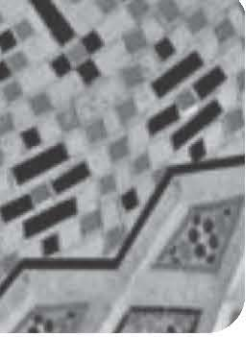
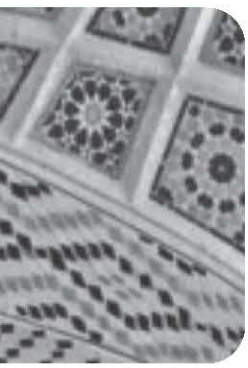
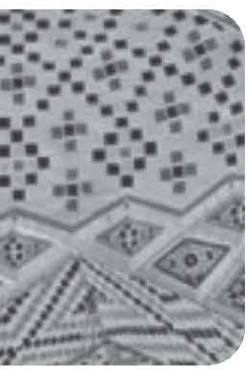
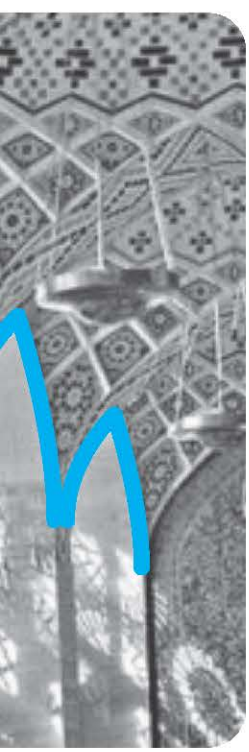





الگو و دنباله

آخ الگو و دنباله! چه فصل جذابی! همون جوری که از اسمش پیداس، از دو بخش تشکیل شده. بخش اول که به الگویابی می‌پردازه از اون بخش‌هایی که خاطره‌های دبستان‌تون رو تازه می‌کنه. قبول دارم که الگو یافتن یه مختصری خلاقیت لازم داره ولی خوندن چند صفحه اول جزوه، خیلی به منظم کردن ذهنتون کمک می‌کنه. البته دیدن تست‌های اولیه الگویابی در تست‌های تمرینی واقعاً یه تمرین مناسب واسه شماست اگر چه یه ذرّه اذیت می‌شین ولی با جمع اینها می‌شه گفت: حالِ الگویابی شما دیگه خوب شده. امّا بخش دوم که به دنباله‌های حسابی و هندسی به‌صورت جدی می‌پردازه. نمی‌خوام در باره‌اش توضیح زیادی بدم چون خودتون می‌بینین و لذتشو می‌برین. فقط اینو بگم که همه فرمول‌ها، تو دنباله حسابی در دنباله هندسی، جفت خودشو داره و اگه فرمول‌های یکی از اونها رو خوب یاد بگیرین، تو اون یکی کارتون راحت تره. برین، شروع کنین. ببینیم چی‌کار می‌کنین!؟

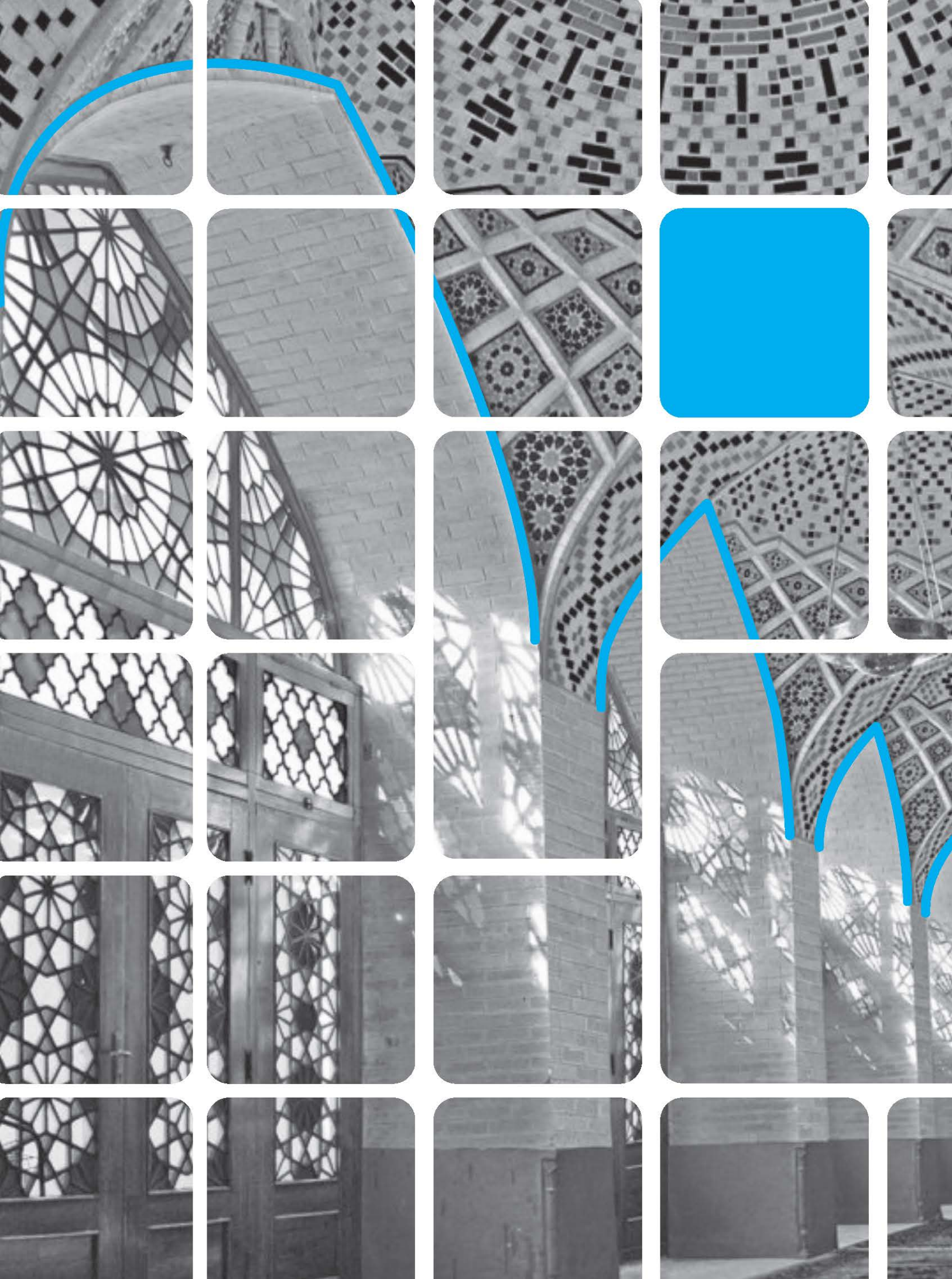
یافتن الگوهای عددی ۱۰
الگوی خطی ۱۱
الگوی غیرخطی ۱۲
دنبالهٔ اعداد حقیقی ۱۳
دنبالهٔ حسابی ۱۴
مجموع جملات دنبالهٔ حسابی ۱۷
دنبالهٔ هندسی ۱۹
مجموع جملات دنبالهٔ هندسی ۲۳
حَد مجموع جملات دنبالهٔ هندسی ۲۵

تعداد تست‌های درس‌نامه: ۲۵

تعداد تست‌های تمرین: ۹۱

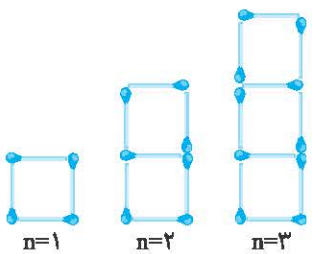
تعداد تست آزمون: ۳۰

تعداد کل: ۱۴۶



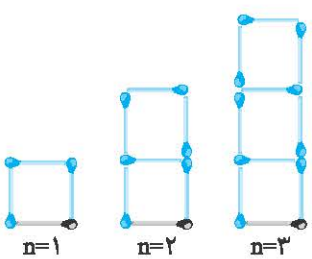
1 الگو و دنباله

1 یافتن الگوهای عددی



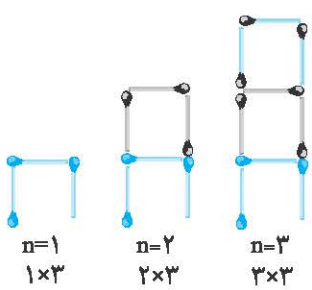
به الگوی هندسی روبه‌رو توجه کنید. آیا می‌توانید تعداد چوب‌کبریت‌های به‌کار رفته در شکل nاُم را به‌دست آورید؟ مثلاً در مرحلهٔ ۳۰اُم چند چوب‌کبریت به‌کار رفته است؟

درست است که پاسخ دادن به این سؤال کمی نیاز به ابتکار و خلاقیت دارد، امّا این سؤال را به سه روش، حل می‌کنیم تا ایدهٔ کلی برای حل این سؤالات را معرفی کنیم. این سه قالب، دست شما را برای یافتن الگوهای عددی، بازتر می‌کند.



روش اول: قاعده‌ای پیدا می‌کنیم که در مراحل ابتدایی درست باشد و بتوان آن را برای مراحل بعدی نیز بیان کرد. اگر به شکل روبه‌رو توجه کنیم، در مرحلهٔ اول، یک دستهٔ سه‌تایی به همراه یک چوب‌کبریت، در مرحلهٔ دوم، دو دستهٔ سه‌تایی به همراه یک چوب‌کبریت، و همین‌طور در مرحلهٔ سوم، سه دستهٔ سه‌تایی به همراه یک چوب‌کبریت استفاده شده است. پس در مرحلهٔ nاُم هم، n تا دستهٔ سه‌تایی به همراه یک چوب‌کبریت وجود دارد:

$$a_1 = (1\times 3)+1 \ , \ a_2 = (2\times 3)+1 \ , \ \cdots \Rightarrow a_n = (n\times 3)+1 = 3n+1 \Rightarrow a_{30} = 91$$

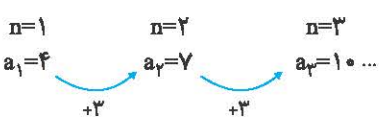


روش دوم: می‌توانیم الگوی هندسی را با کمی تغییر به الگوی ساده‌تری تبدیل کرده و از روی آن الگوی عددی را پیدا کنیم. مثلاً در الگوی هندسی گفته شده، می‌توانیم در هر مرحله، یک چوب‌کبریت پایینی را حذف کنیم و الگوی آن را بیابیم. کافی است در الگویی که به آن رسیدیم، یک چوب‌کبریت اضافه کنیم:

تعداد چوب‌کبریت‌ها در مرحلهٔ nاُم $= n\times 3 = 3n$

$$a_n = 3n+1 \Rightarrow a_{30} = 91$$

روش سوم: بررسی تغییرات هر مرحله نسبت به مرحلهٔ قبل، از مهم‌ترین ایده‌های یافتن الگوی عددی است. به ویژه در چنین مسائلی که در هر مرحله، نسبت به مرحلهٔ قبل، مقدار ثابتی اضافه می‌شود. در این سؤال هر جمله با عدد ثابت ۳ جمع می‌شود و عدد بعدی را می‌سازد. پس در مرحلهٔ ۳۰ اُم داریم:

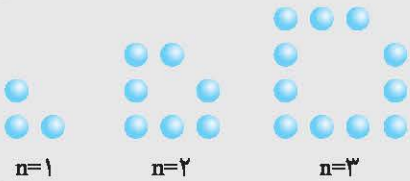


$$a_{30} = 4+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{\text{تا } 29} = 4+29\times 3 = 91$$

$$a_n = 4+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{\text{تا } (n-1)} = 4+(n-1)\times 3 = 3n+1$$

تست در مرحلهٔ چندم، ۶۷ دایره دیده می‌شود؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۹ ۴) ۲۰



پاسخ برای رسیدن به جواب، لازم است تعداد دایره‌ها در مرحلهٔ n اُم را بیابیم که همان جملهٔ عمومی این الگو می‌باشد. ابتدا چند جملهٔ ابتدایی را محاسبه می‌کنیم. با توجه به این که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، ثابت است، داریم:

$$a_1=3 \xrightarrow{+4} a_2=7 \xrightarrow{+4} a_3=11, \ldots \Rightarrow a_n = 3+\underbrace{4+4+\cdots+4}_{t\,(n-1)} = 3+(n-1)\times 4 = 4n-1$$

حال جملهٔ عمومی، یعنی $4n-1$ را برابر ۶۷ قرار می‌دهیم، تا مشخص شود در مرحلهٔ چندم تعداد دایره‌ها ۶۷ است:

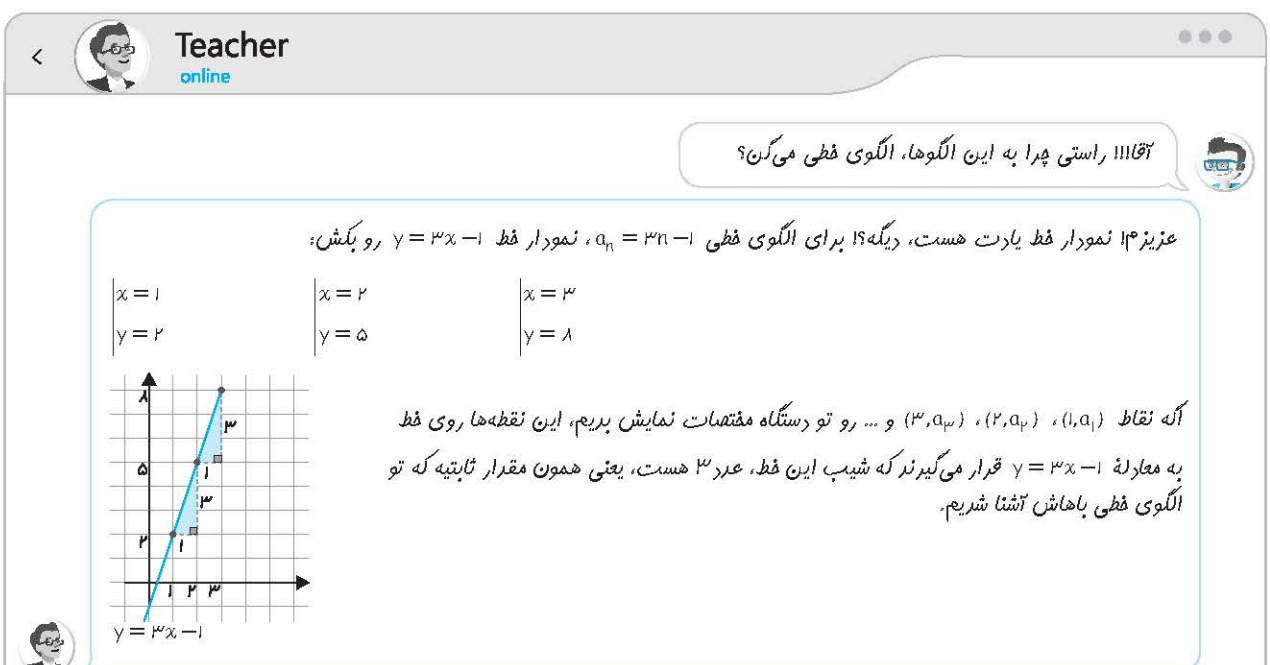
$$4n-1=67 \Rightarrow n=\frac{68}{4}=17$$

گزینهٔ ۲

الگوی خطی

به الگویی که در آن اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، عددی ثابت باشد، الگوی خطی گفته می‌شود (عدد ثابت، مثبت، منفی و یا صفر می‌تواند باشد). در الگوی خطی اگر به هر جمله، آن عدد ثابت را اضافه کنیم، جملهٔ بعدی ساخته می‌شود. در حالت کلی، جملهٔ عمومی یک الگوی خطی $a_n = an+b$ است که در آن a و b دو عدد حقیقی مشخص می‌باشند. جملهٔ عمومی یک الگوی خطی، چندجمله‌ای درجهٔ یک برحسب n است که در آن a همان عدد ثابتی است که با اضافه شدن به هر جمله، جملهٔ بعدی را ایجاد می‌کند. مثلاً به $a_n = 3n-1$ توجه کنید. یک چندجمله‌ای درجهٔ یک که ضریب n در آن، ۳ است:

$$a_1=3\times1-1=2 \xrightarrow{+3} a_2=3\times2-1=5 \xrightarrow{+3} a_3=3\times3-1=8 \xrightarrow{+3} \ldots$$



تست در الگوی خطی روبه‌رو، چند جملهٔ بیشتر از ۲۰ وجود دارد؟ ۱۹۵ , ۱۹۰ , ...

۱) ۳۵ ۲) ۳۶ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶

پاسخ در این الگوی خطی، اختلاف دو جملهٔ نخست برابر است با: $-۵ = ۱۹۵ - ۱۹۰$. پس ضریبِ n در جملهٔ عمومی آن ۵- است و داریم:

$a_n = -۵n + b$. برای به‌دست آوردن b از جملهٔ اول کمک می‌گیریم: $a_۱ = ۱۹۵ \Rightarrow -۵ + b = ۱۹۵ \Rightarrow b = ۲۰۰$

حالا که $a_n = -۵n + ۲۰۰$ مشخص شد از شرط $a_n > ۲۰$ استفاده می‌کنیم:

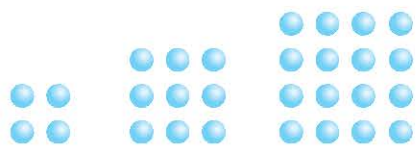
$$-۵n + ۲۰۰ > ۲۰ \Rightarrow ۵n < ۱۸۰ \Rightarrow n < ۳۶ \Rightarrow n = ۱, ۲, \cdots, ۳۵$$

پس ۳۵ جملهٔ بیشتر از ۲۰ وجود دارد.

گزینهٔ ۱

الگوی غیرخطی

در الگوهایی که اختلاف هر دو جملهٔ متوالی، عددی ثابت نباشد، غیرخطی گفته می‌شود. در صورتی که بتوانیم جملهٔ عمومی این الگوها را بیابیم، این جملهٔ عمومی به صورت چندجمله‌ای از درجهٔ یک نخواهد بود. مثلاً:



شمارهٔ مرحله: n=۱ n=۲ n=۳

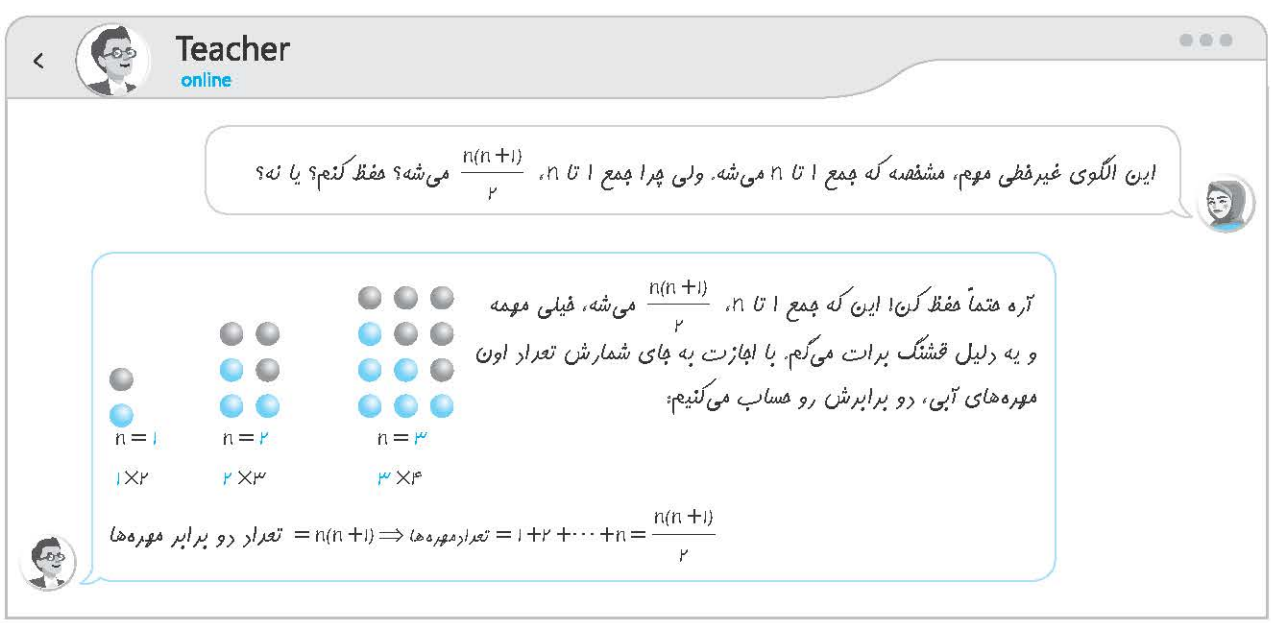
تعداد دایره‌ها: $(۱+۱)^۲$ $(۲+۱)^۲$ $(۳+۱)^۲$ $\Rightarrow a_n=(n+۱)^۲$

یک الگوی غیرخطی مهم

در الگوی غیرخطی روبه‌رو تعداد مهره‌های آبی رنگ در مرحلهٔ nاُم برابر است با:

$a_۱=۱$ $a_۲=۱+۲$ $a_۳=۱+۲+۳$

$$a_n = ۱+۲+۳+\ldots n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$



65 در یک دنبالهٔ حسابی، جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی صعودی‌اند، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

66 جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنبالهٔ حسابی، می‌توانند سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟ (تجربی - داخل - ۹۲)

۱) $\frac{۵}{۲}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۹}{۴}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

67 در یک دنبالهٔ هندسی صعودی جمله دوم، دو برابر جملهٔ پنجم و جملهٔ هشتم می‌توانند سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند. بزرگ‌ترین این سه عدد چند برابر کوچک‌ترین آنهاست؟ (تجربی - خارج - ۹۲)

۱) $۲+\sqrt{۳}$ ۲) $۵+۲\sqrt{۳}$ ۳) $۷-۴\sqrt{۳}$ ۴) $۷+۴\sqrt{۳}$

68 اگر اعداد ۵، $x-۲y$ و $۲x+y$ هم سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی و هم سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی باشند، $x+y$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

69 اگر a، ۱ و b سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی و a، ۱ و $۴a+b$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی با جملات مثبت باشند، آن‌گاه قدرنسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

70 در دنبالهٔ هندسی a_n داریم $a_n = ۲,۴,۸,۱۶,۳۲,\cdots$. چند واسطهٔ حسابی بین جملهٔ دوم و پنجم این دنباله درج کنیم تا قدرنسبت دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر شود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

71 اگر $۰ < a < b < c < d$ و چهار عدد $\log_۲ a$، $\log_۲ b$، $\log_۲ c$ و $\log_۲ d$ چهار جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی باشند، مقدار d برحسب a و b کدام است؟

۱) $\frac{b^۴}{a^۳}$ ۲) $\frac{b^۳}{a^۴}$ ۳) $\frac{b^۳}{a^۲}$ ۴) $\frac{b^۲}{a^۳}$

72 دنبالهٔ هندسی روبه‌رو غیرنزولی است. مجموع شش جملهٔ اول آن کدام است؟ $A: ۲, x, \frac{۱}{۲}, \cdots$

۱) $\frac{۴۱}{۳۲}$ ۲) $\frac{۲۱}{۱۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۸۱}$ ۴) $\frac{۲۳}{۱۶}$

73 بین دو عدد ۴ و ۳۲۴، سه عدد چنان درج شده است که پنج عدد حاصل تشکیل یک دنبالهٔ هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است؟ (ریاضی - خارج - ۹۱)

۱) ۴۲۸ ۲) ۴۸۴ ۳) ۴۸۶ ۴) ۴۸۸

74 بین دو عدد ۲ و $۱۶\sqrt{۲}$، شش عدد چنان درج شده است که هشت عدد حاصل، دنبالهٔ هندسی تشکیل داده‌اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟

۱) $۳۰(۲+\sqrt{۲})$ ۲) $۴۸\sqrt{۲}$ ۳) $۳۰(\sqrt{۲}+۱)$ ۴) $۳۶(\sqrt{۲}+۱)$

75 مجموع سه جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی $\frac{۸}{۲۷}$ مجموع سه جملهٔ دوم این دنباله است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$ ۴) $\sqrt[۳]{\frac{۳}{۲}}$

76 در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر۱و مجموع چهار جملهٔ اول آن ۳ می‌باشد. مجموع ۶ جملهٔ اول کدام است؟

۱) ۱۰/۸ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۳/۴

77 در یک دنبالهٔ هندسی، مجموع سه جملهٔ اول، ۱۳۶ و مجموع شش جملهٔ اول آن ۱۵۳ است. جملهٔ اول چند برابر جملهٔ پنجم است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۶

78 در دنبالهٔ هندسی روبه‌رو، مجموع چهارده جملهٔ اول چند برابر مجموع هفت جملهٔ اول آن است؟ (تجربی - خارج - ۹۰)

$A: ۱, ۲, ۴, \cdots$

۱) ۶۵ ۲) ۶۳ ۳) ۱۲۷ ۴) ۱۲۹

79 جملهٔ عمومی یک دنباله به صورت $a_n = ۳ \times ۲^n$ است. حداقل چند جملهٔ اول از این دنباله را جمع کنیم تا حاصل از ۴۸۰۰۰ بیشتر شود؟

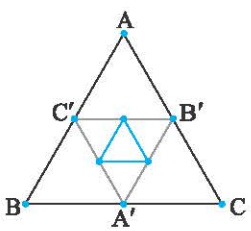
۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

80 به ازای یک مقدار x، اعداد $x^۲ - ۲$ ، $۲x$ و $x^۲ + ۴$ به ترتیب سه جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی نزولی‌اند. مجموع هفت جملهٔ اول این دنباله کدام است؟ (تجربی - داخل - ۹۳)

۱) $\frac{۱۱۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱۲۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۶۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۲۷}{۸}$

81 در شکل مقابل در مرحلهٔ اول، مثلث ABC به محیط ۳ رسم شده است. در مرحلهٔ دوم، با وصل کردن وسط‌های اضلاع ABC، مثلث $A'B'C'$ رسم شده است. حداقل چند بار این کار را ادامه دهیم تا مجموع محیط‌های مثلث‌های رسم شده از ۵/۹۹ بیشتر شود؟



۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

82 حاصل $A = (۱+x+x^۲+\cdots+x^۸)(۱-x+x^۲-\cdots+x^۸)$ به ازای $x = \sqrt{۲}$ کدام است؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۱۱ ۳) ۱۰۲۴ ۴) ۱۰۲۳

83 مجموع $S = a^۹ - a^۸b + a^۷b^۲ - a^۶b^۳ + \cdots - b^۹$ برحسب a و b کدام است؟ $(a+b \neq ۰ , a \neq b)$

۱) $\frac{a^{۱۰} - b^{۱۰}}{a+b}$ ۲) $\frac{a^{۱۰} - b^{۱۰}}{a-b}$

۳) $\frac{a^{۱۰} + b^{۱۰}}{a+b}$ ۴) $\frac{a^{۱۰} + b^{۱۰}}{a-b}$

84 حاصل عبارت $\frac{t^۸ - t^۷ + t^۶ - \cdots - t + ۱}{t^۶ - t^۳ + ۱}$ به ازای $t = \frac{۱+\sqrt{۱۷}}{۲}$ کدام است؟ (ریاضی - خارج - ۹۳)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

85 تعداد جملات یک دنبالهٔ هندسی، عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟ (ریاضی - داخل - ۹۴)

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۲ ۴) ۳

QUIZ 1

TIME.25min

NOTE:

10 **101** در دنباله‌های حسابی روبه‌رو چند عدد سه رقمی مشترک کوچک‌تر از ۳۰۰ موجود است؟

$A: ۲, ۹, ۱۶, ۲۳, \cdots$ $B = ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, \cdots$

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

11 **102** با فرض این که در هر سال نرخ تورم ۱۰ درصد است، قیمت یک کالا پس از گذشت ۴ سال حدوداً چند برابر خواهد شد؟

۱) ۱/۳ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۱

12 **103** در دنباله‌ای با جمله عمومی a_n، رابطهٔ $\frac{a_{n+1}+۲a_n}{a_{n+1}-۲a_n} = \frac{۳}{۲}$ به ازای هر عدد طبیعی برقرار است. نسبت جملهٔ دوازدهم به دهم چقدر است؟

۱) ۶۴ ۲) ۸۱ ۳) ۱۰۰ ۴) ۱۲۱

13 **104** در یک دنبالهٔ هندسی مجموع سه جملهٔ متوالی ۱۹ و حاصل‌ضرب آنها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد کدام است؟ (تجربی - داخل - ۹۰)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

14 **105** در یک دنبالهٔ حسابی، جملات سوم، هفتم و نهم می‌توانند سه جمله متوالی از دنبالهٔ هندسی باشند، چندمین جملهٔ این دنباله صفر است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۱۱ ۴) ۱۲

15 **106** اعداد ۳، b و c تشکیل دنبالهٔ حسابی و اعداد ۳، $b-۱$ و $c+۱$ تشکیل دنبالهٔ هندسی داده‌اند. قدرنسبت دنبالهٔ حسابی چند برابر قدرنسبت دنبالهٔ هندسی است؟

۱) ۳ ۲) ۲/۵ ۳) ۲ ۴) ۱/۵

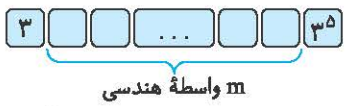
4 62

ابتدا به کمک جمله عمومی دنباله a_n ، a_{81} را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 3 \\ d = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n = 3 + (n-1)3 = 3n \overset{n=81}{\Rightarrow} a_{81} = 3(81) = 3^5$$

حال با توجه به آنکه در دنبالهٔ هندسی جدید، بین ۳ و 3^5 به تعداد m عدد درج کرده‌ایم که $m+2$ عدد حاصل، تشکیل دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت $t = 3$ داده‌اند، نتیجه می‌گیریم:

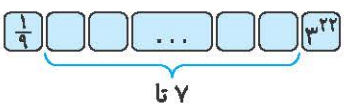


$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{m+2} = 3^5 = a_1 q^{m+1} = 3 \times 3^{m+1} = 3^{m+2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^5 = 3^{m+2} \Rightarrow m = 3$$

2 63

با ۹ جمله از یک دنبالهٔ هندسی روبه‌رو هستیم:



$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{9} \\ a_9 = 3^{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{9} \\ a_1 q^8 = 3^{22} \end{cases} \overset{\div}{\Rightarrow} q^8 = 3^{24} = (3^3)^8 = 27^8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 27 \\ q = -27 \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

حالا حاصل‌ضرب این هفت عدد را محاسبه می‌کنیم:

$$P = a_2 a_3 \cdots a_7 a_8 = a_1 q^1 a_1 q^2 \cdots a_1 q^6 a_1 q^7$$

$$= a_1^7 q^{1+2+\cdots+7} = a_1^7 q^{28}$$

به ازای $a_1 = \frac{1}{9}$ و $q = 27$ داریم:

$$P = (\frac{1}{9})^7 (27)^{28} = \frac{1}{3^{14}} \times 3^{84} = 3^{70}$$

3 64

مقادیر جملات دنبالهٔ a_n را می‌یابیم:

$$a_1 = 2^9 \text{ و } a_2 = 2^8 \text{ و } a_3 = 2^7$$

$$\ldots a_{17} = 2^{-7} \text{ و } a_{18} = 2^{-8} \text{ و } a_{19} = 2^{-9} \text{ و } a_{20} = 2^{-10}$$

که از ضرب آنها در هم داریم:

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{19} \times a_{20}$$

$$= 2^9 \times 2^8 \times 2^7 \times \cdots \times 2^{-7} \times 2^{-8} \times 2^{-9} \times 2^{-10} = 2^{-10}$$

4 65

از آن‌جایی که a_1 ، a_5 و a_{11} به ترتیب سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ هندسی صعودی‌اند، در نتیجه a_5 واسطهٔ هندسی a_1 و a_{11} است:

$$a_5^2 = a_1 a_{11} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = a_1(a_1 + 10d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 10a_1 d$$

$$\Rightarrow 16d^2 = 2a_1 d \Rightarrow a_1 = 8d \quad (1)$$

از آنجایی که a_1 و a_5 جملات یک دنبالهٔ حسابی نیز هستند و $\frac{a_5}{a_1} = q$ است، در نتیجه:

$$\frac{a_1 + 4d}{a_1} = q \xrightarrow{(1)} \frac{8d + 4d}{8d} = q$$

$$\Rightarrow q = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

4 66

با توجه به آن‌که a_2 ، a_5 و a_{12} به ترتیب سه جملهٔ متوالی از دنبالهٔ هندسی‌اند، بنابراین a_5 واسطهٔ هندسی a_2 و a_{11} است. پس:

$$(a_5)^2 = a_2 a_{12} \Rightarrow (a_1 + 4d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 11d)$$

$$\Rightarrow a_1^2 + 8a_1 d + 16d^2 = a_1^2 + 12a_1 d + 11d^2$$

$$\Rightarrow 4a_1 d = 5d^2 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{4}d \quad (1)$$

با توجه به آن‌که $\frac{a_5}{a_2} = q$ و a_5 و a_2 جملات دنبالهٔ حسابی نیز هستند. در نتیجه:

$$\frac{a_1 + 4d}{a_1 + d} = q \xrightarrow{(1)} \frac{\frac{5}{4}d + 4d}{\frac{5}{4}d + d} = q$$

$$q \Rightarrow \frac{21d}{9d} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3} \Rightarrow q = \frac{7}{3}$$

4 67

با توجه به آن‌که a_2 و $2a_5$ و a_8، سه جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی‌اند، بنابراین $2a_5$ واسطهٔ حسابی دو جملهٔ a_2 و a_8 است، پس داریم:

$$2a_5 = \frac{a_2 + a_8}{2} \Rightarrow 4a_5 = a_2 + a_8$$

$$\Rightarrow 4(a_1 q^4) = a_1 q + a_1 q^7 \xrightarrow{\div a_1 q} 4q^3 = 1 + q^6$$

$$\Rightarrow q^6 - 4q^3 + 1 = 0$$

با حل معادلهٔ فوق و با توجه به آن‌که $q > 1$ است $q^3 = 2 + \sqrt{3}$ به‌دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\frac{a_8}{a_2} = \frac{a_1 q^7}{a_1 q} = q^6 = (q^3)^2 \Rightarrow \frac{a_8}{a_2} = (2 + \sqrt{3})^2$$

$$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$$

4 68

روش اول: $x - 2y$ واسطهٔ حسابی $2x + y$ و ۵ است، پس:

$$2(x - 2y) = 2x + y + 5 \Rightarrow 2x - 4y = 2x + y + 5 \Rightarrow y = -1$$

از طرفی $x - 2y$ واسطه هندسی $2x + y$ و ۵ نیز است، پس:

$$(x - 2y)^2 = 5(2x + y)$$

kooo.ir

حال با جایگذاری $y = -1$ در واسطه بالا x را نیز می‌یابیم:

$$(x+2)^2 = 5(2x-1) \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$$

پس $x + y$ برابر با ۲ خواهد بود.

روش دوم: در حالتی که سه جمله با هم برابر باشد، با دنبالهٔ ثابت روبه‌رو هستیم که هم سه جمله دنبالهٔ حسابی هستند و هم هندسی. پس:

$$2x + y = x - 2y = 5 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow x = 3 , y = -1$$

3 69

عدد ۱ واسطهٔ حسابی a و b و واسطهٔ هندسی a و $4a + b$ است، پس:

$$\begin{cases} 2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a \\ 1 = a(4a + b) \end{cases} \Rightarrow 1 = a(4a + 2 - a) = a(3a + 2)$$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1 , \frac{1}{3}$$

$a = -1$ غیرقابل قبول است و به ازای $a = \frac{1}{3}$، قدرنسبت دنبالهٔ هندسی برابر است با:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

2 70

در دنبالهٔ هندسی $q = 2$ و $a_2 = 4$ و $a_5 = 32$ می‌باشد. حال یک دنبالهٔ حسابی با شروع از جملهٔ a_2 و ختم به a_5 تشکیل می‌دهیم که در آن $d = q = 2$ می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = a_2 = 4 \\ d = q = 2 \\ b_n = b_1 + (n-1)d = 32 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + (n-1)(2) = 32$$

$$\Rightarrow 2(n-1) = 28 \Rightarrow n - 1 = 14 \Rightarrow n = 15$$

بنابراین دنبالهٔ حسابی دارای ۱۵ جمله می‌باشد. پس ۱۳ عدد بین a_2 و a_5 درج شده است.

3 71

روش اول: $\log_2 b$ واسطه حسابی $\log_2 a$ و $\log_2 c$ است و همین‌طور $\log_2 c$، واسطهٔ حسابی $\log_2 b$ و $\log_2 d$ است، پس:

$$\begin{cases} 2\log_2 b = \log_2 a + \log_2 c \Rightarrow \log_2 b^2 = \log_2 ac \\ \Rightarrow b^2 = ac \quad (b \text{ واسطه هندسی } a \text{ و } c \text{ است.}) \\ 2\log_2 c = \log_2 b + \log_2 d \Rightarrow \log_2 c^2 = \log_2 bd \\ \Rightarrow c^2 = bd \quad (c \text{ واسطه هندسی } b \text{ و } d \text{ است.}) \end{cases}$$

پس a، b، c و d چهار جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، یعنی:

$$a_1 = a , q = \frac{b}{a} \Rightarrow d = a_4 = a_1 q^3 = a(\frac{b}{a})^3 = \frac{b^3}{a^2}$$

روش دوم: به‌ازای $a = 2$، $b = 4$، $c = 8$ و $d = 16$، حاصل لگاریتم‌ها، چهار جملهٔ متوالی از یک دنبالهٔ حسابی خواهند شد که فقط در گزینه سوم، یعنی $\frac{b^3}{a^2}$ به ازای $a = 2$ و $b = 4$ برابر ۱۶ به‌دست می‌آید.

2 72

قدرنسبت دنباله غیرنزولی را با استفاده از دو شرط $a_1 = 2$ و $a_3 = \frac{1}{2}$ به‌دست می‌آوریم.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1 q^2}{a_1} = q^2 \\ \frac{a_3}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q = -\frac{1}{2} \quad \checkmark$$

یا $q = \frac{1}{2}$

بنابراین مجموع شش جملهٔ اول دنباله برابر است با:

$$S_6 = a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = 2\frac{1-(-\frac{1}{2})^6}{1-(-\frac{1}{2})} = 2(\frac{1-\frac{1}{64}}{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3}(\frac{63}{64}) = \frac{21}{16}$$

2 73

جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی، ۴ و جملهٔ پنجم آن، ۳۲۴ است.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 4 \\ a_5 = a_1 q^4 = 324 \end{array}\right\} \Rightarrow q^4 = \frac{324}{4} = 81 \Rightarrow q = 3$$

حال مجموع ۵ جمله اول دنباله برابر است با:

$$S_5 = a_1 \frac{1-q^5}{1-q} \Rightarrow S_5 = 4\frac{1-3^5}{1-3} = 2(3^5 - 1) = 484$$

3 74

جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی ۲ و جملهٔ هشتم آن، $16\sqrt{2}$ است. بنابراین قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_8}{a_1} = \frac{a_1 q^7}{a_1} = q^7 \\ \frac{a_8}{a_1} = \frac{16\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow q^7 = 8\sqrt{2} \Rightarrow q = \sqrt{2}$$

پس مجموع هشت جمله برابر است با:

$$S_8 = a_1 \frac{1-q^8}{1-q} = 2\frac{1-(\sqrt{2})^8}{1-\sqrt{2}} = \frac{2\times(-15)}{1-\sqrt{2}} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$= 30(1+\sqrt{2})$$

2 75

سه جملهٔ دوم دنباله از a_4 شروع شده و به a_6 ختم می‌شود. و مجموع $a_4 + a_5 + a_6$ برابر است با تفاضل شش جملهٔ اول از سه جملهٔ اول بنابراین داریم:

$$S_3 = \frac{8}{27}(S_6 - S_3) \Rightarrow \frac{35}{27} \qquad S_3 = \frac{8}{27}S_6$$

با جایگذاری رابطهٔ مجموع n جملهٔ نخست دنبالهٔ هندسی، یعنی $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ در رابطهٔ فوق داریم:

$$\frac{35}{27}(a_1 \frac{1-q^3}{1-q}) = \frac{8}{27}(a_1 \frac{1-q^6}{1-q})$$

$$\Rightarrow 35(1-q^3) = 8(1-q^6) = 8(1-q^3)(1+q^3)$$

$$\Rightarrow 35 = 8(1+q^3) \Rightarrow 1 + q^3 = \frac{3a}{8} \Rightarrow q^3 = \frac{27}{8} \Rightarrow q = \frac{3}{2}$$

kgoo.ir

3 76

طبق صورت سؤال $a_1 + a_3 = 1$ و $S_4 = 3$ است. بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \dfrac{1-q^4}{1-q} = 3 \xrightarrow[\text{مزدوج}]{\text{طبق اتحاد}} a_1 \dfrac{(1+q^2)(1+q)(1-q)}{(1-q)} = 3 \\ a_1 + a_1 q^2 = 1 \Rightarrow a_1(1+q^2) = 1 \quad (1) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 1(1+q) = 3 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow a_1(1+2^2) = 1 \xrightarrow{(1)} a_1 = \frac{1}{5}$$

حال با استفاده از $a_1 = \frac{1}{5}$ و $q = 2$ مجموعه ۶ جملهٔ اول به‌دست می‌آید.

$$S_6 = a_1 \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{1}{5} \times \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{63}{5} = 12/6$$

4 77

با توجه به دو شرط $S_{12} = 136$ و $S_6 = 153$ داریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_3 = a_1 \dfrac{1-q^3}{1-q} = 136 \\ S_6 = a_1 \dfrac{1-q^6}{1-q} = 153 \end{array}\right\} \xrightarrow{\div} \frac{1-q^3}{1-q^6} = \frac{136}{153} \Rightarrow \frac{\cancel{1-q^3}}{(\cancel{1-q^3})(1+q^3)}$$

$$= \frac{136}{153} \Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{153}{136} - 1 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

بنابراین نسبت $\frac{a_1}{a_5}$ برابر است با:

$$\frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^4} = 16$$

4 78

با توجه به دنباله $a_1 = 1$ و $q = 2$ می‌باشد، در نتیجه داریم:

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{a_1 \dfrac{\cancel{1-q^{14}}}{\cancel{1-q}}}{a_1 \dfrac{\cancel{1-q^7}}{\cancel{1-q}}} = \frac{1-q^{14}}{1-q^7} \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\frac{S_{14}}{S_7} = \frac{(\cancel{1-q^7})(1+q^7)}{(\cancel{1-q^7})} = 1+q^7$$

$$\xrightarrow{q=2} \frac{S_{14}}{S_7} = 1 + (2)^7 = 129$$

3 79

جملهٔ عمومی داده شده را به صورت $a_n = 3 \times 2^n$ است. در نتیجه یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول $a_1 = 6$ و $q = 2$ می‌باشد. حال به کمک شرط $S_n > 48000$، حداقل تعداد جملات را به‌دست می‌آوریم:

$$S_n > 48000 \Rightarrow a_1(\frac{1-q^n}{1-q}) > 48000$$

$$\Rightarrow 6(\frac{1-2^n}{1-2}) > 48000 \Rightarrow 2^n - 1 < 8000$$

$$\Rightarrow 2^n > 8001 \Rightarrow 2^n \geq 2^{13} \Rightarrow n \geq 13$$

4 80

از آن‌جایی که اعداد $x^2 - 2$ ، $2x$ و $x^2 + 4$ سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ هندسی‌اند، بنابراین $2x$ واسطهٔ هندسی دو عدد $x^2 - 2$ و $x^2 + 4$ است:

$$(2x)^2 = (x^2+4)(x^2-2) \Rightarrow 4x^2 = x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 8$$

$$\Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

با حل معادله فوق $x = \pm 2$ به‌دست می‌آید که به ازای هر کدام که دنباله نزولی شود، قابل قبول است: غیرنزولی: $x = -2 : 8, -4, 2$

$$x = 2 : 8, 4, 2 : \text{نزولی} \Rightarrow a_1 = 8 \, , \, q = \frac{1}{2}$$

حال مجموع هفت جملهٔ اول برابر است با:

$$S_7 = 8 \frac{1-(\frac{1}{2})^7}{1-\frac{1}{2}} = 16(\frac{127}{128}) = \frac{127}{8}$$

3 81

با وصل کردن وسط‌های اضلاع یک مثلث، به مثلثی متشابه با مثلث اولیه می‌رسیم که نسبت اضلاع آن به اضلاع مثلث اولیه $\frac{1}{2}$ است. یعنی محیط آن نیز، $\frac{1}{2}$ محیط مثلث اولیه است. پس دنبالهٔ حاصل از محیط‌ها عبارت است از: $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \cdots$.

مجموع n جمله ابتدایی از این دنباله را بیشتر از ۵/۹۹ قرار می‌دهیم تا محدودهٔ n به‌دست آید:

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 3 \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{6}{2^n} > 5/99$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2^n} < 0/01 \Rightarrow 2^n > 600$$

این نامساوی به ازای $n \geq 10$ برقرار و حداقل n برابر ۱۰ است.

2 82

هر دو عبارتی که در هم ضرب شده‌اند، مجموع نه جمله از یک دنبالهٔ هندسی هستند که یکی دارای قدرنسبت x و دیگری $-x$ است. از فرمول $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ نتیجه می‌گیریم:

$$A = 1 \times \frac{1-x^9}{1-x} \times 1 \times \frac{1-(-x)^9}{1-(-x)} = \frac{(1-x^9)(1+x^9)}{(1-x)(1+x)} = \frac{1-x^{18}}{1-x^2}$$

به‌ازای $x = \sqrt{2}$ داریم:

$$A = \frac{1-(\sqrt{2})^{18}}{1-(\sqrt{2})^2} = \frac{2^9 - 1}{2-1} = 511$$

1 83

مجموع ۱۰ جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ نخست a^9 و قدرنسبت $-\frac{b}{a}$ داده شده است که برابر است با:

$$S_{10} = a_1 \frac{1-q^{10}}{1-q} = a^9 \frac{1-(\frac{-b}{a})^{10}}{1-(\frac{-b}{a})} = a^9 \frac{1-\frac{b^{10}}{a^{10}}}{1+\frac{b}{a}} = a^{10} \frac{\frac{a^{10}-b^{10}}{a^{10}}}{a+b}$$

$$\Rightarrow S_{10} = \frac{a^{10} - b^{10}}{a+b}$$

kooo.ir

84 **3**

صورت کسر، مجموع ۹ جمله از دنبالهٔ هندسی با جملهٔ نخست ۱ و قدرنسبت $-t$ و مخرج کسر، مجموع ۳ جمله با جملهٔ نخست ۱ و قدرنسبت $-t^3$ است. با توجه به فرمول مجموع n جملهٔ نخست در دنبالهٔ هندسی، یعنی $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ داریم:

$$\frac{1\times\frac{1-(-t)^9}{1-(-t)}}{1\times\frac{1-(-t^3)^3}{1-(-t^3)}} = \frac{\frac{1+t^9}{1+t}}{\frac{1+t^9}{1+t^3}} = \frac{1+t^3}{1+t} \xrightarrow[\text{چاق و لاغر}]{\text{اتحاد}} 1-t+t^2$$

با جایگذاری $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ در عبارت $1-t+t^2$ خواهیم داشت:

$$1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{(1+\sqrt{17})^2}{4} = 1-\frac{1+\sqrt{17}}{2}+\frac{18+2\sqrt{17}}{4}$$

$$= 1+4 = 5$$

85 **3**

در یک دنبالهٔ هندسی که جمله اول آن a_1 و قدرنسبت q است، چند جمله از دنبالهٔ جملات با ردیف فرد آن به صورت روبه‌رو است:

$$A: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \Longrightarrow \text{تعداد جمله‌ها} = n \quad (\times q)$$

$$A': a_1, a_3, a_5, \dots, a_{n-1} \Longrightarrow \text{تعداد جمله‌ها} = \frac{n}{2} \quad (\times q^2)$$

حال اگر مجموع تمام جملات را با S و مجموع جملات با ردیف فرد را با S' نمایش دهیم طبق صورت سؤال داریم:

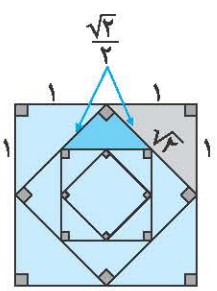
$$S = 3S' \Rightarrow a_1\frac{1-q^n}{1-q} = 3a_1\frac{1-(q^2)^{\frac{n}{2}}}{1-q^2} = 3a_1\frac{1-q^n}{1-q^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^2}{1-q} = 3 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} \frac{(1-q)(1+q)}{(1-q)} = 3$$

$$\Rightarrow 1+q = 3 \Rightarrow q = 2$$

86 **3**

با تکرار این کار، مربع‌های متشابهی ایجاد می‌شود که اضلاع و مساحت‌های آنها به صورت زیر است:



اضلاع : $2, \sqrt{2}, 1, \cdots$

مساحت‌ها : $4, 2, 1, \cdots$

پس اعداد مربوط به مساحت‌ها، یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ نخست $a_1 = 4$ و قدرنسبت $q = \frac{1}{2}$ تشکیل می‌دهد. در نتیجه داریم:

$$S_{10} = a_1\frac{1-q^{10}}{1-q} = 4\frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} = 8(1-\frac{1}{2^{10}}) \simeq 8(1-0) = 8$$

دقت شود که $\frac{1}{2^{10}}$ تقریباً برابر صفر است.

87 **3**

عبارت S، به ازای $x = \frac{2}{3}$ حد مجموع یک دنبالهٔ هندسی با جمله اول $\frac{2}{3}$ و قدرنسبت $\frac{4}{9}$ است. بنابراین برابر است با:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = \frac{6}{5}$$

88 **4**

از آنجایی که $x-8$، x و $x+12$ به ترتیب سه جملهٔ متوالی دنبالهٔ هندسی‌اند، پس x واسطهٔ هندسی دو جملهٔ $x-8$ و $x+12$ است:

$$x^2 = (8-x)(12+x) \Rightarrow x^2 = -x^2 - 4x + 96$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (x+8)(x-6) = 0 \Rightarrow x = -8 \text{ یا } x = 6$$

که تنها به ازای $x = 6$ دنباله یک هندسی نزولی ساخته می‌شود. در نتیجه دنباله به صورت روبه‌رو است:

$$A: 18, 6, 2 \Longrightarrow a_1 = 18, q = \frac{1}{3} \quad (\times\frac{1}{3}\ \times\frac{1}{3})$$

بنابراین حد مجموع برابر $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{18}{1-\frac{1}{3}} = 27$ می‌باشد.

89 **3**

فرض می‌کنیم جملهٔ kاُم، نصف حد مجموع جملات $k+1$ اُم به بعد است، یعنی:

$$a_k = \frac{1}{2}\frac{a_{k+1}}{1-q} \Rightarrow \frac{a_k}{a_k} = \frac{1}{2}\frac{a_k \times q}{1-q} \Rightarrow 2-2q = q \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

90 **1**

اگر دنباله‌ای با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q داشته باشیم، آنگاه دنبالهٔ مجذور جملات به صورت روبه‌رو است:

$$A: a_1, a_2, a_3, \dots \quad (\times q) \qquad A': a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots \quad (\times q^2)$$

حال اگر S حد مجموع تمام جملات و S' حد مجموع مجذورات جملات باشد، طبق صورت سؤال داریم:

$$S' = \frac{2}{3}S^2 \Rightarrow \frac{a_1^2}{1-q^2} = \frac{2}{3}(\frac{a_1}{1-q})^2 \Rightarrow \frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{2}{3}\frac{a_1^2}{(1-q)^2}$$

$$\Rightarrow 3(1-q) = 2(1+q) \Rightarrow 5q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{5} = 0/2$$

91 **3**

با پیش رفتن مراحل رنگ‌آمیزی، زاویهٔ رنگ شده برابر است با:

$$A = 60^\circ + 30^\circ + 15^\circ + 7/5^\circ + \cdots$$

ظاهراً حد مجموع جملات یک دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول ۶۰ و قدرنسبت $\frac{1}{2}$ تشکیل می‌شود:

$$A = \frac{a_1}{1-q} = \frac{60}{1-\frac{1}{2}} = 120^\circ$$

قطاع 120°، $\frac{2}{3}$ سطح نیم‌دایره است، زیرا: $\frac{120}{180} = \frac{2}{3}$.

kgoo.ir