

## مقدمه مولف

تا کی به انتظارگذاری به زاریم

بازای بعد از این همه چشم انتظاریم ...

وقتی که یک بچه بود، پدرش به عنوان مربی اسب، برای تربیت اسبها از یک اصطبل به اصطبل دیگر و از یک مزرعه به مزرعه دیگر در گردش بود. به همین خاطر مدرسه‌اش در طول سال چند بار عوض می‌شد. یک روز، وقتی که شاگرد دبیرستان بود، معلم از شاگردان خواست که بنویسند وقتی بزرگ شدند، می‌خواهند چه کاره شوند. او یک دقیقه هم صبر نکرد و هفت صفحه درباره هدفش که می‌خواست مالک یک مزرعه اسب باشد، نوشت. او همه چیز را با جزئیات کامل نوشت و حتی طرحی از آن مکان با اصطبل‌ها و ویلایش کشید. دو روز بعد، او نوشته‌اش را با یک نمره F (پایین‌ترین نمره) در صفحه اول دریافت کرد. بعد از کلاس، نزد معلم رفت و پرسید: «چرا من پایین‌ترین نمره را گرفتم؟»

معلم پاسخ داد: «این آرزو برای بچه‌ای مثل تو که نه پول دارد، نه امکانات و از یک خانواده دوره‌گرد است خیلی غیرواقعی است. به هیچ وجه ممکن نیست روزی به این آرزوی بزرگ دست پیدا کنی.» سپس پیشنهاد داد دوباره بنویسید و آرزوی واقعی‌تری داشته باشد. پسر به منزل رفت و از پدرش راهکار خواست. پدر پاسخ داد: «این تصمیم خیلی برای تو مهم است؛ پس خودت باید برای آن فکر کنی.» پس از چند روز، پسر همان نوشته را بدون هیچ تغییری، به معلم داد و گفت: «شما نمره F را نگه‌دار و من آرزویم را نگه می‌دارم.»

اکنون «مونتی رابرتز» مالک خانه‌ای با زیربنای ۴۰۰ مترمربع در وسط یک مزرعه اسب، به مساحت ۸ هکتار می‌باشد و آن نوشته را قاب گرفته و بالای شومینه‌اش نصب کرده است.

عزیزان من! به خاطر داشته باشید که باید به حرف دل خود گوش کنید و اجازه ندهید هیچ کس رؤیایتان را از شما بگیرد. اهداف بزرگ خودتان را به طور شفاف تعیین کنید و با تلاش خود به آن جامه عمل بپوشانید هر چند به نظر دیگران غیرعملی باشد.

### ویژگی‌های این کتاب:

- ۱ پوشش کامل مثال‌ها، تمرین‌ها، کار در کلاس‌ها و حتی متن کتاب درسی
- ۲ ارائه درس‌نامه‌های عالی، کامل و روان، اما مختصر و مفید
- ۳ پاسخ‌های تشریحی با رویکرد آموزشی
- ۴ طراحی سؤالات به سبک امتحانات نهایی
- ۵ ارائه چند دوره امتحان نهایی و شبه‌نهایی به همراه پاسخ و بارمبندی نمونه نهایی برای آماده‌سازی بهتر شما
- ۶ ارائه بارمبندی نوبت اول و نهایی برای هر فصل

### تشکر و قدرانی می‌کنم از:

- ۱ آقایان دکتر ابودر نصری و دکتر کمیل نصری
- ۲ جناب آقای احمد علی‌نژاد مدیر تألیف کاربرد و خوش‌فکر
- ۳ تیم خوب و کاربرد تولید خیلی‌سبز
- ۴ ویراستاران عزیز خانم‌ها مریم بیوک‌زاده، سمیه خادمان، مرضیه رضایت، مریم نظری

خدای روزهای خوب، خدای روزهای سخت هم هست. به حکمتش دل بسپار ...

با احترام

ابوالقاسم شعبانی

# فهرست مطالب

درسنامه پاسخ	سوال	
<b>فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر</b>		
۴۹	۵	درس ۱- قسمت اول: یادآوری و تکمیل معادله خط
۵۱	۶	درس ۱- قسمت دوم: هندسه تحلیلی
۵۵	۷	درس ۲- قسمت اول: معادله درجه دوم
۵۸	۸	درس ۲- قسمت دوم: تابع درجه دوم
۶۲	۱۰	درس ۳- قسمت اول: معادلات گویا
۶۵	۱۱	درس ۳- قسمت دوم: معادلات رادیکالی
<b>فصل دوم: هندسه</b>		
۶۷	۱۲	درس ۱: ترسیم‌های هندسی
۷۱	۱۳	درس ۲- قسمت اول: استدلال و قضیه تالس
۷۴	۱۶	درس ۲- قسمت دوم: عکس قضیه تالس
۷۷	۱۷	درس ۳- قسمت اول: تشابه مثلث‌ها
۷۹	۱۹	درس ۳- قسمت دوم: روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه
<b>فصل سوم: تابع</b>		
۸۱	۲۰	درس ۱- قسمت اول: تابع گویا و تساوی دو تابع
۸۴	۲۲	درس ۱- قسمت دوم: توابع رادیکالی و جزء صحیح
۸۸	۲۳	درس ۲: وارون یک تابع و تابع یک به یک
۹۲	۲۵	درس ۳: اعمال جبری روی توابع
<b>فصل چهارم: مثلثات</b>		
۹۸	۲۸	درس ۱: واحدهای اندازه‌گیری زاویه
۱۰۱	۲۹	درس ۲: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی
۱۰۶	۳۱	درس ۳: توابع مثلثاتی
<b>فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی</b>		
۱۰۹	۳۳	درس ۱: تابع نمایی و ویژگی‌های آن
۱۱۲	۳۴	درس ۲- قسمت اول: تابع لگاریتمی
۱۱۴	۳۵	درس ۲- قسمت دوم: ویژگی‌های لگاریتم و معادلات لگاریتمی
۱۱۸	۳۶	درس ۳: نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی
<b>فصل ششم: حد و پیوستگی</b>		
۱۲۱	۳۸	درس ۱: فرایندهای حدی
۱۲۴	۳۹	درس ۲- قسمت اول: قضایا و محاسبه حد توابع
۱۲۶	۴۰	درس ۲- قسمت دوم: حالت مبهم $\frac{0}{0}$ و حد چند تابع خاص
۱۳۰	۴۲	درس ۳: پیوستگی
<b>فصل هفتم: آمار و احتمال</b>		
۱۳۴	۴۴	درس ۱: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل
۱۳۸	۴۶	درس ۲- قسمت اول: معیارهای گرایش به مرکز
۱۴۰	۴۶	درس ۲- قسمت دوم: معیارهای پراکندگی
<b>ضمیمه: امتحانات شبیه‌ساز نهایی</b>		
۱۵۳	۱۴۵	امتحان نوبت اول (میان سال) دی ماه
۱۵۴	۱۴۶	امتحان نوبت اول (میان سال) دی ماه
۱۵۵	۱۴۷	امتحان نوبت دوم (پایان سال) خرداد ماه
۱۵۷	۱۴۸	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)
۱۵۸	۱۵۰	امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)
۱۵۹	۱۵۱	امتحان نهایی خرداد ماه

## هندسه تحلیلی و جبر

## فصل ۱

این فصل توی کتاب درسی سه تا درس داره که واسه این که بهتر بتونی اونو بخونی، هر درس رو به دو قسمت تقسیم کردیم. مباحث این فصل که اونو به ۶ قسمت تقسیم کردیم، اینان:

(۳) معادله درجه دوم  
(۶) معادلات رادیکالی

(۲) هندسه تحلیلی  
(۵) معادلات گویا

(۱) یادآوری و تکمیل معادله خط  
(۴) تابع درجه دوم

بارم بندی این فصل توی امتحانای داخلی و نهایی:

شهریور و دی (نهایی)

خرداد (نهایی)

دی (نوبت اول)

نمره ۲/۵

نمره ۲

نمره ۶

صفحات ۱ تا ۴ کتاب درسی

## قسمت اول: یادآوری و تکمیل معادله خط

## درس ۱

درسنامه ۱ - قسمت اول را در صفحه ۴۹ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱- دو خط  $y = 2x + 5$  و  $4x - 2y = 6$  با یکدیگر موازی هستند. -۲ معادله محور  $x$ ها به صورت  $x = 0$  است.

۳- خط  $x = 2$  بر خط  $y = 1$  عمود است.

۴- اگر خط  $0 = 2y + mx - 1$  بر خط  $x = 3y - 5$  عمود باشد،  $m$  برابر ۶ است.

۵- شیب خطی که از نقاط  $A(2, 3)$  و  $B(-2, 5)$  می‌گذرد برابر ۲- است.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۶- اگر دو خط  $y = (m - 3)x + 5$  و  $x + 3y = 1$  بر هم عمود باشند، مقدار  $m$  برابر ..... است.

۷- دو خط  $3x + y = 1$  و  $x + 3y = 1$  نسبت به هم ..... هستند.

۸- معادله خطی که از مبدأ می‌گذرد و شیب آن ۲- باشد، به صورت ..... است.

۹- شیب خطی که از نقاط  $A(-1, 4)$  و  $B(2, -5)$  می‌گذرد برابر ..... است.

۱۰- معادله هر خط موازی محور  $x$ ها به شکل ..... است.

نمودار خطوط زیر را رسم کنید.

$$x + 2y = 1 \quad -12$$

$$y = 2x + 3 \quad -11$$

$$y = 2 \quad -14$$

$$x = -1 \quad -13$$

۱۵- معادله خط گذرا از نقاط  $A(-3, 4)$  و  $B(-1, -4)$  را بنویسید.

۱۶- معادله خطی را بنویسید که از نقطه  $A(2, -1)$  می‌گذرد و بر خط  $3x + 2y = 5$  عمود است.

در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (موازی، عمود یا متقاطع غیر عمود)

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

$$T: y = \frac{1}{4}x - 3 \text{ و } L: x - 2y = 5 \quad -18$$

$$T: y = -\frac{1}{5}x + 7 \text{ و } L: y = 5x - 3 \quad -17$$

$$T: 3x + 2y = 6 \text{ و } L: 2x - 3y + 5 = 0 \quad -20$$

$$T: y = 3x - 4 \text{ و } L: x = 3y + 2 \quad -19$$

$$T: y = -3 \text{ و } L: x = 2 \quad -21$$

۲۲- خط  $L$  به معادله  $2y - 3x = 10$  و خط  $T$  به معادله  $y = mx + 6$  را در نظر بگیرید.

۱)  $m$  را طوری بیابید که خط  $T$  با خط  $L$  موازی باشد. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۲۳- به ازای چه مقادیری از  $k$ ، دو خط  $y = (k^2 - 3)x + 5$  و  $y = -6x + 7$  با هم موازی اند؟

۲۴- مقدار  $m$  را طوری بیابید که خط به معادله  $(m+1)y = x + 2$  بر خط  $y = (2m+1)x + 1$  عمود باشد.

۲۵- معادله ارتفاع وارد بر ضلع  $BC$  را در مثلثی با رئوس  $A(2, 1)$ ،  $B(4, -2)$  و  $C(-1, 8)$  بنویسید.

۲۶- مربع  $ABCD$  در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است، به طوری که  $A(5, 1)$  و  $B(10, 4)$  دو رأس مجاور آن هستند.

۱) شیب ضلع  $AB$  را به دست آورید. ۲) شیب ضلع  $AD$  را حساب کنید و معادله این ضلع را بنویسید.

(کار در کلاس کتاب درسی)

۳) اگر بدانیم نقطه  $C(7, 9)$  رأس سوم مربع است، مختصات رأس  $D$  را بیابید.

صفحه ۴۴ کتاب درسی

## قسمت دوم: هندسه تحلیلی

## درس ۱

درس نامه ۱ - قسمت دوم را در صفحه ۵۵ ببینید.

۱) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲۷- فاصله نقطه  $A(2, -1)$  از مبدأ مختصات برابر ۵ است. ۲۸- نقطه  $M(1, 2)$  وسط پاره‌خط با رئوس  $A(4, 6)$  و  $B(-2, -2)$  است.

۲۹- نقاط  $A(1, 2)$ ،  $B(-2, 4)$ ،  $C(6, -5)$  و  $D(9, -1)$ ، رئوس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  با قطر  $AC$  هستند.

۳۰- قرینه نقطه  $P(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات، نقطه  $P'(-\alpha, -\beta)$  می‌باشد.

۳۱- فاصله نقطه  $A(-2, 6)$  از خط  $x = 5$  برابر ۳ است. ۳۲- فاصله دو خط  $3x - 4y - 1 = 0$  و  $3x - 4y + 4 = 0$  برابر یک است.

۲) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۳۳- فاصله نقاط  $A(2, -1)$  و  $B(-1, 3)$  برابر ..... است. ۳۴- قرینه نقطه  $A(2, -1)$  نسبت به نقطه  $M(-1, 4)$ ، نقطه ..... است.

۳۵- اگر  $A(5, 1)$ ،  $B(10, 4)$  و  $C(7, 9)$  سه رأس مربع  $ABCD$  با قطر  $AC$  باشند، مختصات رأس چهارم به صورت ..... است.

۳۶- مساحت دایره‌ای به مرکز  $O(1, -2)$  و مماس بر خط  $5x - 12y - 3 = 0$  برابر ..... است.

۳۷- نقاط  $A(2, 0)$ ،  $B(5, 4)$  و  $C(-2, 3)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. نوع مثلث را تعیین کرده و محیط آن را بیابید. (کار در کلاس کتاب درسی)

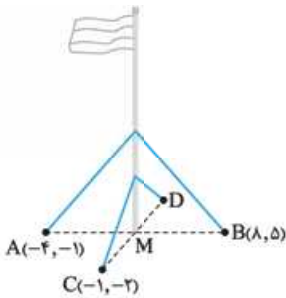
۳۸- مساحت مثلثی با رئوس  $A(2, 5)$ ،  $B(3, 0)$  و  $C(0, 2)$  را به دست آورید.

۳۹- نقطه  $M(2, -3)$  وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه  $A(5, 1)$  و  $B$  است. مختصات نقطه  $B$  را بیابید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۴۰- دو نقطه  $A(4, 5)$  و  $B(-2, 11)$  را در نظر بگیرید. فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط  $AB$  به دست آورید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۱- یک میله پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده است، به طوری که فاصله هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصله نقطه مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطه  $D$  را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)



۴۲- معادله عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  که در آن  $A(4, -1)$  و  $B(-2, 5)$  است را به دست آورید.

۴۳- قرینه نقطه  $A(2, -1)$  نسبت به نقطه  $M(3, 4)$  به دست آورید.

۴۴- نقاط  $A(2, -3)$ ،  $B(-1, 4)$ ،  $C(5, 7)$  و  $D(-1, 4)$  سه رأس مستطیل  $ABCD$  هستند. مختصات رأس  $D$  را بیابید. (مشابه تمرین کتاب درسی)

۴۵- اگر نقاط  $A(2m+1, 5)$ ،  $B(2n, n-3)$ ،  $C(2-m, 4)$  و  $D(-1, m+1)$  رئوس متوازی‌الاضلاع  $ABCD$  و  $AC$  یکی از قطرهای آن باشد،  $m$  و  $n$  را به دست آورید.

۴۶- نقطه  $A(7, 6)$  رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات  $2y - 3x = 11$  و  $3y + 4x = 8$  می‌باشند. مختصات وسط قطر آن را به دست آورید.

۴۷- مثلث  $ABC$  با رئوس  $A(1, 9)$ ،  $B(3, 1)$  و  $C(7, 11)$  را در نظر بگیرید.

۱) طول میانه  $AM$  را محاسبه کنید. ۲) معادله خطی که میانه  $AM$  روی آن قرار دارد را به دست آورید. (کار در کلاس کتاب درسی)

۴۸- نقطه  $M$  روی محور طول‌ها، از دو نقطه  $A(-1, 2)$  و  $B(2, -2)$  به یک فاصله است. مختصات نقطه  $M$  را تعیین کنید.

۴۹- نقاطی روی خط  $y = x$  به گونه‌ای بیابید که فاصله آن‌ها از نقطه  $A(2, -1)$  برابر ۳ واحد باشد.

۵۰- نقاط  $A(-3, 2)$  و  $B(5, 8)$  دو سر یکی از قطرهای دایره‌ای می‌باشند.

۵۱- مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن دایره را به دست آورید. آیا نقطه  $C(4, 1)$  بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۲- فاصله نقطه  $P(2, 3)$  را از هر یک از خطهای زیر به دست آورید.

$$2x + y = 2 \quad x = -3 \quad y = 5$$

۵۳- خط  $L: 3x - 4y + 5 = 0$  بر دایره‌ای به مرکز  $O(2, -1)$  مماس است. شعاع دایره را به دست آورید. (مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

۵۴- یکی از اضلاع مربعی بر خط  $L: y = 3x + 1$  واقع است. اگر  $A(2, -3)$  یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۵۵- فاصله مبدأ مختصات از خط  $3x = my + 10$  برابر ۲ واحد است.  $m$  را بیابید.

۵۶- معادله قطر مربعی به صورت  $5x - 12y - 4 = 0$  است. اگر  $A(1, -1)$  یک رأس آن باشد، مساحت مربع را به دست آورید.

۵۷- نقاط  $A(5, 3)$ ،  $B(-1, 2)$  و  $C(1, -4)$  سه رأس مثلث  $ABC$  هستند. طول ارتفاع  $AH$  را به دست آورید.

۵۸- دو نقطه روی خط به معادله  $y = x - 1$  به گونه‌ای قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله  $2x - 3y = 5$  برابر  $\sqrt{13}$  است. مختصات این دو نقطه را به دست آورید.

۵۹- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط  $2y + x = 6$  و  $2x - y = 7$  و یک رأس آن نقطه  $A(8, 5)$  است. مساحت این مستطیل را به دست آورید.

۶۰- نشان دهید دو خط با معادلات  $5x + 12y + 2 = 0$  و  $5x - 12y + 2 = 0$  موازی یکدیگرند و سپس فاصله این دو خط را محاسبه کنید.

(مشابه تمرین کتاب درسی)

۶۱- فاصله دو خط  $3x - 2y + m = 0$  و  $6x - 4y + 2 = 0$  برابر  $\sqrt{13}$  است. مقادیر  $m$  را به دست آورید.

۶۲- دو ضلع مربعی بر دو خط به معادلات  $6x - 2y = 4$  و  $6x - 2y = 8$  منطبق‌اند. مساحت مربع را حساب کنید.

صفحه ۱۳ تا ۱۴ کتاب درسی

## قسمت اول: معادله درجه دوم

## درس ۲

درس نامه ۲ - قسمت اول را در صفحه ۵۵ ببینید.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۶۳- برای حل معادله  $5x^2 - 3x^4 + 2 = 0$  کافی است قرار دهیم  $x^2 = t$  تا به معادله درجه دوم تبدیل شود و سپس آن را حل کنیم.

۶۴- اگر معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای دو ریشه متمایز باشد، آن‌گاه مجموع ریشه‌های آن برابر  $-\frac{b}{a}$  است.

۶۵- معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن برابر ۵ و حاصل ضرب آن‌ها برابر ۳- باشد، به صورت  $x^2 - 5x - 3 = 0$  می‌باشد.

۶۶- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 1 = 0$  باشند، آن‌گاه  $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 5$ .

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۶۷- در معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  اگر  $a$  و  $c$  مختلف‌العلامه باشد، آن‌گاه معادله دارای ..... ریشه حقیقی است.

۶۸- مجموع ریشه‌های معادله  $2x^2 - 8x + 5 = 0$  برابر ..... است.

۶۹- معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن  $S$  و حاصل ضرب ریشه‌های آن  $P$  باشد، به صورت ..... است.

۷۰- اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 4x + 1 = 0$  باشد، حاصل  $\alpha^2 + \beta^2$  برابر ..... است.

۷۱- معادله درجه دومی که ریشه‌های آن  $1 - \sqrt{5}$  و  $1 + \sqrt{5}$  باشد، عبارت است از .....

معادلات زیر را حل کنید.

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \quad x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$x^4 - 8x^2 + 8 = 0 \quad x^4 + 3x^2 + 2 = 0$$

$$x - 7\sqrt{x} + 6 = 0 \quad 4x^6 + 1 = 5x^3$$

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0 \quad (x + 2)^4 + (x + 2)^2 - 2 = 0$$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلات زیر را بدون حل آن‌ها به دست آورید.

$$2x^2 - (\sqrt{3} + 1)x + 2 - \sqrt{5} = 0 \quad 3x^2 - 7x - 1 = 0$$

۸۱- اگر مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم  $mx^2 - (m + 2)x + 1 - 5m = 0$  برابر ۲ باشد، حاصل ضرب ریشه‌ها را به دست آورید.

۸۲- اگر مجموع ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - mx + m - 2 = 0$ ، دو برابر عکس حاصل ضرب ریشه‌های آن باشد،  $m$  را بیابید.

■ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 3x + 1 = 0$  باشند، بدون حل معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

۸۳  $\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2$       ۸۴  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$       ۸۵  $\alpha^3 + \beta^3$

۸۶  $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$       ۸۷  $\alpha^2 + 2\beta$

۸۸ اگر یکی از ریشه‌های معادله  $2x^2 - 8x + m - 1 = 0$  از ریشه دیگر آن سه واحد بزرگ‌تر باشد،  $m$  و هر دو ریشه را به دست آورید.

۸۹  $m$  را طوری بیابید که مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله  $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$  برابر ۶ باشد.

■ در هر یک از موارد زیر، معادله درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن، اعداد داده‌شده باشد.

۹۰  $-3, 2$       ۹۱  $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}$       ۹۲  $\frac{5 + \sqrt{3}}{2}, \frac{5 - \sqrt{3}}{2}$

۹۳ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آن‌ها  $-1$  و حاصل ضرب آن‌ها نیز  $-1$  باشد.

۹۴ محیط مستطیلی  $11 \text{ cm}$  و مساحت آن  $6 \text{ cm}^2$  است. طول و عرض آن را مشخص کنید.

۹۵ معادله درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن یک واحد از ریشه‌های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$  بزرگ‌تر باشد.

۹۶ معادله درجه‌دومی بنویسید که ریشه‌های آن مکعب ریشه‌های معادله  $x^2 - x - 2 = 0$  باشد.

صفحه ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی

### قسمت دوم: تابع درجه دوم

## درس ۲

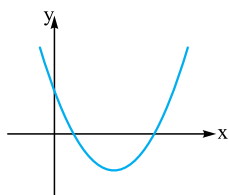
درس‌نامه ۲ - قسمت دوم را در صفحه ۵۸ ببینید.

■ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۹۷ مقدار مینیمم سهمی  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  برابر ۲ است.

۹۸ اگر  $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ ، آن‌گاه معادله  $f(x) = 0$  دارای دو ریشه منفی است.

۹۹ در شکل مقابل، داریم  $a > 0$ ،  $b > 0$  و  $c > 0$ .



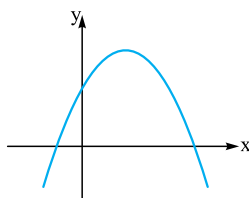
■ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱۰۰ سهمی  $f(x) = -2x^2 - 4x + 9$  دارای ..... به طول ..... است و مقدار آن برابر ..... است.

۱۰۱ در سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، عدد  $c$  نشان‌دهنده ..... است.

۱۰۲ صفرهای تابع  $f$  در واقع ریشه‌های معادله ..... است.

۱۰۳ در سهمی مقابل، علامت  $a$  .....، علامت  $b$  ..... و علامت  $c$  ..... است.



■ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند، سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

۱۰۴  $f(x) = x^2 - 4x + 10$       ۱۰۵  $f(x) = -(x+2)^2 + 4$

۱۰۶  $f(x) = (x+1)(4-2x) + 1$       ۱۰۷  $f(x) = (2x+1)^2 - (x-1)^2$

۱۰۸ اگر مقدار ماکزیمم سهمی به معادله  $y = mx^2 + 4x + m + 3$  برابر ۳ باشد،  $m$  را تعیین کنید.

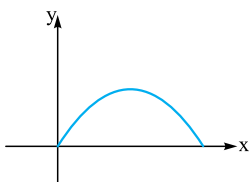
۱۰۹ فوتبالیستی توپی را با زاویه  $45^\circ$  نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیه  $20 \text{ m/s}$  شوت می‌کند. معادله مسیر حرکت

توپ، یک تابع درجه دوم با ضابطه  $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$  است که نمودار آن مانند شکل مقابل می‌باشد. در این رابطه،  $x$

مسافت طی شده افقی و  $y$  ارتفاع توپ از سطح زمین است.

حداکثر ارتفاع توپ را به دست آورید.

مسافت افقی طی شده توسط توپ در هوا چه قدر است؟



(مثال کتاب درسی)

۱۱۰- موشکی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده و  $t$  ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع  $h$  متری سطح زمین قرار می‌گیرد، معادله حرکت آن به صورت  $h(t) = 100t - 5t^2 (t \geq 0)$  است.

۱۱۱- چه قدر طول می‌کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟ ارتفاع نقطه اوج را بیابید.

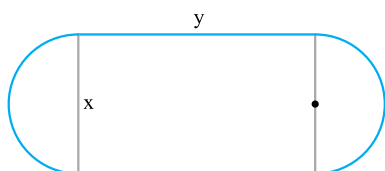
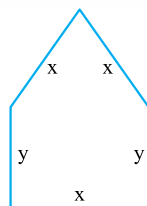
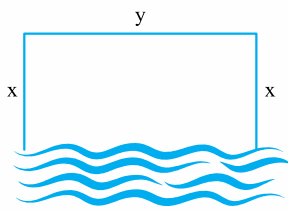
(تمرین کتاب درسی)

چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین برمی‌گردد؟

۱۱۱- اگر  $2x + y = 12$  باشد،  $x$  و  $y$  را طوری بیابید که حاصل ضرب آن‌ها حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱۱۲- قرار است در کنار رودخانه‌ای، محوطه‌ای مستطیل‌شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلع محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینه نصب  $100$  متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

(کار در کلاس کتاب درسی)



۱۱۳- یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره  $4\text{ m}$  باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

(مثال کتاب درسی)

۱۱۴- استادیومی به شکل مقابل در حال ساخت است که در آن  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$  و نیم‌دایره‌ها به شعاع  $\frac{x}{4}$  هستند. اگر محیط استادیوم  $1500$  متر باشد،  $x$  و  $y$  را طوری بیابید که:

(تمرین کتاب درسی)

مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن گردد.

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)

در هر یک از سهمی‌های زیر، بدون حل معادله  $f(x) = 0$ ، در مورد وجود و علامت ریشه‌های آن بحث کنید.

۱۱۶-  $f(x) = 5x^2 + 7x - 1$

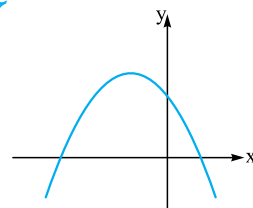
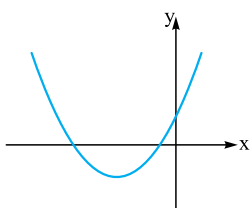
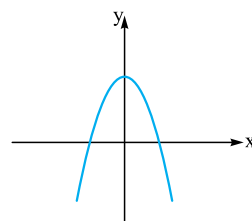
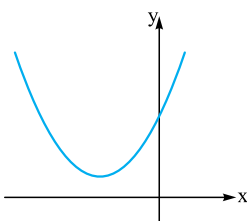
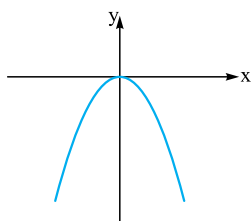
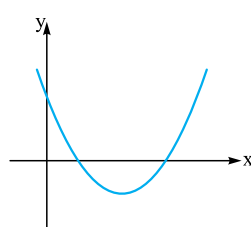
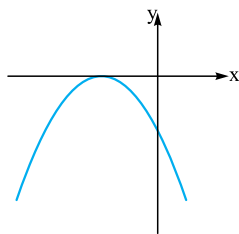
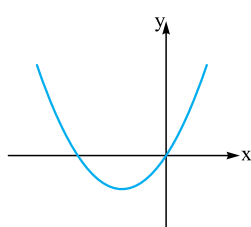
۱۱۵-  $f(x) = x^2 + 6x + 7$

۱۱۸-  $f(x) = 4x^2 + x + 3$

۱۱۷-  $f(x) = -3x^2 + x + 6$

معادله هر یک از سهمی‌های زیر به صورت  $f(x) = ax^2 + bx + c$  است. در هر مورد، علامت ضرایب  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص نموده و تعیین کنید  $f(x) = 0$  چند ریشه دارد؟

(مشابه کار در کلاس کتاب درسی)



۹۶۳- واریانس، پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حد انتظار نشان می‌دهد، زیرا در محاسبه واریانس از میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین، استفاده می‌شود. جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۹۶۴- برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر ..... است.

۹۶۵- واحد واریانس برابر با ..... واحد داده‌های مورد نظر است.

۹۶۶- اگر هر یک از داده‌ها در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آن‌ها در ..... ضرب می‌شود.

۹۶۷- نسبت انحراف معیار به میانگین ..... نام دارد.

۹۶۸- در داده‌های مرتب‌شده از کوچک به بزرگ، میانه داده‌های قبل از میانه اصلی ..... و میانه داده‌های بعد از میانه اصلی ..... نام دارد.

۹۶۹- میانه داده‌ها، همان ..... است.

۹۷۰- دامنه تغییرات داده‌های ۱۵, ۶, ۱۰, ۴, ۱۸, ۲۰ را به دست آورید.

۹۷۱- اگر دامنه تغییرات داده‌های ۵, ۱۲, m, ۱۶, ۲۵, ۱۵ برابر ۳۰ باشد، m را بیابید.

در هر مورد واریانس داده‌های ارائه‌شده را به دست آورید.

۹۷۲- ۰, ۵, ۳, ۱, ۱, ۲ ۹۷۳- ۲۰, -۷, -۱۵, ۳۱, ۱۶

۹۷۴- اختلاف تعدادی داده از میانگین آن‌ها عبارت‌اند از ۶, a, -۱, ۲, -۳, -a, واریانس داده‌ها را محاسبه کنید.

۹۷۵- هشت داده آماری با میانگین ۱۲ و واریانس ۵ در اختیار داریم. اگر دو داده ۸ و ۱۶ به آن‌ها اضافه شود، واریانس ۱۰ داده آماری حاصل را حساب کنید. هر یک از موارد زیر را ثابت کنید.

۹۷۶- اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آن‌ها تغییر نمی‌کند، به عبارت دیگر:  $\sigma_{x+b}^2 = \sigma_x^2$

۹۷۷- اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آن‌ها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب می‌شود، به عبارت دیگر:  $\sigma_{ax}^2 = a^2 \cdot \sigma_x^2$

۹۷۸- هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شده است. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجه سانتی‌گراد و واریانس دمای هوا ۶ درجه سانتی‌گراد به توان ۲ باشد، میانگین و واریانس دمای هوا را برحسب فارنهایت بنویسید.

۹۷۹- فرض کنید واریانس قیمت‌های مواد غذایی برابر ۲۰ باشد. اگر قیمت مواد غذایی در یک سال، ۳۰ درصد افزایش یابد، واریانس قیمت‌های مواد غذایی بعد از یک سال را حساب کنید.

در هر مورد انحراف معیار داده‌های ارائه‌شده را به دست آورید.

۹۸۰- ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵ ۹۸۱- ۲, ۴, ۳, ۱, ۶, ۸

در هر مورد ضریب تغییرات داده‌ها را حساب کنید.

۹۸۲- ۸, ۱۲, ۶, ۱۴ ۹۸۳- ۱۵, ۱۱, ۱۷, ۱۳, ۱۹

۹۸۴- توضیح دهید ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان یک کلاس ۵ سال دیگر چه تغییری می‌کند.

۹۸۵- حسین و حمید دو کارمند شرکت A هستند که وظایف یکسانی دارند، اما حقوق دریافتی آن‌ها ماهانه به ترتیب ۸ و ۱۲ میلیون تومان است. ماهان و رضا نیز دو کارمند شرکت B هستند که با وظایف یکسانی حقوق‌هایی به ترتیب ۱۳ و ۱۸ میلیون تومان به صورت ماهانه دریافت می‌کنند. در کدام شرکت بی‌عدالتی بیشتری در پرداخت حقوق به این افراد مشاهده می‌شود؟ چرا؟

۹۸۶- جدول زیر، پول توجیبی (ده هزار تومان) هفتگی ۵ دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد.

مینا	۷	۹	۸	۹	۷
مریم	۱۰	۸	۶	۷	۹

میانگین و میانه پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا به دست آورید.

انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا به دست آورید.

برنامه‌ریزی برای یک سفر یک‌روزه با دوستان، برای مریم ساده‌تر است یا مینا؟ چرا؟

۹۸۷- در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند. میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم به ترتیب ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. مشخص کنید عملکرد کدام گروه بهتر است؟ چرا؟

۹۸۸- داده‌های  $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$  مفروض است. ضریب تغییرات داده‌های  $u_i = 12x_i + 6$  را حساب کنید.

۹۸۹- اگر واریانس داده‌های  $5 - c, -1, b - 2a - 3$  برابر صفر باشد، ضریب تغییرات داده‌های  $a, b$  و  $c$  را به دست آورید.

در هر مورد از داده‌های زیر، چارک‌ها را به دست آورید.

۹۹۰- ۲۵, ۱۷, ۱۹, ۳, ۱۶, ۲۳, ۹, ۲۷, ۱۵, ۶, ۱۱ ۹۹۱- ۱۳, ۵, ۹, ۱۸, ۹, ۱۴, ۶, ۸, ۱۵

۹۹۲- ۱۰, ۱۵, ۱۷, ۱۴, ۱۱, ۸, ۱۶, ۱۹, ۱۳, ۱۴, ۷, ۱۸

۹۹۳- واریانس داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم در داده‌های مقابل را به دست آورید. ۱۸, ۱۹, ۱۴, ۲۰, ۱۲, ۱۷, ۱۱, ۱۷, ۱۱, ۱۴, ۱۶, ۱۸



**مثال** شیب و عرض از مبدأ خطوط  $y = 5x + 1$  و  $2x - 3y + 1 = 0$  را به دست آورید.

**پاسخ:** شیب و عرض از مبدأ خط  $y = 5x + 1$  به ترتیب  $m = 5$  و  $h = 1$  می‌باشد.  
شیب و عرض از مبدأ خط  $2x - 3y + 1 = 0$  به ترتیب  $m = \frac{2}{3}$  و  $h = \frac{1}{3}$  می‌باشد.

**خطوط خاص**

- خط به معادله  $x = 0$ ، معادله محور  $y$ ها و در حالت کلی خط به معادله  $x = a$ ، خطی موازی محور  $y$ ها است. شیب این خطوط تعریف نشده است.
- خط به معادله  $y = 0$ ، معادله محور  $x$ ها و در حالت کلی خط به معادله  $y = b$ ، خطی موازی محور  $x$ ها است. شیب این خطوط برابر صفر است.
- خطوط  $y = x$  و  $y = -x$ ، به ترتیب معادله نیمساز ربع اول و سوم و معادله نیمساز ربع دوم و چهارم هستند، شیب آن‌ها به ترتیب ۱ و -۱ است.

**شرط موازی بودن، عمود بودن و متقاطع بودن دو خط**

دو خط با شیب‌های  $m_1$  و  $m_2$  را در نظر بگیرید:  
الف) شرط آن که دو خط با هم موازی باشند، آن است که  $m_1 = m_2$ .  
ب) شرط آن که دو خط بر هم عمود باشند، آن است که  $m_1 m_2 = -1$ .  
پ) شرط آن که دو خط متقاطع، غیر عمود باشند، آن است که  $m_1 \neq m_2$  و نیز  $m_1 m_2 \neq -1$ .

**مثال** در هر یک از موارد زیر، وضعیت دو خط  $L$  و  $T$  را نسبت به هم مشخص کنید.

الف)  $T: y = -\frac{1}{3}x + 7$  و  $L: y = 2x - 1$   
ب)  $T: 2x - y - 3 = 0$  و  $L: y = 2x + 5$   
پ)  $T: x = 4y - 1$  و  $L: y = 4x + 1$

**پاسخ:** الف) چون شیب خط  $L$  برابر  $m_1 = 2$  و شیب خط  $T$  برابر  $m_2 = -\frac{1}{3}$  و  $m_1 m_2 = -\frac{2}{3} \neq -1$  پس این دو خط بر هم عمودند.  
ب) شیب خط  $L$  برابر  $m_1 = 2$  و شیب خط  $T$  نیز برابر  $m_2 = 2$  است. چون  $m_1 = m_2$ ، پس این دو خط با هم موازی‌اند.  
پ) شیب خط  $L$  برابر  $m_1 = 4$  و شیب خط  $T$  نیز برابر  $m_2 = \frac{1}{4}$  است؛ پس این دو خط متقاطع غیر عمودند.

**پاسخ سوالات**

۱. درست؛ زیرا شیب هر دو خط با هم برابر و مساوی ۲ است.
۲. نادرست؛ معادله محور  $x$ ها به صورت  $y = 0$  می‌باشد.
۳. درست؛ خط  $x = 2$  موازی محور  $y$ ها و خط  $y = 1$  موازی محور  $x$ ها است و لذا بر هم عمودند.
۴. درست؛ زیرا شیب خط  $2y + mx - 1 = 0$  برابر  $-\frac{m}{2}$  و شیب خط  $x = 3y - 5$  برابر  $\frac{1}{3}$  بوده و لذا داریم:  $-\frac{m}{2} = -3 \Rightarrow m = 6$
۵. نادرست؛ زیرا:  $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - 3}{-2 - 2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

**قسمت اول:**

یادآوری و تکمیل معادله خط

**تفصیل**

درس ۱

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

**سخن دبیر**

توی این قسمت مطالبی که در مورد معادله خط فونته بودید، دوره و تکمیل می‌شه، مثل رسم نمودار خط، انواع معادله خط، خط‌های قاص و شرط عمود و موازی بودن دو خط. این قسمت مقدمه‌ای واسه قسمت بعدیه که مطالب مهم‌تری رو دربرداره.

**معادله خط**

برای نوشتن معادله خط، به یک نقطه و شیب نیاز داریم. خطی که از نقطه  $A(x_0, y_0)$  بگذرد و شیب آن  $m$  باشد، عبارت است از:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

**مثال** معادله خطی بنویسید که از نقطه  $A(2, -3)$  بگذرد و شیب آن ۴ باشد.

**پاسخ:**  
 $y - (-3) = 4(x - 2) \Rightarrow y + 3 = 4x - 8$   
 $\Rightarrow y = 4x - 11$

**معادله خط گذرا از دو نقطه معلوم**

اگر خط  $L$  از دو نقطه غیر هم‌طول  $A$  و  $B$  عبور کند، آن‌گاه شیب آن برابر است با:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

حال با در نظر گرفتن شیب به دست آمده و یکی از نقاط  $A$  و  $B$  می‌توان معادله آن را نوشت.

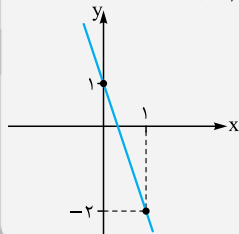
**مثال** معادله خطی بنویسید که از نقاط  $A(2, 3)$  و  $B(4, -3)$  می‌گذرد.

**پاسخ:**  
 $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 3}{4 - 2} = \frac{-6}{2} = -3$   
معادله خط:  $y - 3 = -3(x - 2) \Rightarrow y - 3 = -3x + 6$   
 $\Rightarrow y = -3x + 9$

**رسم نمودار خط**

اگر معادله خط را داشته باشیم، با مشخص کردن دو نقطه از خط، نمودار آن را می‌توان رسم کرد.

**مثال** خط به معادله  $y = -3x + 1$  را رسم کنید.



**پاسخ:** دو نقطه دلخواه از خط را به دست آورده و در دستگاه مختصات آن‌ها را به هم وصل کرده و از دو طرف امتداد می‌دهیم:

$x$	۰	۱
$y$	۱	-۲

**انواع معادله خط**

- معمولاً معادله خط به یکی از دو صورت  $y = mx + h$  یا  $ax + by + c = 0$  نوشته می‌شود.
- در خط به معادله  $y = mx + h$ ،  $m$  شیب خط و  $h$  عرض از مبدأ است.
- در خط به معادله  $ax + by + c = 0$ ،  $m = -\frac{a}{b}$  شیب خط و  $h = -\frac{c}{b}$  عرض از مبدأ خط می‌باشد.

۱۸. می دانیم شیب خط  $ax + by + c = 0$  برابر  $-\frac{a}{b}$  است؛ پس شیب خط

L برابر  $m = \frac{1}{3}$  و شیب خط T برابر  $m' = \frac{1}{3}$  بوده و چون  $m = m'$ ، پس این دو خط با هم موازی اند.

۱۹. خط L را می توان به صورت زیر نوشت:

$$x = 3y + 2 \Rightarrow 3y = x - 2 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

پس شیب خط L برابر  $m = \frac{1}{3}$  و شیب خط T برابر  $m' = 3$  بوده. چون  $mm' \neq -1$  و  $m \neq m'$ ، پس این دو خط با هم متقاطع غیرعمود هستند.

۲۰. شیب خط L برابر  $m = \frac{2}{3}$  و شیب خط T برابر  $m' = -\frac{3}{2}$  بوده و چون  $mm' = -1$ ، پس این دو خط بر هم عمودند.

۲۱. خط L موازی محور yها و خط T موازی محور xها است. در نتیجه این دو خط بر هم عمودند.

۲۲. الف) شیب خط L برابر  $m' = \frac{3}{2}$  است؛ پس باید  $m = \frac{2}{3}$ .

ب) باید  $m$  و  $m'$  عکس و قرینه یکدیگر باشند. چون  $m' = \frac{3}{2}$ ، پس باید  $m = -\frac{2}{3}$  باشد.

۲۳. شیب خط  $y = (k^2 - 3)x + 5$  برابر  $m = k^2 - 3$  و شیب خط  $y = 6x + 7$  برابر  $m' = 6$  است. چون دو خط موازی هستند، پس داریم:

$$m = m' \Rightarrow k^2 - 3 = 6 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$$

$$(m+1)y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{m+1}x + \frac{2}{m+1} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{m+1}$$

$$y = (2m+1)x + 1 \Rightarrow m_2 = 2m+1$$

شرط عمودبودن این دو خط آن است که داشته باشیم  $m_1 m_2 = -1$ :

$$\frac{1}{m+1} \times (2m+1) = -1 \Rightarrow 2m+1 = -m-1 \Rightarrow 3m = -2$$

$$\Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

۲۵. ارتفاع AH وارد بر ضلع BC است، پس

شیب AH، عکس و قرینه شیب BC می باشد:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{8 - (-2)}{-1 - 4} = -2$$

$$m_{AH} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین  $m_{AH} = \frac{1}{2}$ . از طرفی، ارتفاع AH از نقطه  $A(2, 1)$  می گذرد. بنابراین معادله آن عبارت است از:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4 - 1}{1 - 5} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

ب) چون ضلع AD بر ضلع AB عمود است، پس  $m_{AD} = \frac{4}{3}$ .

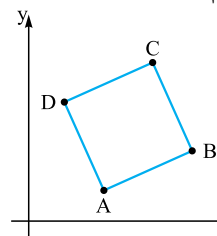
بنابراین شیب ضلع AD برابر  $\frac{4}{3}$  و این ضلع از نقطه  $A(5, 1)$  می گذرد. پس معادله آن را

می توان به صورت مقابل نوشت:

$$y - 1 = \frac{4}{3}(x - 5) \Rightarrow y - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow AD: y = \frac{4}{3}x + \frac{17}{3}$$

پ) کافی است محل تلاقی دو ضلع DC و AD را بیابیم.



۶. ۶. زیرا:  $m_1 = m - 3, m_2 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow m_1 m_2 = -1 \Rightarrow (m - 3) \times (-\frac{1}{3}) = -1$

$\Rightarrow m - 3 = 3 \Rightarrow m = 6$

۷. متقاطع غیرعمود؛ زیرا:  $m_1 = -3$

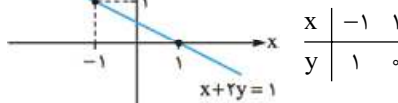
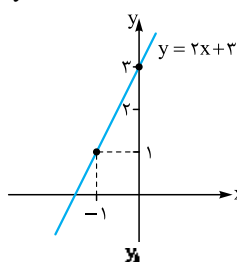
$3x + y = 1 \Rightarrow y = -3x + 1 \Rightarrow m_1 = -3$

چون  $m_1 \neq m_2$  و  $m_1 m_2 \neq -1$ ، پس دو خط متقاطع و غیرعمود هستند.

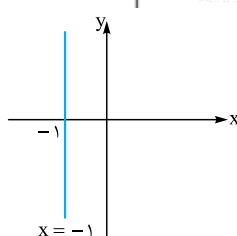
$y = -2x$

$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-5 - 4}{2 - (-1)} = -3$

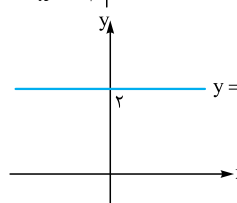
$y = b$



۱۳. خطی موازی محور yها است که محور xها را در نقطه ای به طول -1 قطع می کند.



۱۴. خطی موازی محور xها است که محور عرضها را در نقطه ای به عرض 2 قطع می کند.



۱۵.  $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4 - 4}{-1 - (-3)} = \frac{-8}{2} = -4$

معادله خط AB:  $y - 4 = -4(x + 3)$

$\Rightarrow y - 4 = -4x - 12 \Rightarrow y = -4x - 8$

۱۶.  $3x + 2y = 5 \Rightarrow$  شیب خط  $= -\frac{a}{b} = -\frac{3}{2}$

بنابراین شیب خط مطلوب باید  $m = \frac{2}{3}$  باشد؛ پس معادله آن عبارت است از:

$y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

۱۷. شیب خط L برابر  $m = 5$  و شیب خط T برابر  $m' = -\frac{1}{5}$  است. چون  $mm' = -1$ ، پس این دو خط بر هم عمودند.

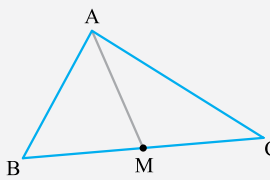
چون طول اضلاع دو به دو متفاوت است، پس مثلث متساوی‌الساقین و متساوی‌الاضلاع نیست، اما رابطه فیثاغورس برقرار است:  $۸^۲ + ۶^۲ = ۱۰^۲$ . پس مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

**مختصات نقطه وسط پاره خط**

اگر نقاط  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  دو سر پاره خط AB باشند، آن گاه مختصات وسط پاره خط AB عبارت است از:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

**مثال** مثلث با رئوس  $A(-۲, ۲)$ ،  $B(-۱, ۳)$  و  $C(۳, ۹)$  را در نظر بگیرید. طول میانه AM را به دست آورید.

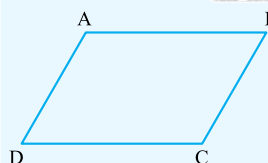


**پاسخ:** برای درک بهتر، شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم؛ با توجه به شکل، باید ابتدا مختصات وسط ضلع BC را بیابیم و سپس فاصله آن را تا رأس A به دست آوریم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = M\left(\frac{-1 + 3}{2}, \frac{3 + 9}{2}\right) = M(1, 6)$$

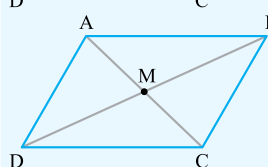
$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 - 6)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

**رابطه مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع**



در متوازی‌الاضلاع ABCD داریم:

$$\begin{aligned} x_A + x_C &= x_B + x_D \\ y_A + y_C &= y_B + y_D \end{aligned}$$



**نکات** اگر قطرهای متوازی‌الاضلاع را رسم کنیم، از آنجایی که قطرهای در متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

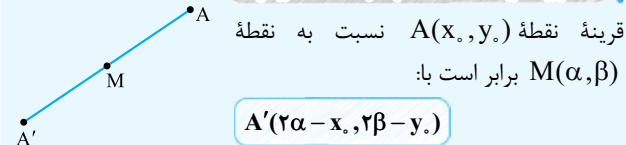
**مثال** اگر  $A(۲, -۳)$ ،  $B(۴, ۵)$  و  $C(-۱, ۸)$  سه رأس متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، رأس D را بیابید.

**پاسخ:**

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 1 = 4 + x_D \\ -3 + 8 = 5 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 0 \end{cases}$$

پس  $D(-۳, ۰)$  رأس چهارم متوازی‌الاضلاع است.

**قرینه یک نقطه نسبت به نقطه دیگر**



$$A'(2\alpha - x_0, 2\beta - y_0)$$

خط CD با خط AB موازی است؛ پس  $m_{DC} = \frac{3}{5}$  و این خط از نقطه  $C(۷, ۹)$  می‌گذرد، پس معادله آن عبارت است از:

$$y - 9 = \frac{3}{5}(x - 7) \Rightarrow y - 9 = \frac{3}{5}x - \frac{21}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x - \frac{21}{5} + 9 \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5}$$

حال دو خط  $AD: y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3}$  و  $CD: y = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5}$  را با هم تلاقی می‌دهیم. (y آن‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم).

$$-\frac{5}{3}x + \frac{28}{3} = \frac{3}{5}x + \frac{24}{5} \xrightarrow{\times 15} -25x + 140 = 9x + 72$$

$$\Rightarrow 34x = 68 \Rightarrow x = \frac{68}{34} = 2 \quad (x_D)$$

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{28}{3}$$

$$\xrightarrow{x=2} y = -\frac{10}{3} + \frac{28}{3} = \frac{18}{3} = 6 \quad (y_D)$$

بنابراین نقطه  $D(۲, ۶)$  رأس چهارم مربع است.

**قسمت دوم:**

هندسه تحلیلی

**فصل ۱**

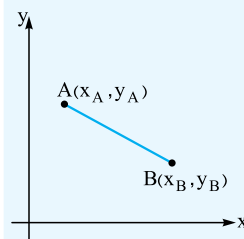
**درباره ۱**

صفحه ۴ تا ۱۰ کتاب درسی

**سخن‌دبیر**

مطالب مهمی که توی این قسمت می‌فونیم اینان: فاصله دو نقطه، مختصات نقطه وسط پاره خط، رابطه مختصات رئوس متوازی‌الاضلاع، قرینه به نقطه نسبت به نقطه دیگر، فاصله نقطه از خط و فاصله دو خط موازی. این قسمت مطالب بسیار مهمی رو دربرداره و معمولاً تو امتحانات ازش سوال مطرح می‌شه.

**فاصله دو نقطه**



اگر  $A(x_A, y_A)$  و  $B(x_B, y_B)$  دو نقطه در صفحه مختصات باشند، آن گاه فاصله آن‌ها از یکدیگر یا همان طول پاره خط AB از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

**تذکره** الف) اگر عرض نقاط A و B برابر باشد، آن گاه فاصله آن‌ها برابر

$$AB = |x_A - x_B|$$

است. با:

ب) اگر طول نقاط A و B برابر باشد، آن گاه فاصله آن‌ها برابر است با:

$$AB = |y_A - y_B|$$

**مثال** اگر  $A(-۱, ۴)$ ،  $B(-۱, -۴)$  و  $C(۵, ۴)$  سه رأس مثلث ABC باشند، نوع مثلث را تعیین کنید.

**پاسخ:** ابتدا طول اضلاع AB، AC و BC را می‌یابیم:

نقاط A و B دارای طول‌های مساوی هستند؛ پس:

$$AB = |y_A - y_B| = |-4 - 4| = 8$$

نقاط A و C دارای عرض‌های مساوی هستند؛ پس:

$$AC = |x_A - x_C| = |-1 - 5| = 6$$

هم‌چنین:

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(-1 - 5)^2 + (-4 - 4)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

پاسخ سوالات

27. نادرست؛ زیرا:  $OA = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

28. درست؛ زیرا:  $M(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}) = M(1, 2)$

29. نادرست؛ زیرا رابطه  $y_A + y_C = y_B + y_D$  برقرار نیست.

30. درست

31. نادرست؛ زیرا:  $d = |5 - (-2)| = 7$

32. درست؛ زیرا:  $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4-(-1)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$

33. 5، زیرا:  $AB = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2+(-4)^2}$

34.  $A'(-4, 9)$ ، زیرا:  $= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

35.  $D(2, 6)$ ، زیرا:  $A'(2\alpha - x, 2\beta - y) = A'(2(-1) - 2, 2(4) - (-1)) = A'(-4, 9)$

$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 5 + 7 = 10 + x_D \Rightarrow x_D = 2$

$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + 9 = 4 + y_D \Rightarrow y_D = 6$

36.  $4\pi$ ، زیرا فاصله مرکز دایره از خط  $5x - 12y - 3 = 0$  همان اندازه شعاع دایره است؛ پس:

شعاع دایره:  $r = \frac{|5 \times 1 - 12 \times (-2) - 3|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|5 + 24 - 3|}{\sqrt{25 + 144}}$

$= \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow S = \pi r^2 = 4\pi$

37. طول اضلاع مثلث را به دست می آوریم:

$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (4-3)^2}$

$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

چون  $AB = AC$ ، پس مثلث متساوی الساقین بوده چون  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ، پس این مثلث در رأس A قائم الزاویه است. در نتیجه مثلث ABC قائم الزاویه متساوی الساقین است.

محیط مثلث ABC برابر است با:

$P = AB + AC + BC = 5 + 5 + \sqrt{50} = 10 + 5\sqrt{2}$

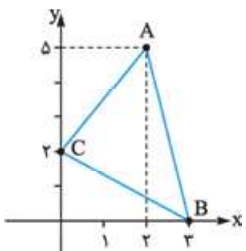
38. شکل مثلث با رئوس داده شده به صورت مقابل است. داریم:

$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2-5}{0-2} = \frac{3}{2}$

$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$

چون  $m_{AC} \cdot m_{BC} = -1$ ، پس اضلاع AC و BC بر هم عمودند. در واقع مثلث

در رأس C قائم الزاویه است؛ پس مساحت آن برابر است با  $S = \frac{1}{2} AC \times BC$ .



نکات با توجه به شکل، M وسط پاره خط AA' است. فرض کنیم مختصات A' به صورت  $A'(x_1, y_1)$  باشد.

$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{x_0 + x_1}{2} \Rightarrow 2\alpha = x_0 + x_1$   
 $\Rightarrow x_1 = 2\alpha - x_0$

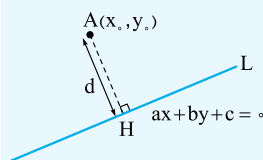
$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{y_0 + y_1}{2} \Rightarrow 2\beta = y_0 + y_1$   
 $\Rightarrow y_1 = 2\beta - y_0$

نتیجه گیری قرینه نقطه  $A(x_0, y_0)$  نسبت به مبدأ مختصات برابر  $A'(-x_0, -y_0)$  می باشد.

مثال قرینه نقطه  $A(2, -5)$  را نسبت به نقطه  $M(-4, 2)$  بیابید.

پاسخ: اگر A' قرینه نقطه A نسبت به نقطه M باشد، آن گاه داریم:  
 $A'(2x_M - x_A, 2y_M - y_A) = A'(-8 - 2, 4 - (-5)) = A'(-10, 9)$

فاصله نقطه از خط



فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $ax + by + c = 0$  برابر است با:

$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال فاصله نقطه  $A(-3, 1)$  را از خط  $3x - 4y - 2 = 0$  به دست آورید.

پاسخ:  $d = \frac{|3(-3) - 4(1) - 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-9 - 4 - 2|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$

فاصله یک نقطه از خطهای خاص

(الف) فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $x = a$  برابر است با:  $d = |a - x_0|$

(ب) فاصله نقطه  $A(x_0, y_0)$  از خط  $y = b$  برابر است با:  $d = |b - y_0|$

مثال فاصله نقطه  $A(2, -5)$  را از خطهای  $L: x = -6$  و  $T: y = 2$  به دست آورید.

پاسخ: فاصله نقطه  $A(2, -5)$  از خط  $L: x = -6$  برابر است با  $d = |-6 - 2| = 8$

فاصله نقطه  $A(2, -5)$  از خط  $T: y = 2$  برابر است با  $d = |2 - (-5)| = 7$

فاصله دو خط موازی

فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  از یکدیگر برابر است با:

$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

مثال فاصله دو خط  $3x + 4y + 3 = 0$  و  $6x + 8y - 4 = 0$  را از یکدیگر به دست آورید.

پاسخ: ابتدا طرفین معادله خط  $6x + 8y - 4 = 0$  را بر 2 تقسیم می کنیم تا ضرایب x و y در دو خط داده شده مانند هم باشند:  
 $6x + 8y - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3x + 4y - 2 = 0$

حال فاصله این دو خط موازی را می یابیم:

$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow 4 = \frac{-1 + y_B}{2} \Rightarrow 8 = -1 + y_B \Rightarrow y_B = 9$$

بنابراین نقطه  $B(4, 9)$ ، همان قرینه نقطه  $A$  نسبت به نقطه  $M$  است.

**روش دوم:** می‌دانیم قرینه نقطه  $A(a, b)$  نسبت به نقطه  $M(\alpha, \beta)$  عبارت است از  $B(2\alpha - a, 2\beta - b)$ ؛ بنابراین قرینه نقطه  $A(2, -1)$  نسبت به نقطه  $M(3, 4)$  عبارت است از:  $B(2 \times 3 - 2, 2 \times 4 - (-1)) = B(4, 9)$   
**۴۴.** می‌دانیم اگر  $ABCD$  متوازی‌الاضلاع باشد، آن‌گاه:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

چون مستطیل نیز نوعی متوازی‌الاضلاع است، داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 5 = -1 + x_D \\ -3 + 7 = 4 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = 0 \end{cases}$$

پس نقطه  $D(8, 0)$  رأس چهارم این مستطیل است.

**۴۵.** چون  $AC$  یکی از قطرهای متوازی‌الاضلاع است، پس  $A$  و  $C$  روبه‌روی هم و  $B$  و  $D$  نیز روبه‌روی هم قرار دارند؛ بنابراین داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2m + 1 + 2 - m = 2n - 1$$

$$\Rightarrow m + 3 = 2n - 1 \Rightarrow m - 2n = -4 \quad (1)$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 5 + 4 = n - 3 + m + 1$$

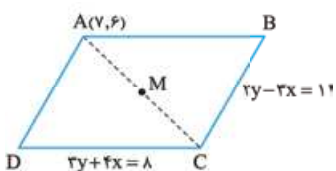
$$\Rightarrow 9 = m + n - 2 \Rightarrow m + n = 11 \Rightarrow -m - n = -11 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} m - 2n = -4 \\ -m - n = -11 \end{cases} \Rightarrow -3n = -15$$

$$\Rightarrow n = 5 \xrightarrow{m+n=11} m = 6$$

**۴۶.** دو خط داده‌شده، موازی نیستند، زیرا شیب‌های برابر ندارند و نیز مختصات

نقطه  $A$  در هیچ‌یک از دو معادله داده‌شده صدق نمی‌کند. بنابراین وضعیت رأس  $A$  و دو ضلع متوازی‌الاضلاع به صورت مقابل است:



دو خط داده‌شده را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا مختصات نقطه  $C$  به دست آید:

$$\begin{cases} (-3) \times (2y - 3x = 11) \\ 2 \times (3y + 4x = 8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y + 9x = -33 \\ 6y + 8x = 16 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 17x = -17 \Rightarrow x = -1$$

$$2y - 3x = 11 \xrightarrow{x=-1} 2y + 3 = 11 \Rightarrow 2y = 8 \Rightarrow y = 4$$

$$\Rightarrow C(-1, 4) \text{ مختصات نقطه } C$$

با توجه به شکل،  $M$  وسط قطر  $AC$  است؛ پس:

$$M\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right) = M\left(\frac{7 + (-1)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) = M(3, 5)$$

**۴۷.** الف) میانه  $AM$  خطی است که از رأس  $A$  به وسط ضلع  $BC$  رسم می‌شود؛ بنابراین مختصات وسط پاره‌خط  $BC$  را می‌یابیم و سپس فاصله آن تا  $A$  را به دست می‌آوریم:

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = M\left(\frac{3 + 7}{2}, \frac{1 + 11}{2}\right) = M(5, 6)$$

$$AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (9 - 6)^2}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(0 - 2)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AC \times BC = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6.5$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 2 = \frac{5 + x_B}{2} \Rightarrow 4 = 5 + x_B \quad \text{۳۹}$$

$$\Rightarrow x_B = -1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow -3 = \frac{1 + y_B}{2} \Rightarrow -6 = 1 + y_B$$

$$\Rightarrow y_B = -7$$

بنابراین مختصات نقطه  $B$  به صورت  $B(-1, -7)$  می‌باشد.

**۴۰.** فرض کنیم  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  باشد؛ پس:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{5 + 11}{2}\right) = M(1, 8)$$

فاصله نقطه  $M(1, 8)$  از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OM = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

**۴۱.** طبق فرض  $AM = BM$  و  $CM = MD$ ؛ یعنی نقطه  $M$  وسط  $AB$  و نیز وسط  $CD$  است. از این که نقطه  $M$  وسط  $AB$  است، می‌توان مختصات آن را یافت:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{-4 + 8}{2}, \frac{-1 + 5}{2}\right) = M(2, 2)$$

نقطه  $M$  وسط  $CD$  نیز می‌باشد؛ پس داریم:

$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-1 + x_D}{2} \Rightarrow 4 = -1 + x_D$$

$$\Rightarrow x_D = 5$$

$$y_M = \frac{y_C + y_D}{2} \Rightarrow 2 = \frac{-2 + y_D}{2} \Rightarrow 4 = -2 + y_D$$

$$\Rightarrow y_D = 6$$

پس مختصات نقطه  $D$  به صورت  $D(5, 6)$  خواهد بود.

**۴۲.** عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  خطی است که بر وسط پاره‌خط  $AB$  عمود می‌شود؛ بنابراین ابتدا مختصات نقطه  $M$  وسط

پاره‌خط  $AB$  را می‌یابیم:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{4 + (-2)}{2}, \frac{-1 + 5}{2}\right) = M(1, 2)$$

برای یافتن شیب عمودمنصف، کافی است شیب پاره‌خط  $AB$  را یافته و آن را

عکس و قرینه کنیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5 - (-1)}{-2 - 4} = \frac{6}{-6} = -1$$

$$\Rightarrow \text{شیب عمودمنصف} = m = 1$$

بنابراین معادله عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  عبارت است از:

$$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y - 2 = x - 1 \Rightarrow y = x + 1$$

**۴۳.** روش اول: فرض می‌کنیم نقطه  $B(x_B, y_B)$  قرینه نقطه  $A$  نسبت به نقطه  $M$  باشد، پس نقطه  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  خواهد بود؛ بنابراین داریم:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow 3 = \frac{2 + x_B}{2} \Rightarrow 6 = 2 + x_B \Rightarrow x_B = 4$$

51 الف)  $2x + y = 2 \Rightarrow 2x + y - 2 = 0$

$$d = \frac{|2 \times 2 + 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

ب) می‌دانیم فاصله نقطه  $P(x_0, y_0)$  از خط  $x = \alpha$  برابر است با:  $d = |x_0 - \alpha|$ ؛ بنابراین فاصله نقطه  $P(2, 3)$  از خط  $x = -3$  برابر است با:

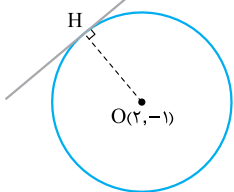
$$d = |2 - (-3)| = 5$$

پ) می‌دانیم فاصله نقطه  $P(x_0, y_0)$  از خط  $y = \beta$  برابر است با:  $d = |y_0 - \beta|$ ؛ بنابراین فاصله نقطه  $P(2, 3)$  از خط  $y = 5$  برابر است با:

$$d = |3 - 5| = 2$$

$$3x - 4y + 5 = 0$$

52 می‌دانیم خط مماس بر دایره، بر شعاع گذرنده از نقطه تماس عمود است.



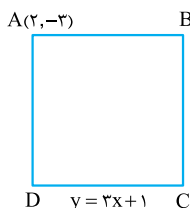
پس شعاع دایره برابر فاصله مرکز دایره از خط مماس می‌باشد:

$$r = OH = \frac{|3 \times 2 - 4 \times (-1) + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

53 مختصات نقطه A در خط L صدق نمی‌کند.

پس نقطه A روی ضلعی که معادله آن داده شده است قرار ندارد.

با توجه به شکلی که رسم کرده‌ایم، فاصله نقطه A(2, -3) از خط  $y = 3x + 1$  برابر طول



$$y = 3x + 1 \Rightarrow 3x - y + 1 = 0$$

ضلع مربع است:

$$AD = \frac{|3 \times 2 - (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$S = (AD)^2 = (\sqrt{10})^2 = 10$$

بنابراین مساحت مربع برابر است با:

54 ابتدا معادله خط را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$3x = my + 10 \Rightarrow 3x - my - 10 = 0$$

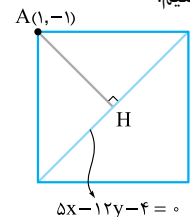
طبق فرض، فاصله مبدأ مختصات یعنی نقطه  $O(0, 0)$  از این خط برابر 2 واحد است؛ پس:

$$d = \frac{|0 - 0 - 10|}{\sqrt{3^2 + m^2}} = 2 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{9 + m^2}} = 2 \Rightarrow 10 = 2\sqrt{9 + m^2}$$

$$\xrightarrow{\div 2} 5 = \sqrt{9 + m^2} \xrightarrow{\text{به توان } 2} 25 = 9 + m^2 \Rightarrow m^2 = 16$$

$$\Rightarrow m = \pm 4$$

55 برای درک بهتر مسئله، شکلی برای آن رسم می‌کنیم.



توجه کنید که چون مختصات نقطه A در معادله قطر صدق نمی‌کند، پس نقطه A روی قطری که معادله‌اش را داریم، قرار ندارد. فاصله نقطه  $A(1, -1)$  از خط  $5x - 12y - 4 = 0$  برابر نصف اندازه قطر مربع است. داریم:

$$AH = \frac{|5 \times 1 - 12 \times (-1) - 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{13}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

بنابراین اگر اندازه قطر مربع را d بگیریم، آن‌گاه  $d = 2AH = 2$  می‌دانیم

$$S = \frac{d^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2$$

مساحت مربع با قطر d برابر  $S = \frac{d^2}{2}$  است؛ پس:

$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

ب) شیب میانه AM عبارت است از:  $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{6 - 9}{5 - 1} = \frac{-3}{4}$

شیب AM را به دست آوردیم. برای نوشتن معادله آن به یک نقطه نیاز داریم. این نقطه را می‌توانیم هر یک از نقاط A یا M بگیریم (فرقی نمی‌کند). مثلاً اگر نقطه  $A(1, 9)$  را در نظر بگیریم، داریم:

$$\text{معادله AM: } y - 9 = -\frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow y - 9 = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

48 مختصات نقطه M به صورت  $M(x, 0)$  می‌باشد. طبق فرض داریم:

$$AM = BM \Rightarrow \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$$

$$= \sqrt{(x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - x)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{(2 - x)^2 + (-2 - 0)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(-1 - x)^2 + 4} = \sqrt{(2 - x)^2 + 4}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (-1 - x)^2 + 4 = (2 - x)^2 + 4$$

$$\Rightarrow 1 + 2x + x^2 + 4 = 4 - 4x + x^2 \Rightarrow 6x = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow M(\frac{1}{2}, 0)$$

49 فرض کنیم M نقطه‌ای روی خط  $y = x$  با ویژگی مسئله باشد. اگر طول

نقطه M برابر a باشد، از آن جایی که نقطه M روی خط  $y = x$  قرار دارد، عرض نقطه M نیز برابر a خواهد بود؛ بنابراین باید a را به گونه‌ای بیابیم که فاصله نقاط  $M(a, a)$  و  $A(2, -1)$  برابر 3 باشد.

$$AM = 3 \Rightarrow \sqrt{(a - 2)^2 + (a + 1)^2} = 3$$

$$\xrightarrow{\text{به توان } 2} (a - 2)^2 + (a + 1)^2 = 9$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 + a^2 + 2a + 1 = 9 \Rightarrow 2a^2 - 2a - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ یا } a = -1$$

پس نقاط مورد نظر  $M(2, 2)$  و  $M(-1, -1)$  می‌باشند.

50 الف) مرکز دایره، وسط نقاط A و B است:

$$\text{مرکز دایره } M(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}) = M(\frac{5 + (-3)}{2}, \frac{1 + 2}{2}) = M(1, \frac{3}{2})$$

برای یافتن اندازه شعاع دایره، می‌توان اندازه پاره خط AB را به دست آورده و آن را نصف کنیم و یا این که فاصله نقطه M را تا یکی از نقاط A یا B بیابیم:

$$\text{اندازه شعاع دایره } AM = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2}$$

$$= \sqrt{(-3 - 1)^2 + (2 - \frac{3}{2})^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

ب) کافی است فاصله نقطه C را تا نقطه M به دست آوریم. اگر اندازه MC برابر شعاع دایره باشد، نقطه C روی محیط دایره واقع است:

$$MC = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (\frac{3}{2} - 1)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 16} = 5$$

بنابراین نقطه C روی محیط دایره قرار دارد.

خط اولی هم به شکل  $5x + 12y + 2 = 0$  بود؛ پس فاصله این دو خط موازی

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 - (-6)|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{26}{13} = 2$$

۶۰. طرفین خط دوم را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ضرایب  $x$  و  $y$  در دو خط یکسان باشند:

$$6x - 4y + 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} 3x - 2y + 1 = 0$$

می‌دانیم فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

می‌باشد. در این جا فاصله دو خط موازی  $3x - 2y + m = 0$  و  $3x - 2y + 1 = 0$  طبق فرض برابر  $\sqrt{13}$  است؛ پس داریم:

$$\frac{|m - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|m - 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \sqrt{13} \Rightarrow \frac{|m - 1|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |m - 1| = 13 \Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 13 \\ m - 1 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 14 \\ m = -12 \end{cases}$$

۶۱. می‌توان نوشت:

$$6x - 2y = 4 \xrightarrow{\div 2} 3x - y = 2 \Rightarrow 3x - y - 2 = 0$$

$$3x = y - 8 \Rightarrow 3x - y + 8 = 0$$

بنابراین دو خط داده‌شده با هم موازی هستند و در نتیجه دو ضلع موازی مربع روی این دو خط قرار دارند. بنابراین فاصله این دو خط موازی، همان اندازه ضلع مربع خواهد بود:

$$AB = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2 - 8|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$S = (AB)^2 = 10 \quad \text{بنابراین مساحت مربع برابر است با:}$$

قسمت اول:

معادله درجه دوم

صفحه ۱۳ تا کتاب درسی

تعمیرات

در متن ۲

سخن دبیر

توی این قسمت، اول با روش حل معادله‌های دوم‌درجی که با تغییر متغیر به معادله درجه ۲ تبدیل می‌شن آشنا می‌شیم. بعدش روابط بین ریشه‌های معادله درجه ۲ رو می‌فونیم و آخرش تشکیل معادله درجه ۲ به کمک ریشه‌هاش رو بررسی می‌کنیم. این قسمت بعدی بسیار مهم و معمولاً تو امتحانات از شون سوال مطرح می‌شه.

روش تغییر متغیر برای حل معادله

گاهی اوقات برخی از معادلاتی که درجه دوم نیستند را می‌توان به کمک تغییر متغیر به معادله درجه دوم تبدیل نمود. سپس به کمک روش‌هایی که برای حل معادله درجه دوم داریم، آن‌ها را حل نمود.

مثال معادله  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  را حل کنید.

✓ پاسخ: قرار می‌دهیم  $x^2 = t$ . خواهیم داشت:  $2t^2 - 3t - 2 = 0$

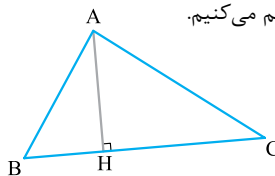
این معادله را به روش  $\Delta$  حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 169$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{2 \times 2} = \frac{3 \pm 13}{4}$$

$$\Rightarrow t = 4 \text{ یا } t = -\frac{5}{2}$$

۵۶. برای درک بهتر، شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.



اندازه ارتفاع  $AH$  همان فاصله نقطه  $A$  از خط  $BC$  می‌باشد؛ بنابراین ابتدا معادله خط  $BC$  را می‌نویسیم و سپس فاصله نقطه  $A$  را تا خط  $BC$  می‌یابیم:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{2 - (-4)}{-1 - 1} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$BC \text{ معادله خط: } y - 2 = -3(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + y + 1 = 0$$

اکنون باید فاصله نقطه  $A(5, 3)$  را از خط  $BC: 3x + y + 1 = 0$  به دست آوریم:

$$AH = \frac{|3 \times 5 + 3 + 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{19}{\sqrt{10}}$$

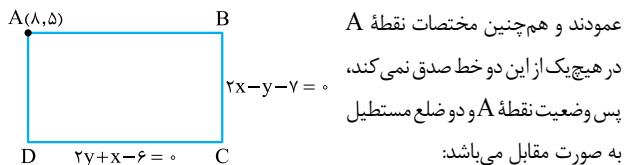
۵۷. فرض می‌کنیم طول نقطه  $a$  باشد، پس عرض آن برابر  $y = a - 1$  خواهد بود؛ بنابراین نقاط مورد نظر به شکل  $A(a, a - 1)$  خواهد بود. فاصله نقطه  $A$  تا خط  $2x - 3y - 5 = 0$  برابر  $\sqrt{13}$  است؛ پس:

$$\sqrt{13} = \frac{|2a - 3(a - 1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \Rightarrow \sqrt{13} = \frac{|2a - 3a + 3 - 5|}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow |-a - 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} -a - 2 = 13 \\ -a - 2 = -13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -15 \\ a = 11 \end{cases}$$

نقاط به شکل  $(a, a - 1)$  بودند؛ پس نقاط مورد نظر به صورت  $A(-15, -16)$  و  $B(11, 10)$  می‌باشند.

۵۸. شیب دو خط داده‌شده، عکس و قرینه یکدیگرند؛ پس این دو خط بر هم عمودند و همچنین مختصات نقطه  $A$



در هیچ‌یک از این دو خط صدق نمی‌کند، پس وضعیت نقطه  $A$  و دو ضلع مستطیل به صورت مقابل می‌باشد:

$$AD = \frac{|2 \times 8 + 10 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \frac{|2 \times 8 - 5 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

در نتیجه مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = AB \times AD = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{12}{\sqrt{5}} = \frac{48}{5} = 9.6$$

۵۹. ابتدا یادآوری می‌کنیم که دو خط  $ax + by + c = 0$  و  $a'x + b'y + c' = 0$  وقتی با هم موازیند که شیب آن‌ها مساوی باشند و یا این که  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$  باشد.

$$\frac{-5}{10} = \frac{12}{-24} = \frac{-1}{2}$$

پس این دو خط با هم موازی‌اند.

فاصله دو خط موازی  $ax + by + c = 0$  و  $ax + by + c' = 0$  برابر است با:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ابتدا باید کاری کنیم که ضرایب  $x$  و  $y$  در دو خط یکسان باشند. برای این منظور در خط  $10x - 24y + 12 = 0$  طرفین را بر  $(-2)$  تقسیم می‌کنیم:

$$-5x + 12y - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta\alpha + \beta^2 &\stackrel{(*)}{=} \Delta\alpha + \Delta\beta - 1 = \Delta(\alpha + \beta) - 1 \\ &= \Delta S - 1 = \Delta \times \Delta - 1 = 24 \end{aligned}$$

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

معادله درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل ضرب ریشه‌های آن P باشد، عبارت است از:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

**مثال** معادله درجه دومی بیابید که ریشه‌های آن  $3 - \sqrt{7}$  و  $3 + \sqrt{7}$  باشد.

**پاسخ:** با فرض  $\alpha = 3 + \sqrt{7}$  و  $\beta = 3 - \sqrt{7}$  داریم:

$$S = \alpha + \beta = 6, \quad P = \alpha\beta = (3 + \sqrt{7})(3 - \sqrt{7}) = 9 - 7 = 2$$

$$\text{معادله مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 2 = 0$$

**مثال** معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن، مربع ریشه‌های معادله  $2x^2 - 10x + 1 = 0$  باشد.

**پاسخ:** فرض کنیم ریشه‌های معادله  $2x^2 - 10x + 1 = 0$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  باشد؛ پس داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 5, \quad P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$$

اگر ریشه‌های معادله درجه دوم خواسته شده را  $\alpha'$  و  $\beta'$  بگیریم، طبق فرض می‌توان نوشت:

$$\alpha' = \alpha^2, \quad \beta' = \beta^2$$

حالا باید  $S'$  و  $P'$  معادله مطلوب را یافته و در رابطه  $x^2 - S'x + P' = 0$  قرار دهیم:

$$S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 5^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 25 - 1 = 24$$

$$P' = \alpha'\beta' = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = P^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

بنابراین معادله مورد نظر عبارت است از:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - 24x + \frac{1}{4} = 0$$

پاسخ سوالات

۶۲. درست

۶۳. نادرست، مجموع ریشه‌ها برابر  $S = -\frac{b}{a}$  است.

۶۴. درست

۶۵. درست، زیرا:  $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \times S = 1 \times 5 = 5$

$$۲.۶۶ \quad x^2 - Sx + P = 0$$

۶۸.  $x^2 - Sx + P = 0$

۶۹. ۱۴، زیرا:  $\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P = 4^2 - 2 \times 1 = 16 - 2 = 14$

۷۰.  $S = 2, P = -4$  زیرا:  $x^2 - 2x - 4 = 0$

$$\Rightarrow \text{معادله: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 10t + 9 = 0 \quad ۷۱$$

$$\Rightarrow (t-1)(t-9) = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ یا } t = 9$$

$$\xrightarrow{t=x^2} x^2 = 1 \text{ یا } x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ یا } x = \pm 3$$

$$x^2 = t \Rightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 + 32 = 81 \quad ۷۲$$

$$\Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow t = 4 \text{ یا } t = -\frac{1}{2}$$

چون  $t = x^2$  بود، پس داریم:  $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$t = -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2} \quad (\text{غیرممکن})$$

پس این معادله فقط دو جواب دارد.

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه ۲

فرض کنیم معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  دارای دو ریشه  $\alpha$  و  $\beta$  باشد. در این صورت:

$$\text{مجموع ریشه‌ها: } S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

**نکته** وقتی معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  دو ریشه دارد، ریشه‌ها به صورت

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{هستند؛ پس:}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

**نکته** با استفاده از اتحادهای فرعی  $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$  و  $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$  خواهیم داشت:

$$\text{مجموع مربعات ریشه‌ها: } \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

$$\text{مجموع مکعبات ریشه‌ها: } \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3SP$$

**مثال** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $2x^2 - 8x - 1 = 0$  باشند، بدون

حل معادله، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \quad (\text{الف}) \quad \frac{\alpha^2}{\beta+1} + \frac{\beta^2}{\alpha+1} \quad (\text{ب})$$

**پاسخ:** الف) در معادله  $2x^2 - 8x - 1 = 0$ ، داریم  $S = \alpha + \beta = \frac{b}{a} = 4$

$$\text{و } P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2} \quad \text{پس: } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P} = \frac{4}{-\frac{1}{2}} = -8$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta+1} + \frac{\beta^2}{\alpha+1} = \frac{\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \beta^2}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1}$$

$$= \frac{(S^2 - 2SP) + (S^2 - 2P)}{P + S + 1} = \frac{(4^2 - 2 \times 4 \times (-\frac{1}{2})) + (4^2 - 2(-\frac{1}{2}))}{-\frac{1}{2} + 4 + 1}$$

$$= \frac{(64 + 4) + (16 + 1)}{\frac{9}{2}} = \frac{70 + 17}{\frac{9}{2}} = \frac{87}{\frac{9}{2}} = \frac{2 \times 87}{9} = \frac{58}{3}$$

**تذکره** اگر رابطه داده شده بر حسب  $\alpha$  و  $\beta$  متقارن نباشد، یعنی اگر با تعویض جای  $\alpha$  و  $\beta$ ، رابطه تغییر کند، گاهی می‌توان یکی از ریشه‌ها را در معادله قرار داد و از نتیجه به دست آمده در رابطه استفاده کرد.

**مثال** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 5x + 1 = 0$  باشد، حاصل

$\alpha^2 + \beta^2$  را بیابید.

**پاسخ:** چون  $\beta$  ریشه معادله است، پس در معادله صدق می‌کند:

$$x^2 - 5x + 1 = 0 \xrightarrow{x=\beta} \beta^2 - 5\beta + 1 = 0 \Rightarrow \beta^2 = 5\beta - 1 \quad (*)$$



$$S = 2 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 2 \Rightarrow \frac{m+2}{m} = 2 \Rightarrow m+2 = 2m \quad .81$$

$$\Rightarrow m = 2 \Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 4x + 1 - 1 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 9 = 0$$

$$\text{P حاصل ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = -\frac{9}{2}$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{m}{2}, P = \frac{c}{a} = \frac{m-2}{2} \quad .82 \text{ داریم:}$$

$$S = \frac{2}{P} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{\frac{m-2}{2}} \Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{4}{m-2} \quad \text{بنا بر فرض داریم:}$$

$$\Rightarrow m(m-2) = 8 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 4 \text{ یا } m = -2$$

$$.83 \text{ در معادله } x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ داریم:}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 3, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$\alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 = \alpha\beta(\beta + \alpha) = P \times S = 1 \times 3 = 3 \quad \text{بنابراین:}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{S^2 - 2P}{P} = \frac{3^2 - 2(1)}{1} = 7 \quad .84$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2SP = 3^2 - 2 \times 3 \times 1 = 9 - 6 = 3 \quad .85$$

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow{\text{توان } 2} (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = A^2 \quad .86$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Rightarrow S + 2\sqrt{P} = A^2$$

$$\Rightarrow 3 + 2\sqrt{1} = A^2 \Rightarrow A^2 = 5 \Rightarrow A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{5}$$

$$.87 \text{ چون } \alpha \text{ ریشه معادله } x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ است، پس در این معادله صدق می‌کند:}$$

$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = 3\alpha - 1 \quad (*)$$

$$\alpha^2 + 2\beta \stackrel{(*)}{=} 3\alpha - 1 + 2\beta = 2(\alpha + \beta) - 1 = 2S - 1 \quad \text{بنابراین:}$$

$$= 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$\alpha = \beta + 3 \quad .88 \text{ بنا بر فرض داریم:}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 4 \quad \text{از طرفی مجموع ریشه‌های معادله برابر است با:}$$

$$\alpha + \beta = 4 \xrightarrow{\alpha = \beta + 3} \beta + 3 + \beta = 4 \Rightarrow 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \beta + 3 \xrightarrow{\beta = \frac{1}{2}} \alpha = \frac{1}{2} + 3 \Rightarrow \alpha = \frac{7}{2}$$

برای به دست آوردن مقدار  $m$  می‌توان یکی از  $\alpha$  یا  $\beta$  را در معادله قرار داد و

یا آن‌که از حاصل ضرب ریشه‌ها استفاده نمود. در این‌جا از حاصل ضرب ریشه‌ها

استفاده می‌کنیم:

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{7}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{m-1}{2} \Rightarrow m-1 = \frac{7}{2} \Rightarrow m = \frac{9}{2}$$

$$.89 \text{ فرض کنیم } \alpha \text{ و } \beta \text{ ریشه‌های معادله } mx^2 - (m+3)x + 5 = 0 \text{ باشد؛}$$

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

بنا بر فرض داریم:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 6 \Rightarrow S^2 - 2P = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{m}\right) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{(m+3)^2}{m^2} - \frac{10}{m} = 6 \Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} = 6$$

$$\xrightarrow{t=x^2} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2, x^2 = -\frac{1}{4} \text{ (غیرممکن)}$$

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t+2)(t+1) = 0 \quad .93$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -1 \end{cases} \xrightarrow{t=x^2} \begin{cases} x^2 = -2 \text{ (غیرممکن)} \\ x^2 = -1 \text{ (غیرممکن)} \end{cases}$$

بنابراین این معادله جواب ندارد.

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 8t + 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 32 = 32 \quad .94$$

$$\Rightarrow t = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{4(2 \pm 2\sqrt{2})}{2} \Rightarrow t = 4 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 4 + 2\sqrt{2} \\ t = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{t=x^2} \begin{cases} x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \\ x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$x^2 = t \Rightarrow 4t^2 + 1 = 5t \quad .95$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=x^2} \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \sqrt{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \quad .96$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = 6 \end{cases} \xrightarrow{t=\sqrt{x}} \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 36 \end{cases}$$

$$(x+2)^2 = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{c}{a} = -2 \end{cases} \quad .97$$

$$\xrightarrow{(x+2)^2=t} \begin{cases} (x+2)^2 = 1 \\ (x+2)^2 = -2 \text{ (غیرممکن)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 1 \\ \text{یا} \\ x+2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + x = t \Rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0 \Rightarrow (t-6)(t-12) = 0 \quad .98$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 6 \\ t = 12 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{t=x^2+x} \begin{cases} x^2 + x = 6 \\ x^2 + x = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x^2 + x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) = 0 \\ (x+4)(x-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ یا } x = 2 \\ x = -4 \text{ یا } x = 3 \end{cases}$$

$$\text{مجموع: } S = -\frac{b}{a} = \frac{7}{3}, \text{ حاصل ضرب: } P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3} \quad .99$$

$$\text{مجموع: } S = -\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \text{ حاصل ضرب: } P = \frac{c}{a} = \frac{2-\sqrt{5}}{2} \quad .100$$

پس معادله خواسته شده به صورت زیر می باشد:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$$

۹۶. اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله  $2x^2 - x - 2 = 0$  باشند، آن گاه:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

فرض کنیم ریشه های معادله خواسته شده برابر  $\alpha'$  و  $\beta'$  باشد. بنا بر فرض داریم:

$$\alpha' = \alpha^2, \beta' = \beta^2$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= S^2 - 2PS = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2(-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{13}{4}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \alpha^2\beta^2 = P^2 = (-1)^2 = 1$$

بنابراین معادله خواسته شده به صورت زیر خواهد بود:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{13}{4}x + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m = 6m^2 \Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} m = 1 \text{ یا } m = \frac{c}{a} = -\frac{9}{5}$$

به ازای  $m = 1$  معادله به صورت  $x^2 - 4x + 5 = 0$  درمی آید که در آن  $m = -\frac{9}{5}$  قابل قبول نیست، اما به ازای  $m = 1$  مقدار  $\Delta = 16 - 4 \times 5 < 0$

مقدار  $\Delta$  مثبت می شود و لذا  $m = -\frac{9}{5}$  را می پذیریم.

$$\alpha = 2, \beta = -3 \Rightarrow S = \alpha + \beta = -1, P = \alpha\beta = -6 \quad ۹۰$$

$$\text{معادله مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\alpha = 1 + \sqrt{2}, \beta = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow S = \alpha + \beta = 2 \quad ۹۱$$

$$P = \alpha\beta = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$$

$$\text{معادله مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\alpha = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \quad ۹۲$$

$$\Rightarrow S = \alpha + \beta = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$P = \alpha\beta = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4 - 3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{معادله مورد نظر: } x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + \frac{11}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 20x + 11 = 0$$

۹۳. طبق فرض  $S = -1$  و  $P = -1$ ؛ بنابراین دو عدد حقیقی، ریشه های معادله

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$$

۹۴. فرض کنیم ابعاد مستطیل  $\alpha$  و  $\beta$  باشد. طبق فرض داریم:

$$2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} \Rightarrow S = \frac{11}{2}$$

$$2\alpha\beta = 6 \Rightarrow \alpha\beta = 3 \Rightarrow P = 3$$

بنابراین  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه های معادله زیر هستند:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{11}{2}x + 3 = 0 \xrightarrow{\times 2} 2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$\Delta = 11^2 - 4 \times 2 \times 12 = 121 - 96 = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{11 \pm 5}{4} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

یعنی طول مستطیل برابر ۴ و عرض آن برابر  $\frac{3}{2}$  است.

۹۵. فرض کنیم ریشه های معادله  $3x^2 + 7x + 1 = 0$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  باشد؛ پس:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{7}{3}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

اگر  $\alpha'$  و  $\beta'$  ریشه های معادله مطلوب باشد، آن گاه بنا بر فرض داریم:

$$\alpha' = \alpha + 1, \beta' = \beta + 1$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \alpha + 1 + \beta + 1 = \alpha + \beta + 2 = S + 2 = -\frac{7}{3} + 2 = -\frac{1}{3}$$

$$P' = \alpha'\beta' = (\alpha + 1)(\beta + 1) = \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = P + S + 1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{7}{3} + 1 = -1$$

### قسمت دوم:

تابع درجه دوم

### فصل ۱

درستی ۲

صفحه ۱۴ تا ۱۸ کتاب درسی

### سخن دبیر

توی این قسمت، ماکزیمم و مینییم تابع درجه ۲ و به خصوص کاربردش رو توی مسائل بهینه سازی می فونیم. در ادامه هم با طریقه نوشتن ضابطه سهمی از روی نمودارش آشنا می شیم و اینم یاد می گیریم که چه پوری از روی سهمی می شه علامت ضرایب معادله درجه ۲ رو پیدا کرد. این قسمت هم قبلی مهمه و معمولاً ارزش سوال مطرح می شه.

### ماکزیمم و مینییم سهمی

در سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، اگر  $a > 0$ ، سهمی مینییم دارد که به

ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  رخ می دهد و مقدار آن برابر  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  است.

و چنان چه  $a < 0$ ، سهمی ماکزیمم دارد که به ازای  $x = -\frac{b}{2a}$  رخ می دهد

و مقدار آن برابر  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  است.

**مثال** مقدار ماکزیمم یا مینییم سهمی های زیر را به دست آورید.

الف)  $f(x) = x^2 - 6x - 5$  (ب)  $f(x) = -2x^2 - 8x + 11$

✓ پاسخ: الف) چون  $a = 1 > 0$ ، پس این سهمی مینییم دارد که به

ازای  $x = -\frac{b}{2a} = 3$  رخ می دهد و برابر است با:

$$f(3) = 9 - 18 - 5 = -14$$

ب) چون  $a = -2 < 0$ ، پس این سهمی ماکزیمم دارد که به ازای

$x = -\frac{b}{2a} = -2$  رخ می دهد و مقدار آن برابر است با:

$$f(-2) = -8 + 16 + 11 = 19$$

### بهینه سازی

گاهی اوقات شرایطی بر مسئله حاکم می شود که تحت آن شرایط می توان مقدار کمیتی را ماکزیمم یا مینییم نمود. به این عمل، بهینه سازی می گویند.

### فرایند حل مسائل بهینه سازی

۱ در صورت لزوم شکلی برای مسئله رسم می کنیم.

۲ کمیتی که خواسته می شود که ماکزیمم یا مینییم شود را به صورت معادله ای از متغیرها می نویسیم. به این معادله، معادله هدف می گوئیم.

علامت ضرایب تابع درجه ۲

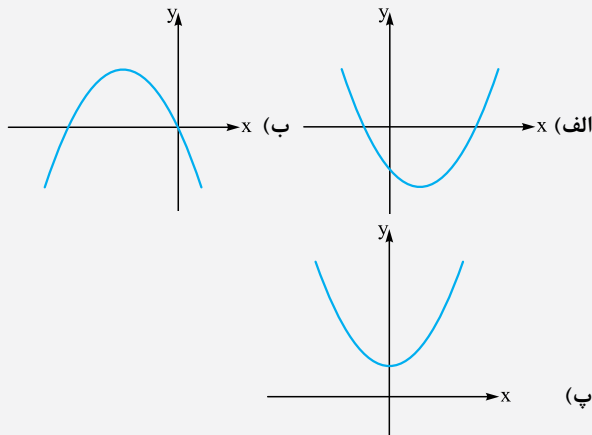
اگر نمودار تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$  را داشته باشیم، در این صورت:

الف) اگر دهانه سهمی رو به بالا باشد،  $a > 0$  و اگر دهانه سهمی رو به پایین باشد،  $a < 0$  خواهد بود.

ب) همان  $c$  همان محل برخورد سهمی با محور  $y$ ها است.

پ) شیب نمودار در محل تلاقی سهمی با محور  $y$ ها، همان  $b$  است.

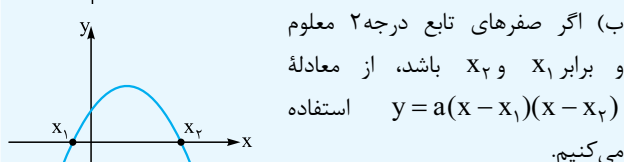
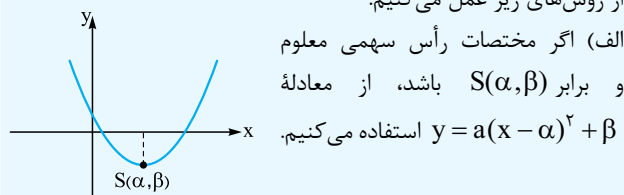
مثال علامت  $a$ ،  $b$  و  $c$  را در هر یک از سهمی‌های زیر بیابید.



الف) سهمی رو به بالا است؛ پس  $a > 0$ . عرض از مبدأ سهمی (محل تلاقی سهمی با محور  $y$ ها) منفی است؛ پس  $c < 0$ . هم‌چنین شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی با محور  $y$ ها منفی است؛ پس  $b < 0$ .  
 ب) سهمی رو به پایین است؛ پس  $a < 0$ . سهمی محور  $y$ ها را در مبدأ قطع کرده است؛ پس  $c = 0$ . هم‌چنین شیب خط مماس در محل تلاقی سهمی با محور  $y$ ها (در این‌جا مبدأ) منفی است؛ پس  $b < 0$ .  
 پ) سهمی رو به بالا است؛ پس  $a > 0$ . عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس  $c > 0$ . شیب خط مماس در محل تلاقی سهمی با محور  $y$ ها صفر است؛ پس  $b = 0$ .

نوشتن ضابطه سهمی به کمک نمودار آن

برای نوشتن معادله یا ضابطه سهمی، با توجه به نمودار آن به فراخور به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

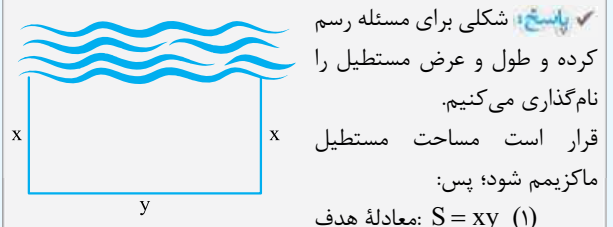


پ) اگر هیچ‌کدام از حالت‌های الف و ب رخ ندهد، از معادله  $y = ax^2 + bx + c$  استفاده می‌کنیم.

۳ اگر معادله هدف بیشتر از یک متغیر داشت، به کمک روابطی که بین متغیرها وجود دارد، سعی می‌کنیم معادله هدف را به یک معادله یک متغیره درجه دوم تبدیل کنیم.

۴ ماکزیمم یا مینیمم معادله هدف که به صورت یک معادله درجه دوم درآمده است را می‌یابیم.

مثال می‌خواهیم به کمک ۴۰ متر طناب، زمین مستطیل‌شکلی را در کنار رودخانه محصور کنیم به طوری که حداکثر مساحت ممکن را داشته باشد. طول و عرض زمین را بیابید. (توجه کنید که در سمت رودخانه طناب نمی‌کشیم).



این معادله دو متغیر دارد. باید کاری کنیم این معادله، یک معادله درجه دوم یک‌متغیره شود. با توجه به شکل داریم:

$$y + 2x = 40 \Rightarrow y = 40 - 2x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

$$\Rightarrow S = -2x^2 + 40x$$

چون  $a = -2 < 0$ ، پس  $S$  دارای ماکزیمم است که به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{40}{-4} = 10$  رخ می‌دهد. هم‌چنین داریم:

$$y = 40 - 2x \stackrel{x=10}{=} 40 - 20 \Rightarrow y = 20$$

پس ابعاد زمین مستطیل‌شکل باید به صورت  $20 \times 10$  باشد.

صفرهای تابع درجه ۲

به طور کلی نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند  $f$  با محور  $x$ ها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادله  $f(x) = 0$  هستند؛ بنابراین صفرهای تابع درجه ۲، همان نقاط برخورد سهمی با محور  $x$ ها است.

پس وجود و علامت صفرهای تابع درجه ۲، می‌توان از علامت  $S$ ،  $\Delta$  و  $P$  استفاده نمود.

مثال در مورد وجود و علامت صفرهای تابع  $f(x) = 2x^2 - \sqrt{13}x + 1$  بحث کنید.

پاسخ: معادله  $f(x) = 0$  دارای دو ریشه متمایز است.  $\Delta = 13 - 4 > 0 \Rightarrow$

ریشه‌ها هم‌علامت‌اند.  $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$

هر دو ریشه مثبت‌اند.  $S = -\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} > 0 \Rightarrow$

چون  $a = -2 < 0$ ، پس این تابع ماکزیمم دارد.  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم: } f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + 1 + 5 = \frac{11}{4}$$

۱۰۷ می توان نوشت:  $f(x) = 4x^2 + 4x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 3x^2 + 6x$

چون  $a = 3 > 0$ ، پس این تابع مینیمم دارد.

$$x = -\frac{b}{2a} = -1 \Rightarrow \text{مقدار مینیمم } = f(-1) = -3$$

۱۰۸ طول نقطه ماکزیمم سهمی برابر است با:  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2m} = -\frac{2}{m}$

طبق فرض، باید مقدار  $y$  به ازای  $x = -\frac{2}{m}$  برابر ۳ باشد:

$$y\left(-\frac{2}{m}\right) = 3 \Rightarrow m\left(-\frac{2}{m}\right)^2 + 4\left(-\frac{2}{m}\right) + m + 3 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{m} - \frac{8}{m} + m = 0 \xrightarrow{\times m} 4 - 8 + m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 4$$

$$\Rightarrow m = \pm 2$$

طبق فرض، سهمی دارای ماکزیمم است؛ پس باید ضریب  $x^2$  منفی باشد. در نتیجه  $m = -2$  را می پذیریم.

۱۰۹ الف) حداکثر ارتفاع توپ به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$  رخ می دهد و برابر است با:

$$y(20) = -\frac{1}{40}(20)^2 + 20 = -\frac{400}{40} + 20 = -10 + 20 = 10 \text{ m}$$

ب) باید ببینیم توپ بعد از طی چه مسافتی به زمین برخورد می کند:

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{40}x^2 + x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{40}x + 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 40 \end{cases}$$

بدیهی است که  $x = 0$ ، زمانی است که توپ توسط فوتبالیست شوت می شود و بنابراین  $m = 40$  توپ به صورت افقی در هوا طی می کند.

$$t = -\frac{b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = \frac{-100}{-10} = 10 \text{ s} \quad (11.0 \text{ الف})$$

بنابراین پس از  $t = 10$  ثانیه، موشک به بالاترین ارتفاع ممکن می رسد.

ب) ارتفاع نقطه اوج برابر است با:

$$h(10) = 100 \times 10 - 5(10)^2 = 1000 - 500 = 500 \text{ m}$$

پ) در لحظه برخورد موشک به زمین، ارتفاع برابر صفر است؛ پس:

$$h(t) = 0 \Rightarrow 100t - 5t^2 = 0 \Rightarrow 5t(20 - t) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0 \text{ یا } t = 20$$

واضح است که  $t = 0$ ، همان لحظه پرتاب موشک است و در نتیجه پس از  $t = 20$  ثانیه بعد از پرتاب آن، موشک به زمین برمی گردد.

۱۱۱) دو عدد  $x$  و  $y$  می گیریم. قرار است حاصل ضرب دو عدد حداکثر مقدار ممکن باشد؛ پس:

حال باید  $A$  را برحسب یک متغیر بنویسیم. از رابطه فرض داریم:

$$2x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - 2x \quad (2)$$

در نتیجه:  $(1), (2) \Rightarrow A = x(12 - 2x) \Rightarrow A = -2x^2 + 12x$

چون  $a < 0$ ، پس  $A$  دارای ماکزیمم است که به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = 3$  رخ می دهد؛ بنابراین:

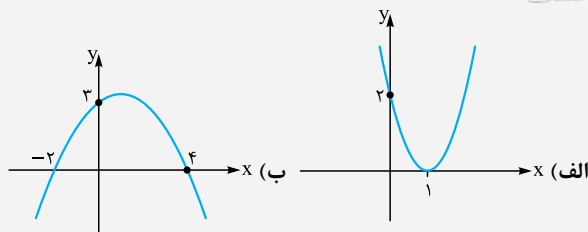
$$y = 12 - 2x \xrightarrow{x=3} y = 12 - 6 \Rightarrow y = 6$$

پس  $x = 3$  و  $y = 6$  دو عدد مطلوب هستند.

۱۱۲) کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل است؛ پس:

$$\text{معادله هدف: } S = xy \quad (1)$$

مثال معادله سهمی های زیر را بنویسید.



پاسخ: الف) چون مختصات رأس سهمی معلوم و به صورت  $S(1, 0)$  است، از معادله  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  استفاده می کنیم:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta \xrightarrow{\alpha=1, \beta=0} y = a(x - 1)^2 + 0$$

$$\Rightarrow y = a(x - 1)^2$$

نقطه  $(0, 3)$  روی سهمی قرار دارد؛ پس در معادله سهمی صدق می کند:

$$3 = a(-1)^2 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = 3(x - 1)^2$$

ب) چون صفرهای تابع درجه ۲ داده شده از رابطه  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$  استفاده می کنیم:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \xrightarrow{x_1=-2, x_2=4} y = a(x + 2)(x - 4)$$

سهمی از نقطه  $(0, 3)$  عبور کرده است؛ پس:

$$3 = a(0 + 2)(0 - 4) \Rightarrow 3 = -8a \Rightarrow a = -\frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = -\frac{3}{8}(x + 2)(x - 4)$$

پاسخ سوالات

۹۷) نادرست؛ زیرا:  $x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$

۹۸) درست؛ زیرا: معادله دو ریشه حقیقی دارد.  $\Delta > 0 \Rightarrow$

ریشه ها هم علامت اند.  $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$

هر دو ریشه منفی اند.  $S = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} < 0 \Rightarrow$

۹۹) نادرست؛ زیرا شیب خط مماس بر نمودار در محل تلاقی سهمی با محور  $y$ ها منفی است؛ پس باید  $b < 0$ .

۱۰۰) ماکزیمم،  $x = -\frac{b}{2a} = -1$ ،  $f(-1) = 11$

۱۰۱) محل برخورد نمودار با محور  $y$ ها

$$f(x) = 0 \quad 102$$

۱۰۳) منفی - مثبت - مثبت

۱۰۴) چون  $a = 1 > 0$ ، پس این تابع مینیمم دارد که به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

اتفاق می افتد و مقدار آن برابر است با:  $f(2) = 4 - 8 + 10 = 6$

۱۰۵) می توان نوشت:

$$f(x) = -(x + 2)^2 + 4 = -x^2 - 4x - 4 + 4 = -x^2 - 4x$$

چون  $a = -1 < 0$ ، پس این تابع ماکزیمم دارد که به ازای  $x = -\frac{b}{2a} = -2$

اتفاق می افتد و مقدار آن برابر است با:  $f(-2) = -4 + 8 = 4$

۱۰۶) می توان نوشت:

$$f(x) = (x + 1)(4 - 2x) + 1 = 4x - 2x^2 + 4 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x + 5$$

از طرفی با توجه به قسمت (الف) به دست آوردیم  $y = 75^\circ - \frac{\pi}{4}x$ ؛ پس:

$$S = x(75^\circ - \frac{\pi}{4}x) + \frac{\pi}{4}x^2 = 75^\circ x - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2$$

$$\Rightarrow S = -\frac{\pi}{4}x^2 + 75^\circ x$$

چون  $a = -\frac{\pi}{4} < 0$ ، پس  $S$  دارای ماکزیمم است که به ازای

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{75^\circ}{\frac{\pi}{2}} = \frac{150^\circ}{\pi}$$

$$x = \frac{150^\circ}{\pi}, y = 75^\circ - \frac{\pi}{4}x = 75^\circ - \frac{\pi}{4}(\frac{150^\circ}{\pi}) = 0$$

توجه کنید که در حالتی که طول مستطیل استادیوم صفر شود؛ یعنی استادیوم

یک دایره به شعاع  $\frac{x}{2} = \frac{75^\circ}{\pi}$  باشد، مساحت استادیوم ماکزیمم می‌شود.

۱۱۵

معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد.  $\Delta = 36 - 28 = 8 > 0 \Rightarrow$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{y}{1} > 0 \Rightarrow$$
 ریشه‌ها هم‌علامت‌اند.

$$S = -\frac{b}{a} = -6 < 0 \Rightarrow$$
 هر دو ریشه منفی‌اند.

۱۱۶

معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد.  $\Delta = 49 + 20 = 69 > 0 \Rightarrow$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{1}{5} < 0 \Rightarrow$$
 ریشه‌ها مختلف‌العلامه هستند.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{y}{5} < 0 \Rightarrow$$
 ریشه منفی از نظر اندازه، بزرگ‌تر از ریشه مثبت است.

۱۱۷ معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه حقیقی متمایز دارد.  $\Delta = 1 + 72 = 73 > 0 \Rightarrow$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{-3} = -2 < 0 \Rightarrow$$
 ریشه‌ها مختلف‌العلامه‌اند.

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$$
 ریشه مثبت از نظر اندازه، بزرگ‌تر از ریشه منفی است.

۱۱۸ معادله  $f(x) = 0$  ریشه حقیقی ندارد.  $\Delta = 1 - 48 < 0 \Rightarrow$

۱۱۹ سهمی رو به بالاست؛ پس  $a > 0$ .

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس  $c > 0$ .

شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی با محور  $y$ ها، منفی است؛ پس  $b < 0$ . سهمی محور  $x$ ها را در دو نقطه قطع کرده است؛ لذا معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه دارد.

۱۲۰ سهمی رو به پایین است؛ پس  $a < 0$ .

عرض از مبدأ سهمی منفی است؛ پس  $c < 0$ .

شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی با محور  $y$ ها منفی است؛ پس  $b < 0$ . سهمی محور  $x$ ها را در یک نقطه قطع کرده است؛ پس معادله  $f(x) = 0$  یک ریشه مضاعف دارد.

۱۲۱ سهمی رو به بالا است؛ پس  $a > 0$ .

عرض از مبدأ سهمی صفر است؛ پس  $c = 0$ .

شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی با محور  $y$ ها مثبت است؛ پس  $b > 0$ . سهمی محور  $x$ ها را در دو نقطه قطع کرده است؛ پس معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه دارد.

۱۲۲ سهمی رو به پایین است؛ پس  $a < 0$ .

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس  $c > 0$ .

شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی با محور  $y$ ها، صفر است؛ پس  $b = 0$ .

از طرفی داریم:  $(2) y = 100 - 2x$  معادله کمکی

$$(1), (2) \Rightarrow S = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$$

$$\Rightarrow S = -2x^2 + 100x$$

چون  $a = -2 < 0$ ، پس  $S$  دارای ماکزیمم است که به ازای

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{100}{4} = 25$$

$$y = 100 - 2x \stackrel{x=25}{=} 100 - 2 \times 25 \Rightarrow y = 50$$

هم‌چنین:

$$113. \text{ با توجه به شکل می‌توان نوشت: } 3x + 2y = 4 \Rightarrow 3x + 2y = 4 \Rightarrow$$
 محیط پنجره

$$\Rightarrow 2y = 4 - 3x \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x \quad (1)$$

برای آن که پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، لازم است بیشترین

مساحت را دارا باشد. پنجره از یک مستطیل به ابعاد  $x$  و  $y$  و یک مثلث

متساوی‌الاضلاع به ضلع  $x$  تشکیل شده است. می‌دانیم مساحت مثلث از رابطه

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \theta$$
 به دست می‌آید؛ بنابراین:

$$S = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}x \cdot x \sin 60^\circ + xy$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + xy \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x(2 - \frac{3}{2}x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{2}x^2$$

$$= (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2})x^2 + 2x \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2 + 2x$$

چون  $a = \frac{\sqrt{3}-6}{4} < 0$ ، پس  $S$  ماکزیمم دارد و به ازای

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{\frac{\sqrt{3}-6}{2}} = \frac{4}{6-\sqrt{3}} \approx 0.94 \text{ m}$$

$$y = 2 - \frac{3}{2}x \approx 2 - \frac{3}{2}(0.94) = 0.59 \text{ m}$$

۱۱۴ الف) قرار است مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد؛ پس:

$$S = xy \quad (1)$$

از طرفی محیط استادیوم  $150^\circ$  متر است؛ پس:

$$2y + 2(\frac{1}{2} \times 2\pi \frac{x}{2}) = 150^\circ \Rightarrow 2y + 2(\frac{1}{2} \times 2\pi \frac{x}{2}) = 150^\circ$$

$$\Rightarrow 2y + \pi x = 150^\circ \Rightarrow y = 75^\circ - \frac{\pi}{2}x \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow S = x(75^\circ - \frac{\pi}{2}x) = 75^\circ x - \frac{\pi}{2}x^2$$

$$\Rightarrow S = -\frac{\pi}{2}x^2 + 75^\circ x$$

چون  $a = -\frac{\pi}{2} < 0$ ، پس  $S$  دارای ماکزیمم است که به ازای

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{75^\circ}{\pi}$  رخ می‌دهد. هم‌چنین:

$$y = 75^\circ - \frac{\pi}{2}x = 75^\circ - \frac{\pi}{2}(\frac{75^\circ}{\pi}) = 37.5 \text{ m}$$

پس وقتی طول و عرض مستطیل برابر  $x = \frac{75^\circ}{\pi} \text{ m}$  و  $y = 37.5 \text{ m}$  باشد،

مساحت مستطیل ماکزیمم می‌شود.

ب) قرار است مساحت استادیوم ماکزیمم شود؛ پس:

$$S = S_{\text{مستطیل}} + S_{\text{دو نیم‌دایره}}$$

$$\Rightarrow S = xy + 2(\frac{1}{2}\pi(\frac{x}{2})^2) = xy + \frac{\pi x^2}{4}$$

سهمی محور  $X$ ها را در دو نقطه قطع کرده است؛ پس معادله  $f(x) = 0$  دو ریشه دارد.

۱۲۳. سهمی رو به بالا است؛ پس  $a > 0$ .

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس  $c > 0$ .

شیب خط مماس بر نمودار در نقطه تلاقی با محور  $Y$ ها مثبت است؛ پس  $b > 0$ . سهمی محور  $X$ ها را قطع نمی‌کند؛ پس  $f(x) = 0$  ریشه ندارد.

۱۲۴. سهمی رو به پایین است؛ پس  $a < 0$ .

عرض از مبدأ سهمی صفر است؛ پس  $c = 0$ .

شیب خط مماس بر سهمی در نقطه تلاقی با محور  $Y$ ها صفر است؛ پس  $b = 0$ . سهمی محور  $X$ ها را در یک نقطه قطع می‌کند؛ پس  $f(x) = 0$  یک ریشه مضاعف دارد.

۱۲۵. سهمی رو به پایین است؛ پس  $a < 0$ .

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس  $c > 0$ .

شیب خط مماس بر نمودار در نقطه تلاقی با محور  $Y$ ها منفی است؛ پس  $b < 0$ . سهمی محور  $X$ ها را در دو نقطه قطع می‌کند؛ پس  $f(x) = 0$  دو ریشه دارد.

۱۲۶. سهمی رو به بالا است؛ پس  $a > 0$ .

عرض از مبدأ سهمی مثبت است؛ پس  $c > 0$ .

شیب خط مماس بر نمودار در نقطه تلاقی با محور  $Y$ ها مثبت است؛ پس  $b > 0$ . سهمی محور  $X$ ها را در دو نقطه قطع می‌کند؛ پس  $f(x) = 0$  دو ریشه دارد.

## پاسخ سوالات

۹۶۳. درست

۹۶۵. توان دوم

۹۶۷. ضریب تغییرات

۹۶۹. چارک دوم

۹۶۴. صفر

۹۶۶. مجذور همان مقدار ثابت

۹۶۸. چارک اول، چارک سوم

$$R = \max - \min = 20 - 4 = 16 \quad .970$$

۹۷۱.  $m$  یا بزرگ‌ترین داده است یا کوچک‌ترین داده.حالت اول: اگر  $m$  بزرگ‌ترین داده باشد، داریم:

$$R = \max - \min \Rightarrow 30 = m - 5 \Rightarrow m = 35$$

حالت دوم: اگر  $m$  کوچک‌ترین داده باشد، داریم:

$$R = \max - \min \Rightarrow 30 = 25 - m \Rightarrow m = -5$$

$$\bar{x} = \frac{0+5+3+1+1+2}{6} = \frac{12}{6} = 2 \quad .972$$

$$\sigma^2 = \frac{(0-2)^2 + (5-2)^2 + (3-2)^2 + (1-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2}{6}$$

$$= \frac{4+9+1+1+1+0}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

۹۷۳. ابتدا میانگین داده‌ها را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{20 + (-7) + (-15) + 31 + 16}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

حال میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را که همان واریانس است، به

دست می‌آوریم:

$$\sigma^2 = \frac{(20-9)^2 + (-7-9)^2 + (-15-9)^2 + (31-9)^2 + (16-9)^2}{5}$$

$$= \frac{121 + 256 + 576 + 484 + 49}{5} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1486}{5} = 297.2$$

۹۷۴. می‌دانیم همواره برای هر مجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از

میانگین برابر صفر می‌شود؛ پس داریم:

$$-3 + (-1) + 2 + a + 6 = 0 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$$

۹۷۹. فرض کنیم  $X_1, X_2, \dots, X_N$  قیمت‌های مواد غذایی باشد که واریانس آن‌ها  $\sigma_x^2 = 20$  است.

وقتی در یک سال قیمت‌ها ۳۰ درصد افزایش می‌یابد، قیمت‌ها  $1/3$  برابر می‌شوند، یعنی قیمت‌های جدید مواد غذایی به صورت  $1/3 X_1, 1/3 X_2, \dots, 1/3 X_N$  خواهند بود. در واقع داده‌ها در  $1/3$  ضرب شده‌اند، در نتیجه واریانس داده‌ها در  $(1/3)^2$  ضرب می‌شوند، یعنی داریم:

$$\sigma_{1/3 X}^2 = (1/3)^2 \sigma_x^2 = 1/9 \times 20 = 20/9$$

$$\bar{x} = \frac{15+20+25+30+35}{5} = \frac{125}{5} = 25 \quad \text{۹۸۰}$$

$$\sigma^2 = \frac{(15-25)^2 + (20-25)^2 + (25-25)^2 + (30-25)^2 + (35-25)^2}{5}$$

$$= \frac{100+25+0+25+100}{5} = \frac{250}{5} = 50 \Rightarrow \sigma = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\bar{x} = \frac{2+4+3+1+6+8}{6} = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{۹۸۱}$$

$$\sigma^2 = \frac{(2-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (1-4)^2 + (6-4)^2 + (8-4)^2}{6}$$

$$= \frac{4+0+1+9+4+16}{6} = \frac{34}{6} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{34}{6}}$$

$$\bar{x} = \frac{8+12+6+14}{4} = \frac{40}{4} = 10 \quad \text{۹۸۲}$$

$$\sigma^2 = \frac{(8-10)^2 + (12-10)^2 + (6-10)^2 + (14-10)^2}{4}$$

$$= \frac{4+4+16+16}{4} = \frac{40}{4} = 10 \Rightarrow \sigma = \sqrt{10} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{15+11+17+13+19}{5} = \frac{75}{5} = 15 \quad \text{۹۸۳}$$

$$\sigma^2 = \frac{(15-15)^2 + (11-15)^2 + (17-15)^2 + (13-15)^2 + (19-15)^2}{5}$$

$$= \frac{0+16+4+4+16}{5} = \frac{40}{5} = 8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{8}$$

$$\Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{8}}{15}$$

۹۸۴. فرض کنیم میانگین و انحراف معیار سن دانش‌آموزان کلاس به ترتیب  $\bar{x}$  و  $\sigma$  باشد و لذا ضریب تغییرات برابر  $CV_1 = \frac{\sigma}{\bar{x}}$  است. بعد از ۵ سال، به سن هر کدام از دانش‌آموزان ۵ سال اضافه می‌شود. در واقع همه داده‌ها با مقدار ثابت ۵ جمع می‌شود؛ پس میانگین و انحراف معیار سن دانش‌آموزان بعد از ۵ سال به ترتیب برابر  $\bar{x} + 5$  و  $\sigma$  خواهد بود و لذا ضریب تغییرات سن آن‌ها برابر  $CV_2 = \frac{\sigma}{\bar{x} + 5}$  است.

چون در  $CV_2$ ، مخرج کسر از  $CV_1$  بزرگ‌تر است؛ پس  $CV_2 < CV_1$ ، یعنی ۵ سال دیگر، ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان این کلاس کوچک‌تر می‌شود.

۹۸۵. ضریب تغییرات رابرای دوشرکت محاسبه کرده‌اند آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\sigma}{x_1} = \frac{8+12}{2} = 10$$

$$\sigma_1^2 = \frac{(8-10)^2 + (12-10)^2}{2} = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow \sigma_1^2 = 4$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 2 \Rightarrow CV_1 = \frac{\sigma_1}{x_1} = \frac{2}{10} = 0/2$$

واریانس داده‌ها برابر است با میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آن‌ها؛ پس:

$$\sigma^2 = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 2^2 + (-4)^2 + 6^2}{5}$$

$$= \frac{9+1+4+16+36}{5} = \frac{66}{5} = 13/2$$

۹۷۵. اگر  $X_1, X_2, \dots, X_8$  داده‌های مفروض با میانگین ۱۲ باشند، طبق فرض داریم:

$$\frac{(x_1-12)^2 + (x_2-12)^2 + \dots + (x_8-12)^2}{8} = 5$$

$$\Rightarrow (x_1-12)^2 + (x_2-12)^2 + \dots + (x_8-12)^2 = 40$$

از آنجایی که میانگین دو عدد ۸ و ۱۶ نیز برابر ۱۲ است؛ پس میانگین داده‌های  $X_1, X_2, \dots, X_8, X_8, \dots, X_8$  و ۸ برابر ۱۲ خواهد بود، داریم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1-12)^2 + (x_2-12)^2 + \dots + (x_8-12)^2 + (8-12)^2 + (16-12)^2}{10}$$

$$= \frac{40+16+16}{10} = \frac{72}{10} = 7/2$$

۹۷۶. فرض کنیم واریانس داده‌های  $X_1, \dots, X_N$  برابر  $\sigma_x^2$  و  $\bar{x}$  میانگین آن‌ها باشد؛ پس:

$$\sigma_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

می‌دانیم که اگر همه داده‌ها با مقدار ثابت  $b$  جمع شوند، میانگین آن‌ها برابر  $\bar{x} + b$  می‌شود و واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma_{x+b}^2 = \frac{((x_1+b) - (\bar{x}+b))^2 + \dots + ((x_N+b) - (\bar{x}+b))^2}{N}$$

$$= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} = \sigma_x^2$$

۹۷۷. فرض کنیم واریانس و میانگین داده‌های  $X_1, \dots, X_N$  به ترتیب برابر  $\sigma_x^2$  و  $\bar{x}$  باشد؛ پس:

$$\sigma_x^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N}$$

می‌دانیم که اگر همه داده‌ها در مقدار ثابت  $a$  ضرب شوند، میانگین آن‌ها  $a\bar{x}$  می‌شود و واریانس آن‌ها برابر است با:

$$\sigma_{ax}^2 = \frac{(ax_1 - a\bar{x})^2 + \dots + (ax_N - a\bar{x})^2}{N}$$

$$= \frac{a^2(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + a^2(x_N - \bar{x})^2}{N}$$

$$= a^2 \times \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2}{N} = a^2 \sigma_x^2$$

۹۷۸. می‌دانیم  $F = \frac{9}{5}C + 32$

$$\bar{F} = \frac{9}{5}\bar{C} + 32 = \frac{9}{5} \times 32 + 32 = 50/4 + 32 = 82/4$$

میانگین، مانند داده‌ها تغییر می‌کند؛ پس:

اگر داده‌ها با عدد ثابتی جمع شوند، واریانس تغییر نمی‌کند، ولی اگر داده‌ها در یک عدد ثابتی ضرب شوند، واریانس در مجذور آن عدد ثابت ضرب می‌شود؛ پس در اینجا که داده‌ها در  $\frac{9}{5}$  ضرب شده‌اند، واریانس در  $(\frac{9}{5})^2$  ضرب می‌شود و عدد ۳۲ تأثیری روی واریانس ندارد. به عبارت دیگر:

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 \times \sigma_C^2 = \frac{81}{25} \times 6 = 3/24 \times 6 = 19/44$$



عدد ثابت که به داده‌ها اضافه شده، تأثیری روی انحراف معیار ندارد ولی چون داده‌ها در ۱۲ ضرب شده‌اند؛ پس انحراف معیار نیز در ۱۲ ضرب می‌شود:

$$\sigma_{12x_i+6} = 12\sigma_x = 12\sqrt{2}$$

بنابراین ضریب تغییرات داده‌های جدید برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12\sqrt{2}}{42} = \frac{2\sqrt{2}}{7}$$

۹۸۹. وقتی یکی از شاخص‌های پراکندگی صفر باشند، داده‌ها با هم برابرند؛

پس در این مسئله نیز همه داده‌ها با هم برابرند.

$$3 = 2a - 1 = b - 2 = c - 5 \Rightarrow a = 2, b = 5, c = 8$$

باید ضریب تغییرات داده‌های ۸، ۵ و ۲ را بیابیم.  $\bar{x} = \frac{2+5+8}{3} = \frac{15}{3} = 5$

$$\sigma^2 = \frac{(2-5)^2 + (5-5)^2 + (8-5)^2}{3} = \frac{9+0+9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{6} \Rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

۹۹۰. داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$3, 6, 9, 11, 15, 16, 17, 19, 23, 25, 27$$

تعداد داده‌ها فرد است؛ پس داده وسط همان میانه است:

$$\text{میانه} = Q_2 = 16 \text{ (چارک دوم)}$$

میانه داده‌های قبل از ۱۶ همان چارک اول است و میانه داده‌های بعد از ۱۶ همان چارک سوم است، یعنی داریم:

$$Q_1 = 9 \text{ (چارک اول)}, Q_3 = 23 \text{ (چارک سوم)}$$

۹۹۱. داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$5, 6, 8, 9, 9, 13, 14, 15, 18$$

$$\text{میانه} = Q_2 = 9 \text{ (چارک دوم)}$$

داریم:

$$Q_1 = \frac{6+8}{2} = 7 \text{ (چارک اول)}$$

$$Q_3 = \frac{14+15}{2} = 14.5 \text{ (چارک سوم)}$$

۹۹۲. داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$7, 8, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 16, 17, 18, 19$$

$$Q_2 = \frac{14+14}{2} = 14 \text{ (میانه چارک دوم)}$$

داریم:

$$Q_1 = \frac{10+11}{2} = 10.5 \text{ (چارک اول)}$$

$$Q_3 = \frac{16+17}{2} = 16.5 \text{ (چارک سوم)}$$

۹۹۳. داده‌ها را مرتب کرده و چارک‌ها را می‌یابیم:

$$11, 11, 12, 14, 14, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 20$$

$$Q_1=13, Q_2=16.5, Q_3=18$$

داده‌های بزرگ‌تر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم عبارت‌اند از:

$$14, 14, 16, 17, 17, 18$$

واریانس این داده‌ها را می‌یابیم:

$$\bar{x} = \frac{14+14+16+17+17+18}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

$$\sigma^2 = \frac{2(14-16)^2 + (16-16)^2 + 2(17-16)^2 + (18-16)^2}{6}$$

$$= \frac{8+0+2+4}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

$$\bar{x}_y = \frac{13+18}{2} = \frac{31}{2} = 15.5$$

$$\sigma_y^2 = \frac{(13-15.5)^2 + (18-15.5)^2}{2} = \frac{6.25+6.25}{2}$$

$$= \frac{12.5}{2} = 6.25 \Rightarrow \sigma_y = \sqrt{6.25} = 2.5$$

$$CV_y = \frac{\sigma_y}{\bar{x}_y} = \frac{2.5}{15.5} = \frac{25}{155} = \frac{5}{31} \approx 0.16$$

چون  $CV_y < CV_x$ ؛ پس بی‌عدالتی در شرکت A در پرداخت حقوق بین کارمندان بیشتر از شرکت B می‌باشد.

$$\bar{x}_1 = \frac{7+9+8+9+7}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$7, 7, 8, 9, 9 \Rightarrow \text{میانه} = Q_2 = 8$$

$$\bar{x}_2 = \frac{10+8+6+7+9}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

$$6, 7, 8, 9, 10 \Rightarrow \text{میانه} = Q_2 = 8$$

میانگین و میانه پول توجیبی دوستان مریم و مینا برابرند.

$$\sigma_1^2 = \frac{(7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (7-8)^2}{5} \quad (\text{ب})$$

$$= \frac{1+1+0+1+1}{5} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(10-8)^2 + (8-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{5}$$

$$= \frac{4+0+4+1+1}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{2}$$

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{8} \text{ و } CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{\sqrt{2}}{8} \quad (\text{پ})$$

چون  $CV_1 < CV_2$ ؛ پس برنامه‌ریزی برای یک سفر یک‌روزه با دوستان مینا ساده‌تر است. در واقع پول توجیبی دوستان مینا به همدیگر نزدیک‌ترند.

۹۸۷. عملکرد گروهی بهتر است که ضریب تغییرات نمرات مسئولیت‌پذیری آن کوچک‌تر باشد:  $\bar{x}_1 = 80, \sigma_1^2 = 25 \Rightarrow \sigma_1 = 5$  گروه اول

$$\Rightarrow CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$\text{گروه دوم: } \bar{x}_2 = 72, \sigma_2^2 = 16 \Rightarrow \sigma_2 = 4$$

$$\Rightarrow CV_2 = \frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \frac{4}{72} = \frac{1}{18}$$

چون  $CV_2 < CV_1$ ؛ پس عملکرد گروه دوم بهتر است.

۹۸۸. ابتدا میانگین و انحراف معیار داده‌های اولیه یعنی  $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$  را می‌یابیم.

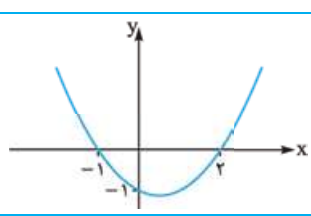
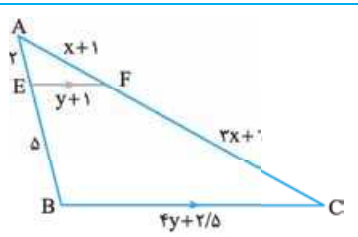
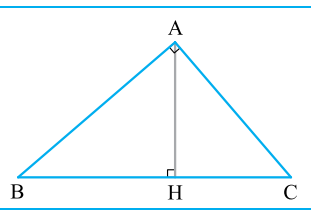
$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

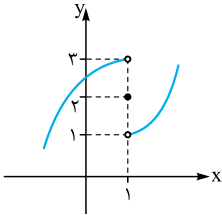
$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5}$$

$$= \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{2}$$

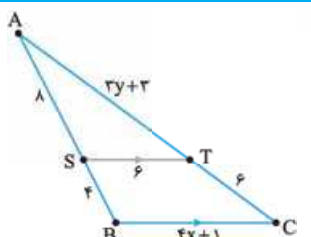
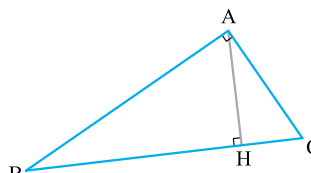
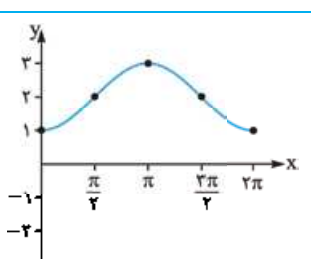
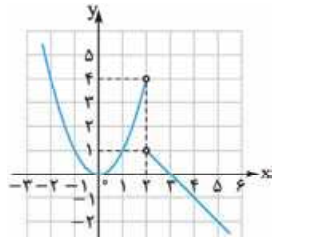
همه داده‌ها در ۱۲ ضرب و با ۶ جمع شده‌اند، میانگین مانند داده‌ها تغییر می‌کند:

$$12x_i + 6 = 12\bar{x} + 6 = 12 \times 3 + 6 = 36 + 6 = 42$$

ردیف	امتحان شماره ۱	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: دی ماه	نمره
۱	درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. الف) دو خط $x = 2y + 5$ و $y = 2x - 1$ بر هم عمودند. پ) در استدلال استقرایی، همیشه از جزء به کل می‌رسیم.		ب) مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر ۲ است. ت) هر تابع خطی یک‌به‌یک است	۱
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) معادله درجه‌دومی که ریشه‌های آن $1 + \sqrt{5}$ و $1 - \sqrt{5}$ باشد، عبارت است از ..... ب) هر نقطه روی ..... یک زاویه از دو ضلع آن زاویه ..... است. پ) اگر $\frac{2a+1}{3a+2} = \frac{2b+3}{3b+6}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ برابر ..... است. ت) $\frac{3\pi}{5}$ رادیان برابر ..... درجه است.			۱/۲۵
۳	اگر $A(0, 4)$ ، $B(-2, 0)$ و $C(6, 6)$ مختصات سه رأس مثلث ABC باشند، مطلوب است محاسبه طول ارتفاع وارد بر ضلع BC.			۱/۵
۴	ابعاد مستطیلی را بیابید که مساحت آن $24 \text{ cm}^2$ و محیط آن برابر $22 \text{ cm}$ باشد.			۱/۲۵
۵	معادله سهمی مقابل را بنویسید.			۱
				
۶	معادلات زیر را حل کنید. الف) $\frac{2x+1}{x-2} - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x^2+3}{x^2-4}$ ب) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$			۲
۷	روش رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیرواقع بر آن را به کمک خط‌کش و پرگار شرح دهید.			۱
۸	در شکل مقابل $EF \parallel BC$ است. $x$ و $y$ را به دست آورید.			۲
				
۹	در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل داریم $AB = 10 \text{ cm}$ و $AH = 6 \text{ cm}$ ، اندازه اضلاع AC و BC را به دست آورید.			۱/۵
				
۱۰	تساوی دو تابع $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$ و $g(x) = x-4$ را بررسی کنید.			۱/۲۵
۱۱	نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2[x] - 1$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید.			۱/۵
۱۲	ضابطه وارون تابع $f(x) = \frac{2}{3}x - 5$ را به دست آورید.			۱
۱۳	اگر $f(x) = x^2 + 3x + 2$ و $g(x) = \frac{x+2}{x+4}$ باشد، دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.			۲
۱۴	الف) زاویه $105^\circ$ را به رادیان تبدیل کنید و آن را روی دایره مثلثاتی نمایش دهید. ب) اندازه کماتی از یک دایره به شعاع $10 \text{ cm}$ و مقابل به زاویه مرکزی $36^\circ$ را حساب کنید.			۰/۷۵ ۱
	جمع نمرات	«موفق باشید»		۲۰

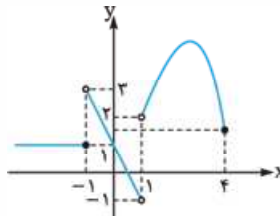
۱	نمودار تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را به دست آورید.	۷
۱	اگر $f(x) = \frac{5x-4}{y}$ ، مطلوب است محاسبه $f^{-1}(3)$ .	۸
۲	اگر $\tan 2^\circ = 0/4$ باشد، مقدار عبارت $A = \frac{\sin(25^\circ) - 2\sin(-34^\circ)}{\cos(-11^\circ) + \cos(20^\circ)}$ را به دست آورید.	۹
۱	نمودار تابع $y = 1 + \sin(x + \frac{\pi}{4})$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	۱۰
۱	اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ ، مقدار تقریبی $\log \frac{18}{\sqrt{5}}$ را به دست آورید.	۱۱
۲	معادلات زیر را حل کنید. الف) $(\frac{3}{5})^{x^2+x+2} = (\frac{25}{9})^x$ ب) $\log_\Delta(x+6) + \log_\Delta(x+2) = 1$	۱۲
۱	با توجه به شکل مقابل، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1)$ را به دست آورید. 	۱۳
۱	حد مقابل را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x^3 - 1}$	۱۴
۱/۵	a و b را طوری بیابید که تابع f با ضابطه مقابل در $x = 1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{ x-1 } & x < 1 \\ 3ax - 2 & x = 1 \\ b[-2x] + 7x & x > 1 \end{cases}$	۱۵
۱	احتمال قبولی سارا در کنکور ۰/۷ و احتمال قبولی سدنا در کنکور ۰/۶ است. مطلوب است محاسبه احتمال این که حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شوند.	۱۶
۱/۲۵	ضرب تغییرات داده‌های ۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰ را به دست آورید.	۱۷
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»	

ردیف	امتحان نهایی: ریاضی ۲	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)
نمره	امتحان شماره ۴	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) برای هر عدد حقیقی k، داریم: $[x+k] = [x] + k$ . ( [x] نشان دهنده جزء صحیح x است.) ب) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۲ برابر می‌شود. پ) دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند.		۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد ..... می‌باشد. ب) حد تابع $f(x) = \frac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \rightarrow (-1)^-$ ، برابر ..... است. پ) مقدار مینیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر با ..... است. ت) حداکثر مقدار تابع $f(x) = \cos x$ برابر با ..... است که در نقاط به طول ..... حاصل می‌شود.		۱/۲۵

۰/۵	<p>گزینه صحیح را انتخاب کنید.</p> <p>الف) ضابطه وارون تابع <math>f(x) = 3x - 2</math> کدام است؟</p> <p>(۱) <math>f^{-1}(x) = -3x + 2</math></p> <p>(۲) <math>f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}</math></p> <p>(۳) <math>f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}</math></p> <p>(۴) <math>f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}</math></p> <p>ب) کدام یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک‌به‌یک است؟</p> <p>(۱) <math>f(x) = x^2</math></p> <p>(۲) <math>f(x) = [x]</math></p> <p>(۳) <math>f(x) =  x </math></p> <p>(۴) <math>f(x) = 2^x</math></p>	۳
۰/۷۵	نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.	۴
۱	معادله $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ را حل کنید.	۵
۱/۲۵	<p>در شکل مقابل <math>ST \parallel BC</math> است. مقدار <math>x</math> و <math>y</math> را به دست آورید.</p> 	۶
۱	<p>در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو، اندازه پاره خط‌های خواسته شده را به دست آورید.</p> <p><math>BH = 9</math> , <math>AH = 6</math> , <math>BC = ?</math> , <math>AC = ?</math></p> 	۷
۱/۵	نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.	۸
۱/۵	<p>حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید.)</p> <p><math>\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) =</math></p>	۹
۱	<p>نمودار رسم شده مربوط به کدام ضابطه دیگر را در بازه <math>[0, 2\pi]</math> رسم کنید.</p> <p>الف) <math>y = 2\cos x + 1</math></p> <p>ب) <math>y = 2 - \cos x</math></p> 	۱۰
۱/۵	نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید.	۱۱
۲	<p>معادله (الف) را حل کنید و حاصل عبارت (ب) را به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\log_5(x+6) + \log_5(x+2) = 1</math></p> <p>ب) <math>\log_{17}^4 + 2\log_{17}^6 =</math></p>	۱۲
۱	<p>حاصل حد مقابل را به دست آورید.</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} =</math></p>	۱۳
۰/۷۵	<p>با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.</p> <p>الف) <math>\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =</math></p> <p>ب) <math>\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =</math></p> <p>پ) <math>\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =</math></p> 	۱۴

۱۵	پیوستگی تابع مقابل را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید. $f(x) = \begin{cases} 2x - 9 & x > 2 \\ -5 & x = 2 \\ -2x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$
۱۶	احتمال این که یک تیم فوتبال، اصلی ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورت بردن رقیب اصلی اش، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش می یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟
۱۷	نمرات ریاضی یک کلاس به قرار روبه‌رو است. میانه و انحراف معیار را برای این جامعه آماری به دست آورید. ۱۹، ۱۱، ۱۷، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۲۰، ۱۳، ۱۸، ۱۶
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»

ردیف	امتحان نهایی: ریاضی ۲	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: خرداد ۱۴۰۲ (نوبت عصر)
نمره	امتحان شماره ۵	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	گزینه مناسب را تعیین کنید. الف) فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از خط $3x + 4y - 6 = 0$ کدام است؟ (۱) $\frac{-4}{5}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{8}{5}$ (۴) $\frac{6}{5}$ ب) در هر مثلث هر پاره‌خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می کند ..... ضلع سوم است. (۱) موازی (۲) مساوی (۳) موازی و مساوی نصف (۴) موازی و مساوی پ) اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{4}{25}$ باشد، نسبت نیمسازهای آن‌ها برابر ..... است. (۱) $\frac{16}{625}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{4}{50}$ ت) برد تابع $f(x) = [x]$ کدام است؟ (۱) اعداد حقیقی (۲) اعداد گویا (۳) اعداد طبیعی (۴) اعداد صحیح ث) اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه کدام گزینه صحیح است؟ (۱) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (۲) $P(A \cap B) = P(S)$ (۳) $A \cap B = \emptyset$ (۴) $A \cap B = A \times B$		
۲	الف) اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید. ب) معادله روبه‌رو را حل کنید. $\sqrt{2-x} = x$		
۳	الف) حکم کلی زیر را با مثال نقض رد کنید. به ازای هر عدد طبیعی $n$ ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است. ب) در مثلث قائم‌الزاویه $ABC$ به رأس قائمه $A$ ، اگر ارتفاع وارد بر $BC$ باشد و $AH = 4$ cm و $BH = 2$ cm، آن‌گاه اندازه $AB$ و $HC$ را به دست آورید.		
۴	اگر $f(x) = 3x + 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(8)$ را تعیین کنید.		
۵	اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.		
۶	نمودار تابع $y = -\sin x + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکزیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.		
۷	حاصل عبارت مقابل را بیابید: $A = \sin 12^\circ - \cos 15^\circ$		
۸	نمودار تابع $y = -\log_2(x - 3)$ را رسم کنید.		

۲	معادلات نمایی و لگاریتمی زیر را حل کنید. الف) $3^{x-2} = \frac{1}{27^x}$ ب) $\log(x+3) + \log x = 1$	۹
۰/۵	اگر $\log 2 \approx 0/3$ و $\log 3 \approx 0/48$ ، آن‌گاه حاصل $\log 12$ را بیابید.	۱۰
۱	با توجه به نمودار، حاصل را بیابید.  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3f(-1) =$	۱۱
۱	مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید. الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1402^-} [x]$ پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x$	۱۲
۱/۵	مقادیر <b>a</b> و <b>b</b> را چنان تعیین کنید که تابع مقابل در نقطه $x = -1$ پیوسته باشد. $f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ ax + b & x = -1 \\ x^2 - b & x > -1 \end{cases}$	۱۳
۱/۲۵	فرض کنید در یک سال، احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر $0/5$ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر $0/6$ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از دو تیم قهرمان خواهد شد؟	۱۴
۱/۵	ضریب تغییرات داده‌های مقابل را تعیین کنید. ۱, ۳, ۵, ۷	۱۵
۲۰	جمع نمرات «موفق باشید»	

ردیف	امتحان نوبت دوم: ریاضی ۲	رشته: علوم تجربی	تاریخ امتحان: خردادماه
نمره	امتحان شماره ۶	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه	مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) معادله $x^2 + 6x + 7 = 0$ دو ریشه مثبت دارد. ب) اگر $A$ و $B$ دو پیشامد مستقل باشند، آن‌گاه $P(A B) = P(A)$ . پ) تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در $x=1$ پیوستگی راست دارد. ت) هر تابع خطی غیرثابت، یک‌به‌یک است.		
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید. الف) برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینه نمودار آن را نسبت به ..... رسم کنیم. ب) دامنه تابع $f(x) = 2^x - 3$ برابر با ..... و برد آن برابر با ..... است. پ) طول کمان روبه‌رو به زاویه $21^\circ$ درجه در دایره‌ای به شعاع ۶ برابر با ..... است.		
۳	گزینه صحیح را انتخاب کنید. الف) معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟ ب) مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ برابر با چند است؟		
		۳ (۳)	۴ (۴) صفر
		۲ (۲)	۳ (۴) -۳
		۱ (۱)	
		۳ (۲)	
		۲ (۱)	
۴	نقاط $A(2, -2)$ و $B(4, 4)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بیابید.		

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{2x-5} \quad (ب)$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x+1 = 1+2x-5+2\sqrt{2x-5}$$

$$\Rightarrow 5-x = 2\sqrt{2x-5} \quad (۰/۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 25+x^2-10x = 8x-20 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x^2-18x+45=0 \Rightarrow (x-3)(x-15)=0$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ یا } x=15 \quad (۰/۲۵)$$

$x=15$  در معادله اصلی صدق نمی‌کند و  $x=3$  تنها جواب معادله است. (۰/۲۵)

۷. خط  $d$  و نقطه  $P$  واقع در خارج آن را در

نظر می‌گیریم.

گام اول: دهانهٔ پرگار را باز کرده و به مرکز  $P$

کمائی می‌زنیم که خط  $d$  را در دو نقطه  $A$  و  $B$  قطع کند. (۰/۲۵)

گام دوم: عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  را رسم می‌کنیم (۰/۲۵)، چون  $PA=PB$ ؛

پس عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  از نقطه  $P$  می‌گذرد. (۰/۲۵)

عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  جواب مسئله است، زیرا از  $P$  می‌گذرد و بر خط  $d$

عمود است. (۰/۲۵)

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \quad (۰/۲۵) \quad ۸.$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{x+1}{3x+1} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 6x+2=5x+5 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x=3 \quad (۰/۲۵)$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم قضیهٔ تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{y+1}{4y+2/5} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 8y+5=7y+7 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow y=2 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta ABH: AB^2 = AH^2 + BH^2 \quad (۰/۲۵) \quad ۹.$$

$$\Rightarrow 10^2 = 6^2 + BH^2$$

$$\Rightarrow BH^2 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow BH = 8 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta ABC: AB^2 = BH \times BC \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 10^2 = 8 \times BC$$

$$\Rightarrow BC = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12.5 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Delta ABC: AH \times BC = AB \times AC \quad (۰/۲۵) \Rightarrow 6 \times \frac{25}{2} = 10 \times AC$$

$$\Rightarrow AC = \frac{75}{10} = 7.5 \quad (۰/۲۵)$$

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x+4} \Rightarrow x+4 \neq 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x \neq -4 \quad ۱۰.$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-4\} \quad (۰/۲۵)$$

$$g(x) = x-4 \xrightarrow{\text{چندجمله‌ای } g} D_g = \mathbb{R} \quad (۰/۲۵)$$

چون  $D_f \neq D_g$ ؛ پس  $f \neq g$ . (۰/۵)

## پاسخ امتحان شماره (۱) دی‌ماه

$$y = 2x - 1 \Rightarrow m = 2 \quad (الف) \text{ نادرست } (۰/۲۵)$$

$$x = 2y + 5 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \Rightarrow m' = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow mm' = 2 \left(\frac{1}{2}\right) \neq -1 \Rightarrow \text{عمود نیستند.}$$

(ب) درست (۰/۲۵)

(ت) نادرست (۰/۲۵)، زیرا تابع خطی ثابت، غیریک‌به‌یک است.

$$S = 2, P = -4 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \quad (۰/۲۵) \quad (الف) ۲.$$

(ب) نیمساز (۰/۲۵)، به یک فاصله (۰/۲۵)

$$\frac{2a+1}{3a+2} = \frac{2b+3}{3b+6}$$

(پ)  $\frac{1}{3}$  (۰/۲۵)، زیرا:

$$\Rightarrow (2a+1)(3b+6) = (3a+2)(2b+3)$$

$$\Rightarrow 6ab + 12a + 3b + 6 = 6ab + 9a + 4b + 6$$

$$\Rightarrow 3a = b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3 \times 18^\circ}{5} = 10.8^\circ$$

(ت)  $10.8^\circ$  (۰/۲۵)، زیرا:

۳. باید فاصلهٔ نقطه  $A$  را تا خط  $BC$  بیابیم؛ پس معادلهٔ  $BC$  را می‌نویسیم:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{6 - 0}{6 - (-2)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad (۰/۵)$$

$$\text{معادلهٔ } BC: y - 0 = \frac{3}{4}(x + 2) \Rightarrow 4y = 3x + 6$$

$$\Rightarrow 3x - 4y + 6 = 0 \quad (۰/۵)$$

$$\text{طول ارتفاع } AH = \frac{|3 \times 0 - 4 \times 4 + 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2 \quad (۰/۵)$$

۴. اگر  $\alpha$  و  $\beta$ ، طول و عرض مستطیل باشند، داریم:

$$\alpha\beta = 24 \text{ و } 2(\alpha + \beta) = 22 \Rightarrow \alpha + \beta = 11 \quad (۰/۲۵)$$

پس  $S = 11$  و  $P = 24$ ؛ بنابراین  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادلهٔ  $x^2 - Sx + P = 0$

هستند:  $x^2 - Sx + P = 0 \quad (۰/۲۵) \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \quad (۰/۲۵)$

$$\Rightarrow (x-8)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 8, x = 3 \quad (۰/۵)$$

یعنی طول مستطیل برابر ۸ و عرض آن ۳ می‌باشد.

۵. چون ریشه‌های سهمی را می‌دانیم؛ پس معادلهٔ سهمی به شکل

$y = a(x+1)(x-2)$  است. این سهمی از نقطهٔ  $(0, -1)$  می‌گذرد؛ پس:

$$-1 = a(0+1)(0-2) \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad (۰/۲۵)$$

در نتیجه: معادلهٔ سهمی  $y = \frac{1}{2}(x+1)(x-2) = \frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \quad (۰/۵)$$

۶. الف) طرفین معادله را در  $(x-2)(x+2)$  ضرب می‌کنیم، داریم:

$$(2x+1)(x+2) - (2x-1)(x-2) = 3x^2 + 3 \quad (۰/۲۵)$$

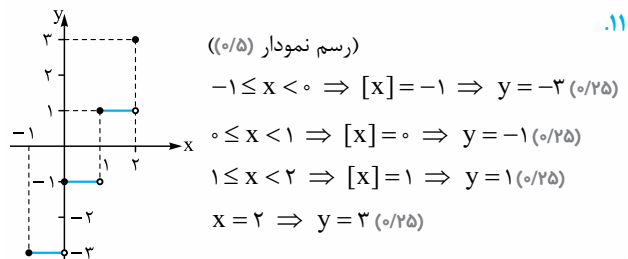
$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + x + 2 - (2x^2 - 4x - x + 2) = 3x^2 + 3$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 - 2x^2 + 4x - 2 = 3x^2 + 3$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \Delta = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow x = 3 \text{ یا } x = \frac{1}{3} \quad (۰/۲۵)$$

هیچ‌یک از این دو، مخرج کسرها صفر نمی‌کند؛ پس هر دو جواب، قابل قبول است. (۰/۲۵)



۱۲.

$$y = \frac{2}{3}x - 5 \Rightarrow y + 5 = \frac{2}{3}x \xrightarrow{\times \frac{3}{2}} \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} = x \text{ (۰/۲۵)}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{3}{2}y + \frac{15}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \text{ (۰/۵)}$$

۱۳.  $f(x) = x^2 + 3x + 2 \xrightarrow{\text{چند جمله ای}} D_f = \mathbb{R}$  (۰/۲۵)

$$g(x) = \frac{x+2}{x+4}, x+4 \neq 0 \Rightarrow x \neq -4 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{-4\} \text{ (۰/۲۵)}$$

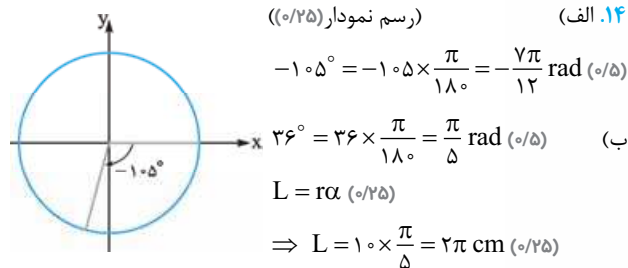
$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} - \{-4\}) - \{-2\}$$

$$= \mathbb{R} - \{-4, -2\} \text{ (۰/۲۵)}$$

ضابطه:  $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x+4} = \frac{(x+2)(x+1)}{x+4}$  (۰/۲۵)

$$= (x+1)(x+4) = x^2 + 5x + 4 \text{ (۰/۲۵)}$$

$$(x \neq -2, -4)$$



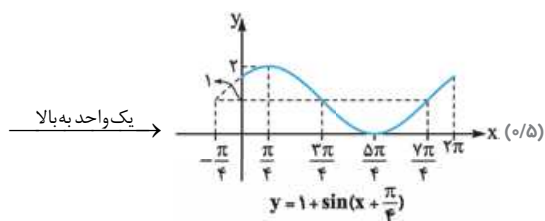
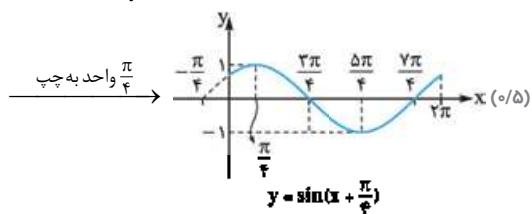
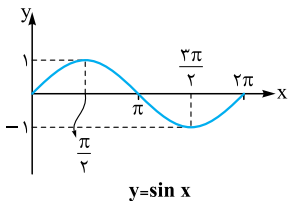


$$A = \frac{\sin(27^\circ - 2^\circ) + 2\sin(36^\circ - 2^\circ)}{\cos(9^\circ + 2^\circ) + \cos(18^\circ + 2^\circ)} \quad (0/5) \quad 9.$$

$$= \frac{\overbrace{-\cos 2^\circ}^{(0/25)} - \overbrace{2\sin 2^\circ}^{(0/25)}}{\overbrace{-\sin 2^\circ}^{(0/25)} - \overbrace{\cos 2^\circ}^{(0/25)}}$$

صورت و مخرج کسر را بر  $\cos 2^\circ$  تقسیم می‌کنیم:

$$A = \frac{-1 - 2\tan 2^\circ}{-\tan 2^\circ - 1} \quad (0/25) \approx \frac{-1 - 2 \times 0/4}{-0/4 - 1} = \frac{-1/4}{-1/4} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \quad (0/25)$$



$$\log \frac{1}{\sqrt{5}} = \log 1/5 - \log \sqrt{5} = \log 3^2 \times 2 - \log 5^{1/2} \quad (0/25) \quad 11.$$

$$= \log 3^2 + \log 2 - \frac{1}{2} \log 5 \quad (0/25) = 2 \log 3 + \log 2 - \frac{1}{2} (1 - \log 2) \quad (0/25)$$

$$\approx 2 \times 0/48 + 0/3 - \frac{1}{2} (1 - 0/3) = 0/96 + 0/3 - \frac{1}{2} \times 0/7$$

$$= 1/26 - 0/35 = 0/91 \quad (0/25)$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+x+2} = \left(\frac{25}{9}\right)^x = \left(\left(\frac{5}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2x} \quad (0/25) \quad 12. \text{ الف}$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = -2x \quad (0/25) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+2) = 0 \quad (0/25) \Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = -2 \quad (0/25)$$

(ب)

$$\log_\delta(x+6) + \log_\delta(x+2) = 1 \Rightarrow \log_\delta(x+6)(x+2) = 1 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow (x+6)(x+2) = \delta^1 \quad (0/25) \Rightarrow x^2 + 8x + 12 = \delta$$

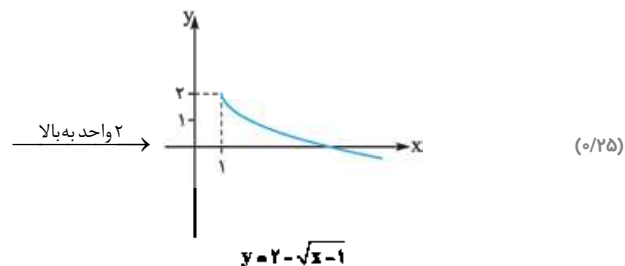
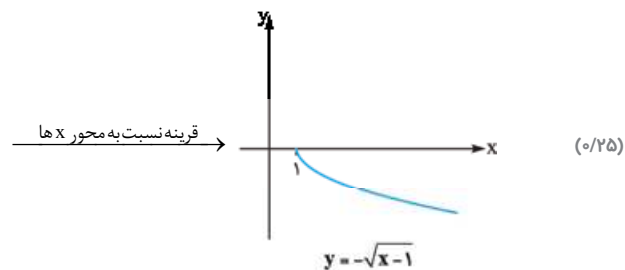
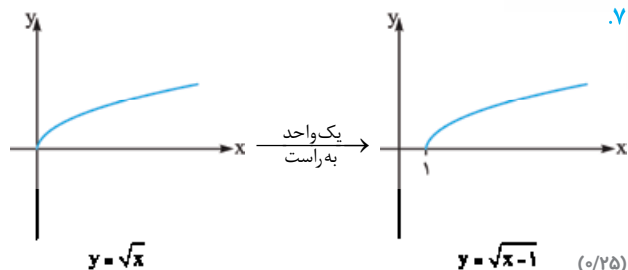
$$\Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow (x+1)(x+7) = 0 \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ یا } x = -7$$

$x = -7$  عبارت جلوی لگاریتم‌ها را منفی می‌کند؛ پس  $x = -1$  تنها جواب

این معادله است. (0/25)

10.



با توجه به نمودار،  $R_f = (-\infty, 2]$  و  $D_f = [1, +\infty)$  (0/25)

$$f^{-1}(3) = x \Rightarrow f(x) = 3 \quad (0/25) \Rightarrow \frac{\delta x - 4}{\gamma} = 3 \quad 13.$$

$$\Rightarrow \delta x - 4 = 21 \quad (0/25) \Rightarrow \delta x = 25$$

$$\Rightarrow x = 5 \quad (0/25) \Rightarrow f^{-1}(3) = 5 \quad (0/25)$$

۴. فاصله نقطه  $A(۳, ۰)$  از خط  $y - x = ۵$  یا  $-x + y - ۵ = ۰$  همان طول ضلع مربع است.

$$AH = \frac{|-۳ + ۰ - ۵|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲$$

$$۲x - 1 = -\sqrt{۲-x} \quad ۵$$

$$\Rightarrow (۲x-1)^2 = (-\sqrt{۲-x})^2 \Rightarrow ۴x^2 - ۴x + 1 = ۲ - x$$

$$\Rightarrow ۴x^2 - ۳x - 1 = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} x_1 = 1 \text{ غیر قابل قبول } , x_2 = \frac{-1}{۴}$$

$$ST \parallel BC \Rightarrow \frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC}, \frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC}$$

$$\frac{\lambda}{۴} = \frac{۳y+۲}{۶} \Rightarrow ۳y+۲=۱۲ \Rightarrow y=۳$$

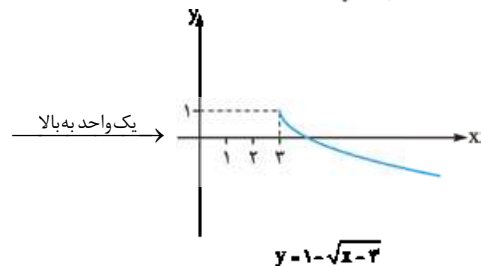
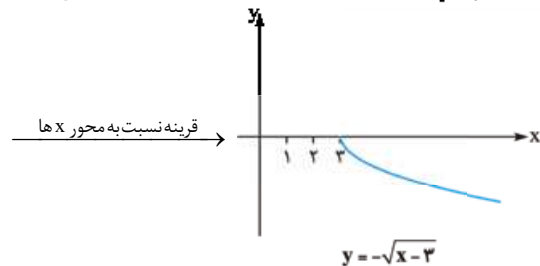
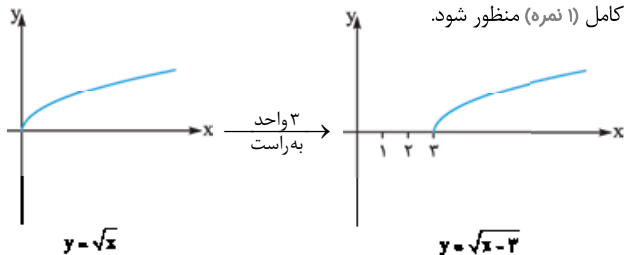
$$\frac{\lambda}{۱۲} = \frac{۶}{۴x+1} \Rightarrow \lambda x + ۲ = ۱۸ \Rightarrow x=۲$$

$$AH^2 = BH \times HC \Rightarrow ۳۶ = ۹ \times HC$$

$$\Rightarrow HC = ۴ \Rightarrow BC = ۱۳$$

$$AC^2 = HC \times BC \Rightarrow AC^2 = ۴ \times ۱۳ \Rightarrow AC = ۲\sqrt{۱۳}$$

۸. هر مرحله از رسم نمودار (۰/۲۵) نمره. در صورت رسم صحیح نمودار نهایی، نمره کامل (۱ نمره) منظور شود.



$$D_f = [۳, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, 1]$$

$$۲ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - ۲ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + f(1) = ۲ \times ۱ - ۲ \times ۲ + ۲ = ۲ - ۹ + ۲ = -۵$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{۳x^2 + x - ۴}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(۳x+۴)}{(x-1)(x+1)} = \frac{۷}{۲}$$

$$f(1) = ۳a - ۲$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} b[-۲x] + ۷x = -۲b + ۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - ۳x + ۲}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)} = ۱$$

f در  $x=1$  پیوسته است.

$$\Rightarrow \begin{cases} ۳a - ۲ = ۱ \Rightarrow ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \\ -۲b + ۷ = ۱ \Rightarrow -۲b = -۶ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

۱۶. فرض کنیم A و B به ترتیب پیشامد قبولی سارا و سدنا در کنکور باشند؛ پس  $P(A) = ۰/۷$  و  $P(B) = ۰/۶$  و باید  $P(A \cup B)$  را بیابیم. بدیهی است که A و B مستقل اند؛ پس  $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$  داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = ۰/۷ + ۰/۶ - ۰/۴۲ = ۰/۸۸$$

$$\bar{x} = \frac{۲+۴+۶+۸+۱۰}{۵} = ۶$$

$$\sigma^2 = \frac{(۲-۶)^2 + (۴-۶)^2 + (۶-۶)^2 + (۸-۶)^2 + (۱۰-۶)^2}{۵} = \frac{۱۶+۴+۰+۴+۱۶}{۵} = ۸ \Rightarrow \sigma = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

پاسخ امتحان شماره (۴): خرداد ۱۴۰۲ (نوبت صبح)

$$[1/\delta + 0/\delta] \neq [1/\delta] + 0/\delta$$

۱. الف) نادرست (۰/۲۵)؛ زیرا: (ب) درست (۰/۲۵) عمودمنصفهای اضلاع مثلث (۰/۲۵)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x+۴}{[x]+۳} = \frac{۳}{[(-1)^-]+۳} = \frac{۳}{۱} = ۳$$

$$a > ۰, x_{\min} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۶}{۲ \times ۳} = -1 \Rightarrow y_{\min} = ۲$$

$$x = ۲k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

۳. الف) گزینه «۳»

$$(1,1) \in f \Rightarrow (1,1) \in f^{-1}$$

ب) گزینه «۴» زیرا هر خط موازی با محور xها نمودار این تابع را در یک نقطه قطع می کند.

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \quad (0/25)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (0/25)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{13}{36} \quad (0/5)$$

$$11, 13, 14, 15, \frac{16, 17}{Q_{\tau=16/5}}, 17, 18, 19, 20 \quad (0/5)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{n} = \frac{160}{10} = 16 \quad (0/25)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\bar{x} - X_i)^2}{n}} \quad (0/25)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25+9+4+1+0+1+1+4+9+16}{10}} = \sqrt{7} \quad (0/5)$$

پاسخ امتحان شماره (5): خرداد 1402 (نوبت عصر)

$$AH = \frac{|3(-2) + 4(2) - 6|}{\sqrt{9+16}} = \frac{4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5} \quad (0/25) \quad \text{الف گزینۀ «2»}$$

ب گزینۀ «3» (0/25)

$$\frac{S}{S'} = \frac{4}{25} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5} \quad (0/25) \quad \text{پ گزینۀ «2»}$$

ت گزینۀ «4» (0/25)

$$\begin{cases} x_O = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_O = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases} \quad (0/25) \quad \text{الف «2»}$$

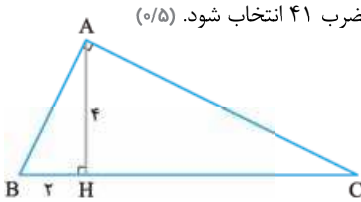
$$\sqrt{2-x} = x \xrightarrow{\text{توان } 2} 2-x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \quad (1) \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ یا } x = 1$$

$x = -2$  در معادله اصلی صدق نمی‌کند و  $x = 1$  تنها جواب معادله است.

3. الف کافی است  $n = 41$  یا مضرب 41 انتخاب شود. (0/5)

ب هر مورد (0/25)



$$AH^2 = BH \cdot HC$$

$$\Rightarrow 4^2 = 2 \times HC$$

$$\Rightarrow HC = 8$$

$$AB^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$f^{-1}(\lambda) = x \Rightarrow f(x) = \lambda \quad (0/25) \Rightarrow 3x + 5 = \lambda \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow (1, \lambda) \in f \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = 1 \quad (0/25)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} \quad (0/25)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap \mathbb{R} - \{2, -2\}$$

$$= \mathbb{R} - \{1, 2, -2\} \quad (0/25)$$

16.

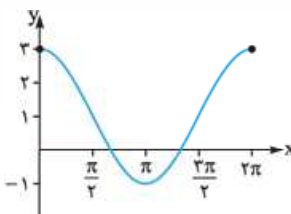
$$\sin(\lambda\pi + \frac{\pi}{3}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) - \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) \quad (0/25)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0$$

17.

10. نمودار از نقطه (0,1) می‌گذرد و این نقطه فقط در ضابطه (ب) صدق می‌کند؛ پس نمودار مربوط به ضابطه (ب) است. (0/25)



برای رسم نمودار ضابطه (الف) کافی است

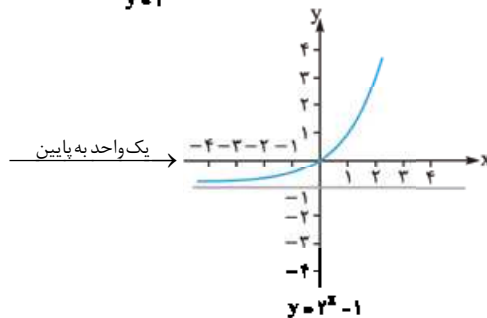
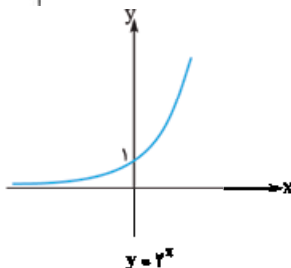
ابتدا عرض نقاط نمودار  $y = \cos x$  را

دو برابر کنیم و سپس نمودار حاصل را

یک واحد به بالا منتقل کنیم.

رسم صحیح نمودار (الف) (0/25)

11. رسم صحیح نمودار (0/25)



$$D_f = (-\infty, +\infty) \quad (0/25)$$

$$R_f = (-1, +\infty) \quad (0/5)$$

$$\log_2(x+6)(x+2) = 1 \quad (0/25) \quad \text{الف «2»}$$

$$\Rightarrow (x+6)(x+2) = 2 \quad (0/25) \Rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0 \quad (0/25)$$

$$\xrightarrow{a+c=b} x_1 = -1, x_2 = -7 \quad (0/5) \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$\log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12} 144 = 2 \quad (0/25) \quad \text{ب}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2} \quad (0/25) \quad \text{13}$$

$$\text{الف «1» (0/25) \quad ب «4» (0/25) \quad پ صفر (0/25)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-9) = -5 \quad (0/5) \quad \text{14}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x^2 + 3) = -5 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5 = f(2) \quad (0/25)$$

در نتیجه تابع  $f$  در  $x = 2$  پیوسته است. (0/25)

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (-1) = -1 \quad (0/25)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x^2 - b = (-1)^2 - b = 1 - b \quad (0/25)$$

$$\begin{cases} 1 - b = -1 \Rightarrow b = 2 \quad (0/25) \\ -a + b = -1 \xrightarrow{b=2} -a + 2 = -1 \Rightarrow a = 3 \quad (0/5) \end{cases}$$

P(A) = 0/5 پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال A 14

P(B) = 0/6 پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال B

P(A ∩ B) = 0/5 × 0/6 = 0/3 مستقل (0/5)

P(A ∪ B) = P(A) + P(B) - P(A ∩ B)

= 0/5 + 0/6 - 0/3 = 0/8 (0/25)

میانگین  $\bar{X} = \frac{1+3+5+7}{4} = \frac{16}{4} = 4 \quad (0/25)$   
15  
 (0/5)

واریانس  $\sigma^2 = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{4} = \frac{20}{4} = 5$

انحراف معیار  $\sigma = \sqrt{5} \quad (0/25)$

C.V =  $\frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$  ضریب تغییرات (0/5)

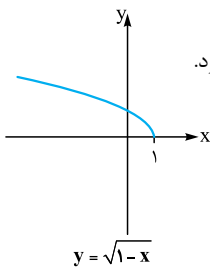
پاسخ امتحان شماره (۶): خردادماه

1. الف) نادرست (0/25)، زیرا:  $x_1, x_2 = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(7)}}{2}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{-6 + \sqrt{10}}{2} < 0, x_2 = \frac{-6 - \sqrt{10}}{2} < 0$

(ب) درست (0/25)

(ب) نادرست (0/25)، زیرا در  $x = 1$  پیوستگی چپ دارد.



(ت) درست (0/25)

2. الف) نیمساز ربع اول و سوم (یا خط  $y = x$ ) (0/25)

(ب)  $\mathbb{R} \quad (0/25)$   $(-3, +\infty) \quad (0/25)$   $7\pi \quad (0/25)$

3. الف) گزینه «4» (0/5)، زیرا

جواب ندارد.  $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = -\sqrt{1-x}$

(ب) گزینه «2» (0/5)، زیرا:

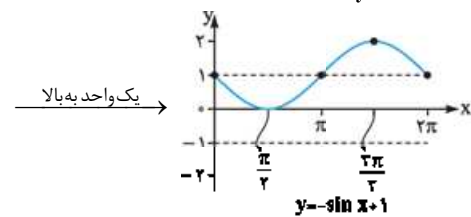
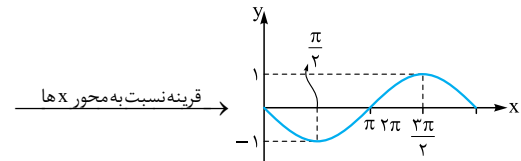
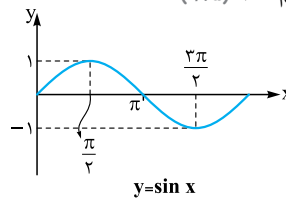
$a = -2 < 0 \Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow y_{\max} = 3$

4. مرکز:  $O = (3, 1) \quad (0/25)$  14

شعاع:  $R = OA = \sqrt{(3-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10} \quad (0/5)$

6. رسم نمودار دقیق (1 نمره) مقدار ماکزیمم  $2 = (0/25)$

مقدار مینیمم  $0 = (0/25)$



7.  $A = \sin(90^\circ + 30^\circ) - \cos(180^\circ - 30^\circ) \quad (0/5)$

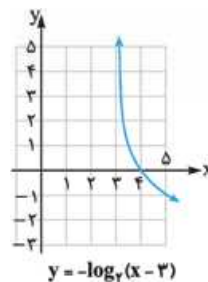
$= \cos 30^\circ - (-\cos 30^\circ) \quad (0/5) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad (0/5)$

8. رسم دقیق نمودار (1 نمره)

انتقال 3 واحد به راست تابع  $y = \log_7 x$  و

سپس قرینه نسبت به محور  $x$

$y = \log_7(x-3)$



9. الف)  $3^{x-2} = \frac{1}{(3^2)^x} = 3^{-3x} \Rightarrow x-2 = -3x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad (0/5)$

(ب)  $\log(x+3)x = 1 \Rightarrow (x^2 + 3x) = 10 \quad (0/25)$

$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -5 & \text{غ ق} \\ x = 2 & \text{ق ق} \end{cases} \quad (0/5)$

10.  $\log 2^2 \times 3 = 2 \log 2 + \log 3 \quad (0/25)$

$= 2 \times 0/3 + 0/48 = 1/08 \quad (0/25)$

11. هر مورد (0/25)  $3 - 3(-1) + 3(1) = 9$

12. الف)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2} \quad (0/5)$

(ب)  $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25)$  1401 (0/25)

13. مقدار تابع = حد چپ = حد راست: شرط پیوستگی

$f(-1) = a(-1) + b = -a + b \quad (0/25)$