عمل اصلی به صورت **وارونه** عمل می‌کند.

۳ در تبدیلات ترکیبی، اولویت با تبدیلات مربوط به محور xها است. یعنی ابتدا تبدیلات مربوط به محور xها را انجام می‌دهیم و سپس تبدیلات مربوط به محور yها را.

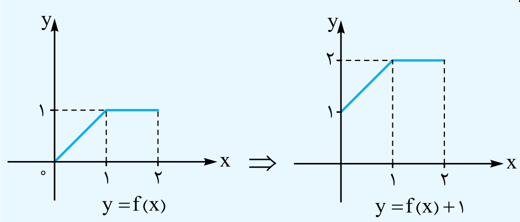
تبدیل نمودار توابع در یک نگاه

فرض کنیم نمودار یا ضابطهٔ تابع $y=f(x)$ را در اختیار داشته باشیم و $k>0$ عدد حقیقی باشد، در این صورت تمام تبدیلات نمودار تابع $y=f(x)$، از قوانینی که در ادامه آمده است، تبعیت می‌کنند:

تبدیلات مربوط به محور yها

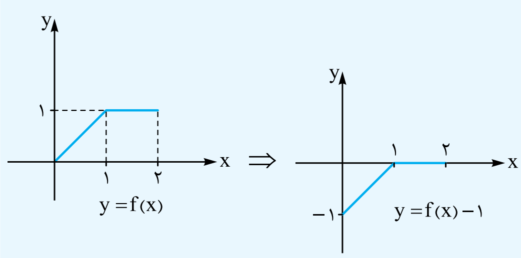
۱ $y=f(x)+k$: نمودار $y=f(x)$، k واحد به بالا منتقل می‌شود.

به طور مثال:



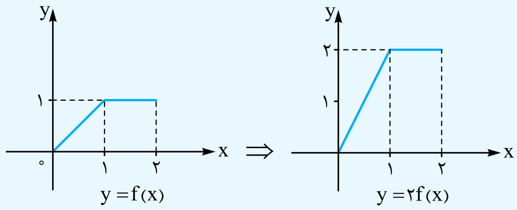
۲ $y=f(x)-k$: نمودار $y=f(x)$، k واحد به پایین منتقل می‌شود.

به طور مثال:



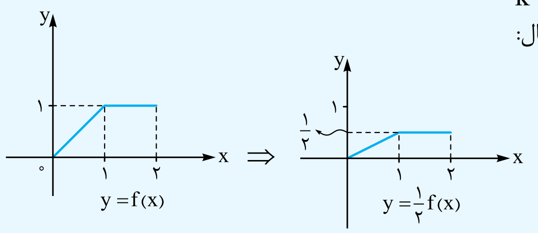
۳ $y=kf(x)$: در نمودار $y=f(x)$، yها k برابر می‌شود.

به طور مثال:



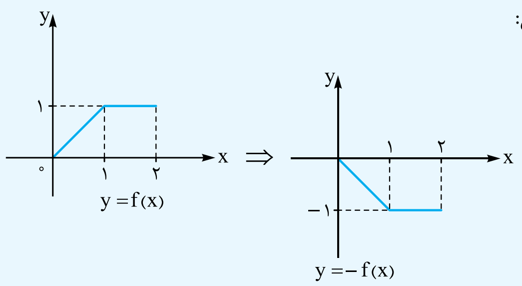
۴ $y=\frac{1}{k}f(x)$: در نمودار $y=f(x)$، yها بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



۵ $y=-f(x)$: نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xها قرینه می‌شود.

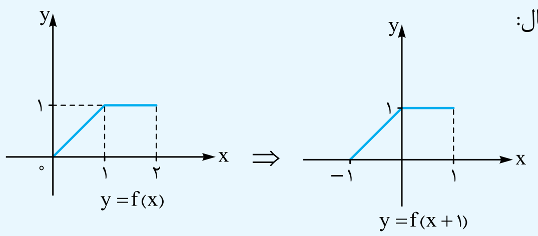
به طور مثال:



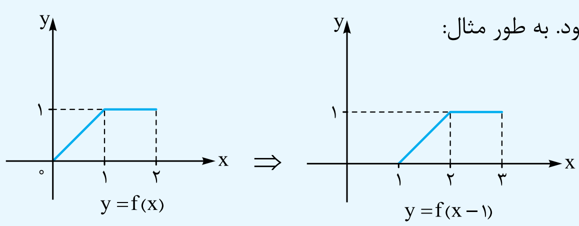
تبدیلات مربوط به محور x ها

۱ $y=f(x+k)$: نمودار $y=f(x)$، k واحد به چپ منتقل می‌شود.

به طور مثال:

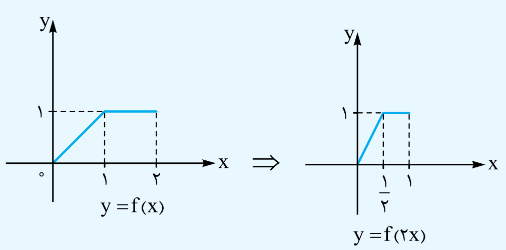


۲ $y=f(x-k)$: نمودار $y=f(x)$، k واحد به راست منتقل می‌شود. به طور مثال:



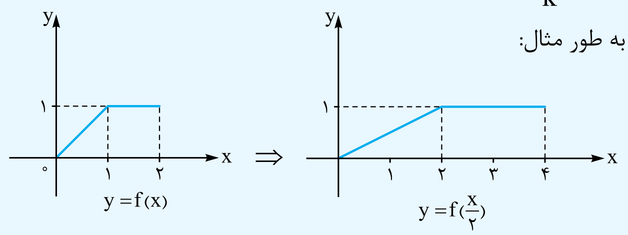
۳ $y=f(kx)$: در نمودار $y=f(x)$، xها بر k تقسیم می‌شود.

به طور مثال:



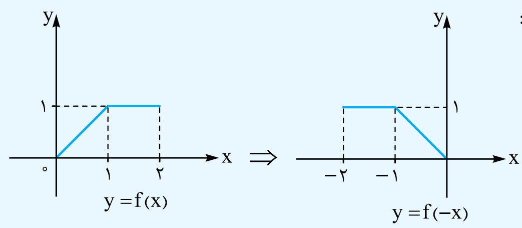
۴) $y=f(\frac{1}{k}x)$: در نمودار $y=f(x)$، xها در k ضرب می‌شود.

به طور مثال:

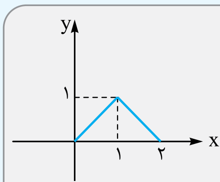


۵) $y=f(-x)$: نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور yها قرینه می‌شود.

به طور مثال:



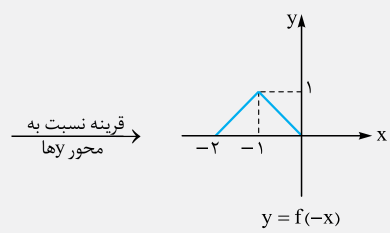
مثال **نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل است.**

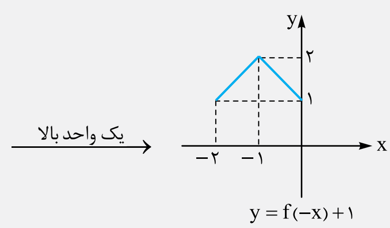


نمودار توابع زیر را رسم کنید.

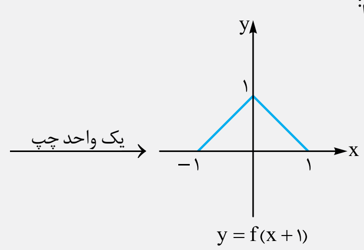
الف) $y=f(-x)+1$ **ب) $y=f(2x+1)$**

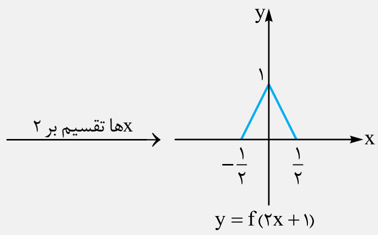
✓ **پاسخ:** الف)





ب) در این‌جا تمام تغییرات روی xها انجام می‌شود. همان‌طور که گفته شد، تغییرات روی محور xها به صورت وارونه عمل می‌کند. یعنی در این‌جا ابتدا جمع را اعمال می‌کنیم و سپس حاصل‌ضرب را. یعنی ابتدا نمودار را یک واحد به چپ منتقل می‌کنیم و سپس در نمودار حاصل xها را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:





چند نکته

۱) با توجه به مطالب گفته‌شده، می‌توان گفت:

الف) دامنهٔ توابع $y=f(x)$ و $y=kf(x)$ یکی است. همچنین برد $y=kf(x)$، k برابر برد $y=f(x)$ است.

ب) برد توابع $y=f(x)$ و $y=f(kx)$ یکسان است. همچنین دامنهٔ $y=f(kx)$، $\frac{1}{k}$ برابر دامنهٔ $y=f(x)$ است.

۲) نمودار $y=kf(x)$، از انبساط یا انقباض عمودی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور yها به دست می‌آید. در واقع اگر $k>1$، انبساط عمودی با ضریب k و اگر $0<k<1$، انقباض عمودی با ضریب k خواهیم داشت و چنان‌چه $k<0$، در این صورت ابتدا نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور xها قرینه نموده و در این حالت اگر $k<-1$، انبساط عمودی با ضریب $|k|$ و اگر $-1<k<0$، انقباض عمودی با ضریب $|k|$ خواهیم داشت.

۳) نمودار $y=f(kx)$، از انبساط یا انقباض افقی نمودار $y=f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. در واقع اگر $k>1$، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ و اگر $0<k<1$، انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{k}$ خواهیم داشت و چنان‌چه $k<0$، در این صورت ابتدا نمودار $y=f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه نموده و در این حالت اگر $k<-1$، انقباض افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ و اگر $-1<k<0$، انبساط افقی با ضریب $|\frac{1}{k}|$ خواهیم داشت.

مثال **درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.**

الف) دامنهٔ $y=f(x)$ با دامنهٔ $y=f(2x)$ یکسان است.

ب) برد تابع $y=f(x)$ و برد تابع $y=f(\frac{1}{3}x)$ برابر است.

پ) نمودار $y=2f(x)$ از انبساط عمودی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

ت) نمودار $y=f(3x)$ از انبساط افقی نمودار $y=f(x)$ به دست می‌آید.

✓ **پاسخ:**

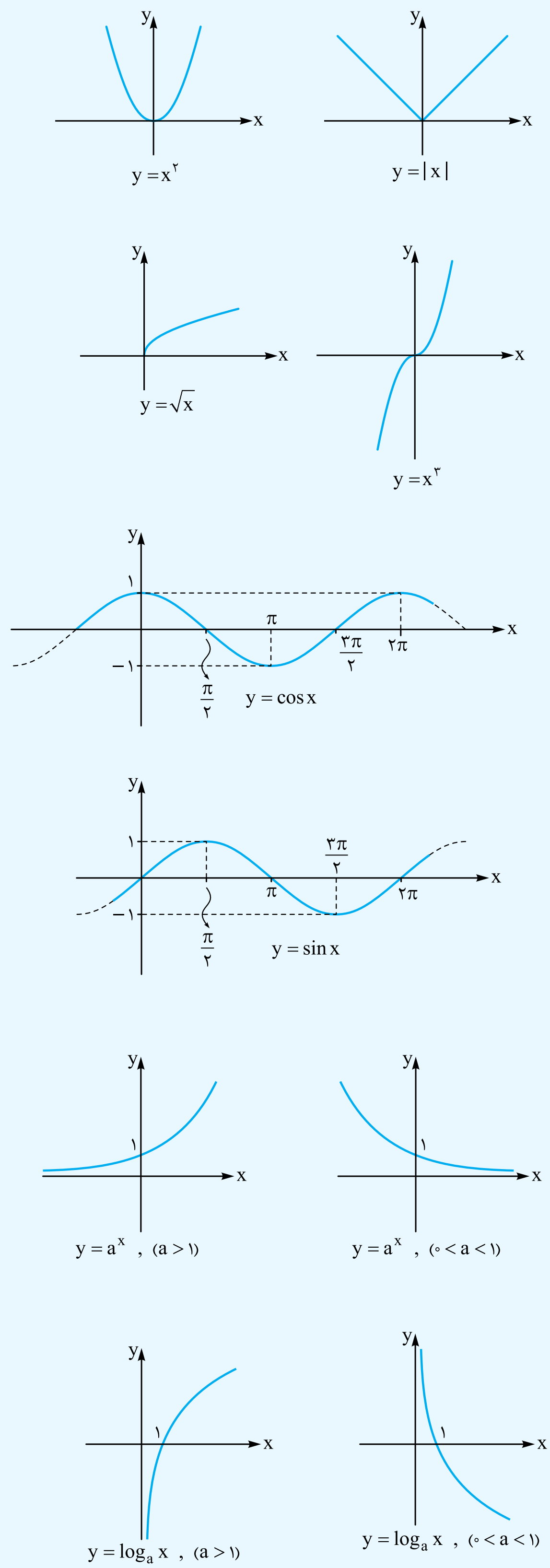
الف) نادرست. برد این دو تابع یکسان و دامنهٔ آن‌ها متفاوت است.

ب) درست

پ) درست

ت) نادرست. از انقباض افقی به دست می‌آید نه انبساط.

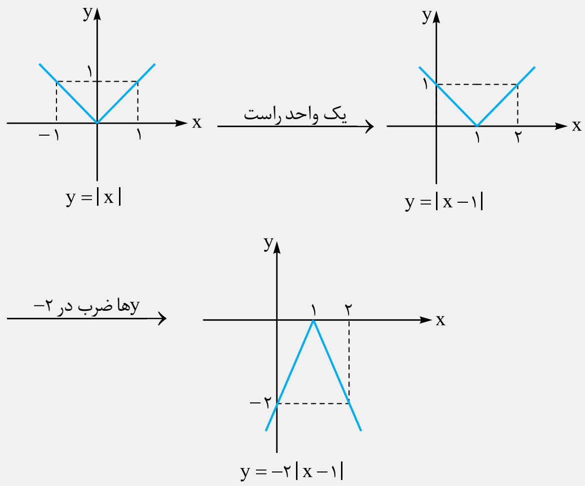
نکته نمودار توابع مهمی که در تبدیل نمودارها به آن‌ها نیازمندیم به صورت زیر است:



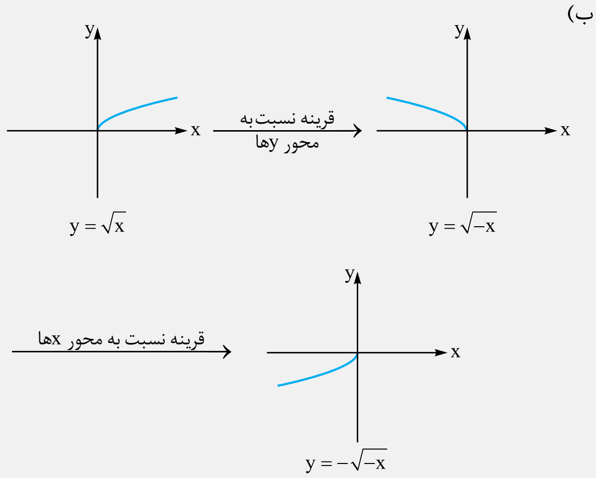
مثال **نمودار توابع زیر را با استفاده از نمودارهای نکتهٔ قبل رسم کنید.**

الف) $y=-2|x-1|$ ب) $y=-\sqrt{-x}$ پ) $y=-2\sin(\frac{x}{2})$

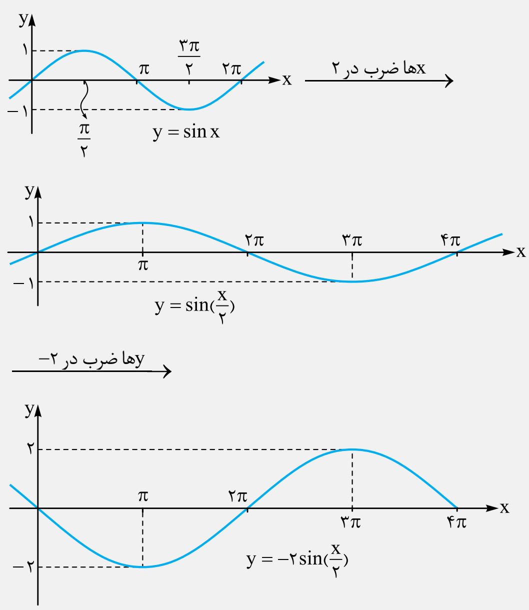
✓ **پاسخ:** الف)



ب)



پ)



پاسخ سؤالات

۱. درست

۲. نادرست؛ دامنهٔ $y=-kf(\frac{x}{۲})$، دو برابر دامنهٔ $y=-kf(x)$ است.

۳. نادرست؛ برد $y=kf(x)$، k برابر برد $y=f(x)$ است.

۴. درست؛ زیرا: $D_f=[-۱,۳] \Rightarrow -۱\le ۲x\le ۳$

$\xrightarrow{\div ۲} \frac{-۱}{۲}\le x\le\frac{۳}{۲} \Rightarrow D_g=[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲}]$

۵. درست؛ زیرا:

$g(x)=f(\underbrace{۳x+۱}_{X}), D_g=[-۲,۱] \Rightarrow -۲\le x\le ۱$

$\xrightarrow{\times ۳} -۶\le ۳x\le ۳ \xrightarrow{+۱} -۵\le \underbrace{۳x+۱}_{X}\le ۴$

$\Rightarrow X\in[-۵,۴] \Rightarrow D_f=[-۵,۴]$

۶. درست

۷. نادرست؛ برای رسم نمودار تابع $f(\frac{x}{۲})$، باید طول نقاط نمودار $f(x)$ را **دو برابر** کنیم.

۸. نادرست؛ قرینه نسبت به محور **yها** است.

۹. درست

۱۰. نادرست؛ برای رسم g، نمودار f یک واحد روی محور طول‌ها به چپ و سپس دو واحد به پایین حرکت می‌کند.

۱۱. $[-۱,۰]$؛ زیرا: $۳x+۱\in[-۲,۱] \Rightarrow -۲\le ۳x+۱\le ۱$

$\xrightarrow{-۱} -۳\le ۳x\le ۰ \xrightarrow{\div ۳} -۱\le x\le ۰$

۱۲. $[-۷,۵]$؛ زیرا $g(x)=f(\underbrace{۲x+۱}_{X\in D_f})$

$D_g=[-۴,۲]\Rightarrow -۴\le x\le ۲ \xrightarrow{\times ۲} -۸\le ۲x\le ۴$

$\xrightarrow{+۱} -۷\le \underbrace{۲x+۱}_{X}\le ۵ \Rightarrow -۷\le X\le ۵$

$\Rightarrow D_f=[-۷,۵]$

۱۳. $[-۱,\frac{۱}{۲}]$؛ زیرا

$۲x\in[-۲,۱] \Rightarrow -۲\le ۲x\le ۱ \xrightarrow{\div ۲} -۱\le x\le\frac{۱}{۲}$

۱۴. $[۰,+\infty)$؛ داریم $\sqrt{۲-x}\ge ۰$، پس حداقل مقدار این تابع برابر صفر است و لذا $R_f=[۰,+\infty)$.

۱۵. $(۵,۰)$؛ زیرا برای رسیدن از نمودار $y=f(x)$ به نمودار $y=-f(۲x+۱)-۱$، می‌بایست xها را یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس آن‌ها را بر ۲ تقسیم کنیم. همچنین yها را قرینه کرده و یک واحد به پایین منتقل کنیم. حالا برای رسیدن از نمودار $y=-f(۲x+۱)-۱$ به $y=f(x)$ برعکس عمل می‌کنیم، ببینید:

$y=-۱ \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y=۰ \xrightarrow{\text{قرینه}} y=۰$

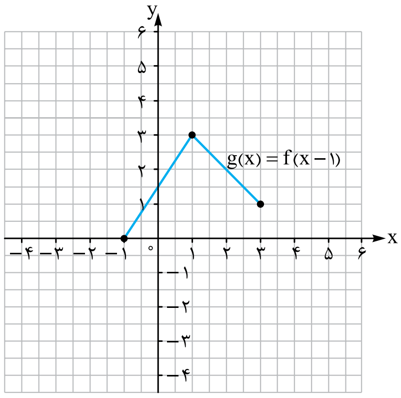
$x=۲ \xrightarrow{\text{ضرب در ۲}} x=۴ \xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} x=۵$

۱۶. xها

۱۷. انقباض

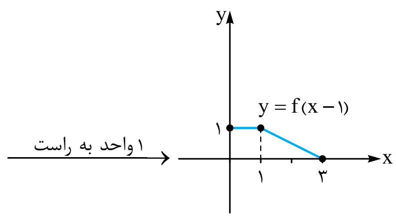
۱۸. منقبض

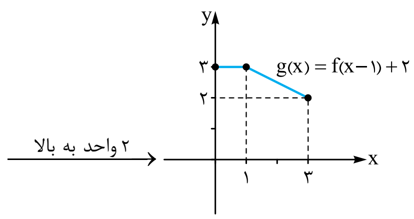
۱۹. کافی است که نمودار تابع f یک واحد به سمت راست منتقل شود.



با توجه به نمودار داریم: $D_g=[-۱,۳], R_g=[۰,۳]$

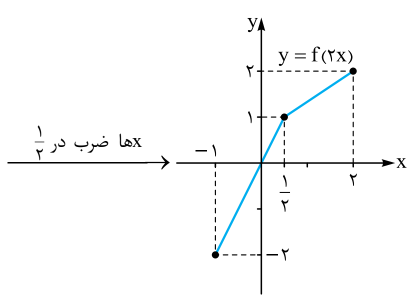
۲۰. نمودار f را یک واحد به راست و ۲ واحد به بالا منتقل می‌کنیم:

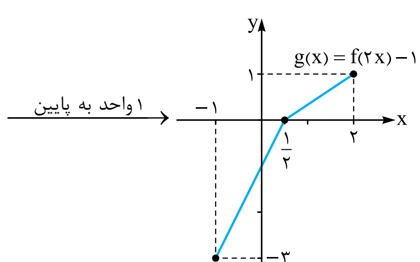




بنابراین داریم: $D_g=[۰,۳], R_g=[۲,۳]$

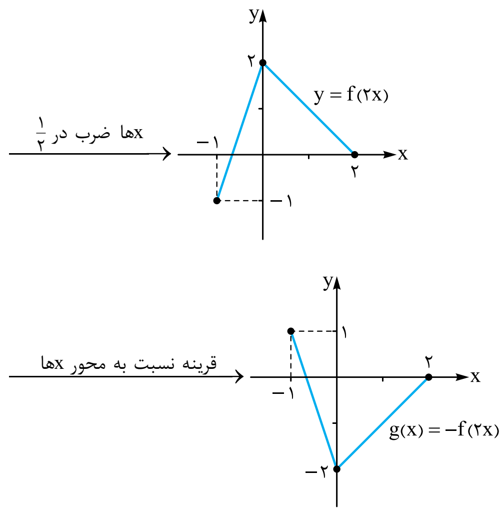
۲۱. در نمودار f، x را بر ۲ تقسیم کرده و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم:





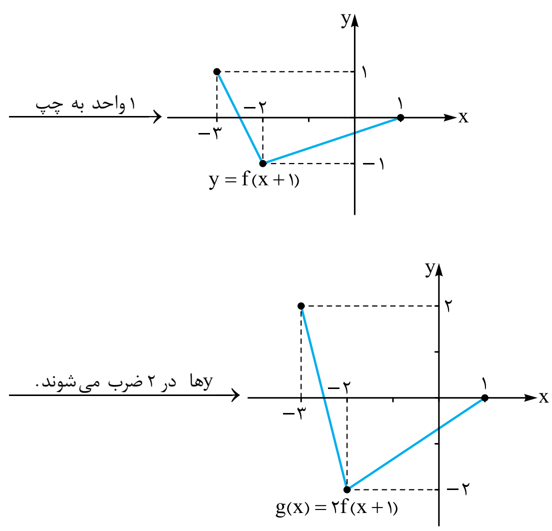
$\Rightarrow D_g=[-۱,۲], R_g=[-۳,۱]$

.۲۲



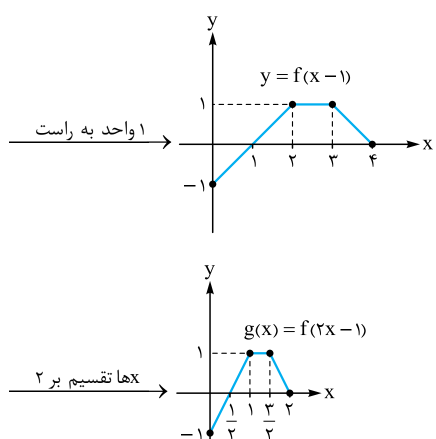
$\Rightarrow D_g = [-۱,۲], R_g = [-۲,۱]$

.۲۳



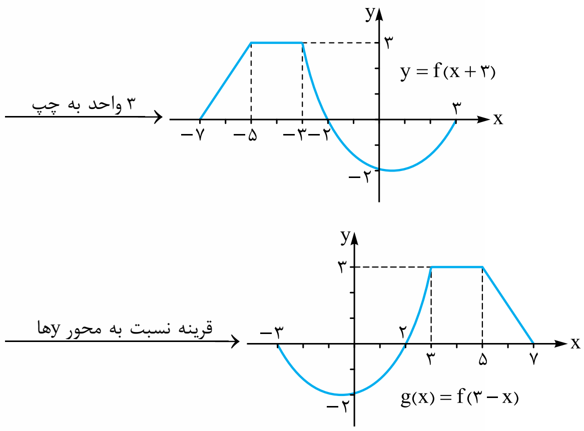
$\Rightarrow D_g = [-۳,۱], R_g = [-۲,۲]$

.۲۴



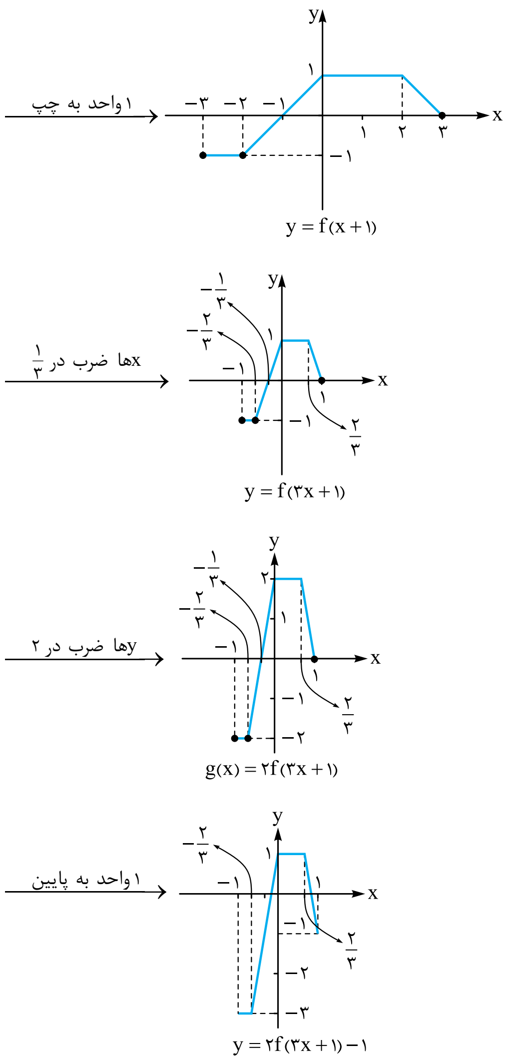
$\Rightarrow D_g = [۰,۲], R_g = [-۱,۱]$

.۲۵



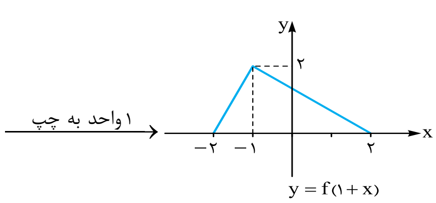
با توجه به نمودار: $\Rightarrow D_g = [-۳,۷], R_g = [-۲,۳]$

.۲۶

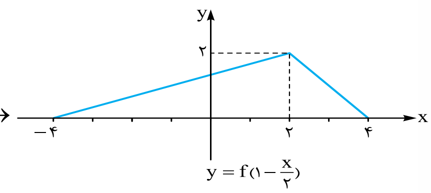


$\Rightarrow D_g = [-۱,۱], R_g = [-۳,۱]$

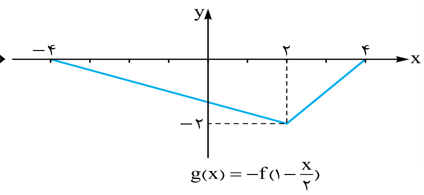
.۲۷



xها ضرب در ۲−



قرینه نسبت به محور xها



$$\Rightarrow\ D_g=[-۴,۴]\ ,\ R_g=[-۲,۰]$$

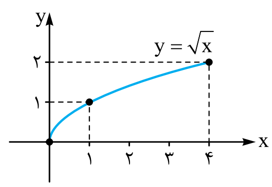
.۲۸ $f(x)=x^۲-۲x+۱=(x-۱)^۲$

$$f(x)=(x-۱)^۲\xrightarrow{\text{۲ واحد به پایین}}y=(x-۱)^۲-۲$$

$$\xrightarrow{\text{۱ واحد به چپ}}y=(x+۱-۱)^۲-۲\Rightarrow y=x^۲-۲$$

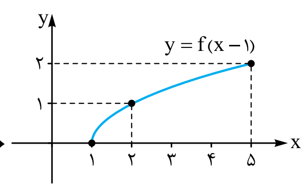
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}}y=-(x^۲-۲)\ \Rightarrow\ y=-x^۲+۲$$

.۲۹ الف)

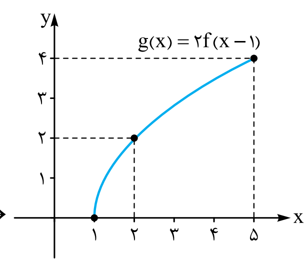


ب)

۱ واحد به راست

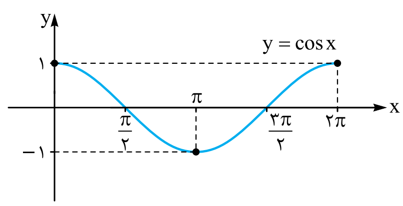


yها ضرب در ۲

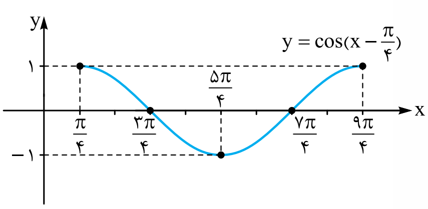


$$\Rightarrow\ D_g=[۱,۵],R_g=[۰,۴]$$

.۳۰

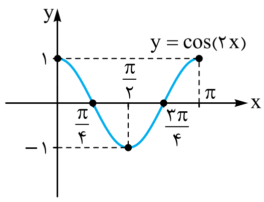


به سمت راست $\frac{\pi}{۴}$

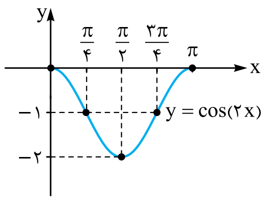


.۳۱

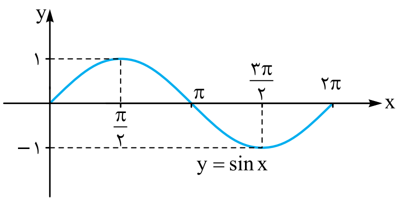
xها ضرب در $\frac{۱}{۲}$



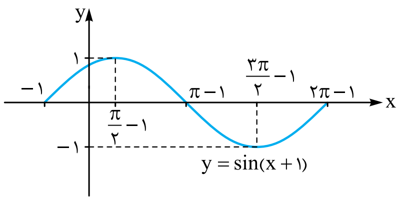
۱ واحد به پایین



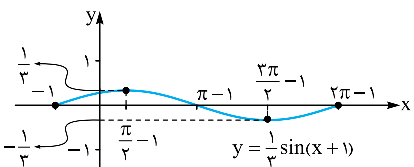
.۳۲



۱ واحد به چپ

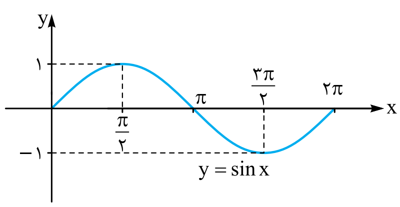


yها ضرب در $\frac{۱}{۳}$

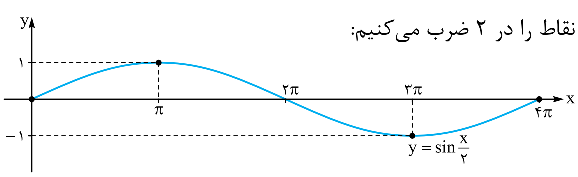


$$\Rightarrow\ D=[-۱,۲\pi-۱],R=[-\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۳}]$$

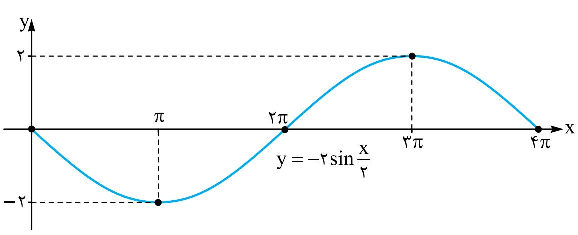
.۳۳



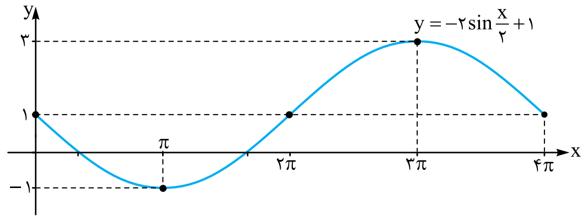
طول نقاط را در ۲ ضرب می‌کنیم:



yها ضرب در ۲ و قرینه
(yها ضرب در ۲−)

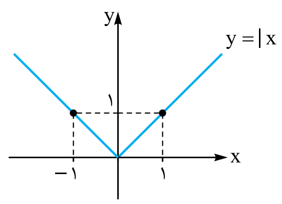


۱ واحد به بالا ←



$D=[۰,۴\pi], R=[-۱,۳]$

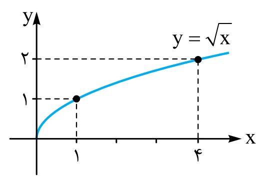
۳۴. نمودار تابع $y=|x|$ به صورت زیر است.



نمودار تابع $y=|x|$ در این شکل ابتدا نسبت به محور xها قرینه شده است، یعنی $y=-|x|$. سپس یک واحد به چپ و دو واحد به بالا منتقل شده است، پس ضابطهٔ نمودار به صورت $y=-|x+۱|+۲$ است.

۳۵. نمودار تابع $y=|x|$ در راستای محور xها با ضریب ۲ منقبض شده است؛ یعنی $y=|۲x|$ و سپس ۱ واحد به راست و یک واحد به پایین منتقل شده است، پس ضابطهٔ نمودار تابع به صورت $y=|۲(x-۱)|-۱=|۲x-۲|-۱$ است.

۳۶. نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت مقابل است:



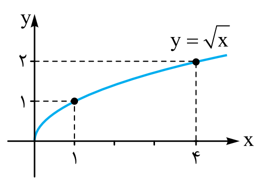
نمودار داده‌شده به اندازهٔ دو واحد به چپ و یک واحد به پایین منتقل شده است، پس $y=\sqrt{x+۲}-۱$.

۳۷. نمودار $y=\sqrt{x}$ در راستای قائم با ضریب ۳ منبسط شده است، پس $y=۳\sqrt{x}$.

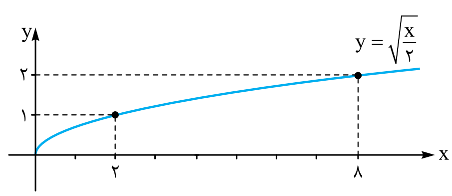
۳۸. نمودار $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور yها قرینه شده است و با ضریب ۳ در راستای محور xها منبسط شده است، پس $y=\sqrt{-\frac{۱}{۳}x}$.

۳۹. نمودار $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور xها قرینه شده است و سپس دو واحد به بالا انتقال یافته است، پس $y=-\sqrt{x}+۲$.

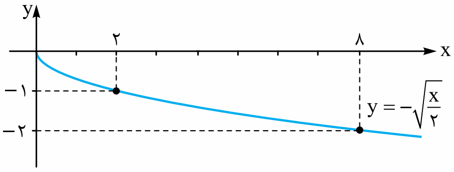
۴۰. ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم:



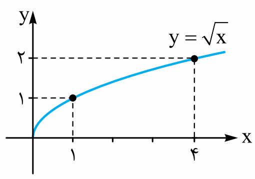
حال xها را در ۲ ضرب می‌کنیم:



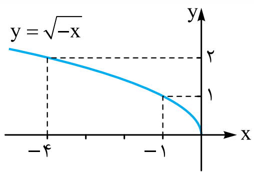
نمودار حاصل را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم:



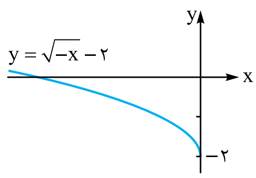
۴۱. ابتدا نمودار $y=\sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم:



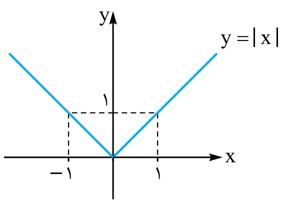
قرینه نسبت به محور yها ←



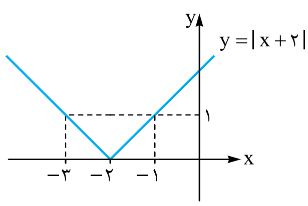
۲ واحد به پایین ←



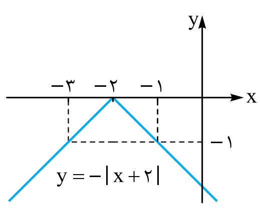
۴۲. ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم:



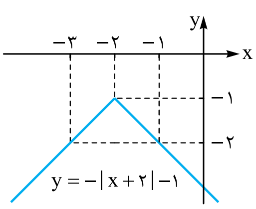
۲ واحد به چپ ←



قرینه نسبت به محور xها ←

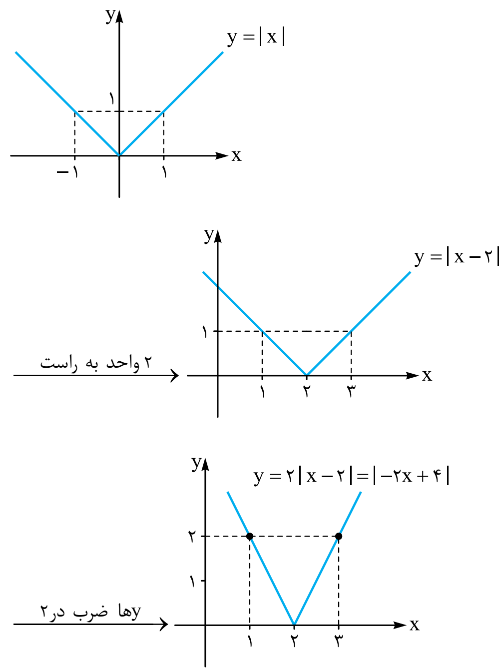


۱ واحد به پایین ←

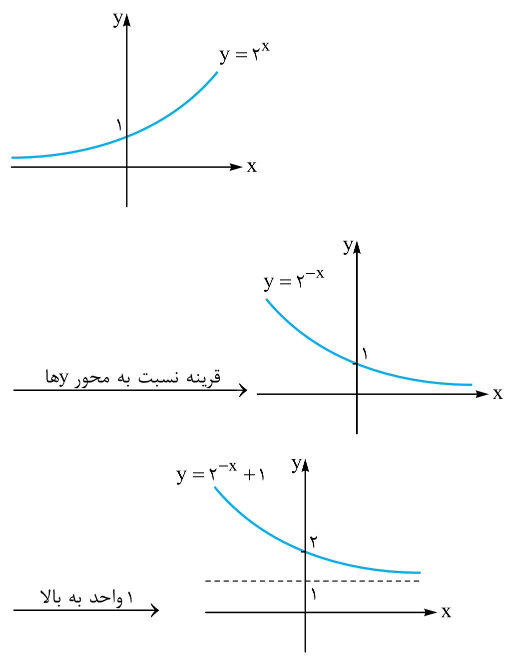


۴۳. ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

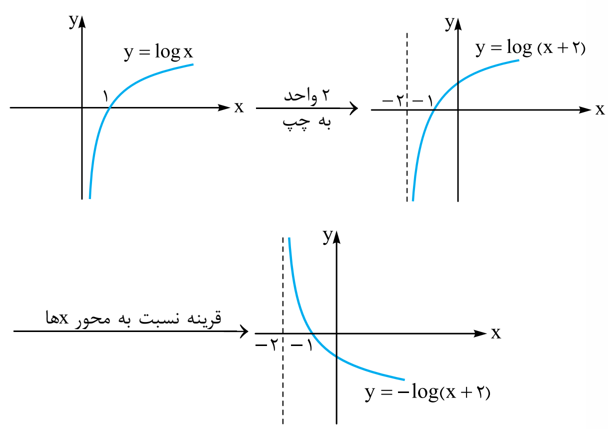
$$y=|-۲x+۴| \Rightarrow y=|-۲(x-۲)|=|۲(x-۲)|=۲|x-۲|$$



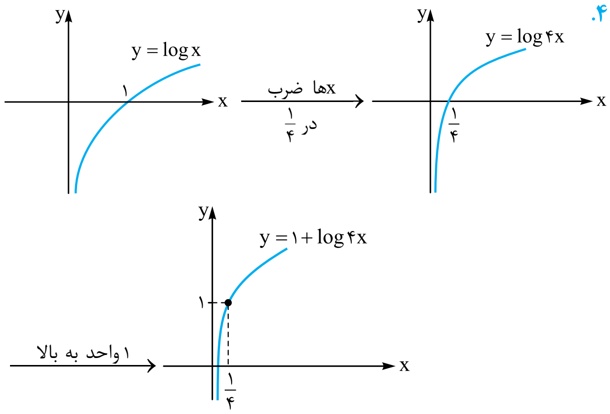
۴۴.



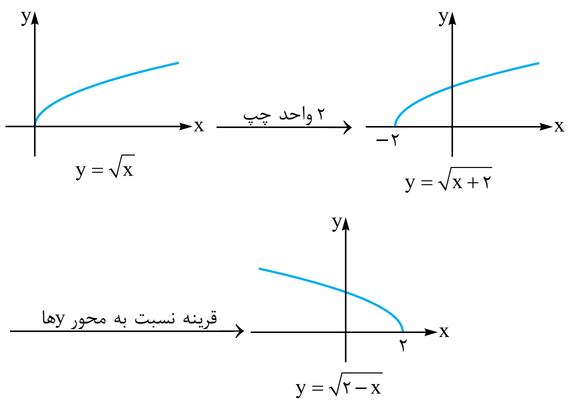
۴۵.



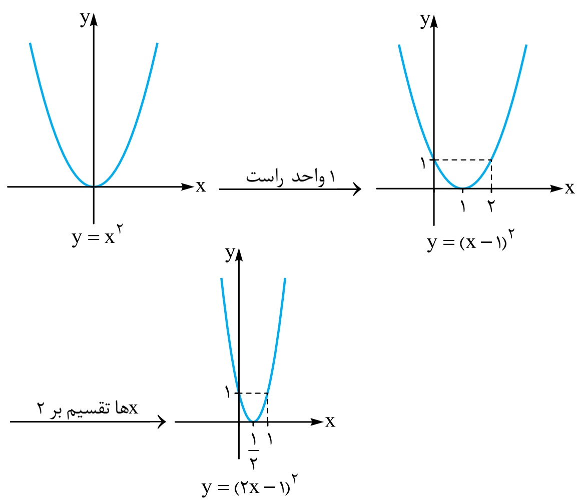
۴۶.



۴۷.



۴۸.



۴۹. می‌دانیم برای رسم نمودار $y=-۲f(۳x-۱)+۱$ به کمک نمودار $y=f(x)$، تبدیلات مربوط به محور xها این‌گونه است که نمودار تابع $y=f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده و سپس طول نقاط را بر ۳ تقسیم کنیم. بنابراین همین تبدیلات را روی طول نقطهٔ A انجام می‌دهیم تا طول نقطهٔ متناظر آن به دست آید:

$$x_A=۲ \xrightarrow{\text{۱ واحد راست}} x=۳ \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۳}} x=۱$$

همچنین تبدیلات مربوط به محور yها به این صورت است که ابتدا yها را در ۲− ضرب کرده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می‌کنیم. بنابراین:

$$y_A=-۱ \xrightarrow{\times(-۲)} y=۲ \xrightarrow{\text{۱ واحد به بالا}} y=۳$$

پس مختصات نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، عبارت است از: $A'(۱,۳)$.

۵۰. $y=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد چپ}} y=\sqrt{x+۱}$

$\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=\sqrt{۱-x} \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y=\sqrt{۱-x}+۲$

۵۱. $y=x^۲+x \xrightarrow[x\to x-۱]{\text{۱ واحد به راست}} y=(x-۱)^۲+(x-۱)$

$=x^۲-۲x+۱+x-۱ \Rightarrow y=x^۲-x$

$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=-(x^۲-x) \Rightarrow y=-x^۲+x$

فصل ۱ درس ۲
قسمت اول: تابع درجه سوم، توابع یکنوا
صفحهٔ ۱۳ تا ۱۸ کتاب درسی

سخن دبیر

این درس، درس ساده‌ایه. تو این درس اولش با تابع $y=x^۳$ و انتقال یافته‌های اون سر و کار داریم و بعدش صعودی و نزولی بودن تابع‌ها رو با توجه به نمودارهاشون بررسی می‌کنیم.

توابع چندجمله‌ای

هر تابع به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ که در آن ضرایب یعنی $a_۰, a_۱, \dots, a_{n-۱}, a_n$ اعداد حقیقی و توان‌ها عدد حسابی باشند، با فرض $a_n\neq ۰$ یک چندجمله‌ای درجه n نام دارد.

مثلاً $f(x)=۵x^۴-۷x^۳+\sqrt{۲}x^۲-۶x+\frac{۱}{۳}$ یک چندجمله‌ای درجه ۴ است.

تذکر دامنهٔ توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

مثال کدام‌یک از توابع زیر، چندجمله‌ای است؟ در صورت چندجمله‌ای بودن، درجهٔ آن‌ها را مشخص کنید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

الف) $y=\sqrt{۲}x^۵-\frac{۷}{۳}x^۲-\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ب) $y=۶x^{\frac{۱}{۲}}+x^۳-۵$

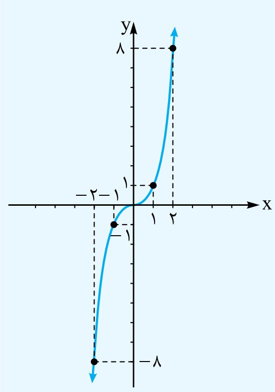
✓ **پاسخ:** الف) چون توان xها، اعداد حسابی هستند، پس این تابع، چندجمله‌ای است و چون بزرگ‌ترین توان x در آن برابر ۵ است، پس درجهٔ این چندجمله‌ای برابر ۵ می‌باشد.

ب) $\frac{۱}{۲}$ یک عدد حسابی نیست. یعنی توان x در جملهٔ $۶x^{\frac{۱}{۲}}$، یک عدد حسابی نیست، پس این تابع یک تابع چندجمله‌ای نیست.

تابع درجه سوم $y=x^۳$

دامنهٔ این تابع برابر $\mathbb{R}$ بوده و نمودار آن را با استفاده از نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	$y=x^۳$
−۲	−۸
−۱	−۱
۰	۰
۱	۱
۲	۸

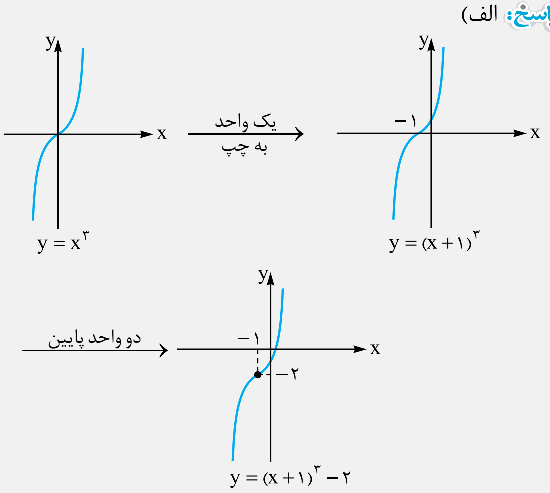


این تابع به تابع «لر» هم معروفه. چون که نمودارش مثل واژهٔ لر هستش. نمودار این تابع رو باید حفظ کنی.

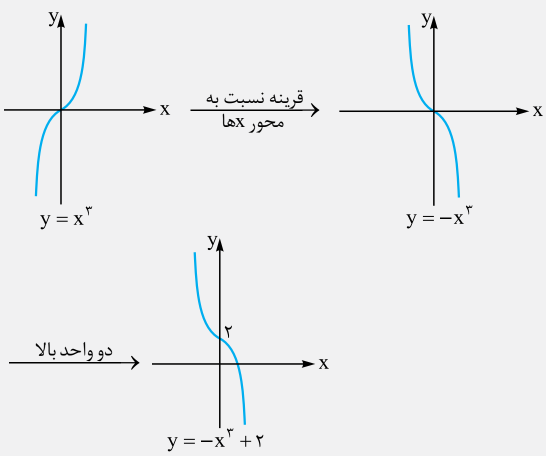
مثال به کمک نمودار $y=x^۳$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=(x+۱)^۳-۲$ ب) $y=-x^۳+۲$

✓ **پاسخ:** الف)



ب)



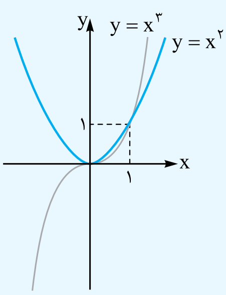
مقایسهٔ نمودارهای $y=x^۳$ و $y=x^۲$

با توجه به نمودار توابع $y=x^۳$ و $y=x^۲$، می‌توان گفت:

در بازهٔ $(۰,۱)$، نمودار $y=x^۲$ بالای نمودار $y=x^۳$ قرار دارد.

در بازهٔ $(۱,+\infty)$، نمودار $y=x^۳$ بالاتر از نمودار $y=x^۲$ قرار می‌گیرد.

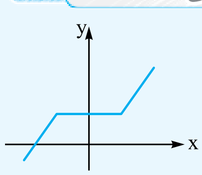
در بازهٔ $(-\infty,۰)$ نیز نمودار $y=x^۲$ است که بالای نمودار $y=x^۳$ قرار می‌گیرد.



توابع صعودی و توابع نزولی

تابع صعودی: تابع f را روی مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ صعودی می‌گوییم، هرگاه برای هر $x_۱, x_۲\in A$؛

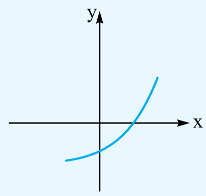
$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)\leq f(x_۲)$



به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع صعودی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، هرگز رو به پایین نمی‌ریم.

تابـع اکیـداً صعودی (صعـودی اکیـد): تابع f روی مجموعهٔ $A(A\subseteq D_f)$ صعـودی اکیـد است، هرگاه بـرای هر $x_1, x_2\in A$؛

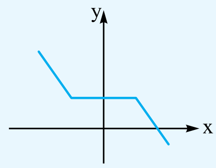
$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$$



به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع صعودی اکید از چپ به راست حرکت می‌کنیم، فقط رو به بالا می‌ریم.

تابع نزولی: تابع f را روی مجموعهٔ $A(A\subseteq D_f)$ نزولی می‌گوییم، هرگاه برای هر $x_1, x_2\in A$؛

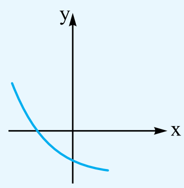
$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\geq f(x_2)$$



به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع نزولی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، هرگز رو به بالا نمی‌ریم.

تابع اکیداً نزولی (نزولی اکید): تابع f را روی مجموعهٔ $A(A\subseteq D_f)$ اکیداً نزولی می‌گوییم، هرگاه برای هر $x_1, x_2\in A$؛

$$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$$



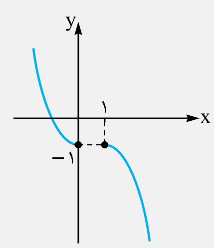
به زبان ساده، وقتی روی نمودار تابع اکیداً نزولی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، فقط رو به پایین می‌ریم.

چند نکته

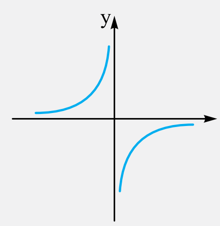
1. به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع **اکیداً یکنوا** می‌گوییم. هم‌چنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، **تابع یکنوا** می‌گوییم.
2. تابع ثابت، تنها تابعی است که روی یک مجموعه هم صعودی و هم نزولی بوده و لذا یکنوا است.
3. هر تابع اکیداً یکنوا، همواره یکنوا می‌باشد. اما عکس این مطلب درست نیست.
4. هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است، اما عکس این مطلب نادرست است.

مثال وضعیت یکنوایی هر کدام از توابعی که نمودار آن در زیر رسم شده است را بررسی کنید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

الف)



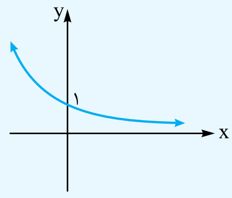
ب)



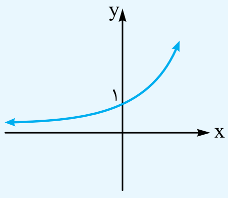
✔ **پاسخ:** الف) در بازه‌های $(-\infty,0]$ و $[1,+\infty)$ نزولی اکید است ولی در دامنه‌اش نزولی است. توجه کنید که به دلیل داشتن دو نقطه با عرض یکسان، نمی‌تواند در دامنه‌اش نزولی اکید باشد.

ب) در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,+\infty)$ صعودی اکید است، ولی در دامنهٔ خود یعنی $\mathbb{R}-\{0\}$ غیریکنوا است. توجه کنید که برای آن‌که یک تابع روی دامنه‌اش صعودی اکید باشد، لازم است وقتی روی نمودار آن حرکت می‌کنیم، فقط رو به بالا برویم. ولی در این‌جا نمودار تابع این‌طور نیست و در $x=0$ مجبوریم به سمت پایین حرکت کنیم.

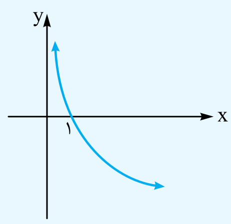
نکته نمودار توابع نمایی و لگاریتمی به صورت زیر است:



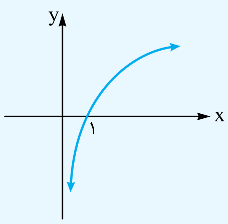
$y=a^x \ , \ 0<a<1$



$y=a^x \ , \ a>1$



$y=\log_a x \ , \ 0<a<1$



$y=\log_a x \ , \ a>1$

بنابراین توابع $y=a^x$ و $y=\log_a x$ با شرط $a>1$، صعودی اکید و با شرط $0<a<1$، اکیداً نزولی هستند.

به طور مثال توابع $y=3^x$ و $y=\log_5 x$ صعودی اکیدند و توابع $y=(\frac{1}{7})^x$ و $y=\log_{0/2} x$ نزولی اکیدند.

پاسخ سؤالات

۵۲. ۵

۵۳. یکنوا

۵۴. یکنوا

۵۵. ثابت

۵۶. صفر، زیرا فقط توابع ثابت در دامنه‌شان هم صعودی و هم نزولی هستند، پس:

$$y=ax+b \xrightarrow{a=0} y=b$$

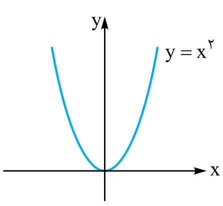
۵۷. $y=\sqrt[3]{x}$؛ زیرا:

$$y=x^3 \xrightarrow{\sqrt[3]{}} \sqrt[3]{y}=x \xrightarrow[\text{عوض می‌کنیم.}]{\text{جای x و y را}} y=\sqrt[3]{x}$$

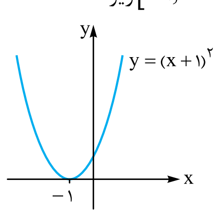
۵۸. $[\frac{8}{3},+\infty)$؛ زیرا:

$$(\frac{1}{2})^{3x-2}\leq\frac{1}{64}=(\frac{1}{2})^6 \xrightarrow[\text{اکیداً نزولی است.}]{\text{تابع } y=(\frac{1}{2})^x} 3x-2\geq 6 \Rightarrow x\geq\frac{8}{3}$$

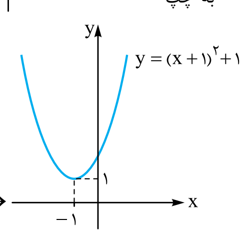
۵۹. $[-1,+\infty)$ زیرا:



$\xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{۱ واحد}}$



$\xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۱ واحد}}$



در بازهٔ $[-1,+\infty)$ صعودی است.

۶۰. صعودی؛ زیرا: اگر $a\le b \xrightarrow[\text{صعودی}]{g\,,f} \begin{cases} f(a)\le f(b)\\ g(a)\le g(b)\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} f(a)+g(a)\le f(b)+g(b)$

$\Rightarrow (f+g)(a)\le (f+g)(b) \Rightarrow$ $f+g$ صعودی است.

۶۱. صعودی؛ زیرا: اگر $a\le b \xrightarrow{f\ \text{نزولی است}} f(a)\ge f(b)$

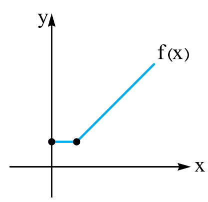
$\xrightarrow[k<0]{\text{طرفین}\times k} kf(a)\le kf(b) \Rightarrow$ تابع kf صعودی است.

۶۲. درست؛ زیرا: جمله با بیشترین درجه $=(-x)^2\times x^3=x^5$

۶۳. نادرست؛ برای تابع $f(x)=0$ درجه تعریف نمی‌شود. (تابع ثابت $f(x)=a$ و $a\neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ صفر است.)

۶۴. نادرست؛ برای چندجمله‌ای‌بودن، کافی است توان متغیر x، عدد حسابی باشد.

۶۵. نادرست؛ تابع به طور مثال تابع f که نمودار آن به صورت مقابل می‌باشد، در فاصلهٔ $[0,+\infty)$ صعودی است، اما اکیداً صعودی نیست:



۶۶. درست

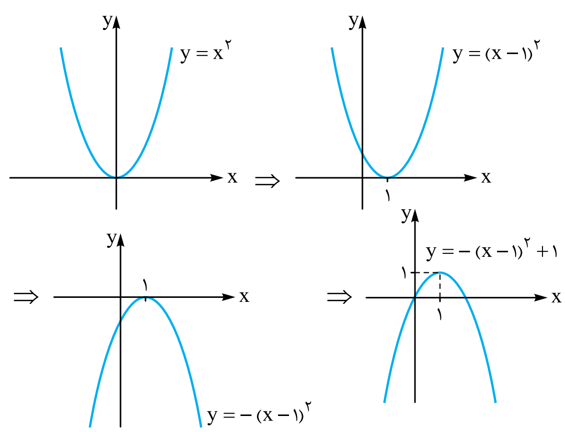
۶۷. نادرست؛ به عنوان مثال اگر $f(x)=x$ و $g(x)=2x$، آن‌گاه f و g هر دو اکیداً صعودی هستند، اما تابع $f-g$ اکیداً نزولی است:

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x-2x=-x$

۶۸. درست

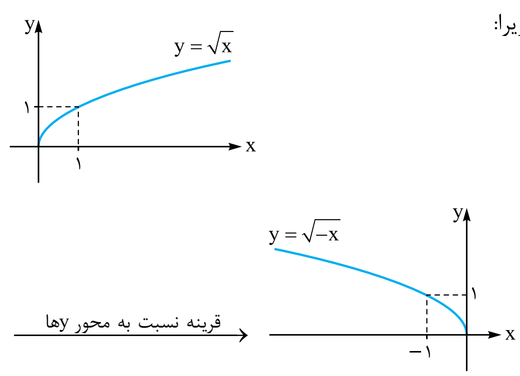
۶۹. نادرست؛ زیرا:

$y=\underbrace{-x^2+2x-1}+1=-(x^2-2x+1)+1=-(x-1)^2+1$

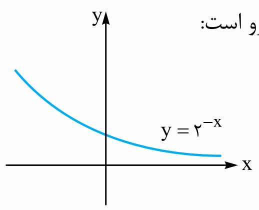


تابع در بازهٔ $(-\infty,3]$ نه صعودی است و نه نزولی.

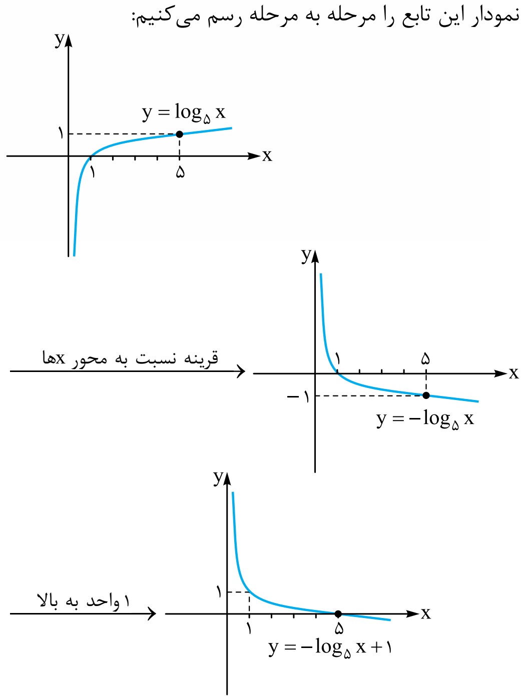
۷۰. درست، زیرا:



۷۱. درست؛ نمودار $y=2^{-x}$ به صورت روبه‌رو است:



۷۲. درست؛ نمودار این تابع را مرحله به مرحله رسم می‌کنیم:



۷۳. نادرست؛ تابع $y=\log_{10}x$، تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف لگاریتم جهت نامساوی عوض نمی‌شود:

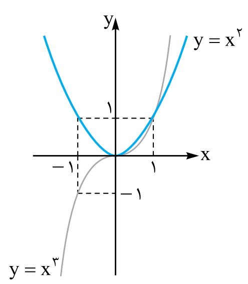
$\log(x-2)\le \log(2x-3) \Rightarrow x-2\le 2x-3 \Rightarrow x\ge 1\ \ (1)$

دامنه: $\begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2\\ 2x-3>0 \Rightarrow x>\frac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow x>2\ \ (2)$

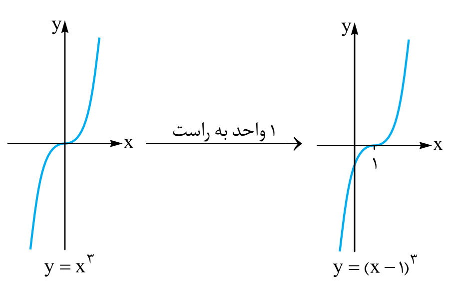
$(1),(2) \Rightarrow x>2$

۷۴. درجهٔ تابع f، ۷ است. $\Rightarrow$ جمله با بیشترین درجه $=x^2(-x)^5=-x^7$

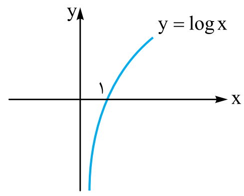
۷۵. با توجه به شکل روبه‌رو، نمودار تابع $g(x)=x^3$ در بازهٔ $(0,1)$ پایین‌تر از نمودار $f(x)=x^2$ قرار دارد.



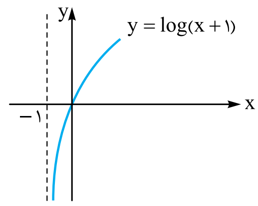
۷۶.



.۹۰

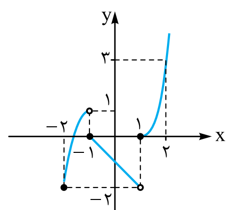


۱ واحد به چپ

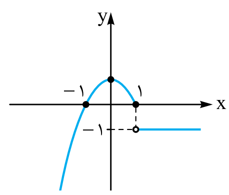


تابع در بازهٔ $(-۱,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

.۹۱ تابع در بازه‌های $[-۲,-۱)$ و $[۱,+\infty)$ صعودی و در بازهٔ $[-۱,۱)$ نزولی است.



.۹۲ تابع در $[-\infty,۰]\cup(۱,+\infty)$ صعودی و در بازهٔ $[۰,+\infty)$ نزولی است.



.۹۳ فرض کنیم که $a \not\le b$ (فرض خلف)، پس $a > b$ می‌باشد:

$$a > b \xrightarrow{\text{اکیداً صعودی } f} f(a) > f(b)$$

و این با فرض مسئله متناقض است، پس $a > b$ نیست و در نتیجه $a \le b$ می‌باشد.

.۹۴ $(\frac{۱}{۳})^{۲x+۱} \le \frac{۱}{۲۷} \Rightarrow (\frac{۱}{۳})^{۲x+۱} \le (\frac{۱}{۳})^{۳}$

$$\xrightarrow[\text{نزولی است.}]{\text{اکیداً } y=(\frac{۱}{۳})^x} ۲x+۱ \ge ۳ \Rightarrow x \ge ۱$$

.۹۵ $(\frac{۱}{۳})^{۱۰-۲x} \le \frac{۱}{۸۱} \Rightarrow ۳^{۲x-۱۰} \le ۳^{-۴}$

$$\xrightarrow{\text{اکیداً } y=۳^x \text{ صعودی است.}} ۲x-۱۰ \le -۴ \Rightarrow x \le ۳$$

.۹۶ $\log_۲(۳x+۱) \ge \log_۲(x-۱)$

$$\xrightarrow{\text{اکیداً } y=\log_۲ x \text{ صعودی است.}} ۳x+۱ \ge x-۱ \Rightarrow x \ge -۱ \quad (۱)$$

$$\text{دامنه}: \begin{cases} ۳x+۱>۰ \Rightarrow x > -\frac{۱}{۳} \\ x-۱>۰ \Rightarrow x>۱ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>۱ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x>۱$$

.۹۷ $\log_{\frac{۱}{۲}}(x+۳) \le ۴ = \log_{\frac{۱}{۲}}(\frac{۱}{۲})^{۴}$

$$\xrightarrow{\text{اکیداً } y=\log_{\frac{۱}{۲}} x \text{ نزولی است.}} x+۳ \ge (\frac{۱}{۲})^{۴} \Rightarrow x \ge \frac{-۴۷}{۱۶} \quad (۱)$$

$$\text{دامنه}: x+۳>۰ \Rightarrow x>-۳ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow x \ge \frac{-۴۷}{۱۶}$$

.۹۸ چون f اکیداً نزولی است، پس با حذف f از طرفین نامعادله، جهت نامساوی عوض می‌شود:

$$f(a^۲+۵a-۱) \le f(۲a^۲+۲a+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{نزولی اکید } f} a^۲+۵a-۱ \ge ۲a^۲+۲a+۱$$

$$\Rightarrow a^۲-۳a+۲ \le ۰ \Rightarrow (a-۲)(a-۱) \le ۰ \Rightarrow ۱ \le a \le ۲$$

a		۱		۲	
$(a-۲)(a-۱)$	+	۰	−	۰	+

فصل ۱ درس ۲
قسمت دوم: بخش‌پذیری و تقسیم

صفحه ۱۸ تا ۲۲ کتاب درسی

سخن دبیر

هدف این درس پیداکردن باقی‌مانده بدون عمل تقسیمه. آفرشم سه تا اتفاق فونده می‌شه که حالت کلی اتفاد چاق و لاغره. معمولاً یه سؤال از این قسمت تو نهایی میاد.

قضیهٔ تقسیم برای چندجمله‌ای‌ها

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ که درجهٔ آن بزرگ‌تر از صفر است، تقسیم کنیم آن‌گاه چندجمله‌ای‌های منحصربه‌فرد $q(x)$ و $r(x)$ وجود دارند به طوری که: $\boxed{f(x)=p(x).q(x)+r(x)}$

که در آن $r(x)=۰$ یا درجهٔ $r(x)$ از درجهٔ $p(x)$ کم‌تر است.

● در واقع اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر چندجمله‌ای $p(x)$ تقسیم کنیم، طبق تقسیم مقابل می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & p(x) \\ \cline{2-2} \cdots & q(x) \\ \hline r(x) & \end{array} \Rightarrow f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

قضیهٔ تقسیم در حالتی که مقسوم‌علیه درجهٔ اول است

اگر چندجمله‌ای $f(x)$ را بر عبارت درجهٔ اول $ax+b$ تقسیم کنیم، باقی‌ماندهٔ تقسیم حتماً یک عدد مانند r خواهد بود و داریم:

$$f(x)=(ax+b)q(x)+r$$

قضیه باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از $r=f(-\frac{b}{a})$.

به زبان ساده قضیهٔ فوق بیان می‌کند که برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر عبارت درجهٔ اول $ax+b$، کافی است ریشهٔ $ax+b=۰$ یعنی $x=-\frac{b}{a}$ را به جای x در $f(x)$ قرار دهیم.

مثال باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۱۰x-۷$ را بر $x-۲$ به دست آورید.

✓ **پاسخ:** ابتدا ریشهٔ مقسوم‌علیه را می‌یابیم: $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

حالا $x=۲$ را به جای x در $f(x)$ قرار می‌دهیم:

$$\text{باقی‌مانده} = f(۲)=۲(۲)^۳+۵(۲)^۲-۱۰\times۲-۷$$

$$=۱۶+۲۰-۲۰-۷=۹$$

پس باقی‌مانده برابر $r=۹$ می‌باشد.

مثال اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^4-4x^3+ax-3$ بر $x+1$ برابر -5 باشد، a را بیابید.

✔ **پاسخ:** داریم: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

طبق فرض باید داشته باشیم:

$$f(-1)=-5 \Rightarrow (-1)^4-4(-1)^3+a(-1)-3=-5$$

$$\Rightarrow 1+4-a-3=-5 \Rightarrow 2-a=-5 \Rightarrow a=7$$

بخش‌پذیری

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $p(x)$، اگر باقی‌مانده صفر شود، می‌گوییم $f(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال مقدار a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $f(x)=4x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌ماندهٔ آن بر $x+2$ برابر -3 باشد.

✔ **پاسخ:** $x-1=0 \Rightarrow x=1$

چون $f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، پس $f(1)=0$. از طرفی چون باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x+2$ برابر -3 است $(x+2=0 \Rightarrow x=-2)$، پس $f(-2)=-3$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(1)=0 \\ f(-2)=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4+a+b+1=0 \\ -32+4a-2b+1=-3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a+b=-5 \\ 4a-2b=28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+\cancel{2b}=-10 \\ 4a-\cancel{2b}=28 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 6a=18 \Rightarrow a=3\ ,\ a+b=-5 \xrightarrow{a=3} b=-8$$

تعمیم اتحاد چاق و لاغر

در ادامه سه اتحاد مهم که در واقع حالت کلی اتحاد چاق و لاغر هستند را می‌خوانیم:

چند نکته

۱ اگر n عدد **طبیعی دلخواه** باشد، آن‌گاه:

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots+a^{n-2}x+a^{n-1})$$

تو پرانتز دوم توانای x یکی یکی کم می‌شن و هر دفعه به توانای a اضافه می‌شه. علامت بین جمله‌ها تو پرانتز دوم همش مثبته.

تذکر در واقع اتحاد بالا نشان می‌دهد که x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. همچنین گفته می‌شود x^n-a^n با عامل $x-a$ تجزیه شده است.

مثال عبارت x^6-64 را با عامل $x-2$ تجزیه کنید.

✔ **پاسخ:** براساس اتحاد گفته‌شده می‌توان نوشت:

$$x^6-64=x^6-2^6$$

$$=(x-2)(x^5+2x^4+4x^3+8x^2+16x+32)$$

۲ اگر n عدد **طبیعی زوج** باشد، آن‌گاه داریم:

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots-a^{n-1})$$

اتحاد بالا میگه وقتی n زوج و پرانتز لاغر، x+a باشد، جملات پرانتز چاق یکی در میون مثبت و منفی می‌شه و بازم از توانای x یکی یکی کم و به توانای a اضافه می‌شه.

تذکر در واقع اتحاد بالا نشان می‌دهد که x^n-a^n بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n زوج باشد و توجه کنید که اتحاد فوق از تبدیل a به $-a$ از اتحاد نکتهٔ (۱) به دست آمده است.

مثال عبارت x^6-64 را با عامل $x+2$ تجزیه کنید.

✔ **پاسخ:** می‌توان نوشت $x^6-64=x^6-2^6$. چون توان‌ها زوج هستند، پس داریم:

$$x^6-2^6=(x+2)(x^5-2x^4+4x^3-8x^2+16x-32)$$

۳ اگر n عدد **طبیعی فرد** باشد، آن‌گاه داریم:

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots+a^{n-1})$$

اگر کمی به اتحادای گفته‌شده توی ۱، ۲ و ۳ دقت کنی، متوجه می‌شی که در دو حالتی که پرانتز لاغر x + a هستش، علامت بین جمله‌های تو پرانتز چاق یکی در میون مثبت و منفیه.

تذکر اتحاد بالا نشان می‌دهد که x^n+a^n وقتی بر $x+a$ بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

توجه کنید که اتحاد فوق از تبدیل a به $-a$ از اتحاد نکتهٔ (۱) به دست آمده است.

مثال عبارت x^7+128 را با عامل $x+2$ تجزیه کنید.

✔ **پاسخ:** چون توان فرد است، با توجه به اتحاد قبل داریم:

$$x^7+128=x^7+2^7$$

$$=(x+2)(x^6-2x^5+4x^4-8x^3+16x^2-32x+64)$$

پاسخ سؤالات

۹۹. نادرست؛ زیرا: $p(x)=2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3+2 \Rightarrow$ باقی‌مانده: $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{8}+2 \neq 0$

۱۰۰. درست؛ زیرا:

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده: $f(-2)=(-2)^3+2(-2)^2+3=-8+8+3=3$

۱۰۱. نادرست؛ x^n+a^n با شرط فردبودن n، بر $(x+a)$ بخش‌پذیر است؛ زیرا: $x+a=0 \Rightarrow x=-a$

$f(x)=x^n+a^n$

$\Rightarrow$ باقی‌مانده: $f(-a)=(-a)^n+a^n \xlongequal{\text{با شرط فردبودن n}} 0$

۱۰۲. درست

$x-a=0 \Rightarrow x=a$

$f(x)=x^n-a^n \Rightarrow$ باقی‌مانده: $f(a)=a^n-a^n=0$

۱۰۳. -2؛ زیرا: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

باقی‌مانده: $f(-1)=(-1)^2+k(-1)-1=-k=2 \Rightarrow k=-2$

۱۰۴. حداکثر ۱؛ زیرا درجهٔ چندجمله‌ای باقی‌مانده باید از درجهٔ چندجمله‌ای خارج قسمت یعنی $q(x)$ کم‌تر باشد.

۱۰۵. $x-k$

۱۰۶. زوج‌بودن n؛ زیرا: $x+a=۰ \Rightarrow x=-a$

$f(x)=x^n-a^n \Rightarrow$ باقی‌مانده: $f(-a)=(-a)^n-a^n$

$\xrightarrow{\text{اگر n زوج}} a^n-a^n=۰$

۱۰۷. $۲x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$

باقی‌مانده: $p(-\frac{۱}{۲})=۸(-\frac{۱}{۲})^۳-۴(-\frac{۱}{۲})^۲+۲=-۱-۱+۲=۰$

۱۰۸. $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

باقی‌مانده: $p(-۱)=۲ \Rightarrow ۱+k-۳=۲ \Rightarrow k=۴$

۱۰۹. $x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲$

باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x+۲$: $p(-۲)=-۸-۲a+۱=-۲a-۷$

باقی‌ماندهٔ $q(x)$ بر $x+۲$: $q(-۲)=۸+۲+۱=۱۱$

طبق فرض داریم: $p(-۲)=q(-۲) \Rightarrow -۲a-۷=۱۱ \Rightarrow a=-۹$

۱۱۰. $x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$

$p(۲)=۰ \Rightarrow ۸+۴a+۲b+۱=۰ \Rightarrow ۴a+۲b=-۹ \quad (۱)$

$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

$p(-۱)=۰ \Rightarrow -۱+a-b+۱=۰ \Rightarrow a-b=۰ \Rightarrow a=b \quad (۲)$

با جای‌گذاری (۲) در (۱) داریم:

$۴a+۲a=-۹ \Rightarrow ۶a=-۹ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow b=a=-\frac{۳}{۲}$

۱۱۱. باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x-۱$ برابر ۴ است. پس: $p(۱)=۴$. همچنین $p(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس $p(-۲)=۰$. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} p(۱)=۴ \\ p(-۲)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱+a+b=۴ \\ -۸+۴a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۳ \\ ۴a+b=۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-b=-۳ \\ ۴a+b=۸ \end{cases} \Rightarrow ۳a=۵$$

$$\Rightarrow a=\frac{۵}{۳}\ ,\ a+b=۳ \Rightarrow \frac{۵}{۳}+b=۳$$

$$\Rightarrow b=۳-\frac{۵}{۳} \Rightarrow b=\frac{۴}{۳}$$

۱۱۲. $x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

طبق فرض: $f(-۱)=۰ \Rightarrow ۱-a-۳=۰ \Rightarrow a=-۲$

$\Rightarrow f(x)=x^۲-۲x-۳$

$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow$ باقی‌مانده: $f(۲)=۴-۲(۲)-۳=-۳$

۱۱۳. باید داشته باشیم $p(۲)=۰$ و $p(-۱)=۳$. با حل دستگاه، a و b را می‌یابیم:

$$\begin{cases} p(۲)=۰ \\ p(-۱)=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸+۴a+۲b-۲=۰ \\ -۱+a-b-۲=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=-۶ \\ a-b=۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=-۶ \\ ۲a-۲b=۱۲ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۶a=۶ \Rightarrow a=۱\ ,\ b=-۵$$

۱۱۴. $$\begin{cases} f(۱)=۴ \\ f(-۱)=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۱+۱+a+b=۴ \\ -۱+۱-a+b=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=۲ \\ -a+b=۶ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} ۲b=۸ \Rightarrow b=۴\ ,\ a=-۲$$

$\Rightarrow f(x)=x^۳+x^۲-۲x+۴$

باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x-۲$ برابر است با: $f(۲)=۸+۴-۴+۴=۱۲$

۱۱۵. چون درجهٔ $x^۲-۱$ برابر ۲ است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۱$ به صورت $ax+b$ خواهد بود. بنابراین طبق قضیهٔ تقسیم می‌توان نوشت: $f(x)=(x^۲-۱)q(x)+ax+b$

از سوی دیگر بنا بر فرض داریم $f(۱)=۱$ و $f(-۱)=۳$. پس:

$$\begin{cases} f(۱)=۱ \\ f(-۱)=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۰+a+b=۱ \\ ۰-a+b=۳ \end{cases} \Rightarrow ۲b=۴ \Rightarrow b=۲\ ,\ a=-۱$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x^۲-۱$ به صورت $-x+۲$ می‌باشد.

۱۱۶. طبق فرض، چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x^۲+x-۲=(x+۲)(x-۱)$ بخش‌پذیر است. لذا بر $x+۲$ و $x-۱$ نیز بخش‌پذیر است. یعنی داریم:

$$\begin{cases} f(-۲)=۰ \\ f(۱)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۸+۴a-۲b-۲=۰ \\ ۱+a+b-۲=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a-۲b=۱۰ \\ a+b=۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۴a-۲b=۱۰ \\ ۲a+۲b=۲ \end{cases} \Rightarrow ۶a=۱۲ \Rightarrow a=۲\ ,\ b=-۱$$

$\Rightarrow f(x)=x^۳+۲x^۲-x-۲$

بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ برابر است با:

$f(۲)=۸+۸-۲-۲=۱۶-۴=۱۲$

۱۱۷. $x^۶-۱=(x-۱)(x^۵+x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$

۱۱۸. $x^۵+۱=(x+۱)(x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)$

۱۱۹. $x^۵+۳۲=x^۵+۲^۵$

$=(x+۲)(x^۴-۲x^۳+۴x^۲-۸x+۱۶)$

۱۲۰. $x^۶-۶۴=x^۶-۲^۶$

$=(x-۲)(x^۵+۲x^۴+۴x^۳+۸x^۲+۱۶x+۳۲)$

۱۲۱. $x^۵-۱=(x-۱)\ (x^۴+x^۳+x^۲+x+۱)$

۱۲۲. $x^۷+۱=(x+۱)\ (x^۶-x^۵+x^۴-x^۳+x^۲-x+۱)$

فصل ۲ درس ۱

قسمت اول: مفهوم دورهٔ تناوب و محاسبهٔ مقدار ماکزیمم و مینیمم و دورهٔ تناوب توابع سینوسی و کسینوسی

صفحهٔ ۲۴ تا ۲۷ کتاب درسی

سخن دبیر

تو این قسمت با مفهوم تناوب آشنا می‌شی و دورهٔ تناوب توابع سینوسی و کسینوسی و نیز ماکزیمم و مینیمم این دو تابع خیلی مهمه، تو نهایی هم خیلی وقتا ازش سؤال دادن.

تابع متناوب

تابع f را متناوب گوییم هرگاه عدد حقیقی و مثبت T موجود باشد، به طوری که دو شرط زیر برقرار باشد:

الف) برای هر $x \in D_f$، داشته باشیم $x \pm T \in D_f$.

ب) $f(x \pm T)=f(x)$

به کوچک‌ترین عدد مثبت T با دو ویژگی فوق، **دورهٔ تناوب** f می‌گوییم.