تقریب و اختلال در مکانیک

گردآوری و تألیف:

حجت الله مظفری

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در بارور کردن و شکفتن استعدادهای دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند. کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود خصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا **انتشارات خوشخوان** با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک تنی چند از اساتید و دبیران ممتاز ایران و نیز فارغ‌التحصیلان دانشگاه‌های مختلف که اغلب آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نماید. امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

تقدیم به استاد بزرگوارم

جناب آقای مهدی آقاپور

فهرست مطالب

مقدمه مؤلف

یکی از مباحثی که در المپیاد فیزیک به خصوص در مراحل بالاتر مورد توجه طراحان سؤال است استفاده از تقریب در حل مسائل می‌باشد. اساساً تقریب در فیزیک کاربرد فراوان دارد. تا آن جایی که بنده در منابع فارسی و لاتین با پرس و جو از اساتید جستجو نمودم کتابی در این مبحث مهم تألیف نشده و از آن جایی که دانش‌آموزان علاقه‌مند به آوردن مدال طلای فیزیک کشوری و جهانی به شدت به یادگیری مبحث یاد شده محتاجند و همچنین این مبحث برای دانشجویان فیزیک و رشته‌های مهندسی که مملو از تقریب است، بسیار ضروری می‌نماید، بنده این کتاب را با استفاده از مطالعات و تحقیقات چند ساله که در این زمینه نموده بودم نگاشتم.

بعد از اتمام کار کتاب، آن را خدمت جناب آقای دکتر بهمن‌آبادی (رئیس کمیته‌ی المپیاد فیزیک و استاد دانشگاه صنعتی شریف) ارائه نموده و مورد تأئید ایشان قرار گرفت. از راهنمایی‌ها و ارشادات ایشان و همچنین از استاد بزرگوارم جناب آقای آقاپور که معلوماتم در فیزیک و به خصوص در زمینه تقریب و اختلال را مدیون زحمات دلسوزانه‌ی ایشان می‌دانم، نهایت سپاس و تشکر را دارم.

امید آن است به خواست خداوند متعال این کتاب در ارتقاء سطح علمی دانش‌آموزان کشور مؤثر باشد.

در آخر از جناب آقای حاجی‌زاده که زحمات فراوانی برای چاپ این کتاب متقبل شدند صمیمانه تشکر می‌نمایم.

فصل اول

مقدمه‌ی ریاضی

۱-۱ بسط تیلور

چندجمله‌ای‌ها از ساده‌ترین توابعی هستند که در آنالیز ظاهر می‌شوند.

در این فصل نشان می‌دهیم که تقریب بسیاری از قبیل توابع نمایی و مثلثاتی، به چندجمله‌ای‌ها امکان‌پذیر است چنانچه تفاوت بین یک تابع و چندجمله‌ای نزدیک شده به آن بقدر کافی کوچک باشد در کارهای عملی می‌توانیم آن چندجمله‌ای را به جای تابع اصلی بگذاریم.

هر تابع اختیاری $f_{(x)}$ را می‌توان به وسیله سری توانی از x نشان داد.

$$f_{(x)} = a_{۰} + a_{۱}x + a_{۲}x^{۲} + \cdots = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k \qquad (۱\text{-}۱)$$

برای $x = ۰$ داریم: $f_{(۰)} = a_{۰}$

در این جا با فرض مجاز بودن مشتق‌گیری، داریم:

$$\frac{df}{dx} = f'_{(x)} = a_{۱} + ۲a_{۲}x + ۳a_{۳}x^{۲} + \cdots$$

با تعیین $f'_{(x)}$ در $x=\circ$ داریم:

$$a_1 = f'_{(x)}|_{x=0}$$

برای مشتق دوم داریم:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''_{(x)} = 2!a_2 + 3!a_3 x + \cdots$$

با تعیین مجدد آن در $x=\circ$ داریم:

$$2a_2 = f''_{(x)}|_{x=0} \to a_2 = \frac{1}{2!}f''_{(x)}|_{x=0}$$

برای مشتق سوم داریم:

$$\frac{d^3 f}{dx^3} = f'''_{(x)} = 3!a_3 + 4!a_4 x + \cdots$$

مجدداً در $x=\circ$ داریم:

$$3!a_3 = f'''_{(x)}|_{x=0} \to a_3 = \frac{1}{3!}f'''_{(x)}|_{x=0}$$

با ادامه این کار، چنین داریم:

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}_{(x)}|_{x=0} \qquad (۱-۲)$$

که در این جا $f^{(k)}_{(x)}$، kامین مشتق $f_{(x)}$ است. برای نمادگذاری راحت‌تر، غالباً از $f^{(k)}_{(0)}$ به جای $f^{(k)}_{(x)}|_{x=0}$ استفاده می‌کنیم.

توجه داشته باشید که $f^{(k)}_{(0)}$ بدین معنی است که باید از $f_{(x)}$، k مرتبه مشتق بگیریم و سپس x را برابر صفر قرار دهیم.

حال با استفاده از رابطه (۱-۷) و (۲-۷) داریم:

$$f_{(x)} = f_{(0)} + f'_{(0)}x + f''_{(0)}\frac{x^2}{2!} + f'''_{(0)}\frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (۱-۳)$$

این سری اگر همگرا باشد، می‌تواند تقریب خوبی از $f_{(x)}$ را به ازای مقادیر کوچک x (یعنی مقادیر x نزدیک به صفر) به دست می‌دهد. در حالت کلی برای بسط تیلور داریم:

$$f_{(a+x)} = f_{(a)} + f'_{(a)}x + f''_{(a)}\frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad (۱-۴)$$

که رفتار تابع را در همسایگی نقطه a به ما می‌دهد و رابطه (۱-۳) حالت خاصی ($a=\circ$) از عبارت کلی (۱-۴) می‌باشد (رابطه (۱-۲) را با روش مشابه ۱-۳ اثبات نمایید).

حال با استفاده از تغییر متغیر $a + x = t$ در عبارت (۱-۴) داریم:

$$f_{(t)} = f_{(a)} + f'_{(a)}(t-\circ) + f''_{(a)}\frac{(t-a)^{۲}}{۲!} + \cdots \quad ^{(۱)} \qquad (۱\text{-}۵)$$

مثال ۱: الف) بسط $f_{(x)} = \sin x$ را تا مرتبه اول بدست آورید.

ب) این بسط را تا مرتبه سوم بدست آورید.

ج) بسط تابع را تا مرتبه پنجم بدست آورید.

د) بسط $f_{(x)} = \sin(x)$ را با توجه به نظم دیده شده در حالت کلی تا بی‌نهایت بدست آورید.

ه) روی نمودار در بازه $(\circ, \pi)$ توابع بدست آمده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (ج) و همچنین خود تابع $f_{(x)} = \sin x$ را بکشید و سپس مقایسه نمایید.

الف)

$$f_{(x)} = \sin x \rightarrow f_{(\cdot)} = \circ$$

$$f^{(۱)}_{(x)} = \cos x \rightarrow f^{(۱)}_{(\cdot)} = ۱$$

حال با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$\sin x = (\circ) + (۱)x + \cdots$$

وقتی می‌گوییم عبارتی را تا مرتبه‌ی nام بسط دهید دیگر از جملاتی که توان x آنها بزرگ‌تر از n باشد صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\rightarrow \sin x = x$$

ب)

$$f_{(\cdot)} = \circ \ , \ f^{(۱)}_{(\cdot)} = ۱$$

$$f^{(k)}_{(x)} = -\sin x \rightarrow f^{(۲)}_{(\cdot)} = \circ$$

دیده می‌شود که ضریب $x^{۲}$ صفر بدست آمد و بسط $\sin x$ تا مرتبه دوم همان بسط تا مرتبه اول می‌باشد.

$$f^{(۳)}_{(x)} = -\cos x \rightarrow f^{(۳)}_{(\cdot)} = -۱$$

با بدست آوردن مشتقات در نقطه صفر و جاگذاری در رابطه (۱-۳) و صرف‌نظر از جملاتی که توان آنها بیشتر از ۳ است داریم:

۱) رابطه (۱-۵) بسط تیلور حول نقطه a نام دارد. ما در این فصل هر جا به‌طور خاص اشاره نکنیم منظورمان از بسط دادن، بسط حول نقطه صفر می‌باشد.

$$\sin x = (۰) + (۱)x + (۰)\frac{x^۲}{۲!} + (-۱)\frac{x^۳}{۳!} = x - \frac{x^۳}{۳!}$$

ج)

$f_{(۰)} = ۰ \ , \ f^{(۱)}_{(۰)} = ۱ \ , \ f^{(۲)}_{(۰)} = ۰ \ , \ f^{(۳)}_{(۰)} = -۱$

$f^{(۴)}_{(x)} = \sin x \rightarrow f^{(۴)}_{(۰)} = ۰$

$f^{(۵)}_{(x)} = \cos x \rightarrow f^{(۵)}_{(۰)} = ۱$

با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

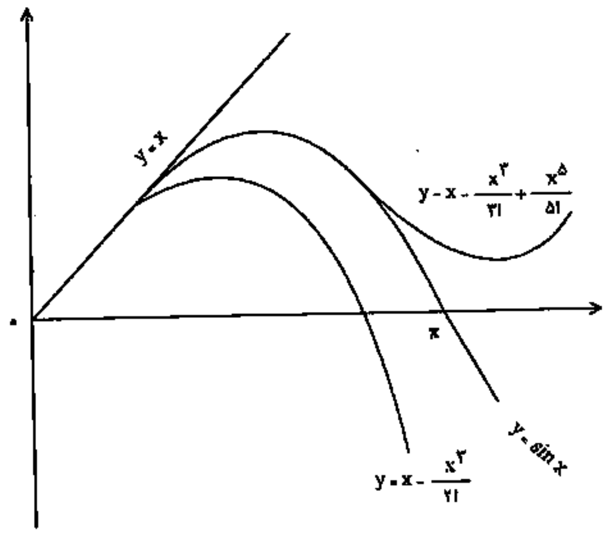
$$\sin x = (۰) + (۱)x + (۰)\frac{x^۲}{۲!} + (-۱)\frac{x^۳}{۳!} + (۰)\frac{x^۴}{۴!} + (۱)\frac{x^۵}{۵!} = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$$

د) اگر همین کار را ادامه دهیم بسط $f_{(x)} = \sin x$ را به این صورت در می‌آوریم:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \frac{x^۷}{۷!} + \cdots = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{x^{(۲k+۱)}(-۱)^{k+۱}}{۲k+۱} \qquad (۱-۶)$$

$\sin x$ جز توابعی است که می‌توان برایش نظمی پیدا کرد اما برای همه توابع نمی‌توان این ضابطه را پیدا کرد.

ه) دیده می‌شود در (الف) در نزدیکی نقطه صفر $y = x$ به $y = \sin x$ خیلی نزدیک است. می‌دانیم $\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!}$، دلیل اینکه $y = x$ در نزدیکی نقطه صفر به $y = \sin x$ خیلی نزدیک است این است که وقتی $x \rightarrow ۰$، واقعاً می‌توانیم از جملات $\frac{x^۳}{۳!}$ و ... صرف‌نظر نماییم اما با بزرگ‌تر شدن x این تقریب هم نادرست می‌شود و باید جملات بیشتری نگه داشت.



شکل۱-۱

اگر در شکل (۱-۱) مقدار دقیق $\sin x$ را با یک سری تیلور که شامل جملات متوالی از رتبه‌های بالاتر است مقایسه کنید متوجه می‌شوید که هر جمله که به سری اضافه شود گسترهٔ دقت سری را افزایش می‌دهد. اگر تعداد این جملات بی‌نهایت شود، سری تیلور می‌تواند همه جا معرف این تابع باشد یعنی با شروع از نقطه صفر و با افزایش تعداد جملات ما به‌طور کامل به تابع $f_{(x)} = \sin x$ می‌رسیم.

۱-۲ بسط چندجمله‌ای‌ها و توابع کسری

این بخش را با بدست آوردن سری دوجمله‌ای از روی بسط تیلور شروع می‌کنیم.

مثال ۲: بسط $f_{(x)} = (1 + x)^n$ را با استفاده از بسط تیلور بدست آورید.

$$
\begin{aligned}
f_{(x)} &= (1 + x)^n \rightarrow f_{(0)} = 1 \\
f'_{(0)} &= n(1 + x)^{n-1}|_{x=0} = n \\
f''_{(0)} &= n(n-1)(1+x)^{n-2}|_{x=0} = n(n-1) \\
&\vdots \\
f^{(k)}_{(0)} &= n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(1+x)^{n-k}|_{x=0} \\
&= n(n-1)\dots(n-k+1)
\end{aligned}
$$

در نتیجه با استفاده از رابطه (۱-۳) داریم:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2!}(n)(n-1)x^2 + \dots + \frac{(n)(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}x^k + \dots \quad (1\text{-}7)$$

رابطه‌ی (۱-۷) سری دوجمله‌ای نام دارد.

توجه داشته باشید منظور ما از بسط دادن تا فلان مرتبه در بسط توابع بزرگ‌ترین توان x می‌باشد که عمل بسط را تا آنجا ادامه می‌دهیم.

مثال ۳: تابع $f_{(x)} = \sqrt{1 + x}$ را تا مرتبه سوم بسط دهید.

در واقع این مثال حالت خاصی از سری دوجمله‌ای است که در آن $n = \frac{1}{2}$ می‌باشد. با توجه به رابطه (۱-۷) داریم:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)x^2 - 1\frac{1}{3!}(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)x^3 + \dots \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3
\end{aligned}
$$

در واقع چون مسأله، بسط را تا مرتبه‌ی سوم می‌خواهد از جملات با توان بزرگ‌تر از ۳ صرف‌نظر می‌کنیم.

مثال ۴: بسط تابع $f_{(x)} = \frac{x+1}{1-x}$ را تا مرتبه‌ی چهارم بدست آورید.

برای بدست آوردن بسط این تابع تا مرتبه چهارم، ابتدا $\frac{1}{1-x}$ را تا مرتبه‌ی چهارم بسط می‌دهیم و سپس در عبارت صورت ضرب می‌کنیم.

$$A_{(x)} = \frac{1}{1-x} \to A_{(0)} = 1$$

$$A^{(1)}_{(x)} = \frac{1}{(1-x)^2} \to A^{(1)}_{(0)} = 1$$

$$A^{(2)}_{(x)} = \frac{2}{(1-x)^3} \to A^{(2)}_{(0)} = 2!$$

$$A^{(3)}_{(x)} = \frac{3!}{(1-x)^4} \to A^{(3)}_{(0)} = 3!$$

$$A^{(4)}_{(x)} = \frac{4!}{(1-x)^5} \to A^{(4)}_{(0)} = 4!$$

با بدست آوردن مشتق‌های $A_{(x)}$ در نقطه‌ی صفر و با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$\begin{aligned} A_{(x)} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \\ f_{(x)} &= (1+x)A_{(x)} \to f_{(x)} = (1+x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \\ &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= (1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4) \end{aligned}$$

باید توجه کنید وقتی بسط عبارتی را مثلاً تا مرتبه چهارم می‌خواهیم باید تمام جملاتی که از مرتبه ۴ وکمتر است در تمام مراحل در نظر گرفت و مراقب بود که جمله‌ای از قلم نیفتد.

مثال ۵: بسط تابع $f_{(x)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right)$ را تا مرتبه‌ی دوم بنویسید.

ابتدا بسط $A_{(x)} = \frac{x+1}{1-x} - 1$ را می‌نویسیم. و بسط $B_{(x)} = \frac{1+x}{1-x}$ را با توجه به مثال قبل می‌دانیم. اما قبل از نوشتن بسط $A_{(x)}$ باید مواظب باشیم که جمله‌ی $A_{(x)}$ را تا مرتبه‌ی سوم بسط دهیم زیرا $A_{(x)}$ قرار است در جمله‌ی $\frac{1}{x}$ ضرب شود پس

$$f_{(x)} = \frac{1}{x}(1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 - 1) = \frac{1}{x}(2x + 2x^2 + 2x^3) = 2(1 + x + x^2)$$

۱-۳ بسط توابع مثلثاتی

همانطورکه در مثال ۱ دیدیم بسط تابع $f_{(x)} = \sin x$ به شکل زیر می‌باشد.

$$f_{(x)} = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{(رابطه ۱-۶)}$$

و اگر به همان روش بسط $f_{(x)} = \cos x$ را بدست آوریم برای این تابع داریم:

$$f_{(x)} = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (1\text{-}8)$$

یک نتیجه مفید سری تیلور این است که اگر سری در همه جا همگرا باشد (توابعی که ما با آنها سر و کار داریم اکثراً همگرا هستند)، این سری چنان معرف خوبی برای این تابع خواهد شد که می‌توان از آن هر چند بار که بخواهیم انتگرال یا دیفرانسیل بگیریم. برای مثال:

$$\frac{d}{dx}(sinx) = \frac{d}{dx}(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots = \cos x$$

به علاوه سری تیلور مربوط به حاصل‌ضرب دو تابع، برابر حاصل‌ضرب سری‌های جداگانه می‌باشد.

برای درک بیشتر این مطالب به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۶: با استفاده از سری تیلور نشان دهید: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$$\sin x = (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots)$$

$$\cos x = (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots)$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\sin x \cos x &= (x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots)(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 = \cdots) \\
&= x - (\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!})x^3 + (\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!2!} + \frac{1}{5!})x^5 + \cdots \\
&= x - \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \cdots = \frac{1}{2}[(3x) - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} + \cdots] \\
&= \frac{1}{2}[\sin(2x)]
\end{aligned}$$

حال در مثال بعدی بسط $\tan x$ را که دیگر نظم و ضابطه $\sin x$ را ندارد بدست می‌آوریم.

مثال ۷: بسط $\tan x$ را تا مرتبه‌ی پنجم بدست آورید.

روش اول:

$$f_{(x)} = \tan x \rightarrow f_{(\cdot)} = \circ$$

$$f^{(۱)}_{(x)} = \frac{۱}{\cos^{۲} x} \rightarrow f^{(۱)}_{(\cdot)} = ۱$$

$$f^{(۲)}_{(x)} = ۲\frac{\sin x}{\cos^{۳} x} \rightarrow f^{(۲)}_{(\cdot)} = \circ$$

$$f^{(۳)}_{(x)} = ۲\frac{\cos^{۲} x + ۳\sin^{۲} x}{\cos^{۴} x} \rightarrow f^{(۳)}_{(\cdot)} = ۲(۱) = ۲$$

$$f^{(۴)}_{(x)} = \frac{۴\sin x}{\cos^{۳} x}[\frac{۶}{\cos^{۲} x} - ۲] \rightarrow f^{(۴)}_{(\cdot)} = \circ$$

$$f^{(۵)}_{(x)} = ۴(\frac{\cos^{۲} x + ۳\sin^{۲} x}{\cos^{۴} x})(\frac{۶}{\cos^{۲} x} - ۲) - \frac{۴۸\sin^{۲} x}{\cos^{۶} x} \rightarrow f^{(۵)}_{(\cdot)} = ۱۶$$

با بدست آوردن مشتق‌های $f_{(x)}$ در نقطه‌ی صفر و با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$f_{(x)} = \circ + (۱)x + (\circ) \times \frac{x^{۲}}{۲!} + ۲ \times \frac{x^{۳}}{۳!} + (\circ) \times \frac{x^{۴}}{۴!} + ۱۶ \times \frac{x^{۵}}{۵!} = x + x^{۳} + \frac{۲}{۱۵}x^{۵}$$

اما در این روش دیدیم که محاسبهٔ مشتق‌ها مقداری زمان می‌برد اما استفاده از روش دوم زمان کمتری می‌برد.

روش دوم:

می‌دانیم $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$، بسط $\sin x$ و بسط $\cos x$ را می‌دانیم و با توجه به این که بسط $\tan x$ را تا مرتبه ۵ می‌خواهیم صورت و مخرج را هم تا مرتبه‌ی ۵ بسط می‌دهیم.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!}}{۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!}}$$

ابتدا عبارت $A_{(x)} = \frac{۱}{۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!}}$ را تا مرتبه ۵ بسط می‌دهیم و سپس در صورت ضرب می‌کنیم (جمله‌ی بعدی سری تیلور $\cos x$، $\frac{x^{۶}}{۶!}$ است و جمله مرتبه‌ی پنجم $\cos x$ صفر می‌باشد)

$$A_{(x)} = \frac{۱}{۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!}} = \frac{۱}{۱ - (\frac{x^{۲}}{۲!} - \frac{x^{۴}}{۴!})} = \frac{۱}{۱ - y}$$

که در این جا $y = \frac{x^{۲}}{۲!} - \frac{x^{۴}}{۴!}$

از طرفی طبق مثال ۴ می‌دانیم $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \cdots$، ولی ما تا جمله‌ی y^2 را نگه می‌داریم زیرا y^3 جملاتش نسبت به x از مرتبه ۶ و به بالا می‌باشد لذا داریم:

$$\begin{aligned} A_{(x)} &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 = 1 + (\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}) + (\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!})^2 \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

در این جا از جمله $(\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!})^2$ فقط جمله $(\frac{x^2}{2!})^2$ باقی می‌ماند و بقیه جملات از مرتبه بالای ۵ می‌باشند.

$$\begin{aligned} A_{(x)} &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} \rightarrow f(x) = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}) \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \end{aligned}$$

دیدیم که در روش دوم نیازی به مشتق‌گیری‌های طولانی نبود و تنها چهار عمل اصلی وجود داشت.

دیده می‌شود بسط $f_{(x)} = \tan x$ حاوی جملات x به توان اعداد فرد می‌باشد و فاقد جملات x به توان زوج است و این با فرد بودن تابع $f_{(x)} = \tan x$ مطابقت دارد.

مثال ۸: تابع $\cos(\sin x)$ را تا مرتبه چهارم بسط دهید.

تمام جملات از مرتبه‌ی ۴ به بالا را حذف می‌کنیم.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^4 x}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(x - \frac{x^3}{3!})^2}{2!} + \frac{(x - \frac{x^3}{3!})^4}{4!} \\ &= 1 - \frac{x^2 - \frac{x^4}{3}}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 \end{aligned}$$

۱-۴ توابع معکوس مثلثاتی

در این بخش به بررسی سری تیلور توابع معکوس مثلثاتی می‌پردازیم.

مثال ۹: سری تیلور را برای تابع $f_{(x)} = \sin^{-1}(x)$ تا مرتبه‌ی پنجم نسبت به x بیابید.

در این جا یک راه این است که از $f^{(1)}_{(x)}$ تا $f^{(5)}_{(x)}$ را بدست آوریم که این کار وقت‌گیر و طاقت‌فرسایی است. اما راه مناسب‌تری را در این جا در نظر گرفته‌ایم.

فرض کنید:

$$\sin^{-1} x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 + \cdots \qquad (1)$$

می‌دانیم: $\sin^{-1}(\sin x) = x \rightarrow \sin^{-1}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) = x$

در این جا تا جمله مرتبه ۵ نگه می‌داریم. با جایگذاری $A_{(x)} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ در رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned}\sin^{-1}(\sin x) =&\alpha_0 + \alpha_1(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) + \alpha_2(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^2 + \alpha_3(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^3 \\ &+ \alpha_4(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^4 + \alpha_5(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!})^5\end{aligned}$$

جملات بالاتر از مرتبه‌ی ۵ را حذف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\rightarrow \sin^{-1}(\sin x) =&\alpha_0 + \alpha_1 x - \alpha_1\frac{x^3}{3!} + \frac{\alpha_1 x^5}{5!} + \alpha_2 x^2 - \alpha_2\frac{x^4}{3} \\ &+ \alpha_3 x^3 - \alpha_3\frac{x^5}{2} + \alpha_4 x^4 + \alpha_5 x^5 \\ =&\alpha_0 + x(\alpha_1) + x^2(\alpha_2) + x^3(\frac{-\alpha_1}{3!} + \alpha_3) + x^4(\frac{-\alpha_2}{3} + \alpha_4) \\ &+ x^5(\frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\alpha_3}{3} + \alpha_5)\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم: $\sin^{-1}(\sin x) = x$

$$\rightarrow \alpha_0 + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2) + (\alpha_3 - \frac{\alpha_1}{3!})(x^3) + (\frac{-\alpha_2}{3} + \alpha_4)x^4 + (\frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5) = x$$

حالا ضریب x^0ها را در دو طرف تساوی با هم برابر قرار می‌دهیم: $\alpha_0 = 0$

ضرایب x^1ها را با هم برابر قرار می‌دهیم: $\alpha_1 = 1$

برای x^2 داریم: $\alpha_2 = 0$

x^3: $-\frac{\alpha_1}{3!} + \alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{3!}$

x^4: $-\frac{\alpha_2}{3} + \alpha_4 = 0 \rightarrow \alpha_4 = 0$

x^5: $\frac{\alpha_1}{5!} - \frac{\alpha_3}{2} + \alpha_5 = 0 \rightarrow \frac{1}{120} - \frac{1}{2 \times 3!} + \alpha_5 = 0 \rightarrow \alpha_5 = \frac{3}{40}$

با بدست آوردن $\alpha_۱$ تا $\alpha_۵$ داریم:

$$\sin^{-۱} x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{۳}{۴۰}x^۵$$

۱-۵ بسط توابع لگاریتمی و نمایی

ابتدا بسط $f_{(x)} = e^x$ و $f_{(x)} = \ln^{(۱+x)}$ را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۰: بسط تیلور توابع $f_{(x)} = e^x$ و $g_{(x)} = \ln^{(۱+x)}$ را بدست آورید.

$$\begin{aligned}
&f_{(x)} = e^x \to f_{(۰)} = ۱\\
&f^{(۱)}_{(x)} = e^x \to f^{(۱)}_{(۰)} = ۱\\
&f^{(۲)}_{(x)} = e^x \to f^{(۲)}_{(۰)} = ۱\\
&f^{(n)}_{(x)} = f^{(n)}_{(۰)} = ۱
\end{aligned}$$

با بدست آوردن مشتقات $f_{(x)} = e^x$ و با توجه به رابطه (۱-۳) داریم:

$$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots \qquad (۱-۹)$$

$$\begin{aligned}
&g_{(x)} = \ln^{(۱+x)} \to g_{(۰)} = ۰\\
&g^{(۱)}_{(x)} = \frac{۱}{۱+x} \to g^{(۱)}_{(۰)} = ۱\\
&g^{(۲)}_{(x)} = -\frac{۱}{(۱+x)^۲} \to g^{(۲)}_{(۰)} = -۱\\
&g^{(۳)}_{(x)} = \frac{۲}{(۱+x)^۳} \to g^{(۳)}_{(۰)} = ۲!\\
&g^{(۴)}_{(x)} = \frac{-۳!}{(۱+x)^۴} \to g^{(۴)}_{(۰)} = -۳!\\
&g^{(۵)}_{(x)} = \frac{۴!}{(۱+x)^۵} \to g^{(۵)}_{(۰)} = ۴!
\end{aligned}$$

و به همین ترتیب مشتقات $\ln^{(۱+x)}$ بدست می‌آیند و با توجه به رابطه‌ی (۱-۳) داریم:

$$\ln^{(۱+x)} = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴} + \frac{x^۵}{۵} - \cdots \qquad (۱-۱۰)$$

مثال ۱۱: تابع $f_{(x)} = (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$ را تا مرتبه اول بسط دهید. (که در آن a عددی ثابت می‌باشد)

می‌دانیم $m^x = e^{x \ln^m}$. پس با توجه به این مطلب داریم:

$$f_{(x)} = (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+ax)} \rightarrow f(x) = e^{\frac{1}{x}A_{(x)}}$$

در این جا در نگاه اول به نظر می‌رسد با توجه به این که مسأله از ما بسط را تا مرتبه اول می‌خواهد پس ما باید $A_{(x)} = \ln^{(1+ax)}$ را تا مرتبه اول بسط دهیم اما باید به این نکته توجه داشت که $A_{(x)}$ در یک عبارت $\frac{1}{x}$ ضرب می‌شود و مرتبه‌اش ۱ درجه کاهش می‌یابد. پس باید $A_{(x)} = \ln^{(1+ax)}$ را تا مرتبه‌ی دوم بسط دهیم: $A_{(x)} = ax - \frac{a^2x^2}{2}$

$$f_{(x)} = e^{\frac{1}{x}A_{(x)}} = e^{\frac{1}{x}(ax - \frac{a^2x^2}{2})} = e^{(a - \frac{a^2x}{2})} = e^a e^{-\frac{a^2x}{2}}$$

حال بسط $e^{-\frac{a^2x}{2}}$ را تا مرتبه‌ی اول با توجه به رابطه (۱-۹) می‌نویسیم.

$$f_{(x)} = e^a(e^{-\frac{a^2x}{2}}) = e^a(1 - \frac{a^2x}{2})$$

مثال ۱۲: بسط تابع $f_{(x)} = \ln^{(\cos x)}$ را تا مرتبه‌ی چهارم بدست آورید.

$$f_{(x)} = \ln^{\cos x} = \ln^{(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})}$$

با توجه به رابطه (۱-۱۰) و با توجه به $A_{(x)} = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ داریم:

$$\begin{aligned} f_{(x)} = \ln^{(1+A_{(x)})} &= A_{(x)} - \frac{A_{(x)}^2}{2} = (-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}) - \frac{(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})^2}{2} \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{8} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \end{aligned}$$

البته این عملیات که در این فصل انجام دادیم وقتی مجازند که سری همگرا باشد. به‌طور مثال گستره‌ی همگرایی $f_{(x)} = e^x$ به صورت $-\infty < x < \infty$ می‌باشد در حالی که سری دو جمله تنها وقتی همگرا است که $-1 < x < 1$ باشد البته پیدا کردن گستره همگرایی کاری مشکل است. بنابراین با قبول اینکه با توابع ساده سر و کار داریم (همان‌طور که در مثال‌های این فصل دیدیم.) از این موضوع اجتناب می‌کنیم.

۱-۶ استفاده سری تیلور برای محاسبه حد

همان‌طور که در حدگیری دیده‌اید بعضی اوقات در بدست آوردن حد به ابهام برمی‌خوریم. در این بخش با استفاده از سری تیلور این‌گونه حدها را بررسی و حل می‌کنیم.

مثال ۱۳: حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan x}$ ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$ د) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(x)-\sin^{-1}(x)}{x-\sin x}$

الف) در این جا حد از نوع $\frac{0}{0}$ می‌باشد. بسط توابع را تا اولین مرتبه غیر صفر[1] می‌نویسیم در این جا جمله مرتبه صفرم صفر است و لذا اولین مرتبه‌ی غیر صفر جمله‌ی مرتبه اول است و از جمله مرتبه سوم با توجه به این که $x \to 0$، صرف‌نظر می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=3$$

ب) در این جا حد از نوع $\frac{\infty}{\infty}$ می‌باشد و چون ما بسط را حول نقطه‌ی صفر می‌دهیم برای محاسبه‌ی این حد از تغییر متغیر $t=\frac{\pi}{2}-x$ استفاده می‌کنیم تا t به سمت صفر میل کند. حال تابع را نسبت به t حول نقطه صفر بسط می‌دهیم:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan(3x)}{\tan x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 3(\frac{\pi}{2}-t)}{\tan(\frac{\pi}{2}-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\coth(3t)}{\coth(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan(t)}{\tan(3t)}=\frac{1}{3}$$

ج) باز هم حد از نوع $\frac{0}{0}$ است. صورت کسر را تا اولین مرتبه غیر صفر بسط می‌دهیم.

$$A_{(x)}=e^{\sin 3x}-e^{\sin x}=e^{3x}-e^{x}=(1+3x)-(1+x)=x$$
$$\to \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$

د) در این جا نیز نوع حد $\frac{0}{0}$ است. ابتدا بسط صورت، $A_{(x)}$ را تا اولین مرتبه غیر صفر می‌نویسیم.

$$A_{(x)}=\tan(x)-\sin^{-1}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\cdots-(x+\frac{x^3}{6}+\cdots)=\frac{x^3}{6}$$

۱) اولین مرتبه غیر صفر مربوط به اولین جمله غیر صفر می‌باشد که توان آن جمله، اولین مرتبه غیر صفر است. مثلاً در $\sin x=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$، x اولین جمله غیر صفر است و توان x، ۱ می‌باشد لذا اولین مرتبه غیر صفر، مرتبه اول است ولی در $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\cdots$ اولین جمله غیر صفر ۱ است بنابراین توان اولین جمله غیر صفر، صفر (x^0) می‌باشد، پس اولین مرتبه غیر صفر مرتبه صفرم است.

پس اولین مرتبه غیر صفر در صورت مرتبه ۳ می‌باشد. حالا برای مخرج هم این کار را انجام می‌دهیم.

$$B_{(x)} = x - \sin x = x - (x - \frac{x^۳}{۳!}) = \frac{x^۳}{۶}$$
$$\to \lim_{x \to ۰} \frac{A_{(x)}}{B_{(x)}} = ۱$$

مثال ۱۴: با استفاده از بسط تیلور مطلوبست محاسبه حد زیر.

$$\lim_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{۲ - ۲\cos x} - \frac{۱}{x^۲} \right)$$

حل:

$$\lim_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{۲ - ۲\cos x} - \frac{۱}{x^۲} \right) = \lim_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{۲ - ۲(۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!})} - \frac{۱}{x^۲} \right)$$
$$= \lim_{x \to ۰} \left[\frac{۱}{x^۲ - \frac{x^۴}{۱۲}} - \frac{۱}{x^۲} \right] = \lim_{x \to ۰} \frac{۱}{x^۲(۱ - \frac{x^۲}{۱۲})} - \frac{۱}{x^۲} = \lim_{x \to ۰} \left(\frac{۱ - ۱ + \frac{x^۲}{۱۲}}{x^۲(۱ - \frac{x^۲}{۱۲})} \right)$$
$$= \lim_{x \to ۰} \frac{\frac{۱}{۱۲}}{۱ - \frac{x^۲}{۱۲}} = \frac{۱}{۱۲}$$

توجه کنید اگر در بسط $\cos x$ به دو جمله‌ی اول بسط $(۱ - \frac{x^۲}{۲})$ بسنده می‌شد به جواب صفر می‌رسیدیم که غلط می‌باشد.

مثال ۱۵: حدود زیر را محاسبه نمایید.

الف) $\lim_{x \to ۰} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{۱}{x^۲}}$ ب) $\lim_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{\ln(x + \sqrt{۱ + x^۲})} - \frac{۱}{\ln(۱ + x)} \right)$

الف)
$$\lim_{x \to ۰} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x \to ۰} \left(\frac{x + \frac{x^۳}{۶}}{x} \right)^{\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x \to ۰} (۱ + \frac{x^۲}{۶})^{\frac{۱}{x^۲}}$$

از طرفی طبق مثال ۱۱ می‌دانیم

$$\lim_{x \to ۰} (۱ + ax)^{\frac{۱}{x}} = \lim_{x \to ۰} (e^a - \frac{a^۲}{۲} e^a x) = e^a \to \lim_{x \to ۰} (۱ + \frac{x^۲}{۶})^{\frac{۱}{x^۲}} = e^{\frac{۱}{۶}}$$

ب)
$$\sqrt{۱ + x^۲} = ۱ + \tfrac{۱}{۲} x^۲$$
$$x + \sqrt{۱ + x^۲} = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲}$$
$$\ln(x + \sqrt{۱ + x^۲}) = \ln(۱ + x + \frac{x^۲}{۲}) = x + \frac{x^۲}{۲} - \frac{۱}{۲}(x + \frac{x^۲}{۲})^۲$$
$$= x + o(x^۲) = x$$

یعنی بسط $\ln(a+\sqrt{1+x^2})$ تا مرتبه دوم x می‌باشد و جمله حاوی x^2 ندارد. ما در این جا تمام عبارات را تا مرتبه دوم نسبت به x بسط می‌دهیم زیرا اگر به مرتبه اول بسنده کنیم به جواب نخواهیم رسید و حد مبهم است.

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}$$

$$\lim\left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(1-(1+\frac{x}{2}))=-\frac{1}{2}$$

تذکر: $\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}\right)$

۱-۷ روش نیوتن

یکی از روش‌هایی که در حل معادلات به کار برده می‌شود روش نیوتن است[1]. شکل (۱-۲) یک شرح ترسیمی ارائه می‌دهد. با شروع از تخمین اولیه (x_1) که چندان از یک ریشه x دور نیست در طول مماس و به سمت نقطه‌ی تقاطع آن با محور x می‌رویم $(x_2, 0)$ (x_1 را حدس می‌زنیم) x_2 را به عنوان تقریب بعدی انتخاب می‌نماییم. سپس به نقطه $(x_2, f(x_2))$ رفته و این عمل ادامه می‌یابد تا اینکه مقادیر متوالی و به قدر کافی به هم نزدیک شوند، یا مقدار تابع به قدر کافی به صفر نزدیک گردد. طرز محاسبه بلافاصله از مثلث قائم‌الزاویه در شکل (۱-۲) بدست می‌آید که زاویه شیب خط مماس در $x = x_1$، θ می‌باشد.

$$\tan\theta=f'(x_1)=\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}\rightarrow x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

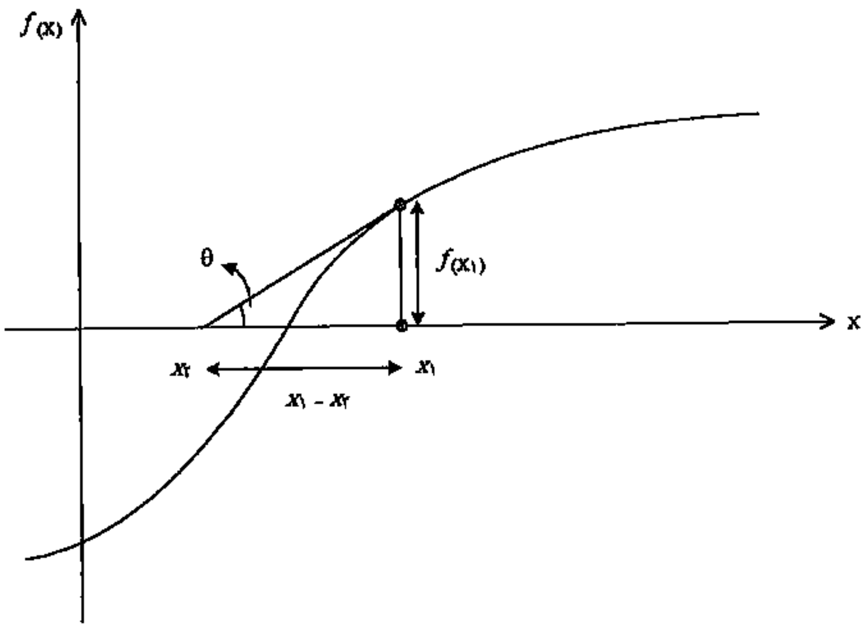
روش محاسبه را به صورت زیر ادامه می‌دهیم.

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

یا با جمله‌ای عمومی‌تر

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,,\quad n=1,2,3,\ldots \qquad (۱-۱۱)$$

۱) نیوتن بحث مفصل این روش را چاپ نکرد، اما یک معادله درجه ۳ را در principia (۱۶۸۷) حل کرد. صورتی از این روش که در این جا داده شده است نسبت به مثال اصلی وی به‌طور قابل توجهی پیشرفت کرده است.



شکل۱-۲

مثال ۱۶: روش نیوتن را برای $f_{(x)} = ۳x + \sin x - e^x = ۰$ بکار ببرید.
محاسبات زیر را خواهیم داشت:

$$f_{(x)} = ۳x + \sin x - e^x$$
$$f'_{(x)} = ۳ + \cos x - e^x$$

اگر با $x_۱ = ۰$ شروع کنیم ($x_۱$ دلخواه می‌باشد)، داریم:

$$x_۲ = x_۱ - \frac{f_{(x_۱)}}{f'_{(x_۱)}} = ۰ - (\frac{-۱}{۳}) = ۰٫۳۳۳۳$$
$$x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)} = ۰٫۳۳۳۳ - \frac{-۰٫۰۶۸۴۱۸}{۲٫۵۴۹۳۴} = ۰٫۳۶۳۰۱۷$$
$$x_۴ = x_۳ - \frac{f(x_۳)}{f'(x_۳)} = ۰٫۳۶۳۰۱۷ - \frac{-۰٫۲۷۹ \times ۱۰^{-۴}}{۲٫۵۰۲۲۶} = ۰٫۳۶۳۲۱۷$$

بعد از سه تکرار، ریشه تا هفت رقم با معنی صحیح می‌باشد که تقریب بسیار خوبی است.

در این بخش مقصود از گفتن نیوتن آشنایی با روش تکرار کردن و بدست آوردن جواب تقریبی بود وگرنه این روش در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

مسائل

۱) بسط تابع $f_{(x)} = \cos x$ را ابتدا تا مرتبه اول و سپس دوم، سپس سوم و بعد چهارم بدست آورید و توابع بدست آمده را در هر مرحله رسم نمایید و این توابع را در روی نمودار با هم مقایسه نمایید (در روی نمودارتان خود تابع $\cos x$ را نیز برای انجام مقایسه رسم نمایید). بسط این تابع تا مرتبه دوم چه تفاوتی با بسط این تابع تا مرتبه سوم دارد؟

جواب: ($\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots$، بین بسط این تابع تا مرتبه دوم و تا مرتبه سوم فرقی نیست چون ضریب جمله مرتبه‌ی سوم صفر می‌باشد)

۲) بسط تابع $f_{(x)} = \sqrt[۳]{۱ + x}$ را تا مرتبه‌ی دوم بیابید و سپس با استفاده از آن مقدار تقریبی $a = \sqrt[۳]{۹/۱}$ را محاسبه نمایید.

۳) مقدار انتگرال زیر را با استفاده از بسط تیلور تا مرتبه اول، محاسبه نمایید.

$$I = \int_{۱}^{۱/۱} \frac{\sqrt{۴x - ۲}}{x^۲ + x + ۱} dx$$

حال اگر بازه انتگرال‌گیری به جای $(۱, ۱/۱)$ مثلاً $(۱, ۲)$ باشد و با همین روش I را محاسبه کنیم، جواب I بدست آمده در حالت جدید از دقت بالاتری برخوردار است یا حالت قبل. برای بالاتر بردن دقت چه کاری باید انجام داد.

جواب: $I = \frac{\sqrt{۲}}{۳۰}$ ـ حالت قبلی ـ برای بالاتر بردن دقت در حالت جدید باید جملات بیشتری از بسط تیلور را نگه داریم.

۴) بسط تابع $\coth(x + \frac{\pi}{۴})$ را تا مرتبه چهارم نسبت به x بیابید.

۵) بسط تیلور $f_{(x)} = \frac{۱}{x^۲} - \coth^۲ x$ را تا اولین مرتبه غیر صفر بیابید.

جواب: $\frac{۲}{۳}$

۶) بسط تیلور $f_{(x)} = \sin(\sin x)$ را تا سومین مرتبه غیر صفر نوشته و بگویید آیا جواب بدست آمده با زوجیت یا فردیت تابع $f_{(x)}$ مطابقت دارد.

۷) بسط تابع $f_{(x)} = \cos^{-۱} x$ را تا مرتبه‌ی پنجم بیابید.

جواب: $\frac{\pi}{۲} - x - \frac{x^۳}{۳!} - \frac{۳}{۴۰}x^۵$

۸) $f_{(x)} = \sin^{۲} x$ می‌باشد. بسط تابع معکوس f را تا مرتبه سوم بیابید.

۹) بسط تیلور تابع $f_{(x)} = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ را حول $x = ۰$ تا مرتبه ۶ نسبت به x بنویسید.

جواب: $-\frac{x^{۲}}{۳!} + \left[\frac{۱}{۵!} - \frac{۱}{۲(۳!)^{۲}}\right] x^{۴} + \left[-\frac{۱}{۷!} + \frac{۱}{(۳!)(۵!)} - \frac{۱}{۳(۳!)^{۳}}\right] x^{۶}$

۱۰) نشان دهید بسط تابع $f_{(x)} = (۲^{x} - ۱)^{\sin x}$ تا اولین مرتبه غیر صفر برابر ۱ می‌باشد.

۱۱) حدود زیر را با استفاده از بسط تیلور بدست آورید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{(۱+x)^{\frac{۱}{x}} - e}{x}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[۳]{۱ - x^{۲}}}{x^{۵}}$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰^+} \frac{(۱+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x^{۲} \ln^{x}}$

جواب: الف) $-\frac{e}{۲}$ ب) $\frac{۱۱}{۹۰}$ ج) $-\frac{۱}{۲}$

۱۲) ثابت کنید وقتی $x \to ۰$ داریم $(۱ + x)^{۲} = ۱ + ۳x$ سپس با استفاده از آن مطلوبست

$$\lim_{x \to +\infty} \left[(x^{۴} + x^{۲})^{\frac{۱}{۲}} - x^{۲}\right]$$

۱۳) با استفاده از بسط، مقدار a را طوری بیابید که مقدار حد زیر متناهی باشد، سپس به ازای a بدست آمده مقدار حد را بیابید.

$$\lim_{x \to ۰} \frac{e^{ax} - e^{x} - x}{x^{۲}}$$

جواب: $a = ۲$ و $\frac{۳}{۲} =$ حد

۱۴) ثابت‌های a و b را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$\lim \frac{۱}{bx - \sin x} \int_{۰}^{x} \frac{t^{۲} dt}{\sqrt{a + t}} = ۱$$

۱۵) معادله زیر را به روش نیوتن با دو تکرار حل کنید ($x_۱$ را برابر ۱ بگیرید $x_۱ = ۱$) $۲e^{-x} - \sin x = ۰$

جواب: $x_۳ = ۰/۹۲۱$

فصل دوم

استفاده‌ی بسط و اختلال در حل معادلات

۱-۲ مقدمه (روش بسط و اختلال)

در این فصل با استفاده از این روش به تقریب مناسبی از توابع مجهول در معادله‌های چند جمله‌ای و دیفرانسیلی و انتگرالی و ... می‌پردازیم.

در این روش با داشتن یک نقطه از تابع $(x_{\circ}, y_{\circ})$ به هر تقریب دلخواهی از تابع مورد نظر می‌توان رسید. استفاده از این روش در فصل جاری را می‌توان به دو قسمت تقسیم کرد.

قسمت اول مربوط به معادلات به صورت $f_{(x)} = \circ$ می‌باشد[۱] که ما در این قسمت ابتدا جملات اختلالی را جدا نموده (شناسایی کرده) و کنارگذاشته و معادله‌ی حاصل را که ساده شده حل نموده، $x_{(\circ)}$ (جواب مرتبه صفرم) را بدست می‌آوریم، سپس جمله یا جملات اختلالی که در معادله اختلال ایجاد کرده‌اند را وارد نموده و بعد از شناسایی عامل اختلال x را به صورت سری توانی از عامل اختلال نوشته یعنی

$$x = x_{(\circ)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^{2} x_{(2)} + \cdots \qquad (۱-۲)$$

۱) $f_{(x)}$ می‌توان متشکل از توابع چندجمله‌ای یا مثلثاتی یا نمایی یا ... و یا ترکیبی از این‌ها باشد.

که در این جا λ عامل اختلالی است و $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ و ... ضرایب مجهول و $x_{(0)}$ همان جواب مرتبه صفرم است که از حل معادله‌ی بدون اختلال بوجود آمده است. با قرار دادن $x = x_{(0)} + \lambda x_{(1)} + \lambda^2 x_{(2)} + \cdots$ در معادله اصلی و متحد قرار دادن جملات از مرتبه مساوی نسبت به λ در دو طرف تساوی $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ و ... بدست می‌آیند و با بدست آمدن ضرایب و قرار دادن در معادله x بدست می‌آید.

هر چقدر قدر مطلق عامل اختلالی کوچک‌تر از ۱ باشد سریع‌تر می‌توان به جواب واقعی $f_{(x)} = 0$ نزدیک شد.

قسمت دوم: این قسمت خود به دو بخش تقسیم می‌شود. دسته اول مربوط به معادلاتی می‌شود که در آن‌ها تابع $f_{(x)}$ مجهول می‌باشد (مربوط به معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی و ... می‌شوند). در این قسمت تابع $f_{(x)}$ یا همان y را به کمک سری توانی x نوشته

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (2\text{-}2)$$

و با قرار دادن در معادله و نگه داشتن جملات تا مرتبه‌ی مورد نیاز ضرایب جملات هم مرتبه را در دو طرف تساوی با هم برابر قرار می‌دهیم و بدین ترتیب a_iها را محاسبه می‌نماییم و با محاسبه‌ی a_iها تابع $f_{(x)}$ تا مرتبه مورد نیاز به دست می‌آید. (حل با استفاده از بسط دادن) در دسته‌ی دوم نیز تابع $f_{(x)}$ مجهول است اما این جا $f_{(x)}$ را به کمک سری توانی λ (عددی ثابت و کوچک) نوشته

$$y = f_{(x)} = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots \qquad (3\text{-}2)$$

که y_0، y_1، y_2 و ... توابعی مجهول از x هستند که با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۳) در معادله اصلی و مساوی قرار دادن ضرایب هم مرتبه λ، y_0، y_1، y_2 و ... بدست می‌آیند. در این جا معمولاً y_0 و y_1 و حداکثر y_2 را بدست می‌آوریم و از جملات دارای λ^3 و λ^4 و ... به دلیل کوچکی λ صرف‌نظر می‌نماییم. (حل با کمک روش اختلال)

۲-۲ چندجمله‌ای‌های درجه ۲ و ۳

بعضی از مثال‌های این فصل را می‌توان مستقیم و بدون روش بسط و اختلال حل کرد، اما هدف از آوردن این مثال‌ها درک بیشتر این روش می‌باشد.

مثال ۱: معادله $x^2 - 2x + \frac{1}{10} = 0$ را با روش اختلال تا مرتبه سوم نسبت به عامل اختلال حل کنید.

ضریب جمله‌ی x^2 یک است و ضریب جمله x، منفی دو و ضریب جمله ثابت ۱، $\frac{1}{10}$ می‌باشد، بنابراین چون $\frac{1}{10}$ از لحاظ قدرمطلق کوچکتر از بقیه ضرایب است به عنوان عامل اختلال $\frac{1}{10}$ را انتخاب

می‌نماییم $(\lambda = \frac{۱}{۱۰})$ با کنار گذاشتن $\frac{۱}{۱۰}$ معادله $x^{۲}(۰) - ۲x(۰) = ۰$ را در نظر می‌گیریم و این معادله را حل می‌نماییم:

$$x_{(۰)}^{۲} - ۲x_{(۰)} = ۰ \rightarrow x_{(۰)} = \begin{cases} ۰ \\ ۲ \end{cases} \qquad (۱)$$

حالا معادله اصلی $x^{۲} - ۲x + \frac{۱}{۱۰} = ۰$ را در نظر می‌گیریم که در آن عامل اختلال $\lambda = \frac{۱}{۱۰}$ به معادله اضافه شده:

$$x^{۲} - ۲x + \lambda = ۰ \qquad (۲)$$

حال x را به صورت سری توانی از λ می‌نویسیم و جملاتِ تا مرتبه سوم نسبت به λ را نگه می‌داریم:

$$x = x_{(۰)} + \lambda x_{(۱)} + \lambda^{۲} x_{(۲)} + \lambda^{۳} x_{(۳)} \qquad (۳)$$

با قرار دادن در معادله (۲) داریم:

$$(x_{(۰)} + \lambda x_{(۱)} + \lambda^{۲} x_{(۲)} + \lambda^{۳} x_{(۳)})^{۲} - ۲(x_{(۰)} + \lambda x_{(۱)} + \lambda^{۲} x_{(۲)} + \lambda^{۳} x_{(۳)}) + \lambda = ۰$$

$$\rightarrow x_{(۰)}^{۲}\left(۱ + \lambda \frac{x_{(۱)}}{x_{(۰)}} + \lambda^{۲} \frac{x_{(۲)}}{x_{(۰)}} + \lambda^{۳} \frac{x_{(۳)}}{x_{(۰)}}\right)^{۲}$$

$$- ۲x_{(۰)} - ۲\lambda x_{(۱)} - ۲\lambda^{۲} x_{(۲)} - ۲\lambda^{۳} x_{(۳)} + \lambda = ۰$$

$$\rightarrow x_{(۰)}^{۲}\left(۱ + \lambda^{۲} \frac{x_{(۱)}^{۲}}{x_{(۰)}^{۲}} + ۲\lambda \frac{x_{(۱)}}{x_{(۰)}} + ۲\lambda^{۲} \frac{x(۲)}{x_{(۰)}} + ۲\lambda^{۳} \frac{x_{(۳)}}{x_{(۰)}} + ۲\lambda^{۳} \frac{x_{(۱)} x_{(۲)}}{x_{(۰)}^{۲}}\right)$$

$$- ۲x_{(۰)} - ۲\lambda x_{(۱)} - ۲\lambda^{۲} x_{(۲)} - ۲\lambda^{۳} x_{(۳)} + \lambda = ۰$$

ابتدا جملات $\lambda^{۰}$ را متحد قرار می‌دهیم: (ضرایب $\lambda^{۰}$ را متحد قرار می‌دهیم)

$$O_{(۰)} : x_{(۰)}^{۲} - ۲x_{(۰)} = ۰$$

که این همان معادله (۱) است که حل کردیم.

به همین ترتیب ضرایب جملات $\lambda^{۱}$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$O_{(۱)} : ۲x_{(۱)} x_{(۰)} - ۲x_{(۱)} + ۱ = ۰ \rightarrow x_{(۱)} = \frac{۱}{۲} \frac{۱}{۱ - x_{(۰)}} \qquad (۴)$$

به همین ترتیب برای λ^2 داریم:

$$O_{(2)}:\left(x_{(1)}^2+2x_{(2)}x_{(0)}-2x_{(2)}\right)=0\rightarrow x_{(2)}=\frac{x_{(1)}^2}{2-2x_{(0)}}$$

$$\xrightarrow{\text{از }(4)} x_{(2)}=\frac{1}{8}\frac{1}{(1-x_{(0)})^3}$$

با متحد قرار دادن جملات λ^3 داریم:

$$O_{(3)}:\lambda^3\left(2x_{(3)}x_{(0)}+2x_{(1)}x_{(2)}-2x_{(3)}\right)=0$$

$$\rightarrow x_{(3)}=\frac{x_{(1)}x_{(2)}}{1-x_{(0)}}=\frac{1}{16}\frac{1}{(1-x_{(0)})^5}$$

با بدست آمدن $x_{(1)}$ و $x_{(2)}$ و $x_{(3)}$ برحسب $x_{(0)}$ و جاگذاری در معادله (۳) و قرار دادن $\lambda=\frac{1}{10}$ داریم:

$$x_{(0)}=0\rightarrow x=0+\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{16}\right)\rightarrow x=0{,}05131$$

اگر این جواب را با جواب واقعی مقایسه کنیم تا ۵ رقم اعشار صحیح می‌باشد. به علاوه اگر به جای اینکه تا مرتبه سوم حساب کنیم تا مرتبه‌های بالاتری حساب می‌کردیم جواب دقیق‌تر هم می‌شد.

$$x_{(0)}=2\rightarrow x=2+\left(\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^2\left(-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}\right)^3\left(-\frac{1}{16}\right)\rightarrow x=1{,}94868$$

اگر این جواب را با مقدار حقیقی ریشه دوم مقایسه کنیم در این جا نیز تا ۵ رقم اعشار صحیح است. هر چقدر رتبه‌ی اختلال (مرتبه‌ای که جواب را تا آن مرتبه محاسبه می‌کنیم) بالاتر رود جواب دقیق‌تر می‌شود یعنی جواب را می‌توان باز هم دقیق‌تر نمود.

در این جا مثالی از معادله درجه ۳ می‌زنیم که در آن عامل اختلال کوچک نیست اما با استفاده از اختلال مرتبه دوم با تقریب خوبی به جواب واقعی نزدیک می‌شویم و این نشان دهنده کاربرد وسیع این روش است.

مثال ۲: معادله زیر را تا مرتبه دوم حل نمایید.

$$3y^3-8y-1=0$$

در این جا نیز ابتدا معادله را ساده‌تر کرده و به معادله (۱) تبدیل می‌کنیم و جواب $y_{(0)}$ را بدست می‌آوریم و سپس از روی $y_{(0)}$ با استفاده از اختلال به جواب واقعی نزدیک‌تر می‌شویم:

$$3y_{(0)}^3 - 8y_{(0)} = 0 \tag{1}$$

$$\rightarrow y_{(0)} = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases}$$

حال معادله (۱) را با وارد کردن $\lambda = -1$ به معادله (۲) تبدیل می‌کنیم.

$$3y^3 - 8y + \lambda = 0 \tag{2}$$

y را برحسب توان‌های λ تا مرتبه دوم بسط می‌دهیم.

$$y = y_{(0)} + \lambda y_{(1)} + \lambda^2 y_{(2)} \tag{3}$$

با جایگذاری در معادله (۲) داریم:

$$3\left(y_{(0)} + \lambda y_{(1)} + \lambda^3(3)\right)^3 - 8\left(y_{(0)} + \lambda y_{(1)} + \lambda^3 y(3)\right) + \lambda = 0$$

در این جا نیز مانند مثال قبل ضرایب توان‌های مساوی λ را در دو طرف تساوی متحد قرار می‌دهیم:

$$O_{(1)} : 3\left(3y_{(0)}^2 y_{(1)}\right) - 8y_{(1)} + 1 = 0 \rightarrow y_{(1)} = -\frac{1}{9y_{(0)}^2 - 8}$$

$$O_{(2)} : 3\left(3y_{(0)}y_{(1)}^2 + 3y_{(0)}^2 y_{(2)}\right) - 8y_{(2)} = 0 \rightarrow y_{(2)} = \frac{9y_{(0)}y_{(1)}^2}{8 - 9y_{(0)}^2} \tag{5}$$

$$y_{(0)} = \begin{cases} 0 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} \end{cases} \xrightarrow{\text{از } (4)} y_{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} \end{cases} \xrightarrow{\text{از } (5)} y_{(2)} = \begin{cases} 0 \\ -0{,}0036 \\ 0{,}0036 \end{cases}$$

با جایگذاری در معادله (۳) داریم:

$$y = \begin{cases} 0 - \frac{1}{8} + 0 = -0{,}125 \\ \sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{16} - 0{,}0036 = 1{,}6919 \\ -\sqrt{\frac{8}{3}} + \frac{1}{16} + 0{,}0036 = -1{,}5669 \end{cases}$$

جواب‌های بدست آمده تا ۳ رقم اعشار با جواب واقعی مطابقت دارد و می‌توان با ادامه این روند به جواب واقعی نزدیک‌تر هم شد.

۲-۳ چندجمله‌ای‌های درجه n

در این بخش مثالی که زده می‌شود مربوط به $n = ۵$ است و با استفاده از شیوه حل این مثال می‌توانید معادلات درجه بالاتر را نیز حل کنید.

مثال ۳: معادله $(x-۱)^۵ - \frac{۱}{۱۰}x^۳ + x - ۰/۹۵ = ۰$ را حل کنید (x را تا مرتبه دوم بدست آورید)

برای حل مسأله ابتدا باید معادله را به معادله ساده‌تری که به راحتی حل می‌شود تبدیل کرد (معادله (۱)) و با کنار گذاشتن جملات $۰/۰۵$ و $-\frac{۱}{۱۰}x^۳$ چون از لحاظ قدرمطلق دارای کوچکترین ضرایب می‌باشند معادله را ساده نمود.

$$(x-۱)^۵ - \frac{۱}{۱۰}x^۳ + x - ۱ + ۰/۰۵ = ۰ \qquad (۱)$$

معادله را به معادله (۲) تبدیل می‌کنیم.

$$(x_{(۰)} - ۱)^۵ + x_{(۰)} - ۱ = ۰ \qquad (۲)$$
$$\rightarrow (x_{(۰)} - ۱)\left((x_{(۰)} - ۱)^۴ + ۱\right) = ۰ \rightarrow x_{(۰)} = ۱$$

معادله (۲) تنها یک جواب دارد پس x مرتبه صفر برابر ۱ می‌باشد. حال دو جمله $-\frac{x^۳}{۱۰}$ و $۰/۰۵$ را باید اضافه کنیم برای این کار $\lambda = \frac{۱}{۱۰}$ می‌گیریم پس:

$$-\frac{۱}{۱۰}x^۳ \xrightarrow{(۳)} -\lambda x^۳ \qquad ۰/۰۵ \xrightarrow{(۴)} \frac{\lambda}{۲}$$

با استفاده از تبدیل‌های (۳) و (۴) و اضافه نمودن این جملات به معادله (۲)، معادله (۲) به معادله مطلوب مسأله تبدیل می‌شود.

$$(x-۱)^۵ - \lambda x^۳ + x - ۱ + \frac{\lambda}{۲} = ۰ \qquad (۵)$$

معادله (۵) همان معادله $(x-۱)^۵ - \frac{۱}{۱۰}x^۳ + x - ۰/۹۵$ می‌باشد.

$$x = ۱ + \lambda x(۱) + \lambda^۲ x(۲) \qquad (۶)$$

با جایگذاری رابطه (۶) در معادله (۵) داریم:

$$(\lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)})^۵ - \lambda(۱ + \lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)})^۳ + ۱ + \lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)} - ۱ + \frac{\lambda}{۲} = ۰$$

با نگه‌داشتن جملات تا مرتبه دوم و حذف جملات مرتبه بالاتر داریم:

$$-\lambda - ۳\lambda^۲ x_{(۱)} + ۱ + \lambda x_{(۱)} + \lambda^۲ x_{(۲)} - ۱ + \frac{\lambda}{۲} = ۰$$

$$\lambda^۲(-۳x_{(۱)} + x_{(۲)}) + \lambda(x_{(۱)} - \frac{۱}{۲}) = ۰$$

$$O_{(۱)} : x_{(۱)} - \frac{۱}{۲} = ۰ \to x_{(۱)} = \frac{۱}{۲}$$

$$O_{(۲)} : -۳x_{(۱)} + x_{(۲)} = ۰ \to x_{(۲)} = \frac{۳}{۲}$$

با بدست آوردن ضرایب و جایگذاری در معادله داریم:

$$x = ۱ + \frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۲} = ۱/۰۶۵$$

جواب واقعی ۱/۰۷۳ می‌باشد که می‌بینید اختلاف جواب بدست آمده با جواب واقعی ۰/۰۰۸ می‌باشد یعنی خطا کمتر از ۰/۰۱ می‌باشد. البته در صورت نیاز می‌توان با بسط تا مرتبه‌های بالاتر تقریب را بالاتر برد.

دیدیم مثال ۳ نیز که معادله درجه ۵ بود با روش اختلال حل شد به همین ترتیب که مثال ۳ حل شد معادله‌های با درجه‌های بالاتر نیز حل می‌شوند البته دیدیم در این مثال نیز λ که عامل ایجاد اختلال در معادله بود کوچک انتخاب شد ($\lambda = \frac{۱}{۱۰}$) اگر معادله طوری باشد که $|\lambda|$ کوچک نشود آن وقت برای دستیابی به جواب مناسب باید بسط را تا مرتبه‌های بالاتر بنویسیم و جملات بیشتری را نگه داریم که در این کتاب با مسائلی که λ خیلی کوچک می‌باشد سر و کار داریم.

۴-۲ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول و دوم

در دو بخش جاری به حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از بسط دادن و اختلال می‌پردازیم. بعضی از این معادلات بدون استفاده از روش‌های بسط و اختلال نیز قابل حل‌اند اما این مثالها برای مقایسه بین دو روش و تفهیم بیشتر روش آورده شده در این فصل برای استفاده در حل معادلات غیر قابل حل به روش‌هایی که می‌شناسیم، می‌باشد.

مثال ۴: معادله $y' = y$ را حل کنید با شرط اولیه[۱] $y_{(۰)} = ۱$

روش اول: ابتدا سری توانی y را می‌نویسیم:

۱) منظورمان از $y_{(۰)} = ۱$، همان $f_{(۰)} = ۱$ یعنی y در نقطه صفر ($x = ۰$) برابر یک می‌باشد و دقت کنید با y مرتبه‌ی صفرم اشتباه گرفته نشود.