تقدیم به
پدر و مادر عزیزم
و همسر مهربانم
و دختر دلبندم

مقدمه مولّف

سلام

دانش‌آموزان عزیز و دبیران محترم! با توجه به تغییرات صورت‌گرفته در کنکور سراسری و اهمیت امتحان نهایی و تأثیر مستقیم آن بر قبولی در دانشگاه مصمم شدیم کتابی متناسب با این تغییرات فراهم کنیم. در این کتاب علاوه بر امتحانات نهایی داخل کشور، امتحانات نهایی خارج کشور هم جمع‌آوری شده است و سعی شده است با تقسیم‌بندی مطالب هر فصل به بخش‌های کوچک‌تر، متناسب با آموزش هر هفتهٔ دانش‌آموزان، تمرین کافی وجود داشته باشد.

در ابتدای هر فصل یک تحلیل آماری از سهم فصل و هر مبحث در امتحان نهایی آورده شده است که می‌تواند میزان اهمیت مطالب و تأثیر آن‌ها را مشخص کند. البته توجه کنید که تمام فصل‌ها و بخش‌ها در امتحان نهایی دارای اهمیت هستند.

ویژگی‌های کتاب در یک نگاه:

۱ ارائهٔ بانک کامل سؤالات امتحان‌های نهایی (داخل و خارج کشور) در نظام آموزشی جدید

۲ چیدمان موضوعی سؤالات با رویکرد آموزشی

۳ ادغام سؤالات تکراری و مشابه برای پرهیز از حجیم‌شدن کتاب

۴ ارائهٔ پاسخ‌های آموزشی کامل با اولویت بررسی پاسخ آموزش و پرورش

۵ ارائهٔ درس‌نامه‌های کامل ولی در عین حال جمع‌وجور

۶ ارائهٔ چند دوره امتحانات نهایی سال‌های اخیر در انتهای کتاب با ریزبارم‌بندی برای آشنایی با نحوهٔ تصحیح اوراق

۷ ارائهٔ سؤال‌هایی در سطح بالاتر برای دانش‌آموزان سخت‌کوش

۸ ارائهٔ کتابی با رویکردی اقتصادی و قیمت مناسب در عین حال کامل

در پایان باید از تمامی عزیزانی که در به ثمر رسیدن این کتاب نقش داشته‌اند تشکر نمایم:

۱ آقایان دکتر ابوذر نصری و دکتر کمیل نصری که مقدمات چاپ این کتاب را فراهم نمودند.

۲ مهندس احمد علی‌نژاد که در تمام مراحل تألیف کتاب، برادرانه و با حوصله و صبر زیاد در کنارم قرار داشت.

۳ مهندس بقایی و تیم خوب تولید که چاپ این کتاب، مرهون تلاش آن‌ها است.

۴ خانم لولاو مرادی به خاطر تمام دلسوزی‌هاشون و پیگیری‌هایی که انجام دادند.

۵ تمام اساتید و دوستان عزیزم که از آن‌ها در تمام مراحل زندگی آموخته‌ام.

۶ ویراستاران خوب کتاب، خانم‌ها زهرا جالینوسی و نرجس تیمناک و آقای حسن رحیمی

۷ صدای ملکوتی و دلنشین استاد محمدرضا شجریان که در تمام مراحل تألیف کتاب یار و همدم من بود. روح استاد شجریان عزیز شاد و یادشان گرامی.

علم دریاییست بی حد و کنار　　طالب علم است غواص بحار

گر هزاران سال باشد عمر او　　او نگردد سیر خود از جست‌وجو

(مولانا)

مهندس حسین کرد

فهرست مطالب

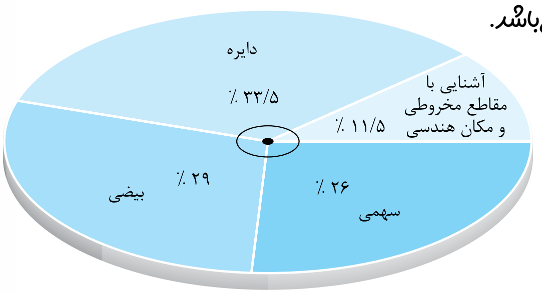
فصل ۲ آشنایی با مقاطع مخروطی


پروفسور مریم میرزاخانی

مشاوره

فصل دوم بیشترین مقدار بارم را در بین ۳ فصل کتاب در امتحانات نهایی دارد.
این فصل از کتاب درسی تمرین و کار در کلاس‌های خیلی مهمی دارد که بسیاری از آن‌ها در امتحانات نهایی استفاده شده‌اند. پس مهم‌ترین کار حل تمرین‌های کتاب و مطالعهٔ دقیق این فصل است.
از فصل ۲ تا صفحهٔ ۴۶ در امتحان نوبت اول ۱۰ نمره و در کل از فصل ۲ در امتحان نهایی ۸ نمره سؤال طرح می‌شود.
سهم هر سه قسمت در امتحانات نهایی به صورت نمودار دایره‌ای روبه‌رو می‌باشد.

دی (داخلی)	خرداد (نهایی)	شهریور و دی (نهایی)
۱۰ نمره	۸ نمره	۸ نمره



درس ۱ آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

صفحه ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی
درس‌نامهٔ ۱ را در صفحه ۳۸ ببینید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۹۵- مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی .... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد. (دی ۱۴۰۰ ـ شهریور ۱۴۰۰ ـ شهریور ۹۹ ـ خرداد ۹۸)

۹۶- در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود نباشد و با مولد آن (d) نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، فصل مشترک حاصل یک .... خواهد بود. (خرداد ۱۴۰۰ خارج ـ دی ۹۹ ـ خرداد ۹۸)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۹۷- مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ بین آن دو خط است. (دی ۹۷ ـ دی ۹۹ ـ دی ۹۷ خارج)

۹۸- صفحه‌ای با مولد سطح مخروطی موازی است و از رأس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک بیضی است. (دی ۹۷ ـ خرداد ۱۴۰۰)

۹۹- در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود. (دی ۱۴۰۰ ـ شهریور ۹۹ ـ شهریور ۹۸ ـ شهریور ۹۸ خارج)

۱۰۰- اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک هذلولی است. (خرداد ۱۴۰۱ ـ خرداد ۱۴۰۰ خارج ـ دی ۹۸ خارج)

۱۰۱- مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است. (خرداد ۱۴۰۰ ـ دی ۹۹ خارج ـ شهریور ۹۸ خارج ـ خرداد ۹۸ خارج)

۱۰۲- مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر دایرهٔ $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس‌خارج‌اند، دایرهٔ $C'(O,2r)$ است. (خرداد ۹۹)

۱۰۳- مکان هندسی مرکز همهٔ دایره‌هایی با شعاع ثابت r که بر خط d در صفحه مماس‌اند، دو خط به موازات d و به فاصلهٔ r از d است. (شهریور ۱۴۰۰ خارج ـ خرداد ۹۹ خارج ـ خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۴- نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید.) (خرداد ۹۹)

۱۰۵- نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)
(خرداد ۱۴۰۱ ـ شهریور ۹۸ ـ دی ۹۹ خارج ـ دی ۹۸ ـ دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۶- نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید.)
(دی ۹۹ ـ مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۰۷- دو خط متقاطع مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی که از این دو خط به یک فاصله باشند و از نقطهٔ تقاطع دو خط به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشند را به دست آورید.

۱۰۸- در مثلث ABC دو رأس B و C و مساحت مثلث ثابت‌اند، مکان هندسی نقطهٔ A را به دست آورید.

۱۰۹- هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح استوانه‌ای می‌نامیم. حال فرض کنید صفحهٔ P یک سطح استوانه‌ای را قطع کند، در حالت‌های مختلف دربارهٔ سطح مقطع حاصل بحث کنید. (چهار حالت)
(تمرین کتاب درسی)

۱۱۰- دایرهٔ $C(O,r)$ و خط d مفروض‌اند. مکان هندسی نقاطی از دایره که از خط d به فاصلهٔ m باشند را به دست آورید.

درس ۲　دایره

صفحه ۴۰ تا ۴۶ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۲ را در صفحهٔ ۴۱ ببینید.

■ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۱۱- نقطهٔ $A(1,-2)$ در .... دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ قرار دارد.
(خرداد ۱۴۰۱)

۱۱۲- شعاع دایرهٔ $x^2+y^2+2x=0$ برابر با .... است.
(دی ۹۹ خارج)

■ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۱۳- رابطهٔ $x^2+y^2-2x-4y+10=0$ معادلهٔ یک دایره است.
(شهریور ۹۹ ـ مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۱۴- معادلهٔ ضمنی $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادلهٔ یک دایره است اگر و تنها اگر $a^2+b^2<4c$.
(دی ۹۸ ـ دی ۹۹ خارج)

۱۱۵- نقطهٔ $(3,-2)$ روی دایرهٔ $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد.
(دی ۹۹ ـ شهریور ۱۴۰۰)

۱۱۶- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,3)$ بوده و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد.
(دی ۱۴۰۰ ـ مشابه شهریور ۹۸)

۱۱۷- وضعیت نقطهٔ $A(1,-2)$ نسبت به دایرهٔ $x^2+y^2-2x+2y=0$ را تعیین کنید.
(خرداد ۹۹ ـ مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج ـ مشابه دی ۹۹ خارج)

۱۱۸- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(2,1)$ بوده و بر خط $3x+4y=-5$ مماس باشد.
(خرداد ۱۴۰۰ ـ مشابه خرداد ۱۴۰۱ ـ مشابه شهریور ۹۹)

۱۱۹- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(4,-1)$ و $B(-2,1)$ دو سر قطری از آن باشد.
(دی ۹۷ ـ مشابه دی ۹۹ خارج)

۱۲۰- حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-3x+5y+a=0$ بتواند معادلهٔ یک دایره باشد.
(دی ۹۷ ـ مشابه شهریور ۱۴۰۰ خارج ـ مشابه دی ۹۸ خارج)

۱۲۱- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد.
(دی ۹۹ ـ خرداد ۹۸)

۱۲۲- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.
(دی ۹۹ خارج)

۱۲۳- وضعیت هر یک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $x+y=2$ و $x^2+y^2=2$
(شهریور ۹۸ ـ شهریور ۹۸ خارج)

ب) $x-y-1=0$ و $x^2+y^2-2x+4y+3=0$
(شهریور ۹۹ ـ مشابه دی ۹۹ خارج ـ مشابه خرداد ۹۸ خارج)

پ) $3x+y=0$ و $x^2+y^2-4x-4y+7=0$
(دی ۹۸ ـ مشابه خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۴- از نقطهٔ $A(2,3)$ روی دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.
(شهریور ۱۴۰۰ ـ دی ۱۴۰۰ ـ خرداد ۹۸ ـ شهریور ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۵- معادلهٔ مماس رسم‌شده از نقطهٔ $A(2,3)$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x-y=6$ را به دست آورید.
(دی ۹۷ خارج ـ دی ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۶- وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را به دست آورید.

الف) $x^2+(y-1)^2=1$ و $(x-1)^2+y^2=1$
(دی ۹۹)

ب) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-2x=4$
(دی ۹۷)

پ) $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2-6x-2y+9=0$
(تمرین کتاب درسی)

ت) $x^2+y^2=4$ و $x^2+y^2-8x-4y+19=0$
(تمرین کتاب درسی)

۱۲۷- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,-2)$ بوده و بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2+2x-4y=4$ مماس‌خارج باشد.
(دی ۹۸ ـ خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۲۸- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ باشد و با دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-8x+4y+16=0$ مماس‌داخل باشد.
(شهریور ۹۹ ـ مشابه شهریور ۹۸ خارج)

۱۲۹- وضعیت دایرهٔ $x^2+y^2-6x-2y+9=0$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۰)

۱۳۰- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ ایجاد کند.
(شهریور ۱۴۰۰ ـ دی ۱۴۰۰ خارج ـ خرداد ۹۹ خارج ـ خرداد ۱۴۰۰ خارج ـ دی ۹۷ خارج ـ مشابه خرداد ۹۹)

۱۳۱- نقاط $A(-1,-1)$ ، $B(1,1)$ و $C(1,-3)$ رئوس مثلث ABC هستند. (دی ۹۸ خارج)

الف) معادلهٔ دایرهٔ محیطی مثلث ABC را بنویسید.
ب) معادلهٔ مماس بر این دایره را در رأس B به دست آورید.

۱۳۲- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(3,-4)$ باشد و

الف) بر محور xها مماس باشد.
ب) بر محور yها مماس باشد.
پ) از مبدأ مختصات عبور کند.

۱۳۳- شعاع دایره‌ای به معادلهٔ $2x^2+my^2+(p-3)xy-8x+4y+n=0$ برابر یک است. حاصل $m+n+p$ کدام است؟

۱۳۴- معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A(3,6)$ عبور کند و بر هر دو محور مختصات مماس باشد.

۱۳۵- مکان هندسی نقاطی از صفحه را به دست آورید که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $A(2,1)$ ، $\sqrt{3}$ برابر فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $B(6,-1)$ باشد.

۱۳۶- طول وتری که خط $3x-y-1=0$ روی دایرهٔ $x^2+y^2-4x-1=0$ ایجاد می‌کند، چه‌قدر است؟

۱۳۷- m را طوری تعیین کنید که خط $y=mx+2$ بر دایرهٔ $x^2+y^2-2x=0$ مماس باشد.

درس ۳ قسمت اول: بیضی

صفحه ۴۷ تا ۵۰ کتاب درسی

درس‌نامهٔ ۳ ـ قسمت اول را در صفحهٔ ۴۶ ببینید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۱۳۸- اگر مجموع فواصل نقطهٔ A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطهٔ A در .... بیضی است. (دی ۱۴۰۰ ـ خرداد ۹۹)

۱۳۹- اگر در بیضی، خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کم‌تر شده و بیضی به .... نزدیک‌تر می‌شود. (خرداد ۱۴۰۱ ـ شهریور ۱۴۰۰ خارج ـ دی ۹۹ خارج)

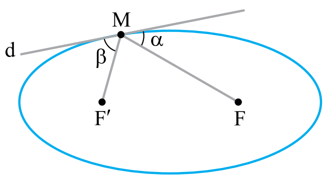
۱۴۰- اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصلهٔ کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است. (شهریور ۹۹)

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

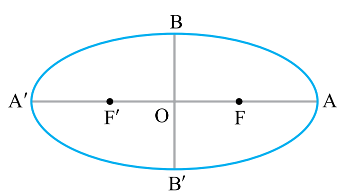
۱۴۱- در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر یک باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.
(شهریور ۱۴۰۰ ـ دی ۹۸ ـ خرداد ۹۹ ـ خرداد ۹۸ خارج ـ دی ۱۴۰۰ خارج ـ دی ۹۹ خارج ـ دی ۹۸ خارج ـ خرداد ۱۴۰۰ خارج)

۱۴۲- در حالتی که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد، بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود. (خرداد ۱۴۰۰ ـ دی ۱۴۰۰ ـ خرداد ۹۹ خارج ـ خرداد ۹۸)

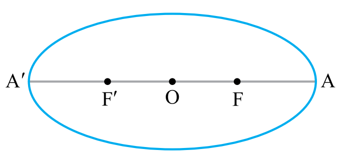
۱۴۳- در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و زاویهٔ $F\hat{M}F'=50^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $\alpha=\beta=60^\circ$ است. (خرداد ۱۴۰۱)



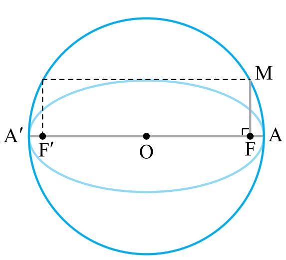
۱۴۴- در بیضی روبه‌رو $OA=OA'=a$ ، $OB=OB'=b$ و $OF=OF'=c$ ، ثابت کنید: $a^2=b^2+c^2$. (دی ۱۴۰۰ ـ خرداد ۱۴۰۰)



۱۴۵- در بیضی روبه‌رو نقاط A و A′ دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F′ کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید:
$AF=A'F'$. (شهریور ۱۴۰۰)



۱۴۶- قطر دایرهٔ C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است. (خرداد ۹۹ ـ دی ۹۸ خارج)



۸۹. ابتدا ماتریس A و B را با توجه به ضابطه‌شان به دست می‌آوریم سپس آن‌ها را ضرب کرده و دترمینان را محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۲\times۱-۳\times۱ & ۲\times۱-۳\times۲\\ ۲\times۲-۳\times۱ & ۲\times۲-۳\times۲\\ ۲\times۳-۳\times۱ & ۲\times۳-۳\times۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

بسط روی ستون اول:

$$|A\times B|=\begin{vmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{vmatrix}$$

$$=(-۱)^{۱+۱}\times۴\times\begin{vmatrix}-۱ & ۱\\ -۳ & -۳\end{vmatrix}+(-۱)^{۲+۱}\times۲\times\begin{vmatrix}۱ & ۵\\ -۳ & -۳\end{vmatrix}+۰$$

$$=۱\times۴(۳-(-۳))+(-۱)\times۲(-۳-(-۱۵))=۲۴-۲۴=۰$$

۹۰.

$$|A|=\begin{vmatrix}۲ & ۳ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & -۲ & ۱\end{vmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$|A|=(-۱)^{۱+۱}\times۲\times\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ -۲ & ۱\end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}\times۳\times\begin{vmatrix}۱ & ۳\\ -۱ & ۱\end{vmatrix}$$

$$+(-۱)^{۱+۳}\times۲\times\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ -۱ & -۲\end{vmatrix}$$

$$=۱\times۲(۲-(-۶))+(-۱)\times۳(۱-(-۳))+۱\times۲(-۲-(-۲))$$

$$=۱۶-۱۲+۰=۴$$

$$|B|=۳\times(-۱)\times۲=-۶$$

$$|۲I_۳|=\begin{vmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{vmatrix}=۲\times۲\times۲=۸$$

$$\Rightarrow\ |A\times B|+|۲I_۳|=۴(-۶)+۸=-۱۶$$

۹۱. (الف) خیر، زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

(ب)

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۳ & ۴ & -۲\\ -۴ & ۶ & -۴\\ -۸ & ۱۱ & -۶\end{bmatrix}$$

بسط روی سطر اول:

$$|A\times B|=(-۱)^{۱+۱}\times(-۳)\times\begin{vmatrix}۶ & -۴\\ ۱۱ & -۶\end{vmatrix}+(-۱)^{۱+۲}\times۴\times\begin{vmatrix}-۴ & -۴\\ -۸ & -۶\end{vmatrix}$$

$$+(-۱)^{۱+۳}\times(-۲)\times\begin{vmatrix}-۴ & ۶\\ -۸ & ۱۱\end{vmatrix}$$

$$=۱\times(-۳)(-۳۶-(-۴۴))+(-۱)\times۴(۲۴-(۳۲))$$

$$+۱\times(-۲)(-۴۴-(-۴۸))=-۲۴+۳۲-۸=۰$$

۹۲. دترمینان را روی ستون اول بسط می‌دهیم:

$$(-۱)^{۱+۱}\times۳\times\begin{vmatrix}-۷ & ۳\\ ۱ & -۴\end{vmatrix}+۰+(-۱)^{۳+۱}\times a\times\begin{vmatrix}۱۱ & ۱\\ -۷ & ۳\end{vmatrix}$$

$$=۱\times۳(۲۸-۳)+۱\times a(۳۳-(-۷))=۷۵+۴۰a=k+۴۰a$$

$$\Rightarrow\ k=۷۵$$

۹۳.

$$A^۲=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^۲+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^۲\end{bmatrix}$$

$$(a+d)A-|A|I=(a+d)\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}-(ad-bc)\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^۲+ad & ab+bd\\ ac+cd & ad+d^۲\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}ad-bc & ۰\\ ۰ & ad-bc\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^۲+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^۲\end{bmatrix}$$

به وضوح معلوم است که رابطهٔ $A^۲=(a+d)A-|A|I$ برقرار است. این رابطه به قضیهٔ کیلی ـ همیلتون معروف است.

۹۴. با توجه به سؤال قبل داریم:

$$|A|=\begin{vmatrix}۳ & ۲\\ -۴ & -۱\end{vmatrix}=۳(-۱)-۲\times(-۴)=۵$$

(الف) $A^۲=(۳+(-۱))A-(۵)I=۲A-۵I$

$$\Rightarrow\ m=۲\ ,\ n=-۵\ \Rightarrow\ m+n=-۳$$

(ب) $A^۲=۲A-۵I\xrightarrow{\times A^{-۱}}A\times\underbrace{A\times A^{-۱}}_{I}=۲\underbrace{A\times A^{-۱}}_{I}-۵I\times A^{-۱}$

$$\Rightarrow\ A=۲I-۵A^{-۱}\ \Rightarrow\ ۵A^{-۱}=۲I-A$$

$$\Rightarrow\ A^{-۱}=\frac{۲}{۵}I-\frac{۱}{۵}A\ \Rightarrow\ \beta=\frac{۲}{۵}\ ,\ \alpha=-\frac{۱}{۵}\ \Rightarrow\ \alpha+\beta=\frac{۱}{۵}$$

فصل ۲ درس ۱

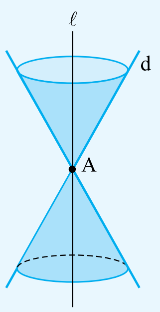
آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

صفحه ۳۴ تا ۳۹ کتاب درسی

آشنایی با مقاطع مخروطی و مکان هندسی

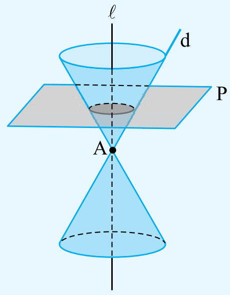
رویهٔ مخروطی

فرض کنید دو خط d و ℓ متقاطع و غیرعمود باشند. سطح حاصل از دوران خط d حول خط ℓ را یک رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. خط ℓ را **محور** و خط d را **مولد** و نقطهٔ A را **رأس** سطح مخروطی می‌نامیم.

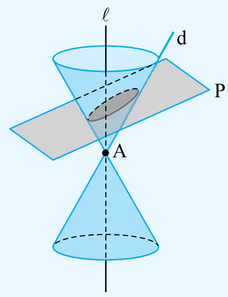


مقاطع مخروطی

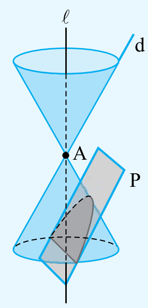
از برخورد یک صفحه با سطح مخروطی، شکل‌هایی به وجود می‌آید که به آن‌ها مقاطع مخروطی می‌گوییم.



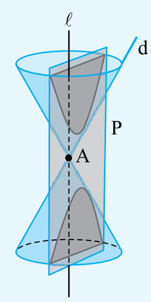
الف) در حالتی که صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است. در حالتی که صفحه از رأس A عبور کند، شکل حاصل یک نقطه است.



ب) در حالتی که صفحهٔ P بر محور ℓ عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمهٔ مخروط را قطع کند، سطح حاصل یک بیضی خواهد بود.



پ) اگر صفحهٔ P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. در حالتی که صفحه از رأس سطح مخروطی عبور کند (شامل مولد باشد) فصل مشترک آن‌ها یک خط است.

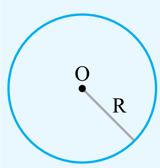


ت) اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور ℓ نباشد (صفحه موازی محور ℓ باشد) در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است. اگر صفحه شامل محور ℓ باشد، شکل حاصل، دو خط متقاطع است.

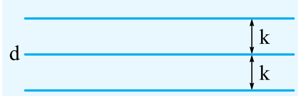
مکان‌هندسی

مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

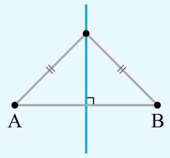
مکان‌های هندسی مهم در صفحه



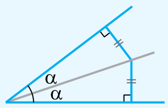
۱) مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



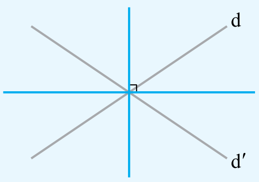
۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ثابت k قرار دارند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ k از آن و در دو طرف آن است.



۳) مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است.



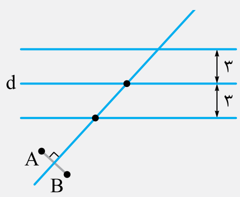
۴) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، نیمساز آن زاویه است.



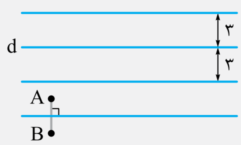
در واقع مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d′ به یک فاصله‌اند، نیمسازهای زوایای آن دو خط است که دو خط عمود بر هم است.

مثال **دو نقطهٔ A و B و خط d که شامل هیچ‌یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)** (مثال کتاب درسی)

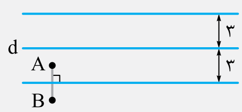
✓ **پاسخ:** مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر است، دو خط موازی d به فاصلهٔ ۳ از آن هستند؛ بنابراین تلاقی این دو مکان هندسی جواب است.



حالت اول: ۲ جواب. (عمودمنصف AB با d موازی نباشد.)



حالت دوم: صفر جواب (عمود منصف AB موازی d باشد و به فاصلهٔ ۳ از آن نباشد.)

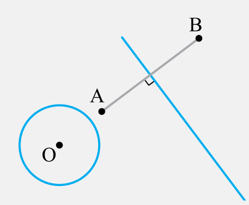


حالت سوم: بی‌شمار جواب (عمودمنصف AB موازی d و به فاصلهٔ ۳ از آن باشد.)

مثال **مکان هندسی نقاطی از دایرهٔ $C(O,R)$ که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند را به دست آورید.**

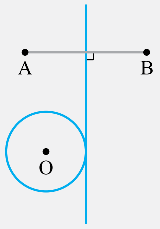
✓ **پاسخ:** مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. باید وضعیت تلاقی خط عمودمنصف با دایرهٔ مورد نظر را بررسی کنیم.

حالت اول: صفر جواب



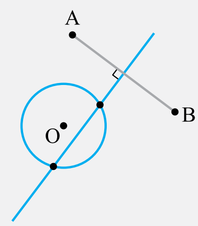
عمودمنصف با دایره تلاقی ندارد.

حالت دوم: یک جواب



عمودمنصف بر دایره مماس باشد.

حالت سوم: دو جواب



عمودمنصف دایره را در دو نقطه قطع کند.

پاسخ سؤالات

۹۵. مشترک

۹۶. بیضی

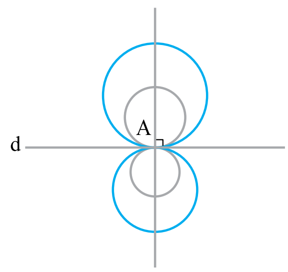
۹۷. درست

۹۸. نادرست؛ جواب درست سهمی است.

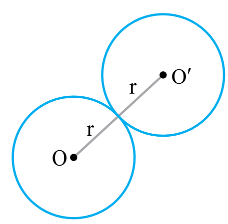
۹۹. درست

۱۰۰. درست

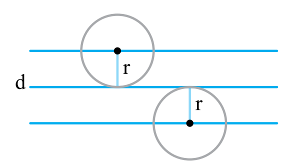
۱۰۱. نادرست؛ جواب درست، خطی عمود بر d در نقطهٔ A است.



۱۰۲. درست؛ فاصلهٔ دو مرکز دایره از هم ۲r است پس جواب دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۲r است.



۱۰۳. درست؛ در واقع فاصلهٔ مرکز از خط d برابر r است که دو خط موازی با d و به فاصلهٔ r از آن است.

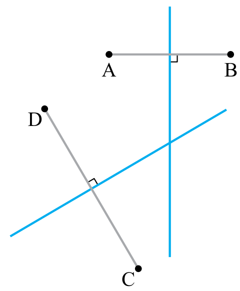


۱۰۴. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است.

مکان هندسی نقاطی که از C و D به یک فاصله‌اند، عمودمنصف CD است.

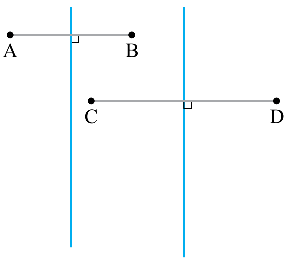
تلاقی این دو عمودمنصف جواب مسئله است.

حالت اول: یک جواب



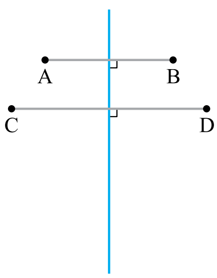
دو عمودمنصف متقاطع باشند.

حالت دوم: صفر جواب



دو عمودمنصف موازی باشند.

حالت سوم: بی‌شمار جواب

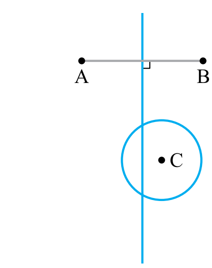


دو عمودمنصف بر هم منطبق باشند.

۱۰۵. مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.

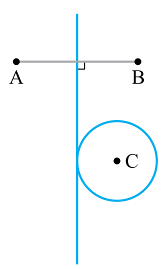
بنابراین تلاقی دایره و این عمودمنصف جواب مسئله است.

حالت اول: دو جواب



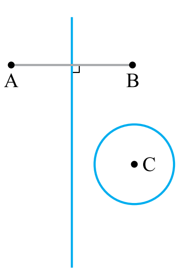
دایره و عمودمنصف متقاطع باشند.

حالت دوم: یک جواب



دایره و عمودمنصف مماس باشند.

حالت سوم: صفر جواب



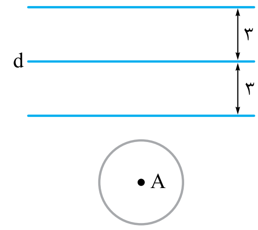
دایره و عمودمنصف یکدیگر را قطع نکنند.

۱۰۶. مکان هندسی نقاطی که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌مترند، یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ است.

مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌مترند، دو خط موازی d و به فاصلهٔ ۳ در دو طرف آن است.

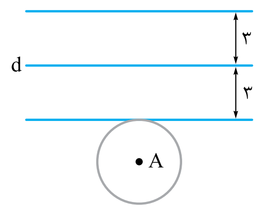
تلاقی این دو مکان هندسی جواب است.

حالت اول: صفر جواب



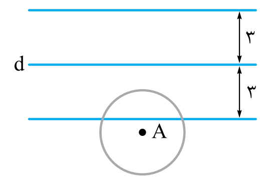
دایره هیچ‌یک از دو خط را قطع نکند.

حالت دوم: یک جواب



دایره بر یکی از دو خط مماس باشد.

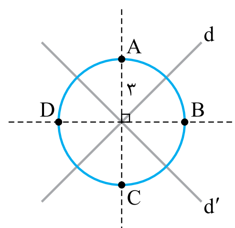
حالت سوم: دو جواب



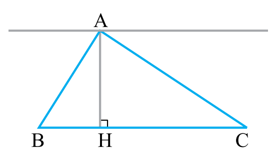
دایره یکی از دو خط را قطع کند.

تذکر چون قطر دایره کوچک‌تر از فاصلهٔ بین دو خط است، پس هیچ‌گاه نمی‌تواند بر دو خط مماس یا متقاطع باشد.

۱۰۷. مکان هندسی نقاطی که از این دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، نیمساز زوایای بین دو خط است. مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ تلاقی دو خط به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر است، دایره‌ای به مرکز آن نقطه و شعاع ۳ است. جواب، اشتراک این دو مکان هندسی است که ۴ نقطهٔ A، B، C و D است.

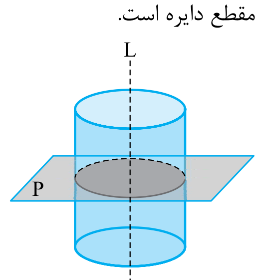


۱۰۸. می‌دانیم مساحت مثلث برابر $S_{ABC}=\frac{AH\times BC}{2}$ است چون مساحت و BC ثابت‌اند پس باید AH ثابت باشد، بنابراین فاصلهٔ A از BC عددی ثابت است پس A روی دو خط موازی با BC و به فاصلهٔ AH از آن قرار دارد.

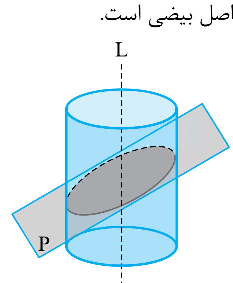


۱۰۹.

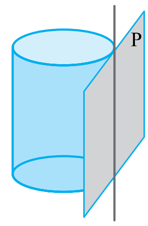
(الف) صفحهٔ P بر محور استوانه عمود باشد، در این حالت سطح مقطع دایره است.



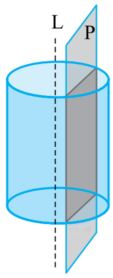
(ب) صفحهٔ P بر محور L عمود نباشد و آن را قطع کند که شکل حاصل بیضی است.



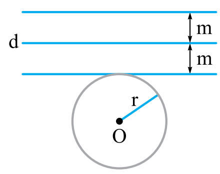
(پ) صفحهٔ P با سطح جانبی استوانه مماس باشد که سطح مقطع یک خط است.



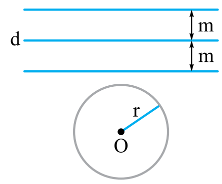
(ت) اگر صفحهٔ P با محور استوانه (L) موازی باشد، سطح مقطع مستطیل است. البته اگر سطح استوانه‌ای تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد، جواب دو خط موازی است.



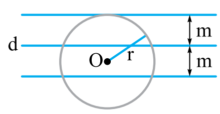
۱۱۰. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصلهٔ m هستند دو خط موازی d و به فاصلهٔ m از آن است، حال باید تلاقی این دو خط و دایرهٔ C را بررسی کنیم.



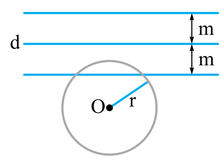
یک جواب
دایره بر یکی از خطوط مماس باشد.



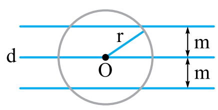
صفر جواب
دو خط و دایره تلاقی ندارند.



سه جواب
دایره بر یکی از خطوط مماس و دیگری را قطع کند.



دو جواب
دایره یکی از خطوط را در ۲ نقطه قطع کند.



چهار جواب
دایره هر دو خط را قطع کند.

فصل ۲ درس ۲
دایره

صفحه ۴۰ تا ۴۶ کتاب درسی

دایره

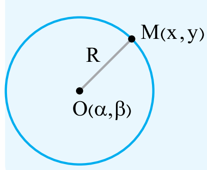
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از یک نقطهٔ ثابت (مرکز دایره) به فاصلهٔ ثابتی (شعاع دایره) باشند.

معادلهٔ دایره

اگر $O(\alpha,\beta)$ مرکز دایره باشد و نقطهٔ $M(x,y)$ روی این دایره با شعاع R باشد، داریم:

$$|OA|=R \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$$



به این معادله، معادلهٔ استاندارد دایره می‌گوییم.

مثال معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۳,-۲)$ و از نقطهٔ $M(۱,۴)$ عبور کند.

✔ **پاسخ:** فاصلهٔ هر نقطه روی دایره تا مرکز دایره برابر شعاع است.

$$|OM|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(-۲-۴)^۲}=\sqrt{۴+۳۶}=\sqrt{۴۰}=R$$

معادلهٔ دایره: $(x-۳)^۲+(y+۲)^۲=۴۰$

معادلهٔ ضمنی یا گستردهٔ دایره

مثال بررسی کنید چه زمانی معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است؟

✔ **پاسخ:** ابتدا با کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای، معادله را به معادلهٔ استاندارد دایره تبدیل می‌کنیم: $x^۲+ax+y^۲+by=-c$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}-c=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

الف) $a^۲+b^۲-۴c<۰ \Rightarrow$ تهی

ب) $a^۲+b^۲-۴c=۰ \Rightarrow$ نقطه $\Rightarrow$ نقطهٔ مورد نظر: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})$

پ) $a^۲+b^۲-۴c>۰ \Rightarrow$ دایره $\begin{cases}\text{مرکز } O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})\\ \text{شعاع } =R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}\end{cases}$

تذکر در معادلهٔ دایره، همواره ضریب $x^۲$ و $y^۲$ با هم برابر است و ضریب جملهٔ xy، صفر است.

تذکر فرمول‌های به دست آمده زمانی برقرارند که ضریب $x^۲$ و $y^۲$ برابر یک باشد و اگر یک نبود ابتدا کل معادله را به ضریب آن‌ها تقسیم می‌کنیم و سپس از فرمول‌های فوق استفاده می‌کنیم.

مثال بررسی کنید کدام‌یک از معادلات زیر، معادلهٔ دایره است؟

(مثال کتاب درسی)

الف) $x^۲+y^۲-۲x-۶y-۱=۰$

ب) $x^۲+y^۲+۲x+۳y+۴=۰$

پ) $۲x^۲+۲y^۲-۳x+۴y-۲=۰$

✔ **پاسخ:** الف) با توجه به معادلهٔ داده‌شده $a=-۲$، $b=-۶$ و $c=-۱$ است و داریم: $a^۲+b^۲-۴c=۴+۳۶+۴=۴۴>۰$

$$\Rightarrow \text{دایره}\begin{cases}\text{مرکز: } O(۱,۳)\\ \text{شعاع: } R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴۴}=\sqrt{۱۱}\end{cases}$$

ب) در این معادله $a=۲$، $b=۳$ و $c=۴$ است و داریم:

$a^۲+b^۲-۴c=۴+۹-۱۶=-۳<۰ \Rightarrow$ تهی

پ) ابتدا معادله را تقسیم بر ۲ می‌کنیم و سپس از روابط استفاده می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-\frac{۳}{۲}x+۲y-۱=۰, a=-\frac{۳}{۲}, b=۲, c=-۱$$

$$a^۲+b^۲-۴c=\frac{۹}{۴}+۴+۴=\frac{۴۱}{۴}>۰$$

$$\Rightarrow \text{دایره}\begin{cases}\text{مرکز: } O(\frac{۳}{۴},-۱)\\ \text{شعاع: } R=\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۴۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۴۱}}{۴}\end{cases}$$

وضعیت نقطه و دایره

مختصات نقطهٔ $M(x_۱,y_۱)$ را در معادلهٔ دایره $(P(x,y)=۰)$ قرار می‌دهیم و داریم:

نقطه داخل دایره است. $\Leftrightarrow P(x_۱,y_۱)<۰$

نقطه روی دایره است. $\Leftrightarrow P(x_۱,y_۱)=۰$

نقطه خارج دایره است. $\Leftrightarrow P(x_۱,y_۱)>۰$

مثال وضعیت نقطهٔ $M(۳,-۱)$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۸y-۳=۰$ را به دست آورید.

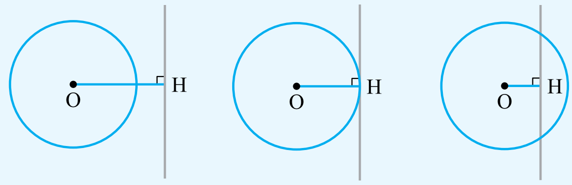
✔ **پاسخ:** $P(۳,-۱)=۳^۲+(-۱)^۲-۲(۳)+۸(-۱)-۳$

$=۹+۱-۶-۸-۳<۰$

نقطه داخل دایره قرار دارد.

وضعیت خط و دایره

فاصلهٔ مرکز دایره را از خط محاسبه می‌کنیم و داریم:



$OH<R$ متقاطع — $OH=R$ مماس — $OH>R$ خارج هم

یادآوری فاصلهٔ نقطهٔ $M(x_۰,y_۰)$ از خط $d:ax+by+c=۰$ برابر با $\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ است.

مثال وضعیت خط $۳x+۴y+۶=۰$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲y=۳$ را نسبت به هم مشخص کنید.

✔ **پاسخ:** ابتدا مرکز و شعاع دایره را مشخص کنیم:

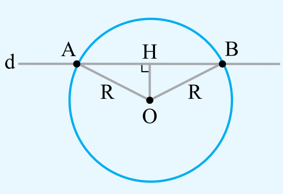
$$x^۲+y^۲-۲y-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases}\text{مرکز: } O(۰,۱)\\ \text{شعاع: } R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۰+۴+۱۲}=۲\end{cases}$$

$$\text{فاصلهٔ مرکز دایره از خط}=OH=\frac{|۳\times۰+۴\times۱+۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$\Rightarrow OH=R \Rightarrow$ مماس بر هم

طول وتر ایجادشده توسط خط متقاطع با دایره

اگر خط d دایره را در نقاط A و B قطع کند، داریم:



$$OA^۲=OH^۲+AH^۲ \Rightarrow$$

$$AH=\sqrt{R^۲-OH^۲}$$

$$AB=۲AH \Rightarrow$$

$$AB=۲\sqrt{R^۲-OH^۲}$$

مثال طول وتری که دایره به معادلهٔ $x^2+y^2-2x=\frac{19}{5}$ از خط به معادلهٔ $y=2x$ جدا می‌کند، چه‌قدر است؟

✓ **پاسخ:** ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2-2x-\frac{19}{5}=0$$

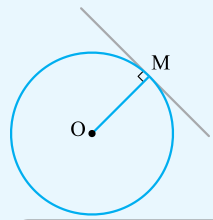
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O(1,0) \\ \text{شعاع}: R=\frac{1}{2}\sqrt{4+0-4(-\frac{19}{5})}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{96}{5}}=\sqrt{\frac{24}{5}} \end{cases}$$

فاصلهٔ O را از خط $2x-y=0$ به دست می‌آوریم.

$$OH=\frac{|2\times1-0|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB=2\sqrt{R^2-OH^2}=2\sqrt{\frac{24}{5}-\frac{4}{5}}=2\sqrt{\frac{20}{5}}=2\times2=4$$

رسم مماس از نقطه‌ای روی دایره



اگر نقطهٔ M روی دایره‌ای به مرکز O باشد، شیب OM را به دست می‌آوریم و چون خط مماس بر دایره بر OM عمود است، پس شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب OM است و با داشتن مختصات نقطهٔ M معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

مثال معادلهٔ خط مماس بر دایره $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ از نقطهٔ $M(4,2)$ را به دست آورید.

✓ **پاسخ:** ابتدا بررسی می‌کنیم نقطهٔ M روی دایره باشد:

$$f(4,2)=16+4-8+8-20=0$$

پس نقطه روی دایره است، حالا مرکز دایره را به دست می‌آوریم:

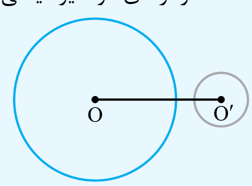
$$x^2+y^2-2x+4y-20 \Rightarrow \text{مرکز}: O(1,-2)$$

$$\text{شیب } OM=\frac{-2-2}{1-4}=\frac{4}{3} \Rightarrow \text{شیب خط مماس}=-\frac{3}{4}$$

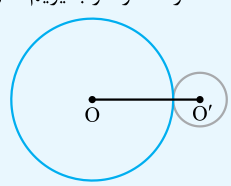
$$\text{معادلهٔ خط مماس}: y-2=-\frac{3}{4}(x-4)$$

وضعیت دو دایره نسبت به هم

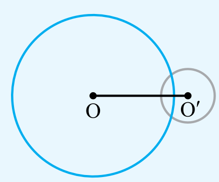
اگر فاصلهٔ مرکزهای دو دایره یعنی طول $O'O$ را d درنظر بگیریم، داریم:



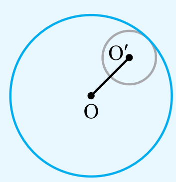
خارج هم $R+R'<d$



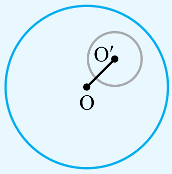
مماس خارجی $d=R+R'$



متقاطع $|R-R'|<d<R+R'$



مماس داخلی $d=|R-R'|$



داخل هم $d<|R-R'|$

مثال وضعیت دو دایرهٔ زیر را به دست آورید. (تمرین کتاب درسی)

$$x^2+y^2=1 \text{ و } x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$$

✓ **پاسخ:**

$$x^2+y^2=1 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O(0,0) \\ \text{شعاع}: R=1 \end{cases}$$

$$x^2+y^2-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+5=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز}: O'(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}) \\ \text{شعاع}: R'=\frac{1}{2}\sqrt{18+18-20}=2 \end{cases}$$

$$d=OO'=\sqrt{(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2+(\frac{3\sqrt{2}}{2}-0)^2}=\sqrt{\frac{18}{4}+\frac{18}{4}}$$

$$=\sqrt{9}=3$$

$R+R'=1+2=3 \Rightarrow d=R+R' \Rightarrow$ دایره‌ها مماس خارجی‌اند.

✓ پاسخ سؤالات

۱۱۱. $P(1,-2)=1^2+(-2)^2-2(1)+2(-2)$

$=1+4-2-4=-1<0 \Rightarrow$ داخل دایره

۱۱۲. $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+0+0}=1$

۱۱۳. نادرست $a^2+b^2-4c=4+16-40=-20<0 \Rightarrow$ تهی

۱۱۴. نادرست؛ برای دایره‌شدن باید $a^2+b^2-4c>0$ باشد.

۱۱۵. نادرست $P(3,-2)=3^2+(-2)^2+2(3)=9+4+6\neq0$

۱۱۶. فاصلهٔ O تا M برابر شعاع دایره است.

$$OM=R=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2=5$$

۱۱۷. راه اول: $P(1,-2)=1^2+(-2)^2-2\times1+2(-2)$

$=1+4-2-4=-1<0 \Rightarrow$ نقطه داخل دایره است.

راه دوم: مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:

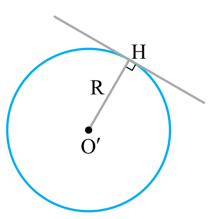
$$O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{1}{2}\sqrt{4+4}=\sqrt{2} \\ OA=\sqrt{(1-1)^2+(-2-(-1))^2}=1 \end{array}\right\} OA<R \Rightarrow \text{نقطه داخل دایره است.}$$

۱۱۸. فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس برابر با شعاع دایره است.

$$O'H=R=\frac{|3\times2+4\times1+5|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\text{معادلهٔ دایره}: (x-2)^2+(y-1)^2=9$$



۱۱۹. وسط پاره‌خط AB، مرکز دایره و نصف طول آن، شعاع دایره است.

وسط پاره‌خط AB: $M(\frac{-۲+۴}{۲},\frac{۱+(-۱)}{۲})=(۱,۰)$

$$|AB|=\sqrt{(۴-(-۲))^{۲}+(-۱-۱)^{۲}}=\sqrt{۳۶+۴}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}=۲R$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{۱۰}$$

معادلهٔ دایره: $(x-۱)^{۲}+y^{۲}=۱۰$

یادآوری مختصات نقطهٔ M وسط دو نقطهٔ $A(x_{۱},y_{۱})$ و $B(x_{۲},y_{۲})$ برابر با $(\frac{x_{۱}+x_{۲}}{۲},\frac{y_{۱}+y_{۲}}{۲})$ است.

۱۲۰. برای دایره‌شدن باید $a^{۲}+b^{۲}-۴c>۰$ باشد.

$$a^{۲}+b^{۲}-۴c=(-۳)^{۲}+۵^{۲}-۴a>۰ \Rightarrow ۹+۲۵>۴a$$

$$\Rightarrow a<\frac{۳۴}{۴}=\frac{۱۷}{۲}$$

۱۲۱. محل تلاقی هر دو قطر، مرکز دایره است. بعد از به دست آمدن مرکز دایره، فاصلهٔ آن از خط مماس برابر با شعاع دایره است.

$$\begin{cases}x+y=۱\\x-y=۳\end{cases}\Rightarrow ۲x=۴\Rightarrow x=۲,y=-۱\Rightarrow O(۲,-۱)$$

$$OH=R=\frac{|۴\times۲+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(۲,-۱)$ و شعاع $R=۲$ را می‌خواهیم و داریم:

$$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۴$$

۱۲۲. مرکز دایره روی قطر قرار دارد پس مرکز به صورت $O(\alpha,۲\alpha-۱)$ است.

باید فاصلهٔ O تا A و B یکسان باشد، بنابراین داریم: $OA=OB$

$$\Rightarrow \sqrt{(\alpha-۱)^{۲}+(۲\alpha-۱-۲)^{۲}}=\sqrt{(\alpha-۳)^{۲}+(۲\alpha-۱)^{۲}}$$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha^{۲}}-۲\alpha+\cancel{۱}+\cancel{۴\alpha^{۲}}-۱۲\alpha+\cancel{۹}$$

$$=\cancel{\alpha^{۲}}-۶\alpha+\cancel{۹}+\cancel{۴\alpha^{۲}}-۴\alpha+\cancel{۱}\Rightarrow -۱۴\alpha=-۱۰\alpha$$

$$\Rightarrow ۴\alpha=۰\Rightarrow \alpha=۰$$

پس مرکز دایره $O(۰,-۱)$ است.

$$R=OA=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۲-(-۱))^{۲}}=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

معادلهٔ دایره: $(x-۰)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱۰$

۱۲۳. در هر قسمت فاصلهٔ مرکز دایره از خط را به دست می‌آوریم و نسبت به شعاع دایره مقایسه می‌کنیم.

الف) $\left.\begin{array}{l}O(۰,۰),R=\sqrt{۲}\\OH=\frac{|۰+۰-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}\end{array}\right\}OH=R\Rightarrow$ خط مماس بر دایره است

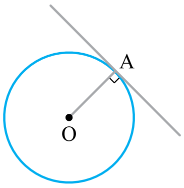
ب) $\left.\begin{array}{l}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,-۲)\\R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۱۲}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸}=\sqrt{۲}\\OH=\frac{|۱-(-۲)-۱|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}\end{array}\right\}$

$OH=R\Rightarrow$ خط مماس بر دایره است.

پ) $\left.\begin{array}{l}O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,۲)\\R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۱۶-۲۸}=۱\\OH=\frac{|۳\times۲+۲|}{\sqrt{۹+۱}}=\frac{۸}{\sqrt{۱۰}}\end{array}\right\}$

$OH>R\Rightarrow$ خط، خارج از دایره قرار دارد.

۱۲۴. ابتدا مرکز دایره را به دست می‌آوریم:



$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۱)$$

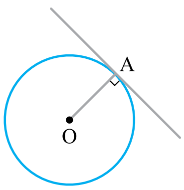
سپس شیب خط OA را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب OA}=m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$$

شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب OA است، پس: $m'=-\frac{۱}{۲}$

معادلهٔ خط مماس: $y-۳=-\frac{۱}{۲}(x-۲)$

۱۲۵. ابتدا مرکز دایره را به دست می‌آوریم:



$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,\frac{۱}{۲})$$

شیب OA را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب OA}=\frac{۳-\frac{۱}{۲}}{۲-۱}=\frac{۵}{۲}$$

شیب خط مماس، قرینه و معکوس شیب OA است، پس: $m'=-\frac{۲}{۵}$

معادلهٔ خط مماس: $y-۳=-\frac{۲}{۵}(x-۲)$

۱۲۶. در هر مورد مرکز و شعاع دایره‌ها را به دست می‌آوریم و سپس براساس فاصلهٔ دو مرکز وضعیت را مشخص می‌کنیم.

الف) $\begin{array}{l}O(۱,۰),R=۱\\O'(۰,۱),R'=۱\end{array}\Rightarrow OO'=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۰-۱)^{۲}}=\sqrt{۲}=d$

$R-R'=۰<d<R+R'=۲\Rightarrow$ متقاطع

ب) $\left.\begin{array}{l}O(۰,۰),R=۲\\O'(۱,۰),R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰}=\sqrt{۵}\\OO'=\sqrt{(۱-۰)^{۲}+(۰-۰)^{۲}}=۱=d\end{array}\right\}$

$R'-R=\sqrt{۵}-۲<d=۱<R+R'=۲+\sqrt{۵}\Rightarrow$ متقاطع

پ) $\left.\begin{array}{l}O(۰,۰),R=۱\\O'(۳,۱),R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۴-۳۶}=۱\\OO'=\sqrt{(۳-۰)^{۲}+(۱-۰)^{۲}}=\sqrt{۱۰}=d\end{array}\right\}$

$d=\sqrt{۱۰}>R+R'=۲\Rightarrow$ خارج هم

ت) $\left.\begin{array}{l}O(۰,۰),R=۲\\O'(۴,۲),R'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۴+۱۶-۷۶}=۱\\OO'=\sqrt{(۴-۰)^{۲}+(۲-۰)^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}\end{array}\right\}$

$d=۲\sqrt{۵}>R+R'=۳\Rightarrow$ خارج هم

۱۲۷. ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$x^2+y^2+2x-4y-4=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-1,2) \\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+16+16}=3 \end{cases}$$

$$OO'=\sqrt{(2-(-1))^2+(-2-2)^2}=\sqrt{9+16}=5=d$$

دو دایره مماس خارجی‌اند. $\Rightarrow d=R+R' \Rightarrow 5=R+3 \Rightarrow R=2$

معادلهٔ دایره: $(x-2)^2+(y+2)^2=4$

۱۲۸. ابتدا مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(4,-2)$$

$$R'=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{64+16-64}=2$$

$$d=OO'=\sqrt{(4-0)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

دو دایره مماس داخل‌اند. $\Rightarrow d=|R-R'| \Rightarrow 5=|R-2|$

$$\Rightarrow \begin{cases} R=7 \\ R=-3 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

معادله دایره: $(x-0)^2+(y-1)^2=49$

۱۲۹. مرکز و شعاع دایرهٔ داده‌شده را به دست می‌آوریم:

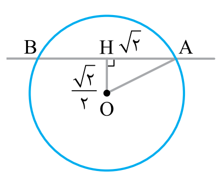
$$\begin{cases} O'(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(3,1) \\ R'=\frac{1}{2}\sqrt{36+4-36}=1 \end{cases}$$

$$O(0,0) \ , \ R=1$$

$$d=OO'=\sqrt{(3-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

دو دایره خارج هم قرار دارند. $\Leftarrow d=\sqrt{10}>R+R'=2$

۱۳۰. می‌دانیم عمود OH از وسط وتر AB می‌گذرد، بنابراین: $BH=AH=\sqrt{2}$



$$OH=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R^2=OA^2=OH^2+AH^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

معادلهٔ دایره: $(x-0)^2+(y-1)^2=\frac{5}{2}$

۱۳۱. (الف) در معادلهٔ ضمنی دایره، مختصات هر ۳ نقطه را قرار می‌دهیم و از حل دستگاه، ضرایب مجهول را به دست می‌آوریم:

معادلهٔ ضمنی دایره: $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\left.\begin{array}{l} A(-1,-1) \Rightarrow 1+1-a-b+c=0 \\ B(1,1) \Rightarrow 1+1+a+b+c=0 \quad (1) \end{array}\right\} \xrightarrow{+} \begin{array}{l} 4+2c=0 \\ \Rightarrow c=-2 \end{array}$$

$$C(1,-3) \Rightarrow 1+9+a-3b+c=0 \quad (2)$$

از روابط (۱) و (۲) و $c=-2$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-3b=-8 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} 4b=8 \Rightarrow b=2 \Rightarrow a=-2$$

معادلهٔ دایره: $x^2+y^2-2x+2y-2=0$

(ب) مرکز دایره را به دست می‌آوریم. $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(1,-1)$

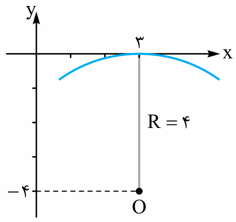
شیب OB برابر است با: $\frac{1-(-1)}{1-1}=\infty$

پس شیب خط عمود بر آن برابر صفر است و معادلهٔ مماس به صورت زیر است:

معادلهٔ مماس: $y-1=0(x-1) \Rightarrow y=1$

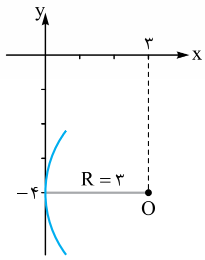
۱۳۲. (الف) چون دایره بر محور xها مماس است، پس: $R=4$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=16$$



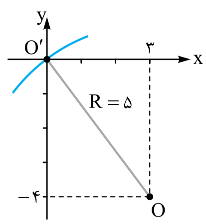
(ب) چون دایره بر محور yها مماس است، پس: $R=3$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=9$$



(پ) چون دایره، از مبدأ عبور می‌کند، پس: $OO'=R=5$

$$(x-3)^2+(y+4)^2=25$$



۱۳۳. می‌دانیم در دایره ضریب x^2 و y^2 با هم برابر است پس $m=2$ و در دایره ضریب xy برابر صفر است، پس: $p-3=0 \Rightarrow p=3$

کل معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم و داریم:

$$\xrightarrow{\div 2} x^2+y^2-4x+4y+\frac{n}{2}=0$$

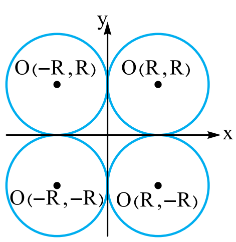
$$R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{16+16-2n}=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{32-2n}=2 \Rightarrow 32-2n=4 \Rightarrow n=14$$

$$m+n+p=2+14+3=19$$

۱۳۴. اگر دایره‌ای به شعاع R بر هر دو محور مختصات مماس باشد مختصات مرکز آن به صورت $O(\pm R,\pm R)$ است و معادلهٔ کلی این دایره‌ها به صورت زیر است:

$$(x\pm R)^2+(y\pm R)^2=R^2$$



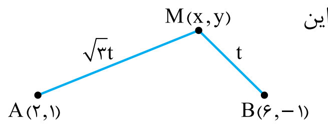
چون نقطهٔ $A(3,6)$ در ناحیهٔ اول است پس مرکز دایره هم در ناحیهٔ اول است و به صورت $O(R,R)$ است و معادلهٔ دایره به صورت $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$ است. حال نقطهٔ $A(3,6)$ را در معادله قرار می‌دهیم تا R به دست آید. $(3-R)^2+(6-R)^2=R^2$

$$\Rightarrow 9-6R+R^2+36-12R+\cancel{R^2}=\cancel{R^2}$$

$$\Rightarrow R^2-18R+45=0 \Rightarrow (R-3)(R-15)=0 \Rightarrow \begin{cases} R=3 \\ R=15 \end{cases}$$

معادلهٔ دایره‌ها: $\begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2=9 \\ (x-15)^2+(y-15)^2=225 \end{cases}$

۱۳۵. اگر نقطهٔ $M(x,y)$ روی این مکان هندسی باشد، داریم:



$$MA=\sqrt{۳}\times MB$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۲)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{۳}\times\sqrt{(x-۶)^۲+(y+۱)^۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} x^۲-۴x+۴+y^۲-۲y+۱$$

$$=۳x^۲-۳۶x+۱۰۸+۳y^۲+۶y+۳$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۲y^۲-۳۲x+۸y+۱۰۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} x^۲+y^۲-۱۶x+۴y+۵۳=۰$$

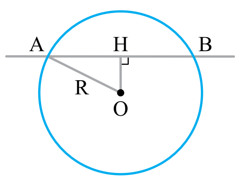
مرکز دایره: $O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۸,-۲)$

شعاع دایره: $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵۶+۱۶-۲۱۲}$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۰}=\sqrt{۱۵}$$

پس دایره‌ای به مرکز $O(۸,-۲)$ و شعاع $R=\sqrt{۱۵}$ است.

۱۳۶. ابتدا مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم:



$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۲,۰)$$

$$R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$$

$$=\frac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۰+۴}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۰}=\sqrt{۵}$$

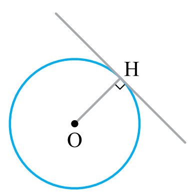
فاصلهٔ مرکز تا خط را به دست می‌آوریم:

$$OH=\frac{|۳\times۲-۰-۱|}{\sqrt{۹+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۰}}$$

$$AH^۲=OA^۲-OH^۲=(\sqrt{۵})^۲-(\frac{۵}{\sqrt{۱۰}})^۲=۵-\frac{۲۵}{۱۰}=\frac{۲۵}{۱۰}=\frac{۵}{۲}$$

$$AH=\sqrt{\frac{۵}{۲}}=\sqrt{\frac{۱۰}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۲}\Rightarrow AB=۲AH=\sqrt{۱۰}$$

۱۳۷. **راه اول**: باید فاصلهٔ مرکز دایره تا خط داده‌شده را برابر شعاع قرار دهیم.



$$O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(۱,۰)$$

$$\left.\begin{array}{l} R=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۰}=۱ \\ y=mx+۲\Rightarrow mx-y+۲=۰\Rightarrow OH=\frac{|m-۰+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow OH=R\Rightarrow \frac{|m+۲|}{\sqrt{m^۲+۱}}=۱\Rightarrow |m+۲|=\sqrt{m^۲+۱}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \cancel{m^۲}+۴m+۴=\cancel{m^۲}+۱$$

$$\Rightarrow ۴m=-۳\Rightarrow m=-\frac{۳}{۴}$$

راه دوم: می‌توانیم معادلهٔ دایره و خط را تلاقی دهیم و چون مماس هستند باید $\Delta=۰$ شود و m را به دست آوریم.

$$x^۲+(mx+۲)^۲-۲x=۰\Rightarrow x^۲+m^۲x^۲+۴mx+۴-۲x=۰$$

$$\Rightarrow x^۲(۱+m^۲)+x(۴m-۲)+۴=۰$$

$$\Delta=(۴m-۲)^۲-۴(۴)(۱+m^۲)=۰$$

$$\Rightarrow \cancel{۱۶m^۲}-۱۶m+۴-۱۶-\cancel{۱۶m^۲}=۰$$

$$\Rightarrow ۱۶m=-۱۲\Rightarrow m=-\frac{۱۲}{۱۶}=-\frac{۳}{۴}$$

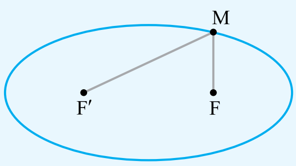
فصل ۲ درس ۳
قسمت اول: بیضی

صفحه ۴۷ تا ۵۰ کتاب درسی

بیضی

مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان از دو نقطهٔ ثابت، یک مقدار ثابت باشد. (آن مقدار ثابت باید بیشتر از فاصلهٔ دو نقطه باشد.) آن دو نقطهٔ ثابت را **کانون‌های بیضی** می‌نامیم.

کانون‌های بیضی را F و F' می‌نامیم و فاصلهٔ این دو نقطه را **فاصلهٔ کانونی** بیضی می‌گوییم و با $۲c$ نمایش می‌دهیم پس $FF'=۲c$. همچنین مقدار ثابت بیضی را با $۲a$ نمایش می‌دهیم.



$$MF+MF'=۲a$$

وضعیت نقطه و بیضی

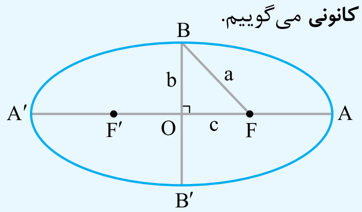
اگر برای نقطهٔ M داشته باشیم $MF+MF'>۲a$، در این صورت M خارج بیضی است.

اگر برای نقطهٔ M داشته باشیم $MF+MF'<۲a$، در این صورت M داخل بیضی است.

اگر برای نقطهٔ M داشته باشیم $MF+MF'=۲a$، در این صورت M روی بیضی است.

نقاط مهم در بیضی

قطر بزرگ بیضی: اگر FF' را امتداد دهیم، بیضی را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کند. AA' را قطر بزرگ بیضی می‌گوییم و طول آن برابر $۲a$ است (قطر بزرگ را **محور کانونی** بیضی هم می‌گوییم.) A و A' را دو سر قطر بزرگ یا **رئوس کانونی** می‌گوییم.



مرکز بیضی: وسط پاره‌خط FF' و AA' بر هم منطبق است و آن را O می‌نامیم که **مرکز بیضی** است.

قطر کوچک بیضی: اگر از O خطی بر AA' عمود کنیم بیضی را در B و B' قطع می‌کند. BB' را **قطر کوچک بیضی** می‌نامیم و طول آن $۲b$ است. (قطر کوچک بیضی را **محور ناکانونی** بیضی می‌نامیم.) B و B' را دو سر قطر کوچک یا **رئوس ناکانونی** می‌نامیم.