

## بخش اول: یادگیری مثلثات سریع

(تخمین سریع مقادیر توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا)

### فصل اول: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم سینوس

تخمین مقادیر مختلف تابع محترم سینوس وقتی زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد ..... ۱۶

**تکنیک ۱:** تخمین مقادیر مختلف تابع محترم سینوس وقتی زاویه

بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد ..... ۱۹

**تکنیک ۲:** تخمین مقادیر تابع سینوس برای زوایای فرعی ۵ و ۱۵

و ... ، ۸۵ درجه ..... ۲۳

**تکنیک ۳:** تخمین مقادیر مختلف تابع سینوس برای زوایای بین ۵۰ تا

۶۰ درجه (زوایای خوش رفتار) ..... ۲۸

**تکنیک ۴:** تخمین مقدار تابع سینوس برای زوایای بین ۸۰ تا ۹۰

درجه (زوایای سینوس درشت) ..... ۳۱

**تکنیک ۵:** تخمین مقادیر مختلف تابع سینوس برای زوایایی که بسیار

به زوایای اصلی و فرعی نزدیک هستند ..... ۳۶

محاسبه‌ی مقدار عددی عبارتهای شامل سینوس زوایای بین ۰ تا ۹۰

درجه ..... ۴۶

روش درونیابی خطی برای پیدا کردن عدد طلایی ..... ۵۰

**تکنیک ۶:** محاسبه‌ی سینوس زوایای بیش از ۹۰ درجه ..... ۵۷

**تکنیک ۷:** محاسبه‌ی سینوس برای زوایای منفی ..... ۶۱

## فصل دوم: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم کسینوس

**تکنیک ۸:** تخمین مقادیر مختلف تابع کسینوس وقتی زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد ..... ۶۵

**تکنیک ۹:** محاسبه‌ی کسینوس زوایای بیش از ۹۰ درجه و زوایای منفی ۷۵

## فصل سوم: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم تانژانت

**تکنیک ۱۰:** تخمین مقادیر مختلف تابع محترم تانژانت وقتی که زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد ..... ۷۸

**تکنیک ۱۱:** محاسبه‌ی مقدار تانژانت برای زوایای میانی ( ۵ و ۱۵ و ۲۵ و ... و ۷۵) ..... ۸۳

استفاده از روش درونیابی خطی برای محاسبه‌ی تانژانت زوایای مختلف ..... ۸۷

**تکنیک ۱۲:** محاسبه‌ی مقادیر مختلف تابع تانژانت زوایای منفی و زوایای بیش از ۹۰ درجه ..... ۹۴

## فصل چهارم: تخمین مقادیر مختلف تابع محترم کتانژانت

**تکنیک ۱۳:** تخمین مقادیر مختلف تابع کتانژانت وقتی زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد ..... ۱۰۱

## فصل پنجم: تخمین مقادیر مختلف توابع معکوس مثلثاتی

**تکنیک ۱۴:** تخمین مقادیر مختلف توابع معکوس مثلثاتی (آرکها) ..... ۱۰۲

## فصل ششم: حل معادلات مثلثاتی

**تکنیک ۱۵:** حل معادلات مثلثاتی ..... ۱۱۴



## بخش دوم: کاربردهای مثلثات سریع

- کاربرد مثلثات سریع در یادگیری مثلثات پایه (توصیه به دبیران)..... ۱۲۲
- کاربردهای مثلثات سریع در مسائل جالب و سرگرم کننده ی روزمره ۱۲۵
- تکنیک ۱۶: تکنیک مثلث بندی..... ۱۲۶
- ۱ مکان نقطه ی A ..... ۱۲۶
- ۲ تخمین ارتفاع ..... ۱۳۱
- مثلثات سریع در کنکور ..... ۱۳۶
- نگاهی به کنکور ۹۴ ..... ۱۴۹

بخش اول

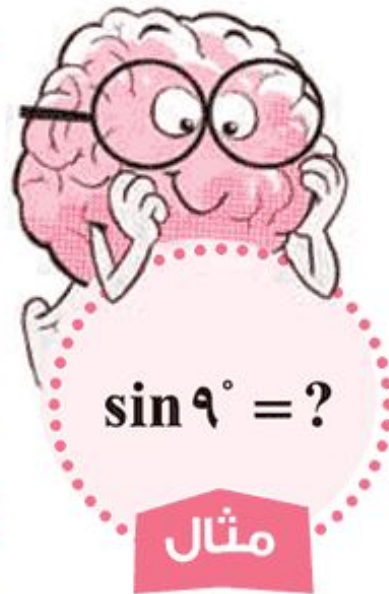
# یادگیری مثلثات سریع

(تخمین سریع مقادیر توابع مثلثاتی برای کلیه زوایا)

$\sin(\alpha)$



🔊 **قدم اول:** از بین زوایای اصلی و فرعی، نزدیک‌ترین زاویه به زاویه‌ی  $9^\circ$ ، زاویه‌ی  $10^\circ$  است. که عدد طلایی مربوط به اون هم برابر ۷ است. پس ما همون عدد طلایی رو برای زاویه‌ی  $9^\circ$  در نظر می‌گیریم.



🔊 **قدم دوم:** زاویه رو با عدد طلایی جمع می‌کنیم.  $9+7=16$

🔊 **قدم سوم:** دو رقم به آن ممیز می‌زنیم.

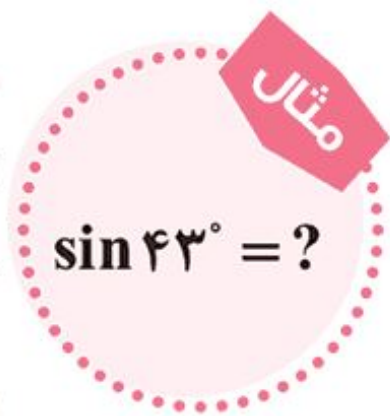
$$16 \xrightarrow{\text{دو رقم اعشار می‌زنیم.}} 0.16$$

$$\begin{aligned} \sin 9^\circ &= 0.16 \\ \Rightarrow \sin 9^\circ &= 0.156 \end{aligned}$$

جواب با تقریب چشمی

جواب با ماشین حساب مهندسی

🔊 **قدم اول:** از بین زوایای اصلی و فرعی، نزدیک‌ترین زاویه به زاویه‌ی مورد نظر ما زاویه‌ی  $45^\circ$  است، که عدد طلایی آن برابر ۲۵ است. پس ما همین عدد طلایی را مورد استفاده قرار می‌دهیم.



🔊 **قدم دوم:** مقدار زاویه رو با عدد طلایی جمع می‌کنیم.

$$43+25=68$$





تکنیک تخمین مقادیر مختلف تابع محترم  
تانژانت وقتی که زاویه بین ۰ تا ۹۰ درجه باشد.

۱۰

خوب حتماً همه‌ی شما می‌دونید که:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  و  
الان اگه بخواید مثلاً  $\tan 2^\circ$  رو حساب کنید، می‌تونید  
مقدار  $\sin 2^\circ$  رو بر  $\cos 2^\circ$  تقسیم کنید و خودتون رو به  
جواب برسونید. این جوریه:

$$\tan 2^\circ = \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} = \frac{0/34}{0/94} = \frac{34}{94} = \frac{17}{47}$$

اما برای اینکه راحت‌تر و سریع‌تر بتونید این کار رو انجام  
بدید، پیشنهاد می‌کنم حتماً به این روشی که میگم مسائل  
رو حل کنید. یه جدول براتون تدارک دیدم به نام «جدول  
طلایی ملینا برای تانژانت». این جدول هم طبق معمول دوتا  
سطر داره؛ در سطر اول مقادیر زوایای اصلی از ۰ تا ۸۵ رو  
تو خودش جا داده ( $\tan 90^\circ$  نداریم!) و در سطر دوم هم  
«اعداد طلایی تانژانت» زوایا رو قرار دادم. این جدول محترم  
رو می‌تونید در صفحه‌ی بعد ببینید.

## استفاده از روش درونیابی خطی برای محاسبه‌ی تانژانت زوایای مختلف:

با روش درونیابی خطی قبلاً آشنا شدید، سه تا مثال خوب و جامع هم در بخش sin ها براتون حل کردم. فقط برای یادآوری مجدد، اینجا یه مثال دیگه هم براتون حل می‌کنم. اتفاقاً وقتی صحبت از tan باشه، روش درونیابی خطی بیشتر کاربرد داره.

👉 **قدم اول:** زاویه  $57^\circ$  بین زوایای  $50^\circ$  و  $60^\circ$  واقع شده.

$\alpha$	$50^\circ$	$57^\circ$	$60^\circ$
$M_{\tan \alpha}$	69	?	110

$+10^\circ$  (between  $50^\circ$  and  $60^\circ$ )  
 $+7^\circ$  (between  $50^\circ$  and  $57^\circ$ )  
 $+41$  (between 69 and 110)  
 $X$  (between ? and 110)



تناسب رو تشکیل میدیم.

مقادیری که به زاویه اضافه می‌شود.	مقادیری که به عدد طلایی اضافه می‌شود.
10	41
7	$x = 28/7$

پس عدد طلایی رو به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} M_{\tan 57^\circ} &= M_{\tan 5^\circ} + 28/7 \\ &= 69 + 28/7 \\ &= 97/7 \end{aligned}$$

« قدم دوم: مقدار زاویه رو با عدد طلایی جمع می کنیم.

$$\begin{aligned} \alpha + M_{\tan \alpha} &= 57 + 97/7 \\ &= 154/7 \end{aligned}$$

« قدم سوم: دو رقم به اعشار می رویم.

$$154/7 \longrightarrow 1/547$$

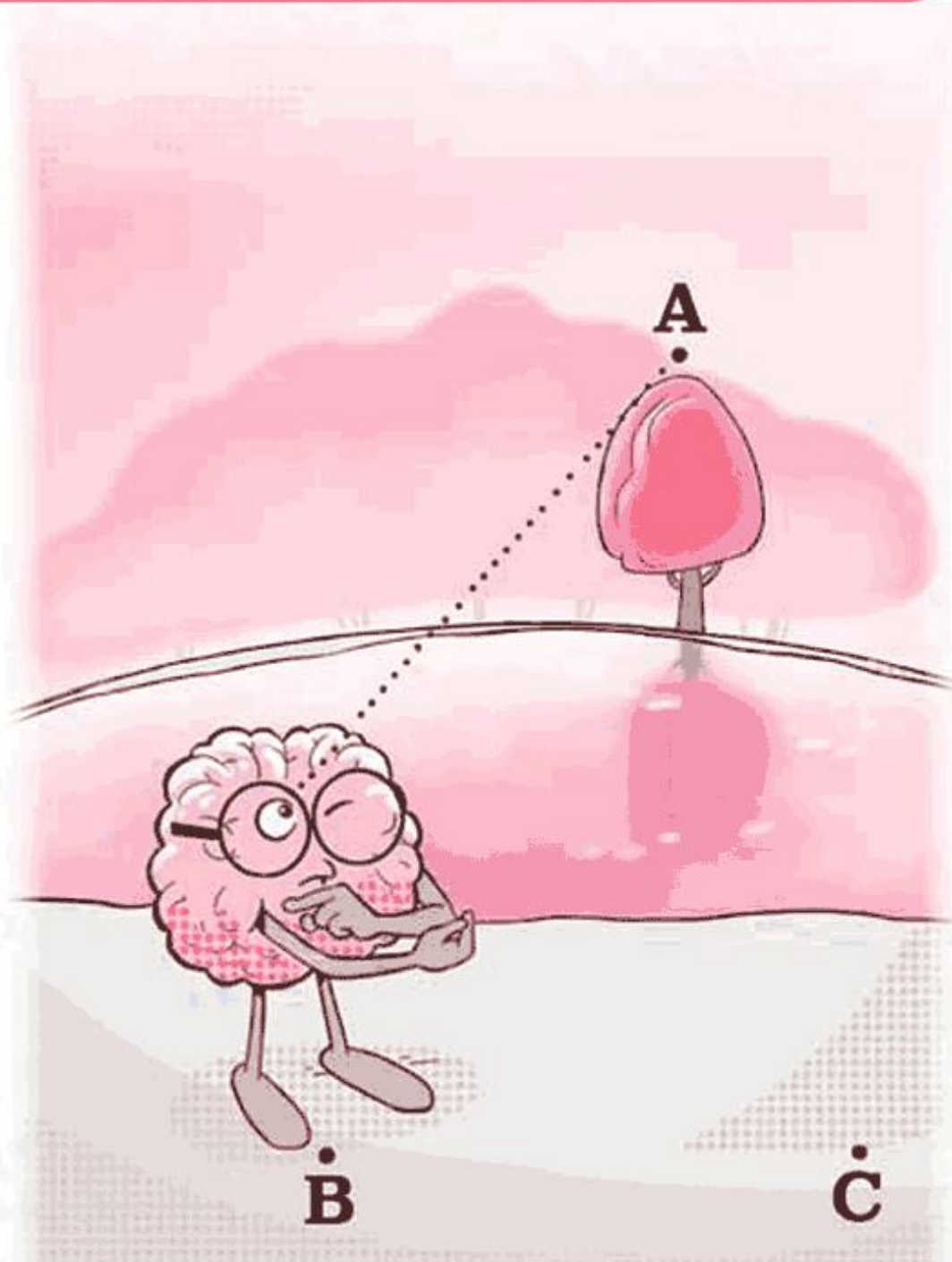
$$\begin{aligned} \tan 57^\circ &= 1/547 && \text{تخمین با روش مؤلف} \\ \Rightarrow \tan 57^\circ &= 1/539 && \text{تخمین با ماشین حساب مهندسی} \end{aligned}$$

همانطور که می بینید اختلاف جواب ما با جواب ماشین حساب مهندسی برابر ۰/۰۰۸ است و این یعنی شاهکار مؤلف! مبارکتون باشه.

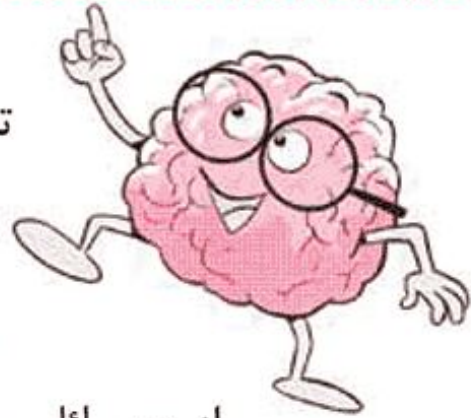


بخش دوم

# کاربردهای مثلثات سریع



## کاربردهای مثلثات سریع در مسائل جالب و سرگرم کننده‌ی روزمره:



تخمین توابع مثلثاتی بدون ماشین حساب می‌تونه بسیار درخور توجه باشه. با کسب این مهارت می‌تونیم انواع کاملاً جدیدی از مسائل رو حل کنیم. خیلی از مردم مثلثات رو فقط به مثلث‌ها مربوط می‌دونن، در صورتی که موضوع خیلی خیلی گسترده‌تر از این است. در اینجا منظور بحث من همه‌ی کاربردهای مثلثات نیست، (چون کاربردهای مثلثات خیلی بیشتر از اون چیزیه که فکر می‌کنید. در مسائل مهندسی برق، عمران، مکانیک، کوانتوم، اخترشناسی، ارتعاشات و ...) بلکه در اینجا می‌خوام به حل چند مثال جالب و سرگرم‌کننده اکتفا کنم. به زودی خودتون متوجه می‌شین که با کسب مهارت در تخمین توابع مثلثاتی خیلی بیشتر از گذشته از ریاضیات بدون ماشین حساب لذت می‌برید.

وقتی که با دانش‌آموزان و یا دانشجویان به کوه میریم، من معمولاً یه نقاله، یه خط‌کش و یه متر همراه خودم می‌برم و در حین تفریح، ما معمولاً ارتفاع یک درخت بلند که در دامنه‌ای دوردست روئیده و یا ارتفاع قله‌های خاص یا عرض دریاچه یا