

مقدمه مؤلف

در ابتدا و قبل از هر کلام، از خداوند مهربان سپاس گزارم که مرا یاری کرد تا از علم اندک خود بهره بگیرم و توانم را در جهت خدمت به دانش‌آموزان دوست‌داشتنی و پرتلاش سرزمین عزیزم صرف کنم. نتیجه این تلاش، کتاب حاضر است. کتاب «بانک نهایی حسابان» که با رویکرد جدید نسبت به امتحانات نهایی و ارزش‌یابی مفهومی و سنجش قدرت تحلیل و استنباط دانش‌آموزان، تألیف شده است. امیدوارم، پس از مطالعه درس‌نامه و حل سؤالات متنوع این کتاب، لذت‌بردن شما از درس حسابان چندین برابر شود و در نتیجه آن با اعتماد به نفس واقعی، فقط به نمره بیست فکر کنید!

بعضی از ویژگی‌های این کتاب عبارت‌اند از:

- ۱ پوشش کامل فعالیت‌ها، مثال‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌های کتاب درسی
 - ۲ درس‌نامه مختصر اما بسیار مفید، کامل و قابل درک همراه با مثال
 - ۳ پاسخ‌های کاملاً تشریحی و مطابق با راه حل‌های کتاب درسی
 - ۴ طراحی سؤالات به سبک نهایی و کمی سطح بالاتر برای آمادگی بیشتر شما
 - ۵ چیدمان سؤالات به ترتیب از ساده به دشوار برای تسلط بیشتر
 - ۶ ارائه چند دوره امتحان نهایی به همراه پاسخ کامل و توضیحات لازم
 - ۷ ارائه بارم‌بندی برای هر فصل و ریزبارم در پاسخ‌نامه امتحانات
- این ویژگی‌های خوب و منحصر به فرد نتیجه کار با یک تیم توانمند است.

بنابراین تشکر و قدردانی می‌کنم از:

- جناب آقای کمیل نصری، مدیر محترم مجموعه خیلی سبز
- جناب آقای احمد علی‌نژاد، مدیر تألیف پرتوان و مستعد انتشارات
- سرکار خانم مریم بیوک‌زاده و مرضیه رضایت که زحمت ویراستاری علمی و ادبی کتاب را کشیدند.

فهرست مطالب

درستنامه + پاسخ	سؤال	
فصل اول: جبر و معادله		
۴۵	۵	درس ۱- قسمت اول: مجموع جملات دنباله هندسی
۴۶	۶	درس ۱- قسمت دوم: مجموع جملات دنباله هندسی
۴۹	۶	درس ۲- قسمت اول: روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم
۵۱	۷	درس ۲- قسمت دوم: صفرهای تابع و روش هندسی حل معادلات
۵۶	۹	درس ۳- معادلات گویا و گنگ
۵۹	۱۰	درس ۴- قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۶۵	۱۲	درس ۵- آشنایی با هندسه تحلیلی
فصل دوم: تابع		
۷۱	۱۴	درس ۱ و ۲: آشنایی بیشتر با تابع و انواع آن
۷۹	۱۷	درس ۳: وارون تابع
۸۳	۱۸	درس ۴: اعمال روی توابع
فصل سوم: توابع نمایی و لگاریتمی		
۸۸	۲۱	درس ۱: تابع نمایی
۹۲	۲۲	درس ۲: تابع لگاریتمی و لگاریتم
۹۵	۲۴	درس ۳: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی
فصل چهارم: مثلثات		
۹۹	۲۶	درس ۱: رادیان
۱۰۲	۲۸	درس ۲: نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا
۱۰۶	۲۹	درس ۳: توابع مثلثاتی
۱۱۲	۳۱	درس ۴: روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا
فصل پنجم: حد و پیوستگی		
۱۱۵	۳۳	درس ۱: مفهوم حد و فرایندهای حدی
۱۱۹	۳۵	درس ۲: حدهای یک‌طرفه (حدهای چپ و راست)
۱۲۲	۳۷	درس ۳: قضایای حد
۱۲۶	۳۹	درس ۴: محاسبه حد توابع کسری در حالت $\frac{0}{0}$ (صفرصفرم)
۱۳۰	۴۱	درس ۵: پیوستگی
ضمیمه: امتحانات شبیه‌ساز نهایی		
۱۴۵	۱۳۸	امتحان شماره ۱: نوبت اول (میان سال)
۱۴۶	۱۳۹	امتحان شماره ۲: نوبت اول (میان سال)
۱۴۷	۱۴۰	امتحان شماره ۳: نهای خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)
۱۴۸	۱۴۱	امتحان شماره ۴: نهای خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)
۱۵۰	۱۴۲	امتحان شماره ۵: نهای خرداد ۱۴۰۲ (غایبین موجه)
۱۵۱	۱۴۳	امتحان شماره ۶: نهای شهریور ۱۴۰۲

جبر و معادله

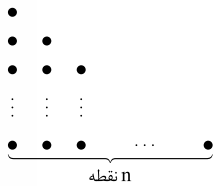
فصل ۱

درس ۱

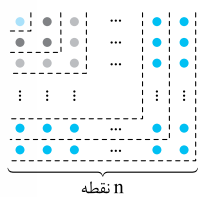
قسمت اول: مجموع جملات دنباله حسابی

صفحه ۱۴ کتاب درسی

درس‌نامه ۱ - قسمت اول را در صفحه ۴۵ ببینید.



(فعالیت کتاب درسی)

۱- مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n را با توجه به شکل (بدون استفاده از فرمول S_n) به دست آورید.

(تمرین کتاب درسی)

۲- با استفاده از شکل مقابل حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = ?$$

۳- مجموع جملات دنباله حسابی $293, \dots, 2, -1, -4, \dots$ را به دست آورید.

(مشابه تمرین و کار در کلاس کتاب درسی)

۴- مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۳ را به دست آورید.

۵- مجموع همه اعداد طبیعی ۳ رقمی که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده ۲ دارند را به دست آورید.

۶- مجموع اعداد فرد طبیعی بزرگ‌تر از ۵۱ و کوچک‌تر از ۵۰۱ که در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۲ می‌دهند را به دست آورید.

۷- مجموع چهل جمله اول یک دنباله حسابی با جمله اول ۵، برابر ۲۵۴۰ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۸- در دنباله حسابی $3, 9, 15, \dots$ حداقل چند جمله (با شروع از جمله اول) را با هم جمع کنیم تا حاصل از 600° بیشتر شود.۹- مجموع چند جمله (شروع از جمله اول) از دنباله حسابی $2, 6, 10, \dots$ ، از جمله چهارم و یکم آن دو واحد بیشتر است؟

۱۰- در یک دنباله حسابی جمله سوم برابر ۱۵- و مجموع ۱۳ جمله اول این دنباله برابر ۶۵ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۱۱- در چهل جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات با شماره‌های فرد 170° و مجموع جملات با شماره‌های زوج 210° است، جمله اول و قدرنسبت دنباله را مشخص کنید.۱۲- در یک دنباله حسابی مجموع ۶ جمله اول، $1/5$ برابر مجموع ۸ جمله اول است. مجموع چند جمله اول این دنباله برابر صفر است؟۱۳- اگر $S_n = 2n^2 + n$ ، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد، مطلوب‌ست:

الف) قدرنسبت دنباله ب) مجموع جملات چهارم تا دهم دنباله

(فعالیت کتاب درسی)

۱۴- ثابت کنید مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$ به دست می‌آید.۱۵- نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر دنباله باشند، آن‌گاه: $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.۱۶- روی محیط دایره‌ای 30° نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

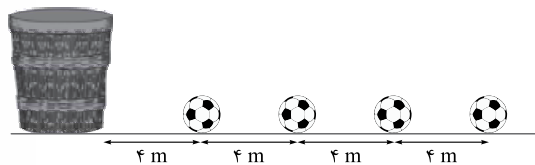
۱۷- در یک مسابقه تعداد زیادی توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۴ متر از هم

قرار دارند. مطابق شکل فاصله توپ اول تا سبد نیز ۴ متر است. دوندای از کنار سبد شروع به

دویدن کرده و توپ اول را برمی‌دارد و تا سبد حمل می‌کند و آن را به سبد می‌اندازد و سپس

برای توپ‌های بعدی نیز این کار را ادامه می‌دهد. اگر او در پایان مسابقه 168° متر دویده باشد،

او چند توپ به سبد انداخته است؟



(مشابه مثال کتاب درسی)

درس ۱

قسمت دوم: مجموع جملات دنباله هندسی

صفحه ۴ تا ۹ کتاب درسی

درس نامه ۱ - قسمت دوم را در صفحه ۴۶ ببینید.

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

مجموع 10° جمله اول دنباله های هندسی زیر را به دست آورید.

$$-18, \dots, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, -19$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۲۰- اگر $a_n = 3^{n-1}$ ، جمله عمومی یک دنباله هندسی باشد، مجموع چند جمله اول این دنباله برابر ۱۲۱ است؟۲۱- مجموع چند جمله اول دنباله هندسی $\dots, \frac{4}{11}, \frac{2}{11}$ با مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی $\dots, 12, 6$ برابر است؟

۲۲- مجموع شش جمله اول یک دنباله هندسی ۶۵ برابر مجموع سه جمله اول آن است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

۲۳- در یک دنباله هندسی جمله هفتم ۵ برابر جمله سوم است. مجموع ۱۲ جمله اول آن چند برابر مجموع ۸ جمله اول آن است؟

۲۴- حداقل چند جمله از دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}$ را با هم جمع کنیم تا حاصل از 3° بیشتر شود؟۲۵- در یک دنباله هندسی که 2° جمله دارد، مجموع جملات با شماره های فرد $\frac{1}{5}$ مجموع همه جملات است. قدرنسبت را به دست آورید.

(فعالیت کتاب درسی)

۲۶- ثابت کنید مجموع n جمله اول دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q از رابطه $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ (با $q \neq 1$) می آید.

(تمرین کتاب درسی)

۲۷- برای عدد حقیقی a ($a \neq 1$) و عدد طبیعی n :

الف) حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت الف) نتیجه بگیرید که:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

۲۸- شخصی در خانه اول یک صفحه شطرنجی 4×4 ، ۱ دانه گندم، در خانه دوم، ۲ دانه گندم و به همین صورت در هر خانه، ۲ برابر خانه قبلی گندم قرار می دهد.

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

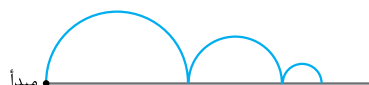
اگر وزن هر دانه گندم یک گرم باشد، او در مجموع تقریباً چند کیلوگرم گندم دارد؟

۲۹- تویی را از هر ارتفاعی رها کنیم، پس از برخورد با زمین، به اندازه ۲۵ درصد ارتفاع قبلی خود بالا می رود. اگر این توپ را از زمین به هوا پرتاب کنیم تا به ارتفاع ۵۰ متری برسد، این توپ در لحظه پنجمین برخورد به زمین، در مجموع چه مسافتی را طی کرده است؟

(مشابه مثال کتاب درسی)

۳۰- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم، سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم؛ پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

(تمرین کتاب درسی)

۳۱- وسط اضلاع مربعی به ضلع ۴ واحد را به هم وصل می کنیم تا مربع جدیدی ایجاد شود، سپس این کار را متوالیاً ادامه می دهیم تا مربع های کوچک تری ایجاد شود. حداقل این کار را چند بار انجام دهیم تا مجموع مساحت همه مربع های ایجاد شده از $99/5$ درصد محیط مربع اولیه بزرگ تر باشد؟۳۲- مطابق شکل، مورچه ای روی نیم دایره ای حرکت می کند که مساحت اولین نیم دایره 8π است. بعد از هربار رسیدن مورچه به زمین، مساحت نیم دایره بعدی $\frac{3}{4}$ کاهش پیدا می کند. بعد از حداقل چندمین رسیدنمورچه به زمین بعد از شروع حرکت، فاصله مورچه تا مبدأ حرکت بیشتر از $15/98$ است؟۳۳- حاصل عبارت $A = \frac{1+t+t^2+\dots+t^9}{1+t^2+t^4+\dots+t^{18}}$ به ازای $t = \sqrt{3} - 1$ را به دست آورید.۳۴- حاصل $A = \frac{2-4+8-16+\dots-1024}{1+4+7+10+\dots+58}$ را به دست آورید.

درس ۲

قسمت اول: روابط بین ضرایب و ریشه های معادله درجه دوم

صفحه ۱۷ تا ۱۹ کتاب درسی

درس نامه ۲ - قسمت اول را در صفحه ۴۹ ببینید.

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۳۵- مجموع ریشه های معادله $0 = 5x^2 - 3x - 1$ ، سه برابر حاصل ضرب ریشه های آن است.

۳۶- مستطیلی که محیط و مساحت آن ۶ باشد، وجود ندارد.

۳۷- دو عدد که مجموع آن ها ۵ و حاصل ضرب آن ها ۳ باشد، ریشه های معادله $0 = 2x^2 - 10x + 6$ هستند.

جاهای خالی را پر کنید:

۳۸- اگر α و β ریشه های معادله $0 = x^2 - x - 4$ باشند، مجموع معکوس ریشه ها برابر است.۳۹- مجموع ریشه های معادله $x^3 - x + 3 = x^2(x+1)$ برابر است.

- ۴۰- اگر m برابر باشد، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله $2x^2 + 3mx + m - 2 = 0$ با هم برابرند.
 ۴۱- مقدار m را طوری به دست آورید که مجموع ریشه‌های معادله $x^2 - (3m+1)x - m^2 = 0$ ، دو برابر حاصل ضرب آن‌ها باشد.
 ۴۲- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ باشند، حاصل عبارات خواسته شده را به دست آورید.

$$\frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\alpha-1} = \alpha^2 + \beta^2$$

$$43- \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله } x^2 - mx - 1 = 0 \text{ هستند. } (m \neq 0)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2m - m^2 \text{ مقدار } m \text{ را طوری بیابید که باشد.}$$

$$44- \text{ در معادله } 2x^2 + (6k-1)x - 3k = 0 \text{ مقدار } k \text{ را طوری بیابید که:}$$

۴۵- ریشه‌های معادله قرینه هم باشند. α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + m - 1 = 0$ ، دو برابر ریشه دیگر باشد، مقدار m را به دست آورید.

$$46- \alpha \text{ و } \beta \text{ با شرط } \alpha > \beta \text{ ریشه‌های معادله } 3x^2 - 12x + m^2 = 0 \text{ هستند. اگر اختلاف } \alpha \text{ و } \beta \text{، دو واحد باشد، مقادیر } m \text{ را به دست آورید.}$$

$$47- \text{ یکی از ریشه‌های معادله } 3x^2 - mx = 24 \text{، مربع ریشه دیگر آن است. مقدار } m \text{ را به دست آورید.}$$

$$48- \text{ معادله درجه دومی تشکیل دهید که اعداد } 3 - 2\sqrt{2} \text{ و } 3 + 2\sqrt{2} \text{ ریشه‌های آن باشند.}$$

$$49- \text{ معادله درجه دومی تشکیل دهید که یکی از ریشه‌های آن، سه برابر ریشه دیگر آن باشد. چند معادله با این ویژگی وجود دارد؟}$$

$$50- \text{ اگر مجموع دو عدد } \frac{11}{6} \text{ و حاصل ضرب آن‌ها } -\frac{1}{3} \text{ باشد، اختلاف این دو عدد را بیابید.}$$

$$51- \text{ اضلاع مستطیلی را به دست آورید که محیط و مساحت آن به ترتیب } 12 \text{ و } 4 \text{ باشند.}$$

$$52- \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله } x^2 - 2x - 4 = 0 \text{ باشند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن } 2\alpha \text{ و } 2\beta \text{ باشد.}$$

$$53- \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله درجه دوم } 3x^2 - x - 5 = 0 \text{ باشند، معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن معکوس ریشه‌های معادله داده شده باشند.}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه مثال کتاب درسی)

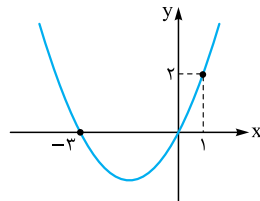
صفحه ۱۱۹ کتاب درسی

قسمت دوم: صفرهای تابع و روش هندسی حل معادلات

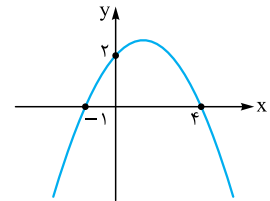
درس ۲

درس‌نامه ۲ - قسمت دوم را در صفحه ۵۱ ببینید.

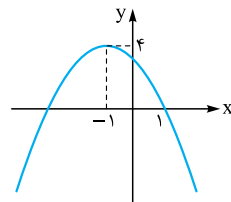
(مشابه مثال کتاب درسی)

ضابطه سهمی‌های زیر که به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است را مشخص کنید.

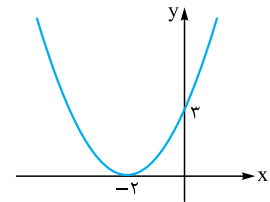
-۵۵



-۵۴



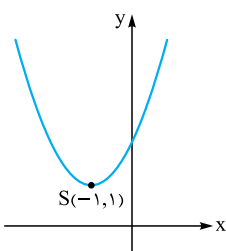
-۵۷



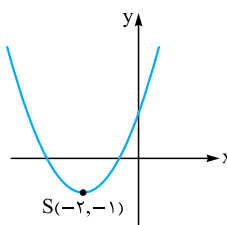
-۵۶

مختصات رأس هر یک از سهمی‌های زیر با ضابطه کلی $y = ax^2 + bx + c$ با شرط $|a| = 1$ داده شده است. ضابطه تابع را مشخص کنید و صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید.

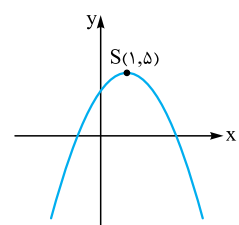
(مشابه تمرین کتاب درسی)



-۶۰

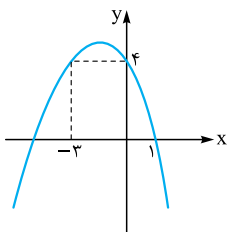


-۵۹

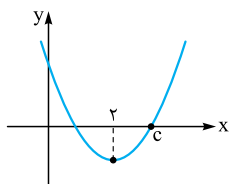


-۵۸

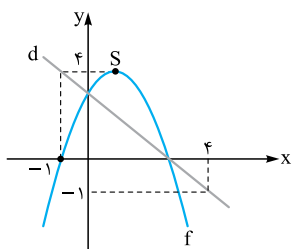
۶۱- شکل مقابل، نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است، ضابطهٔ سهمی و ماکزیمم آن را به دست آورید.



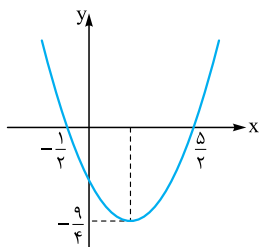
۶۲- شکل مقابل، نمودار سهمی $y = x^2 + bx + c$ است. صفرهای تابع را به دست آورید.



۶۳- سهمی f و خط d روی محورهای مختصات متقاطع هستند. ضابطهٔ تابع f را به دست آورید.

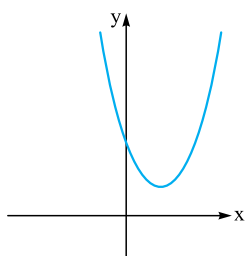


۶۴- ضابطهٔ سهمی مقابل را به دست آورید.

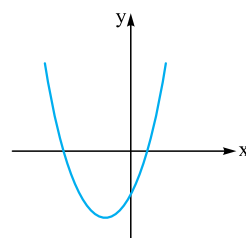


هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. در هر مورد علامت a ، b ، c و علامت صفرهای تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

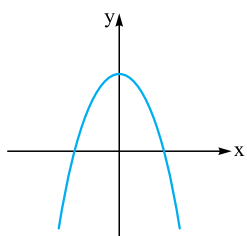
(کار در کلاس کتاب درسی)



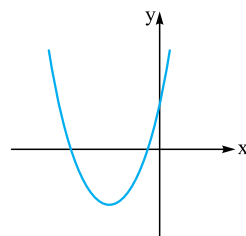
۶۶-



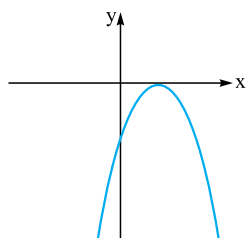
۶۵-



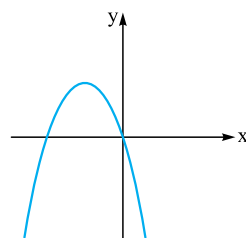
۶۸-



۶۷-



۷۰-



۶۹-

معادلات زیر را در نظر بگیرید. بدون حل آن‌ها و با استفاده از Δ ، S ، Δ (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل ضرب ریشه‌ها)، تعداد و علامت ریشه‌های معادله را مشخص کنید.

(مشابه فعالیت کتاب درسی)

$$3x^2 + 2x - 2 = 0 \quad -72$$

$$2x^2 + 5x + 1 = 0 \quad -71$$

$$-x^2 + 3x - 1 = 0 \quad -74$$

$$9x^2 + 12x + 4 = 0 \quad -73$$

۷۵- اگر $x = 1$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = 2x^2 + 2mx^2 - 3x - 3m$ باشد. صفرهای دیگر تابع را در صورت وجود به دست آورید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۷۶- نمودار تابع $f(x) = x^2 - kx^2 - 3x + p$ ، محورهای مختصات را در نقاطی به طول -2 و عرض 2 قطع می‌کند. صفرهای تابع $f(x)$ را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$g(x) = x^4 - 8x \quad -78$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x \quad -77$$

$$h(x) = (x-1)(x^2+1) - (x-1)^3 \quad -80$$

$$k(x) = 2x^3 + 2x^2 + 5x \quad -79$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

معادلات زیر را حل کنید.

$$x^6 - 6x^3 - 16 = 0 \quad -82$$

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = 0 \quad -81$$

$$(3 - x^2)^2 - 9(3 - x^2) + 14 = 0 \quad -84$$

$$\left(\frac{x^2}{5} + 1\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{5} + 1\right) + 6 = 0 \quad -83$$

$$(x^2 - 2x + 1)^2 + (x-1)^2 = 2 \quad -86$$

$$(x^2 - 3x)^2 + 6x - 2x^2 = 8 \quad -85$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادلات زیر را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

$$|x+1| = 1 - x^2 \quad -88$$

$$|x-1| = x^2 - x - 1 \quad -87$$

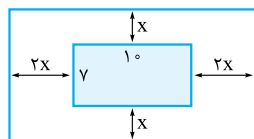
$$-|x-2| + 1 = x^2 \quad -90$$

$$(x+1)^2 + 1 = -x \quad -89$$

۹۱- نمودار دو سهمی $f(x) = x^2 + mx + 2$ و $g(x) = x^2 - 2x + m + 3$ در نقطه‌ای به طول $x = 2$ متقاطع هستند. مقدار $f(m)$ را به دست آورید.

۹۲- اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند، نشان دهید: $ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

۹۳- مطابق شکل، عکسی به ابعاد 10° و 7° درون قابی قرار دارد. اگر مساحت قاب 160 باشد، مقدار x را به دست آورید.



(مشابه تمرین کتاب درسی)

۹۴- طول یک کاشی از 3 برابر عرض آن 1 سانتی‌متر بیشتر است. برای کاشی کردن دیواری مستطیلی به مساحت 20 متر مربع، 1000 کاشی مصرف شده است.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

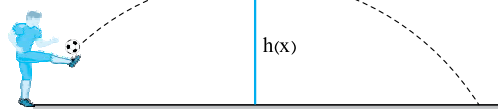
ابعاد کاشی را به دست آورید.

۹۵- یک توپ فوتبال بر اثر ضربهٔ بازیکن طبق شکل زیر حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ

$$h(x) = -0.05x(x - 50)$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(x بر حسب متر است.)



الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد؟

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

۹۶- مجموع پول رضا و نگار 55 تومان است. اگر رضا 10 تومان از پول خود را به نگار بدهد، حاصل ضرب پول‌های باقی‌ماندهٔ آن‌ها 450 تومان خواهد شد. پول اولیهٔ

نگار چه قدر بوده است؟

(مشابه تمرین کتاب درسی)

معادلات زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{x} + x = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \quad -98$$

$$\frac{1}{x} - 2 = -x \quad -97$$

(تمرین کتاب درسی)

$$\frac{3y + 5}{y^2 + 5y} + \frac{y + 4}{y + 5} = \frac{y + 1}{y} \quad -100$$

$$\frac{k-1}{2k-k^2} - \frac{k+1}{k} = -2 \quad -99$$

(کار در کلاس کتاب درسی)

$$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} = 3 \quad -102$$

$$\frac{x}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{x - x^2} = \frac{x+1}{x^2 - 3x} \quad -101$$

$$103- \text{جواب‌های معادله } \frac{1}{x+2} - \frac{x^2 - 9x - 2}{x^2 + 8} = \frac{6x}{x^2 - 2x + 4} \text{ را به دست آورید.}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & x < 0 \\ b + 1 & x = 0 \\ |x^2 + a| & x > 0 \end{cases}$$

(مشابه تمرین کتاب درسی)

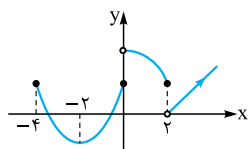
$$f(x) = \begin{cases} \frac{a \sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \\ b - 2 & x = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right) + a & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1 - \cos 4x}}{a \sin x} & x < 0 \\ b[\cos x] & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x} & x > 0 \end{cases}$$

۸۵۴- تابع $f(x) = (2x - a)[x] + 1$ در $x = 2$ پیوستگی چپ و تابع $g(x) = x^2 + b[-x]$ در $x = 1$ پیوستگی راست دارد. مقادیر a و b را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|[4x]}{x^2-1} & x \neq 1 \\ 2a & x = 1 \end{cases}$$

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)



(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۸۵۶- شکل زیر نمودار تابع f است. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

- الف) تابع f روی بازه $[-4, 0]$ پیوسته است.
- ب) تابع f روی بازه $(0, 2]$ پیوسته است.
- ج) تابع f روی بازه $[0, 2]$ پیوسته است.
- د) تابع f روی بازه $[-2, 2]$ پیوسته است.

۸۵۷- نمودار تابع $f(x) = 2 - \sqrt{1-x}$ را رسم کنید و سپس یک بازه بسته را مشخص کنید که f روی آن پیوسته باشد.

۸۵۸- پیوستگی تابع $f(x) = [x]$ را در بازه $[2, 3]$ بررسی کنید. (بدون استفاده از نمودار)

۸۵۹- تابع $y = [x]$ مفروض است:

- الف) این تابع در بازه $[1, k]$ پیوسته است، حداکثر مقدار k را به دست آورید.
- ب) این تابع در بازه $(m, 1)$ فقط در یک نقطه ناپیوسته است، حداقل m را به دست آورید.

۸۶۰- تابع $y = x[x]$ در بازه $[-1, k]$ پیوسته است. حداکثر مقدار k را به دست آورید.

۸۶۱- ضابطه تابعی گویا را بنویسید که فقط در دو نقطه در اعداد حقیقی ناپیوسته باشد.

۸۶۲- تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+ax+b}$ فقط در $x = 1$ و $x = 5$ ناپیوسته است. a و b را به دست آورید.

۸۶۳- تابع $f(x) = \frac{1}{x^2+mx+1}$ روی \mathbb{R} پیوسته است. حدود m را به دست آورید.

۸۶۴- تابع $f(x) = \sqrt{x^2+2x+m}$ روی \mathbb{R} پیوسته است. حدود m را بیابید.

اکنون قدرنسبت را به دست می آوریم: $d = a_7 - a_1 = 7 - 3 \Rightarrow d = 4$
 (ب) خواسته سؤال محاسبه $a_7 + a_8 + \dots + a_1$ است.
 برای این کار $S_7 - S_3$ را به دست می آوریم، زیرا:

$$\left. \begin{aligned} S_7 &= a_1 + a_2 + \dots + a_7 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_7 - S_3 = a_4 + \dots + a_7$$

$$S_7 - S_3 = (2(10)^7 + 10) - (2(3)^3 + 3) = 210 - 21 = 189$$

۱۴. می دانیم $a_n = a_1 + (n-1)d$ با توجه به رابطه $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$
 S_n را بازنویسی می کنیم و رابطه به دست آمده را یک بار از آخر به اول می نویسیم.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \dots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \quad (1)$$

$$S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-2)d) + \dots + (a_1 + d) + a_1 \quad (2)$$

جملات متناظر رابطه (1) و (2) را با هم جمع می کنیم و داریم:

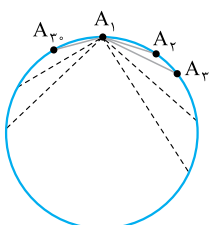
$$2S_n = (2a_1 + (n-1)d) + (2a_1 + (n-1)d) + \dots$$

$$+ (2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow 2S_n = n(2a_1 + (n-1)d)$$

$$\xrightarrow{\div 2} S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d) \quad 15$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$



۱۶. مطابق شکل می توان نقطه A_1 را به ۲۹ نقطه
 دیگر روی دایره و نقطه A_2 را به ۲۸ نقطه باقی مانده
 (به جز A_1) وصل کرد. با ادامه این کار (به جز برای
 آخرین نقطه) تعداد وترها برابر است با:

$$29 + 28 + 27 + \dots + 1 = \frac{29 \times 30}{2} = 435$$

۱۷. دهنده ابتدا از کنار سید ۴ متر به سمت توپ رفته و سپس ۴ متر به سمت سید
 برمی گردد و در مجموع ۸ متر دویده است، در مرحله دوم او ۱۶ متر می دود، پس
 مسافت های طی شده در هر مرحله، جملات یک دنباله حسابی با جمله اول ۸ و
 قدرنسبت ۸ هستند؛ بنابراین:

$$S_n = 1680 \Rightarrow \frac{n}{2}(2(8) + (n-1)8) = \frac{n}{2}(8 + 8n)$$

$$= 4(n)(n+1) = 1680 \xrightarrow{\div 4} n(n+1) = 420 = 20 \times 21 \Rightarrow n = 20$$

بنابراین او ۲۰ توپ به سید انداخته است.

قسمت دوم:

مجموع جملات دنباله هندسی

فصل ۱

درستی ۱

۱۸. اگر a_1 جمله اول و q قدرنسبت یک دنباله هندسی باشند، جمله

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

n ام دنباله (جمله عمومی) برابر است با:

مجموع جملات دنباله هندسی

در دنباله هندسی، مجموع n جمله اول یعنی $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ را S_n با

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1$$

نمایش می دهیم و داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \xrightarrow{\frac{n=40}{a_1=5}} 2540 = \frac{40}{2}(10 + 39d) \quad 7$$

$$\Rightarrow 254 = 2(10 + 39d) \xrightarrow{\div 2} 127 = 10 + 39d \Rightarrow d = 3$$

$$3, 9, 15, \dots \Rightarrow a_1 = 3, d = 6 \quad 8$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2(3) + (n-1)(6)) = \frac{n}{2}(6 + 6n - 6) = 3n^2$$

باید نامعادله $S_n > 600$ را حل کنیم:

$$3n^2 > 600 \Rightarrow n^2 > 200 \xrightarrow{n>0} n > \sqrt{200} \Rightarrow n > 10\sqrt{2}$$

عدد $10\sqrt{2}$ تقریباً برابر ۱۴/۱ است، پس باید حداقل ۱۵ جمله را با هم جمع
 کنیم تا $S_n > 600$ باشد.

۹. ابتدا a_{41} را به دست می آوریم. $-2, 2, 6, \dots \Rightarrow a_1 = -2, d = 4$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{41} = -2 + 40 \times 4 = 158$$

$$S_n = a_{41} + 2 = 160$$

اکنون داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2(-2) + (n-1)(4))$$

$$= \frac{n}{2}(-4 + 4n - 4) = \frac{n}{2}(4n - 8)$$

$$= 2n^2 - 4n = 160 \xrightarrow{\div 2} n^2 - 2n - 80 = 0$$

$$\Rightarrow (n-10)(n+8) = 0 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 10 \checkmark, n = -8 \times$$

۱۰. با توجه به معلومات مسئله داریم: $a_7 = -15 \Rightarrow a_1 + 6d = -15 \quad (1)$

$$S_{13} = 65 \Rightarrow \frac{13}{2}(2a_1 + 12d) = 65 \Rightarrow \frac{13}{2}(2)(a_1 + 6d) = 65$$

$$\xrightarrow{\div 13} a_1 + 6d = 5 \quad (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 4d = 20 \Rightarrow d = 5$$

۱۱. با توجه به فرض سؤال داریم: $a_1 + a_3 + \dots + a_{37} + a_{39} = 170 \quad (1)$

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{38} + a_{40} = 210 \quad (2)$$

دنباله، بیست جمله با شماره فرد و بیست جمله با شماره زوج دارد، پس:

جملات متناظر دو رابطه را از هم کم می کنیم و با توجه به رابطه $a_n - a_{n-1} = d$

$$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \dots + (a_{38} - a_{37}) + (a_{40} - a_{39})$$

$$= 210 - 170 \Rightarrow 20d = 40 \Rightarrow d = 2$$

مجموع ۴۰ جمله دنباله برابر $210 + 170 = 380$ است؛ بنابراین:

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2a_1 + 39 \times 2) = 380 \xrightarrow{\div 20} 2a_1 + 78 = 19$$

$$\Rightarrow 2a_1 = -59 \Rightarrow a_1 = -29.5$$

$$S_6 = 1/5 S_{18} \xrightarrow{a_1=a} \frac{6}{2}(2a + 5d) = \frac{3}{2} \times \frac{18}{2}(2a + 7d) \quad 12$$

$$\Rightarrow 3(2a + 5d) = 6(2a + 7d) \Rightarrow 2a + 5d = 4a + 14d$$

$$\Rightarrow 5d - 14d = 4a - 2a \Rightarrow -9d = 2a \quad (1)$$

اکنون باید مقدار n را طوری به دست آوریم که $S_n = 0$ باشد:

$$S_n = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 0$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{n}{2}(-9d + (n-1)d) = 0 \xrightarrow{n \neq 0} -9d + nd - d = 0$$

$$\Rightarrow d(n-10) = 0 \xrightarrow{d \neq 0} n = 10$$

۱۳. الف) می دانیم $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ بنابراین:

$$n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 \Rightarrow 2(1)^2 + 1 = a_1 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow 2(2)^2 + 2 = a_1 + a_2$$

$$\xrightarrow{a_1=3} 10 = 3 + a_2 \Rightarrow a_2 = 7$$

$$S_r = 65S_r \Rightarrow \frac{a_1(1-q^r)}{1-q} = 65 \times \frac{a_1(1-q^r)}{1-q} \quad 22$$

$$\xrightarrow{\frac{q \neq 1}{a_1 \neq 0}} 1 - q^r = 65(1 - q^r)$$

$$\Rightarrow \frac{(1-q^r)(1+q^r)}{1+q^r} = 65 \frac{(1-q^r)}{1+q^r}$$

تجزیه با اتحاد مزدوج

$$\Rightarrow 1 + q^r = 65 \Rightarrow q^r = 64 = 4^3 \Rightarrow q = 4$$

۲۳. ابتدا داریم:

$$a_v = \Delta a_r \Rightarrow \frac{a_v}{a_r} = \Delta \xrightarrow{a_n = a_1 q^{n-1}} \frac{a_1 q^v}{a_1 q^r} = q^r = \Delta \quad (1)$$

خواسته مسئله $\frac{S_{12}}{S_8}$ است؛ بنابراین:

$$\frac{S_{12}}{S_8} = \frac{\frac{a_1(1-q^{12})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}} = \frac{1-q^{12}}{1-q^8} = \frac{1-(q^4)^3}{1-(q^4)^2}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{1-5^3}{1-5^2} = \frac{1-125}{1-25} = \frac{124}{24} = \frac{31}{6}$$

$$\frac{1}{20}, \frac{1}{5}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{20}, q = \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \quad 24$$

باید $S_n > 30$ باشد؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \xrightarrow{a_1 = \frac{1}{20}, q = \frac{1}{5}} S_n = \frac{\frac{1}{20}(1-\frac{1}{5^n})}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1-5^{-n}}{4} = \frac{5^n - 1}{4 \cdot 5^n}$$

$$\frac{5^n - 1}{4 \cdot 5^n} > 30 \xrightarrow{\times 5^n} 5^n - 1 > 1800 \Rightarrow 5^n > 1801$$

$$\xrightarrow{5^5 = 1024} n \geq 6$$

۲۵. جمله‌های با شماره فرد، یک دنباله هندسی با جمله اول a_1 و قدرنسبت q^2

تشکیل می‌دهند که ده جمله دارد:

$$a_1, a_3, \dots, a_{19}$$

$$\downarrow \downarrow \downarrow$$

$$a_1, a_1 q^2, \dots, a_1 q^{18}$$

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{19} = S_{10} = \frac{a_1(1-(q^2)^{10})}{1-q^2} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q^2}$$

مجموع تمام جملات دنباله برابر $S_{20} = \frac{a_1(1-q^{20})}{1-q}$ است.

اکنون با توجه به فرض مسئله داریم:

$$\frac{\frac{a_1(1-q^{20})}{1-q^2}}{\frac{a_1(1-q^{20})}{1-q}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1-q}{1-q^2} = \frac{1-q}{(1-q)(1+q)} = \frac{1}{1+q} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 1+q=5 \Rightarrow q=4$$

$$S_n = a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad 26$$

می‌دانیم:

با توجه به رابطه $a_n = a_1 q^{n-1}$ داریم:

$$S_n = a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \quad (1)$$

طرفین رابطه (۱) را در q ضرب می‌کنیم:

$$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \quad (2)$$

$$S_n - qS_n = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

مثال مجموع ۶ جمله اول دنباله هندسی $1, 3, 9, \dots$ را به دست آورید.

پاسخ: جمله اول دنباله ۱ و قدرنسبت آن $q = \frac{3}{1} = 3$ است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\xrightarrow{\frac{a_1=1, q=3}{n=6}} S_6 = \frac{1(1-3^6)}{1-3} = \frac{-728}{-2} = 364$$

مثال مجموع چند جمله اول دنباله هندسی $\frac{1}{2}, 1, \dots$ برابر $511/5$ است.

پاسخ: جمله اول $\frac{1}{2}$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 511/5 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}^n)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{2}^n}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2^n - 1}{2} = 511/5 \Rightarrow 2^n - 1 = 1023 \Rightarrow 2^n = 1024 \Rightarrow n = 10$$

پاسخ سؤالات

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2}, q = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \quad 18$$

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{-\frac{1}{2}(1-(-\frac{1}{2})^{10})}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{1024})}{\frac{3}{2}} = \frac{-(1024-1)}{3 \times 1024} = \frac{-1023}{3072} = -\frac{341}{1024}$$

$$= \frac{-(1024-1)}{3 \times 1024} = \frac{-1023}{3072} = -\frac{341}{1024}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, q = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2 \quad 19$$

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-2^{10})}{1-2} = \frac{1023}{\sqrt{2}} = \frac{1023\sqrt{2}}{2}$$

۲۰. جمله عمومی دنباله را داریم؛ بنابراین:

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 3^0 = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 3^1 = 3$$

$$S_n = 121 \Rightarrow \frac{1 \times (1-3^n)}{1-3} = 121 \Rightarrow 1-3^n = -242$$

$$\Rightarrow 3^n = 243 \Rightarrow n = 5$$

پس مجموع ۵ جمله اول دنباله ۱۲۱ است. ۲۱

$$6, 12, \dots \Rightarrow a_1 = 6, q = \frac{12}{6} = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = \frac{6(1-2^5)}{1-2} = \frac{6(1-32)}{-1} = 186$$

پس S_n دنباله اول باید ۱۸۶ باشد: $\frac{2}{11}, \frac{4}{11}, \dots \Rightarrow a_1 = \frac{2}{11}, q = 2$

$$S_n = 186 \Rightarrow \frac{\frac{2}{11}(1-2^n)}{1-2} = \frac{2(2^n-1)}{11} = 186$$

$$\xrightarrow{\div 2} \frac{2^n-1}{11} = 93 \Rightarrow 2^n-1 = 1023$$

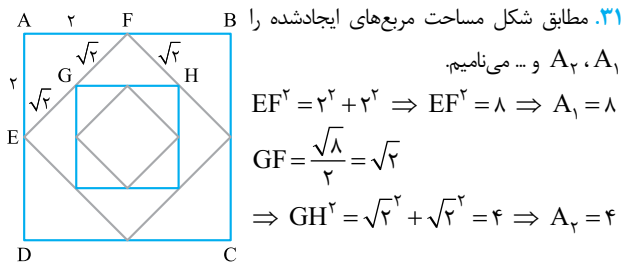
$$\Rightarrow 2^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$$

می‌خواهیم حداقل ۹۹ درصد مساحت مربع رنگ شود؛ پس:

$$S_n > \frac{99}{100} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100} \xrightarrow{\text{معکوس}} 2^n > 100 \xrightarrow{2^6 < 100 < 2^7} n \geq 7$$

پس بعد از ۷ مرحله حداقل ۹۹ درصد مربع رنگ شده است.



بنابراین A_1, A_2, \dots جملات متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول ۸ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ هستند؛ پس داریم:

$$\text{مجموع مساحت مربع‌های ایجادشده} = 8 + 4 + \dots$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}}$$

محیط مربع اولیه ۱۶ است؛ بنابراین:

$$S_n > \frac{99}{100} \times 16 \Rightarrow 16(1 - (\frac{1}{2})^n) > \frac{99}{100} \times 16$$

$$\xrightarrow{\div 16} 1 - (\frac{1}{2})^n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 2^n > 200 \xrightarrow{2^7 < 200 < 2^8} n \geq 8$$

پس باید حداقل ۸ بار این کار را انجام دهیم.

۳۲. مساحت نیم‌دایره اول 8π است؛ بنابراین:

$$\frac{\pi r_1^2}{2} = 8\pi \Rightarrow r_1^2 = 16 \Rightarrow r_1 = 4$$

بعد از برخورد اول، مساحت $\frac{3}{4}$ کم می‌شود. پس:

$$\text{مساحت نیم‌دایره دوم} = \frac{1}{4} \times 8\pi = 2\pi \Rightarrow \frac{\pi r_2^2}{2} = 2\pi \Rightarrow r_2 = 2$$

فاصله مورچه پس از برخورد با زمین، از مبدأ، به اندازه قطر نیم‌دایره‌ها است. قطر نیم‌دایره‌ها دنباله هندسی $4, 2, \dots$ را تشکیل می‌دهند.

فاصله مورچه بعد از n بار برخورد با زمین، مجموع n جمله اول این دنباله است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = 16(1 - \frac{1}{2^n})$$

$$S_n > 15/98 \Rightarrow 16(1 - \frac{1}{2^n}) > 15/98 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} > \frac{15/98}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{0.02}{16} > \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{800} > \frac{1}{2^n} \xrightarrow{\text{معکوس}} 800 < 2^n \Rightarrow n = 10$$

۳۳. بدیهی است باید ابتدا عبارت داده‌شده را ساده کنیم. در صورت کسر، اگر هر جمله را در t ضرب کنیم جمله بعدی به دست می‌آید، پس صورت کسر مجموع 2^0 جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $q = t$ است؛ بنابراین:

$$S_{2^0} = \frac{a_1(1 - q^{2^0})}{1 - q} \xrightarrow{a_1=1, q=t} S_{2^0} = \frac{(1)(1 - t^{2^0})}{1 - t} = \frac{1 - t^{2^0}}{1 - t}$$

در مخرج کسر، اگر هر جمله را در t^2 ضرب کنیم جمله بعدی به دست می‌آید. پس مخرج کسر مجموع 1^0 جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 1$

۲۷. الف) اعداد $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ یک دنباله هندسی با جمله اول ۱ و قدرنسبت $q = a$ تشکیل می‌دهند که شامل n جمله است؛ پس داریم:

$$1 + a + \dots + a^{n-1} = S_n$$

اکنون در رابطه $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ به جای a_1 عدد ۱ و به جای q قدرنسبت دنباله یعنی a را قرار می‌دهیم:

$$1 + a + \dots + a^{n-1} = \frac{1(1 - a^n)}{1 - a} = \frac{1 - a^n}{1 - a} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\text{ب) } a^{n-1} + \dots + a + 1 = \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a + 1)$$

۲۸. صفحه شطرنجی 4×4 ، شانزده خانه دارد.

دانه‌های گندم قرار داده شده در خانه‌ها، دنباله هندسی $1, 2, 4, \dots$ را تشکیل می‌دهند که ۱۶ جمله دارد. مجموع این ۱۶ جمله را به دست می‌آوریم:

$$1, 2, 4, \dots \Rightarrow a_1 = 1, q = 2$$

$$\text{تعداد کل دانه‌ها} = S_{16} = \frac{a_1(1 - q^{16})}{1 - q} = \frac{(1)(1 - 2^{16})}{1 - 2} = 2^{16} - 1$$

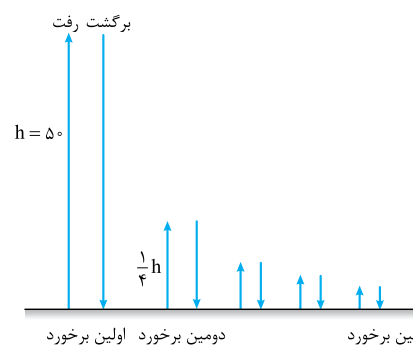
$$2^{16} \text{ gr} = 65/5 \text{ kg}$$

پس وزن تقریبی آن‌ها برابر است با:

۲۹. با توجه به شکل مقابل،

توپ $2/5$ یعنی $\frac{1}{4}$ ارتفاع

قبلی را بالا می‌رود.



مسافت‌های طی‌شده در هر رفت و برگشت جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ هستند، پس مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $100 = 2 \times 50$ و قدرنسبت $\frac{1}{4}$ را می‌خواهیم؛ بنابراین:

$$S_5 = \frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{100(1 - (\frac{1}{4})^5)}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{100(1 - \frac{1}{1024})}{\frac{3}{4}} = \frac{100 \times 1023 \times 4}{3 \times 1024} = 133/2 \text{ متر}$$

۳۰. اگر $S = 1$ مساحت مربع باشد، در مرحله اول $\frac{1}{4}$

و در مرحله دوم $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ و ... در مرحله n

$(\frac{1}{4})^n$ ، از مساحت مربع رنگ شده است.

مساحت‌های رنگ‌شده در هر قسمت جملات متوالی یک دنباله هندسی با جمله اول $\frac{1}{4}$ و قدرنسبت $\frac{1}{4}$ هستند؛ بنابراین:

$$\text{مجموع مساحت قسمت‌های رنگی} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = S_n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{4})^n)}{1 - \frac{1}{4}}$$

مثال اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 6 = 0$ باشند، بدون محاسبه α و β حاصل $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} \\ P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

اکنون داریم:

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = (-3)\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}$$

مثال اگر $\alpha = -2$ یکی از ریشه‌های معادله $3x^2 - mx - 8 = 0$ باشد، ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ریشه‌ها به دست آورید.

پاسخ: اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \xrightarrow{\alpha = -2} -2\beta = \frac{-8}{3} \Rightarrow \beta = \frac{4}{3}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \xrightarrow{\substack{\alpha = -2 \\ \beta = \frac{4}{3}}} -2 + \frac{4}{3} = \frac{-(-m)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{m}{3} \Rightarrow m = -2$$

تشکیل معادله درجه دوم

نکته اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، می‌توان معادله را به صورت $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ نوشت. ($a \neq 0$)

مثال معادله درجه دومی بنویسید که $x = 2$ و $x = -3$ ریشه‌های آن باشند.

پاسخ: فرم کلی این معادله‌ها به صورت زیر است:

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \xrightarrow{\substack{\alpha = 2 \\ \beta = -3}} a(x - 2)(x + 3) = 0$$

با قراردادن هر مقدار دلخواه غیر صفر به جای a ، معادله به دست می‌آید. مثلاً:

$$a = 1 \Rightarrow (x - 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

نکته اگر α و β دو عدد دلخواه با مجموع S و حاصل ضرب P باشند، آن‌گاه α و β ریشه‌های معادله $x^2 - Sx + P = 0$ هستند.

مثال معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $3 - \sqrt{7}$ و $3 + \sqrt{7}$ باشند.

پاسخ: ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\alpha = 3 - \sqrt{7}, \beta = 3 + \sqrt{7}$$

$$S = \alpha + \beta = (3 - \sqrt{7}) + (3 + \sqrt{7}) = 6$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \underbrace{(3 - \sqrt{7})(3 + \sqrt{7})}_{\text{مزدوج}} = 3^2 - \sqrt{7}^2 = 2$$

اکنون معادله را تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

مثال محیط و مساحت مستطیلی برابر 20 است. ابعاد آن را به دست آورید.

پاسخ: اگر x_1 و x_2 به ترتیب طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$$2(x_1 + x_2) = 20 \Rightarrow x_1 + x_2 = 10, x_1 \cdot x_2 = 20$$

معادله‌ای با شرایط $S = 10$ و $P = 20$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 20 = 0$$

و قدرنسبت $q = t^2$ است؛ پس داریم:

$$S_1 = \frac{a_1(1 - q^1)}{1 - q} \xrightarrow{a_1=1, q=t^2} S_1 = \frac{(1)(1 - (t^2)^1)}{1 - t^2} = \frac{1 - t^2}{1 - t^2}$$

اکنون داریم:

$$A = \frac{1 - t^2}{1 - t^2} = \frac{1 - t^2}{1 - t} = \frac{(1 - t)(1 + t)}{1 - t} = 1 + t$$

$$\xrightarrow{t = \sqrt{3} - 1} A = 1 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3}$$

۳۴. جملات $2, -4, 8, \dots, -1024$ یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 2$ و قدرنسبت $q = -2$ تشکیل داده‌اند؛ پس داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 2 \times (-2)^{n-1} = -1024$$

$$\Rightarrow (-2)^{n-1} = -512 = (-2)^9 \Rightarrow n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$$

مجموع این ده جمله را به دست می‌آوریم:

$$S_1 = \frac{2(1 - (-2)^{10})}{1 - (-2)} = \frac{2 \times (-1023)}{3} = -682$$

جملات $1, 4, \dots, 58$ یک دنباله حسابی با جمله اول $a_1 = 1$ و قدرنسبت $d = 3$ تشکیل داده‌اند؛ بنابراین:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \Rightarrow 1 + (n - 1)(3) = 58 \Rightarrow 3n = 60 \Rightarrow n = 20$$

مجموع این بیست جمله برابر است با:

$$S_2 = \frac{2}{2} (a_1 + a_n) = 10(1 + 58) = 590$$

$$A = \frac{-682}{590} = -1/15$$

اکنون داریم:

قسمت اول:

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

صفحه ۷ تا ۹ کتاب درسی

تکمیل ۱

درتس ۲

یادآوری فرم کلی هر معادله درجه دوم، به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) است، ریشه‌های حقیقی معادله در صورت وجود، از روش کلی (روش Δ) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{معادله دو ریشه متمایز دارد.} & x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{معادله ریشه مضاعف دارد.} & x = \frac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.} & \end{cases}$$

مثال اگر $x = 1$ یکی از ریشه‌های معادله $2x^2 - 5mx + 3 = 0$ باشد،

ریشه‌های معادله $3mx^2 + (m + 2)x - 1 = 0$ را به دست آورید.

پاسخ: $x = 1$ ریشه معادله است؛ پس در آن صدق می‌کند:

$$2x^2 - 5mx + 3 = 0 \xrightarrow{x=1} 2(1)^2 - 5(m)(1) + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 5 - 5m = 0 \Rightarrow m = 1$$

$m = 1$ را در معادله داده شده قرار می‌دهیم و ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m = 1 \Rightarrow 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(3)(-1) = 21$$

$$\xrightarrow{\Delta > 0} x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + \sqrt{21}}{6} \text{ و } x_2 = \frac{-3 - \sqrt{21}}{6}$$

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آن‌گاه:

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب ریشه‌ها}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها}$$

$$x^2 - mx - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = m \\ P = \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases} \quad .43$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta\alpha} \quad (1) \quad \text{اکنون داریم:}$$

$$\alpha + \beta = m \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = m^2$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=-1} \alpha^2 - 2 + \beta^2 = m^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = m^2 + 2$$

$$(1) \Rightarrow \frac{m^2 + 2}{-1} = 2m - m^2$$

$$\Rightarrow m^2 + 2 = -2m + m^2 \Rightarrow m = -1$$

.44 الف) وقتی ریشه‌های معادله قرینه هم هستند، پس مجموع آن‌ها برابر صفر است.

$$S = -\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow 6k - 1 = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{6}$$

ب) وقتی ریشه‌های معادله معکوس هم هستند، پس حاصل ضرب آن‌ها برابر ۱ است.

$$P = \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a \Rightarrow -2k = 2 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

دقت کنید به ازای مقادیر $k = \frac{1}{6}$ در قسمت «الف» و $k = -\frac{2}{3}$ در قسمت «ب» معادله ریشه حقیقی دارد.

.45 الف) α و $\beta = 2\alpha$ ریشه‌های معادله هستند؛ بنابراین:

$$x^2 - 6x + m - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 6 \\ P = \alpha \cdot \beta = m - 1 \end{cases}$$

$$S = \alpha + 2\alpha = 3\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 2 \xrightarrow{\beta=2\alpha} \beta = 4$$

$$P = m - 1 \Rightarrow m - 1 = 8 \Rightarrow m = 9$$

.46 چون $\alpha > \beta$ ، پس $\alpha - \beta = 2$ است. (۱)

$$3x^2 - 12x + m^2 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{12}{3} = 4 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = 4 \end{cases} \xrightarrow{+} 2\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 3$$

$\alpha = 3$ ریشه معادله است، پس در آن صدق می‌کند:

$$3(3)^2 - 12(3) + m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$$

.47 الف) α و $\beta = \alpha^2$ ریشه‌های معادله هستند.

$$3x^2 - mx - 24 = 0 \Rightarrow P = \alpha \cdot \beta = -\frac{24}{3} = -8$$

$$\xrightarrow{\beta=\alpha^2} \alpha^3 = -8 \Rightarrow \alpha = -2$$

$\alpha = -2$ ریشه معادله است؛ بنابراین در آن صدق می‌کند:

$$3(-2)^2 - m(-2) - 24 = 0 \Rightarrow -12 + 2m = 0 \Rightarrow m = 6$$

.48 اگر $\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$ و $\beta = 3 + 2\sqrt{2}$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = (3 - 2\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2}) = 6$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \underbrace{(3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})}_{\text{مزدوج}} = 9 - 8 = 1$$

پس α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 1 = 0$ هستند.

.49 اگر α و β ریشه‌های معادله باشند، پس $\beta = 3\alpha$ است؛ بنابراین:

$$S = \alpha + \beta = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$$

$$P = \alpha \cdot \beta = (\alpha)(3\alpha) = 3\alpha^2$$

α و 3α ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 4\alpha x + 3\alpha^2 = 0$$

با شرط $k \neq 0$ ، بی‌شمار معادله به صورت $k(x^2 - 4\alpha x + 3\alpha^2) = 0$ با این ویژگی وجود دارد.

$$\Delta = (-10)^2 - 4(1)(20) = 20 \Rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + \sqrt{5} = \text{طول مستطیل} \\ x_2 = 5 - \sqrt{5} = \text{عرض مستطیل} \end{cases}$$

پاسخ سؤالات

.35 نادرست؛ زیرا: $S = \frac{3}{5}, P = -\frac{1}{5} \Rightarrow S = -3P$

.36 درست؛ اگر x_1 و x_2 طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$$2(x_1 + x_2) = 6 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 \cdot x_2 = 6 = \text{مساحت}$$

x_1 و x_2 ، در صورت وجود، ریشه‌های معادله $x^2 - 3x + 6 = 0$ هستند، ولی

در معادله بالا $\Delta < 0$ است؛ پس مستطیلی با این شرایط وجود ندارد.

.37 درست؛ زیرا:

$$S = 5, P = 3 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 10x + 6 = 0$$

$$x^2 - x - 4 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = 1, P = \alpha \cdot \beta = -4 \quad .38 \text{ زیرا: } -\frac{1}{4}$$

مجموع معکوس ریشه‌ها یعنی: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = -\frac{1}{4}$

$$x^2(x+1) = x^2 - x + 3 \Rightarrow x^2 + x^3 = x^2 - x + 3 \quad .39 \text{ -1}$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} S = \alpha + \beta = -1$$

$$\frac{1}{4} \quad .40$$

باید $S = P$ باشد:

$$\left. \begin{aligned} S = -\frac{b}{a} = \frac{-3m}{2} \\ P = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-3m}{2} = \frac{m-2}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

توجه کنید به ازای $m = \frac{1}{2}$ ، معادله دو ریشه حقیقی دارد.

$$S = 2P \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2\frac{c}{a} \Rightarrow -b = 2c \quad .41$$

$$\Rightarrow 3m + 1 = 2(-m^2) \Rightarrow 2m^2 + 3m + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta=1} m = \frac{-3 \pm 1}{4} \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \checkmark \\ m = -1 \checkmark \end{cases}$$

دقت کنید به ازای هر دو مقدار به‌دست‌آمده، معادله اولیه ریشه حقیقی دارد، زیرا $\Delta > 0$ است.

.42 در معادله $x^2 - 3x + 1 = 0$ داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3, P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\text{الف) } \alpha + \beta = 3 \xrightarrow{\text{توان } 2} \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 9$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta=1} \alpha^2 + 2 + \beta^2 = 9 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 7$$

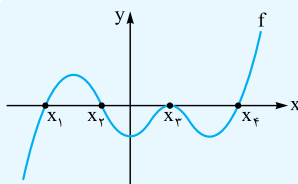
$$\text{ب) } \alpha + \beta = 3 \xrightarrow{\text{توان } 3} \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = 27$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 27$$

$$\Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + 2(1)(3) = 27 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = 18$$

$$\text{پ) } \frac{1}{\beta-1} + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha-1+\beta-1}{(\beta-1)(\alpha-1)}$$

$$= \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - \beta - \alpha + 1} = \frac{S - 2}{P - (S) + 1} = \frac{3 - 2}{1 - 3 + 1} = -1$$

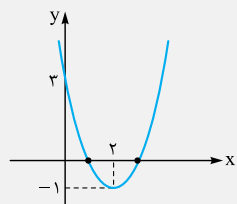


به عنوان مثال، در شکل مقابل، x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 صفرهای تابع هستند، زیرا مقدار تابع برابر صفر است و تابع با محور طولها تلاقی دارد.

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

مثال سهمی $f(x) = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید و تعداد جوابهای

معادله $f(x) = 0$ را مشخص کنید.



$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$x_S = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow y_S = f(2) = -1$$

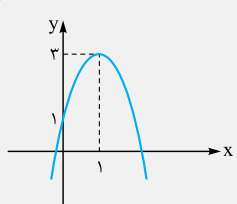
رأس سهمی $S(2, -1)$

نقطه کمکی $(0, 3) \Rightarrow f(0) = 3$

سهمی در دو نقطه با محور طولها برخورد کرده است، پس معادله $f(x) = 0$ دو جواب دارد.

نوشتن معادله سهمی

حالت اول: اگر نقطه $S(x_S, y_S)$ رأس یک سهمی باشد، معادله آن به صورت $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ است.



مثال ضابطه سهمی مقابل را بنویسید.

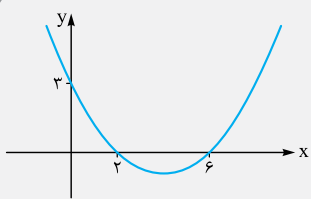
پاسخ: رأس سهمی $S(1, 3) \Rightarrow y = a(x - 1)^2 + 3 \quad (1)$

با توجه به نمودار سهمی از نقطه $(0, 1)$ عبور می‌کند؛ پس مختصات آن در سهمی صدق می‌کند:

$$(1) \Rightarrow 1 = a(0 - 1)^2 + 3 \Rightarrow 1 = a + 3 \Rightarrow a = -2$$

بنابراین ضابطه سهمی به صورت $y = -2(x - 1)^2 + 3$ است.

حالت دوم: اگر x_1 و x_2 صفرهای یک سهمی باشند، معادله آن به صورت $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ است.



مثال ضابطه سهمی مقابل را

بنویسید.

پاسخ: $x_1 = 2$ و $x_2 = 6$ صفرهای تابع هستند و سهمی از نقطه $(0, 3)$

عبور می‌کند؛ بنابراین:

$$y = a(x - 2)(x - 6) \xrightarrow{(0, 3) \in y} 3 = a(0 - 2)(0 - 6)$$

$$\Rightarrow 3 = 12a \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

پس ضابطه سهمی به صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ است و بعد از

ساده کردن به صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

دقت کنید در معادله گفته شده Δ همواره مثبت است، زیرا:

$$\Delta = (-4\alpha)^2 - 4(1)(3\alpha^2) = 16\alpha^2 - 12\alpha^2 = 4\alpha^2 \xrightarrow{\alpha \neq 0} \Delta > 0$$

۵۰. اگر x_1 و x_2 اعداد مورد نظر باشند، داریم:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{11}{6}, P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{3}$$

پس x_1 و x_2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{6}x - \frac{1}{3} = 0$$

با حل معادله بالا x_1 و x_2 را به دست می‌آوریم:

$$\Delta = \frac{121}{36} - 4(1)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{121}{36} + \frac{4}{3} = \frac{169}{36} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{13}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{11}{6} \pm \frac{13}{6}}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{6}$$

پس اختلاف ریشه‌های معادله $2 - (-\frac{1}{6}) = \frac{13}{6}$ است.

۵۱. اگر x_1 و x_2 طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$$\text{محیط} = 2(x_1 + x_2) = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow S = 6$$

$$\text{مساحت} = x_1 \cdot x_2 = 4 \Rightarrow P = 4$$

معادله درجه دومی با شرایط $S = 6$ و $P = 4$ تشکیل می‌دهیم:

$$x^2 - 6x + 4 = 0 \xrightarrow{\Delta = 20} x = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5}, x_2 = 3 - \sqrt{5}$$

۵۲

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = 2 & (1) \\ P = \alpha \cdot \beta = -4 & (2) \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله جدیدی با ریشه‌های $x_1 = 2\alpha$ و $x_2 = 2\beta$ تشکیل دهیم،

پس باید مجموع و حاصل ضرب آن‌ها را به دست آوریم؛ بنابراین:

$$S' = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) \xrightarrow{(1)} S' = 4$$

$$P' = (2\alpha)(2\beta) = 4\alpha\beta \xrightarrow{(2)} P' = -16$$

$$\text{معادله جدید: } x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 16 = 0$$

۵۳

$$3x^2 - x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{1}{3} & (1) \\ P = \alpha \cdot \beta = -\frac{5}{3} & (2) \end{cases}$$

می‌خواهیم معادله جدیدی با ریشه‌های $x_1 = \frac{1}{\alpha}$ و $x_2 = \frac{1}{\beta}$ تشکیل دهیم؛ بنابراین:

$$S' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} \xrightarrow{(1), (2)} S' = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{5}{3}} = -\frac{1}{5}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha} \times \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} \xrightarrow{(2)} P' = \frac{1}{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{معادله جدید: } x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 5} 5x^2 + x - 3 = 0$$

قسمت دوم:

صفرهای تابع و روش هندسی حل معادلات

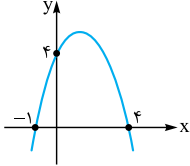
صفحه ۱۰ تا ۱۶ کتاب درسی

تغییرات

درس ۲

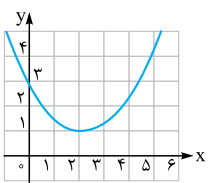
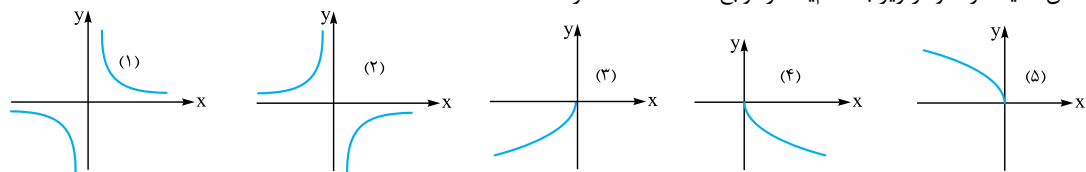
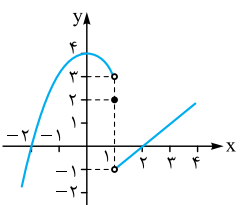
صفرهای تابع

برای هر تابع مانند f ، جوابهای معادله $f(x) = 0$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع می‌نامیم. اگر نمودار f را رسم کنیم، طول نقاط تلاقی f با محور طولها، همان صفرهای تابع هستند.

ردیف	امتحان شماره ۱	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان: دی ماه	شماره
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید: الف) مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - 5x + 1 = 0$ ، دو برابر حاصل ضرب ریشه‌های آن است. ب) اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه $ a - b \geq a + b $. پ) برد تابع همواره زیرمجموعه هم‌دامنه تابع است. ت) اگر $f(2) = 5$ و $g(5) = 2$ باشند، $(g \circ f)(2) = 5$.	۱		مدت امتحان: ۱۰۰ دقیقه	شماره
۲	جاهای خالی را پر کنید: الف) فاصله دو خط $y = 2x - 3$ و $y = 2x - 3$ برابر است. ب) خط $y = 2$ ، نمودار تابع $y = x^2 - 2 $ را در نقطه قطع می‌کند. پ) حاصل $(\sqrt{3} - 2)^5$ برابر است. ([] نماد جزء صحیح است). ت) اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $f^{-1}(a) = 2$ باشد، مقدار a برابر است.	۲			شماره
۳	مجموع اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۳ را به دست آورید.	۳		۱/۲۵	شماره
۴	در دنباله هندسی $\dots, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ ، حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل، بزرگ‌تر از ۱۷۵ باشد؟	۴		۱	شماره
۵	شکل مقابل نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. الف) مقادیر a ، b و c را به دست آورید. ب) بیشترین مقدار y را محاسبه کنید.	۵		۱/۲۵	شماره
۶	معادلات زیر را حل کنید و جواب‌های قابل قبول را مشخص کنید. الف) $\frac{x-1}{x^2-3x} = \frac{x+3}{x^2-x} + \frac{1}{x-3}$ ب) $x - \sqrt{2x-5} = 2$	۶		۲/۲۵	شماره
۷	ضابطه تابع $y = x + x - 2 $ را با تعیین علامت عبارات شامل قدرمطلق، به صورت یک تابع چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.	۷		۱/۵	شماره
۸	اگر $A(m, 2)$ ، $B(0, -2)$ و $C(-4, 0)$ سه رأس مثلثی باشند و طول ارتفاع AH وارد بر ضلع BC برابر $\frac{23}{5}$ باشد، مقدار m را به دست آورید.	۸		۱/۲۵	شماره
۹	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ 1 - \sqrt{x+1} & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید و برد آن را مشخص کنید.	۹		۱	شماره
۱۰	نمودار تابع $y = x - [x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.	۱۰		۱/۲۵	شماره
۱۱	وارون تابع $f(x) = x^2 - 4x$; $x \leq 2$ را به دست آورید.	۱۱		۱/۵	شماره
۱۲	اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، آن‌گاه: الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید. ب) مقدار $(f \circ g)(4)$ را محاسبه کنید.	۱۲		۱/۵	شماره
۱۳	الف) اگر $f(x) = \frac{3}{x-1}$ و $(f \circ g)(x) = 2x$ ، تابع $g(x)$ را به دست آورید. ب) اگر $f = \{(1, 2), (5, 3), (2, 5)\}$ باشد، تابع $(f \circ f)(x)$ را به دست آورید.	۱۳		۱/۲۵	شماره
۱۴	الف) نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را با انتقال تابع $y = 2^x$ رسم کنید. ب) طول محل برخورد خط $y = 5$ با نمودار $f(x)$ بین کدام دو عدد صحیح است؟	۱۴		۱/۲۵	شماره
۱۵	نامعادله $(\sqrt{2}-1)^{x-2} \leq (\sqrt{2}-1)^{2x+1}$ را حل کنید.	۱۵		۰/۷۵	شماره
۲۰	جمع نمرات		«موفق باشید»		

۸	توابع $f = \{(2, 8), (3, 1), (4, 2), (6, 2)\}$ و $g = \{(3, -1), (4, 0), (-1, 7), (2, 4)\}$ مفروض اند. الف) دامنه تابع $f \cdot g$ را مشخص کنید. ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.
۱/۵	اگر $f(x) = 2x - 5$ و $g(x) = \sqrt{x - 2}$ دو تابع باشند: الف) دامنه تابع $g \circ f$ را بنویسید. ب) ضابطه تابع $g \circ f$ را به دست آورید.
۱	اگر $f(x) = 2^{x+1} - 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ را بیابید.
۱/۵	معادله لگاریتمی $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ را حل کنید.
۰/۷۵	شخصی دور زمین دایره‌ای شکل به شعاع 10° متر در حال دوچرخهسواری است. اگر زاویه‌ای که شخص طی کرده است 90° درجه باشد، او چه مسافتی را رکاب زده است؟
۱	مقدار نسبت مثلثاتی $\tan(-\frac{23\pi}{4})$ را به دست آورید.
۱/۵	اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و α زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه باشد، حاصل $\cos(\alpha - \beta)$ را بیابید.
۰/۷۵	نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در فاصله $[-2, 2]$ رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید.
۰/۵	حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x] - 3}$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید.
۲/۲۵	مقدار حدهای مقابل را بیابید. الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$
۱/۲۵	مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع مقابل در $x = 2$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ bx + 1 & x < 2 \end{cases}$
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»

ردیف	امتحان نهایی: حسابان ۱		رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ امتحان: شهریور ۱۴۰۲
	امتحان شماره ۶	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه		
۱	درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید. الف) حاصل عبارت $2 + 4 + 6 + \dots + 100$ برابر 2500 است. ب) دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ با هم برابرند. پ) در تابع $f(x) = a^x$ ، اگر $a > 1$ ، با افزایش مقدار x ، مقادیر f افزایش می‌یابد. ت) $\cos \alpha + \cos(\pi - \alpha) = 0$	۱		
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. الف) حاصل ضرب ریشه‌های معادله $4x^2 + 3x - 8 = 0$ مساوی است. ب) مجموعه جواب معادله $\sqrt{x^2 - 9} + 2\sqrt{x - 3} = 0$ ، برابر {.....} می‌باشد. پ) حاصل عبارت $\log_5 \sqrt[3]{25}$ برابر است. ت) در دایره‌ای به شعاع ۳ متر، اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول ۱۲ متر برابر رادیان است.	۲		

۱/۲۵	۳	طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟
۱	۴	در شکل نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.
		
۱	۵	یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ است. اگر $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.
۱/۲۵	۶	مشخص کنید هر نمودار زیر با کدام‌یک از توابع داده‌شده، متناظر است؟
		
		$f(x) = \frac{-1}{x}$, $g(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = -\sqrt{x}$, $r(x) = -\sqrt{-x}$, $t(x) = \frac{1}{x}$
۱/۵	۷	تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض است. الف) نشان دهید تابع g ، یک‌به‌یک نیست. ب) با محدود کردن دامنهٔ تابع g ، تابعی وارون‌پذیر به نام f بسازید و وارون آن را به دست آورید.
۱	۸	توابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ و $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ مفروضند، دامنهٔ تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.
۱	۹	خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0/0)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ (راه‌حل نوشته شود).
۱/۵	۱۰	معادلهٔ لگاریتمی زیر را حل کرده و مجموعه‌جواب را مشخص کنید.
		$\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{3}+1\right) = 2$
۱/۲۵	۱۱	نمودار تابع $y = - \cos x + 1$ را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کرده و برد تابع را مشخص کنید. (مراحل رسم را نشان دهید).
۲/۲۵	۱۲	اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، $\tan \beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان α در ربع اول و β در ربع دوم باشد، مقدار دقیق $\cos(\alpha + \beta)$ و $\sin 2\alpha$ را بیابید.
۱	۱۳	اگر بازهٔ $(x-1, 2y+5)$ یک همسایگی راست محذوف ۳ باشد، مجموعه مقادیر x و y را به دست آورید.
۱	۱۴	با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به دست آورید.
		
		$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$
۱/۵	۱۵	مقادیر حدهای مقابل را بیابید.
		الف) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 x - 8}{x - 2}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\Delta x}$
۱/۵	۱۶	مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x = 0$ پیوسته باشد.
		$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} - 1 & x > 0 \\ x & x = 0 \\ x - \frac{a}{4} & x < 0 \end{cases}$ $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x} - 1 & x > 0 \\ x & x = 0 \\ b + \frac{[x]}{2} & x < 0 \end{cases}$
۲۰		جمع نمرات «موفق باشید»