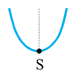
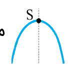
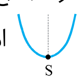
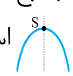
درس چهارم: نمودار تابع درجهٔ ۲

نمودار تابع درجهٔ ۲

نمودار تابع درجهٔ ۲ (سهمی) به یکی از صورت‌های  یا  می‌باشد که به نقطهٔ S رأس نمودار (سهمی) می‌گویند.

اگر در تابع درجهٔ۲، ضریب $x^{۲}$ مثبت باشد آنگاه دهانهٔ سهمی رو بـه بـالا و نمـودار بـه شـکل  است. در این حالت رأس سهمی نقطهٔ مینیمم (min) یا کمترین مقدار تابع خواهد بود.

اگر در تابع درجهٔ ۲، ضریب $x^{۲}$ منفی باشد، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پـایین و نمـودار بـه شکل  است. در این حالت رأس سهمی نقطهٔ ماکسیمم (max) یا بیشترین مقدار تابع خواهد بود.

مختصات رأس سهمی، در ضابطهٔ تابع درجهٔ ۲

در تابع درجهٔ ۲ به معادلهٔ $f(x)=y=ax^{۲}+bx+c$، اگـر $S(x_S,y_S)$ مختصـات رأس سهمی باشد، طول نقطهٔ رأس سهمی (x_S) از رابطهٔ $x_S=\frac{-b}{۲a}$ بـه دسـت می‌آیـد کـه بـا جای‌گذاری این مقدار در معادلـهٔ $f(x)$ یعنـی محاسـبهٔ $y_S=f(x_S)=f(\frac{-b}{۲a})$ مقـدار عرض نقطهٔ S یعنی عرض رأس سهمی به دست می‌آید.

نکتــه

برای محاسبهٔ عرض نقطهٔ رأس سهمی (y_S) بدون جای‌گذاری در ضابطهٔ $f(x)$ نیـز می‌توانید مقدار y_S را از رابطهٔ $y_S=-\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a}$ حساب کنید.

محور تقارن سهمی و نقاط تقاطع سهمی با محورهای مختصات

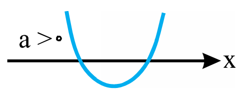
محور تقارن سهمی: در نمودار تابع درجهٔ ۲، خطی که از رأس سهمی (S) می‌گذرد و موازی محور y ها یا عمود بر محور x ها رسم می‌شود محور تقارن سهمی نامیده می‌شود و معادلـهٔ این خط به صورت $x=\frac{-b}{۲a}$ است. در واقع معادلهٔ محور تقارن سهمی همـان خـط $x=x_S$ است.

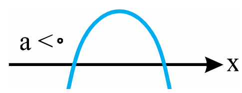
نقاط تقاطع سهمی با محورهای مختصات

برای به دست آوردن نقاط تقاطع سهمی $f(x)=ax^{۲}+bx+c$ با محور x ها کافی اسـت به جـای $f(x)$ یـا y در ضـابطهٔ تـابع، عـدد صفر را قـرار دهـیم و معادلـهٔ درجـهٔ دوم

$ax^2+bx+c=0$ را حل کنیم. جواب‌های به دست آمده از حل این معادلهٔ درجهٔ ۲، طول نقاط برخورد نمودار تابع با محور x ها هستند. که به وضوح عرض (y) این نقاط هم برابر صفر می‌باشد. اگر معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را به روش Δ یا همان روش کلی حل کنید یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

حالت اول: اگر $\Delta>0$ باشد پس معادلهٔ درجهٔ ۲ دارای ۲ جواب است و این یعنی نمودار محور x ها را حتماً در ۲ نقطه قطع می‌کند که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

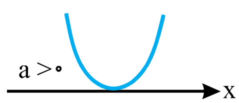


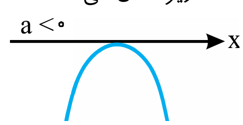


نکته

در این حالت نمودار تابع $f(x)$ حداقل از سه ناحیه (سه ناحیه یا هر چهار ناحیه) از ۴ ناحیهٔ مختصاتی عبور می‌کند.

حالت دوم: اگر $\Delta=0$ آنگاه معادلهٔ درجهٔ ۲ دارای ۱ جواب (جواب مضاعف) است و این یعنی نمودار محور x ها را در یک نقطه قطع می‌کند که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

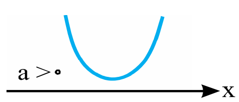


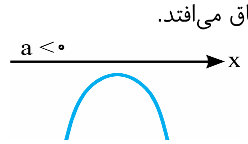


نکته

در این حالت با شرط $a<0$ نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع سوم و چهارم عبور می‌کند و اگر $a>0$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع اول و دوم عبور می‌کند.

حالت سوم: اگر $\Delta<0$ آنگاه معادلهٔ درجه ۲ ریشهٔ حقیقی ندارد و این بدان معنی است که نمودار محور x ها را قطع نمی‌کند یعنی یا نمودار کاملاً بالای محور x ها قرار دارد و یا نمودار کاملاً پایین محور x ها قرار دارد. که با توجه به علامت a (ضریب x^2) یکی از دو حالت روبه‌رو اتفاق می‌افتد.





نکته

در این حالت اگر $a<0$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع سوم و چهارم عبور می‌کند و اگر $a>0$ آنگاه نمودار تابع $f(x)$ فقط از ربع اول و دوم عبور خواهد کرد.

محل برخورد نمودار تابع درجهٔ ۲ با محور yها

همانطور که قبلاً نیز گفته شد محل برخورد نمودار تابع $f(x)$ با محور yها همان نقطهٔ عرض از مبدأ تابع است، پس برای تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ کافی است جای x در ضابطهٔ تابع، عدد صفر را قرار دهیم و مقدار $f(x)$ را به دست آوریم.

$$f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f(0)=a(0)^2+b(0)+c \Rightarrow f(0)=c$$

پس نقطهٔ برخورد سهمی به معادلهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ با محور yها همیشه نقطهٔ $(0,c)$ است.

مثال!

اگر منحنی $y=(a-2)x^2+ax+4$ نسبت به خط $x=\frac{1}{2}$ متقارن باشد، این منحنی محور xها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟

۱) $1+\sqrt{17}$ ۲) $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ ۳) $1-\sqrt{17}$ ۴) $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

پاسخ: محور تقارن منحنی خط $x=+\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$\text{محور تقارن}: x=\frac{-b}{2a}=\frac{-a}{2(a-2)}=\frac{1}{2} \Rightarrow -a=\frac{1}{2}(2(a-2)) \Rightarrow -a=a-2 \Rightarrow a=1$$

برای یافتن محل برخورد منحنی با محور xها باید $y=0$ قرار دهیم و از آنجا x را محاسبه کنیم:

$$y=0 \Rightarrow 0=(1-2)x^2+x+4 \Rightarrow -x^2+x+4=0$$

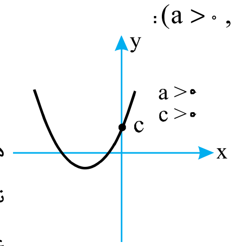
$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-1)\times4}}{2\times(-1)}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{17}}{-2}=\frac{1-\sqrt{17}}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{17}}{-2}=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

گزینهٔ ۲ صحیح است.

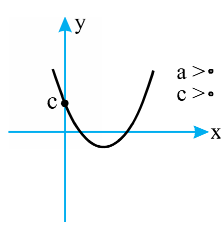
نمودار تابع درجهٔ ۲

با توجه به علامت a و c در تابع درجهٔ ۲ (با فرض $c\neq0$) چهار حالت زیر امکان‌پذیر است. (با توجه به علامت Δ نمودار محور طول‌ها را در دو، یک و یا صفر نقطه قطع می‌کند.)

حالت اول $(a>0\ ,\ c>0)$:



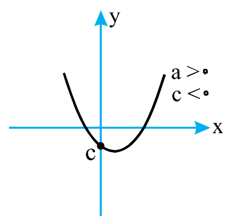
هر دو ریشه منفی و نمودار از ناحیهٔ ۴ عبور نمی‌کند.

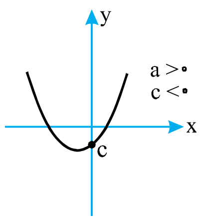


هر دو ریشه مثبت و نمودار از ناحیهٔ ۳ عبور نمی‌کند.

حالت دوم $(a > 0 , c < 0)$:

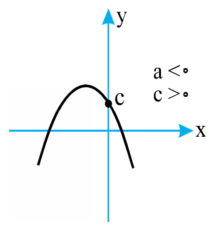
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است و نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (در این حالت Δ همواره مثبت است.)

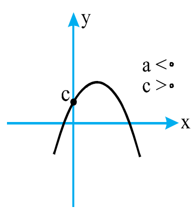




حالت سوم $(a < 0 , c > 0)$:

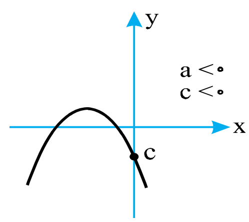
یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است و نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. (در این حالت Δ همواره مثبت است.)



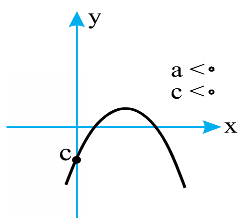


حالت چهارم $(a < 0 , c < 0)$:

هر دو ریشه منفی و نمودار از ناحیهٔ ۱ عبور نمی‌کند.



هر دو ریشه مثبت و نمودار از ناحیهٔ ۲ عبور نمی‌کند.



نکته

در حالت‌های دوم و سوم، Δ همواره مثبت است و معادله حتماً دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامت است. (a و c مختلف‌العلامت $\Leftrightarrow$ دو ریشهٔ معادله مختلف‌العلامت)

در حالت‌های اول و چهارم، Δ می‌تواند صفر یا منفی نیز باشد. یعنی برای حالت‌های اول و چهارم شما می‌توانید برای هر نمودار، دو حالت دیگر را در نظر بگیرید، یکی حالتی که $\Delta = 0$ یعنی وقتی نمودار بر محور xها مماس است و یک حالت وقتی است که $\Delta < 0$ یعنی نمودار محور xها را قطع نمی‌کند که در این حالت، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

در حالت‌های اول و چهارم اگر Δ مثبت یا معادله دارای دو ریشه باشد آنگاه آن دو ریشه حتماً هم‌علامت هستند.

مثال

اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

۱) $\{a : 1 < a < 5\}$ ۲) $\{a : a < 1\}$ ۳) ϕ ۴) $\mathbb{R}$

پاسخ: عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c همواره منفی است، اگر نمودار $y=ax^2+bx+c$ کاملاً زیر محور xها باشد، پس باید $\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$، بنابراین برای این که عبارت درجهٔ دوم $(a-1)x^2+(a-1)x+1$ همواره منفی باشد باید:

$$\begin{cases} x^2\ \text{ضریب} <0 \Rightarrow (a-1)<0 \Rightarrow a<1 \quad (1)\\ \Delta<0 \Rightarrow (a-1)^2-4(a-1)<0 \xrightarrow{\text{از } a-1 \text{ فاکتور می‌گیریم}} \\ (a-1)(a-1-4)<0 \Rightarrow (a-1)(a-5)<0 \end{cases}$$

با توجه به ریشه‌های معادلهٔ $(a-1)(a-5)=0$، سه حالت در نظر می‌گیریم:

۱) اگر $a<1$ آنگاه $\overbrace{(a-1)}^{-}\overbrace{(a-5)}^{-} \Rightarrow (a-1)(a-5)>0$ پس $a<1$ قابل قبول نیست.

۲) اگر $1<a<5$ آنگاه $\overbrace{(a-1)}^{+}\overbrace{(a-5)}^{-} \Rightarrow (a-1)(a-5)<0$ پس $1<a<5$ قابل قبول است.

۳) اگر $a>5$ آنگاه $\overbrace{(a-1)}^{+}\overbrace{(a-5)}^{+} \Rightarrow (a-1)(a-5)>0$ پس $a>5$ قابل قبول نیست.

پس برای آن که Δ ی معادله، منفی باشد، (2) $1<a<5$ به دست می‌آید.

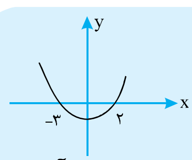
از آن‌جا که شرایط (1) و (2) باید با هم برقرار باشند، بنابراین مقداری برای a یافت نمی‌شود؛ پس این عبارت نمی‌تواند همواره منفی باشد. **گزینهٔ ۳ صحیح است.**

نکته بسیار مهم

اگر نقاط $(\alpha,0)$ و $(\beta,0)$ ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲ باشند، آنگاه صورت کلی آن معادله به صورت $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ و خط $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ محور تقارن منحنی خواهد بود.

مثال

معادلهٔ سهمی به شکل مقابل، کدام عبارت می‌تواند باشد؟



۱) x^2+x-4

۲) $\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x-9$

۳) $-x^2-x+4$

۴) $-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x+9$

پاسخ: با توجه به این که سهمی از نقاط $(2,0)$ و $(-3,0)$ می‌گذرد، پس معادلهٔ آن به فرم $y=a(x-2)(x+3)$ است و چون سهمی دارای مینیمم است، پس $a>0$ می‌باشد.

$y=a(x^2+x-6)=ax^2+ax-6a$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌های ۳ و ۴ غلط هستند زیرا در این گزینه‌ها $a<0$ می‌باشد.

با توجه به این که عبارت ثابت در معادلهٔ درجهٔ ۲ یعنی $-6a$ باید ۶- برابر ضریب x^2 یعنی a باشد پس: **گزینهٔ ۲ صحیح است.**

برخورد نمودار تابع درجهٔ ۲ با یک خط یا با یک نمودار دیگر

برای به دست آوردن نقطهٔ تقاطع یک سهمی با یک خط یا یک نمودار دیگر ابتدا باید در هر دو معادله، y را تنها کنیم و در یک سمت معادله قرار دهیم و در سمت دیگر هر دو معادله روابطی برحسب x باشد. سپس معادله‌های به دست آمده را مساوی قرار داده و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. از حل این معادله، x های به دست آمده، x نقطهٔ تقاطع دو منحنی خواهند بود. کافی است این x را در یکی از دو رابطهٔ اصلی قرار دهیم تا y نقطهٔ تقاطع نیز به دست آید.

مثال

نقطهٔ (نقاط) تقاطع نمودارهای $y - x^۲ - ۴x + ۲ = ۰$ و $y = -(x-۱)^۲ + ۳$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا دو معادله را به صورت استاندارد می‌نویسیم:

$$y - x^۲ - ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow y = x^۲ + ۴x - ۲$$

$$y = -(x-۱)^۲ + ۳ \Rightarrow y = -(x^۲ - ۲x + ۱) + ۳ = -x^۲ + ۲x - ۱ + ۳$$

$$\Rightarrow y = -x^۲ + ۲x + ۲$$

حال دو معادله را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم: $x^۲ + ۴x - ۲ = -x^۲ + ۲x + ۲$

$$\Rightarrow \underline{x^۲} \underline{\underline{+۴x}} - ۲ + \underline{x^۲} \underline{\underline{-۲x}} - ۲ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ + ۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۲ = ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = -۲ \\ x_۲ = ۱ \end{cases}$$

حال کافی است این مقادیر را به جای x در یکی از روابط بالا جای‌گذاری کنیم و مقدارهای y متناظر با هریک را به دست آوریم تا نقاط برخورد به دست آید.

$$y = -(x-۱)^۲ + ۳$$

$$x = ۱ \Rightarrow y = -(۱-۱)^۲ + ۳ \Rightarrow y = ۰ + ۳ = ۳ \Rightarrow y = ۳$$

$$x = -۲ \Rightarrow y = -((-۲)-۱)^۲ + ۳ \Rightarrow y = -(-۳)^۲ + ۳ = -۹ + ۳ \Rightarrow y = -۶$$

پس نقاط $(۱,۳)$ و $(-۲,-۶)$ نقاط تقاطع دو منحنی هستند.

معادلهٔ سهمی به فرم مربع کامل

اگر معادلهٔ سهمی $f(x) = ax^۲ + bx + c$ را به فرم مربع کامل $f(x) = a(x-h)^۲ + k$ بنویسیم آنگاه مختصات رأس سهمی نقطهٔ $S(h,k)$ خواهد بود و خط $x = h$ محور تقارن سهمی می‌باشد.

نکته

مقادیر h و k را با توجه به مختصات رأس سهمی به راحتی می‌توان برحسب a، b و c محاسبه کرد.

$$x_S = \frac{-b}{۲a} = h \qquad y_S = \frac{-\Delta}{۴a} = k$$

مثال

معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^۲ - ۸x - ۱ = ۰$ را به روش مربع کامل حل کنید.

پاسخ: به کمک نکتهٔ قبل فرض می‌کنیم $f(x) = ۲x^۲ - ۸x - ۱$ یک تابع درجهٔ ۲ باشد آنگاه مختصات رأس این سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{۸}{۲\times۲} = ۲ \Rightarrow f(x_S) = f(۲) = ۲\times۴ - ۸(۲) - ۱ = ۸ - ۱۶ - ۱ = -۹$$

پس می‌توان $f(x)$ را به فرم مربع کامل نوشت:

$$f(x) = ۲(x - x_S)^۲ + y_S = ۲(x-۲)^۲ - ۹$$

در نتیجه:

$$۲x^۲ - ۸x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲(x-۲)^۲ - ۹ = ۰$$

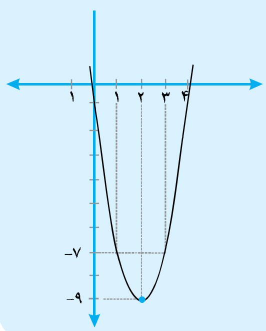
$$\Rightarrow ۲(x-۲)^۲ = ۹ \Rightarrow (x-۲)^۲ = \frac{۹}{۲} \Rightarrow x - ۲ = \pm\frac{۳}{\sqrt{۲}} \Rightarrow x = ۲ \pm \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

نتیجه: در واقع اگر نمودار تابع درجهٔ دوم $f(x) = ۲x^۲ - ۸x - ۱$ را رسم کنیم آنگاه مختصات رأس این سهمی برابر $S(۲, -۹)$ خواهد بود و نمودار ۲ ریشه دارد یعنی این نمودار محور x ها را در نقاط $x_۱ = ۲ + \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ و $x_۲ = ۲ - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$ قطع می‌کند.

$$f(x) = ۲(x-۲)^۲ - ۹$$

نقطهٔ عرض از مبدأ:

$$f(۰) = -۱ \Rightarrow (۰, -۱)$$



بهینه‌سازی

منظور از بهینه‌سازی یک کمیت، محاسبهٔ بیشترین یا کمترین مقدار ممکن برای آن کمیت است. مثلاً اگر کمیت مورد نظر سود باشد بهینهٔ کمیت سود زمانی است که بیشترین مقدار سود را داشته باشیم و اگر کمیت مورد نظر هزینه باشد بهینهٔ آن کمیت زمانی است که کمترین مقدار آن را داشته باشیم. در این فصل با مسائل بهینه‌سازی سر و کار داریم که اطلاعات مسئله یک تابع درجهٔ ۲ برحسب یک متغیر به ما می‌دهد و با توجه به علامت a (ضریب $x^۲$ در تابع درجهٔ۲) مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابع را به دست می‌آوریم.

مثال

اگر $۳x+۲y=۶۰$ آنگاه بیشترین مقدار xy چقدر است؟

پاسخ: برای یافتن بیشترین مقدار باید یک تابع درجهٔ ۲ بسازیم. برای این کار ابتدا از رابطهٔ $۳x+۲y=۶۰$، مقدار x یا y را برحسب متغیر دیگر به دست می‌آوریم و حاصل را در رابطهٔ xy جای‌گذاری می‌کنیم تا رابطهٔ مطلوب به دست آید.

$$۳x+۲y=۶۰$$

$$\Rightarrow ۲y=۶۰-۳x \Rightarrow y=\frac{۶۰-۳x}{۲} \Rightarrow y=۳۰-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow xy=x(۳۰-\frac{۳}{۲}x)$$

$$\Rightarrow xy=۳۰x-\frac{۳}{۲}x^۲ \Rightarrow xy=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x$$

برای محاسبهٔ بیشترین مقدار، xy کافی است بیشترین مقدار $-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x$ را محاسبه کنیم که یک تابع درجهٔ ۲ است پس مطلوب است: $Max(-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x)=?$

با استفاده از ویژگی‌های رأس سهمی و اینکه $a<۰$ داریم: $\frac{-b}{۲a}=\frac{-۳۰}{۲(-\frac{۳}{۲})}=\frac{-۳۰}{-۳}=۱۰$

پس بیشترین مقدار زمانی است که $x=۱۰$ باشد، حال با جای‌گذاری در رابطهٔ $xy=-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x$ بیشترین مقدار xy را به دست می‌آوریم.

$$Max(-\frac{۳}{۲}x^۲+۳۰x)=-\frac{۳}{۲}(۱۰)^۲+۳۰(۱۰)=-\frac{۳}{۲}\times ۱۰۰+۳۰۰=-۱۵۰+۳۰۰=۱۵۰$$

اگر سؤال از ما خواسته بود که بیشترین مقدار xy به ازای چه مقادیری از x و y رخ می‌دهد کافی بود $x=۱۰$ را در رابطهٔ $y=-\frac{۳}{۲}x+۳۰$ قرار داده و مقدار y را به ازای این مقدار x حساب کنیم.

$$y=۳۰-\frac{۳}{۲}x \Rightarrow y=۳۰-\frac{۳}{۲}(۱۰)=۳۰-۱۵=۱۵$$

پس به ازای $x=۱۰$ و $y=۱۵$ مقدار xy بیشترین مقدار را خواهد داشت.

بازاریابی (توابع هزینه، درآمد و سود)

در این نوع مسائل بهینه‌سازی معمولاً با سه تابع زیر سر و کار داریم که در آنها x تعداد کالا می‌باشد.

۱- تابع هزینه $(C(x))$ ۲- تابع درآمد $(R(x))$ ۳- تابع سود $(P(x))$

رابطه‌ای که بین این سه تابع برقرار است به صورت زیر است:

سود = درآمد − هزینه $\Rightarrow P(x)=R(x)-C(x)$

در این مسائل معمولاً توابع درآمد و سود قرار است ماکسیمم شوند و تابع هزینه قرار است مینیمم شود که این توابع در اینجا یک تابع درجهٔ ۲ خواهند بود که با محاسبهٔ x_S و جای‌گذاری در تابع داده شده مقدار ماکسیمم یا مینیمم خواسته شده به دست می‌آید.

نقطهٔ سر به سر

دستگاه‌های تولیدی با توجه به هزینه‌هایی که برای تولید کالاهایشان دارند، در ابتدای فروش سوددهی نخواهند داشت؛ پس باید به یک میزانی از فروش برسند تا هزینه‌ها $(C(x))$ با میزان

درآمد $(R(x))$ برابر شود و این یعنی $P(x)=0$. این سطح از تولید که بنگاه اقتصادی نه سود می‌برد و نه ضرر می‌کند را نقطهٔ سربه‌سر می‌گویند و از این به بعد سوددهی آغاز می‌شود.

مثال

در یک کارگاه تولیدی برای شروع کار ۶۰۰,۰۰۰ تومان هزینهٔ اولیه و برای هر واحد کالا ۴۵۰۰ تومان هزینه می‌شود. اگر P قیمت هر واحد از این کالا باشد، تعداد فروش این کالا از رابطهٔ $90000-15P$ به دست می‌آید. بیشترین مقدار سود حاصل از فروش این کالا چقدر است و این مقدار سود به ازای تولید چقدر از این کالا به دست می‌آید.

پاسخ: اگر x تعداد فروش کالای مورد نظر باشد با توجه به رابطهٔ تعداد فروش داریم:

$$x=90000-15P$$

اگر $C(x)$ تابع هزینه برای تولید تعداد x واحد کالا باشد آنگاه داریم:

$$C(x)=600,000+4500x$$

و چون درآمد برابر است با «قیمت هر واحد کالا» ضرب در «تعداد فروش آن کالا» پس خواهیم داشت:

$$R(x)=x\times P$$

پس باید ابتدا P را برحسب x از رابطهٔ $x=90000-15P$ به دست آوریم، پس داریم:

$$x=90000-15P \Rightarrow 15P=90000-x \Rightarrow P=\frac{90000-x}{15}=6000-\frac{x}{15}$$

پس تابع درآمد برای x کالا به صورت زیر خواهد بود:

$$R(x)=x\times P=x\times\left(6000-\frac{x}{15}\right)=6000x-\frac{x^2}{15}=\frac{-x^2}{15}+6000x$$

حال تابع سود را به دست می‌آوریم:

$$P(x)=R(x)-C(x)$$

$$\Rightarrow P(x)=\left(\frac{-x^2}{15}+6000x\right)-(600,000+4500x)=\frac{-x^2}{15}+1500x-600,000$$

حال مقدار کالایی که سود ماکزیمم به ازای آن به دست می‌آید را به دست می‌آوریم:

$$x_s=\frac{-b}{2a}\Rightarrow x_s=\frac{-1500}{2\times\frac{-1}{15}}=\frac{1500}{\frac{2}{15}}=\frac{1500\times15}{2}=\frac{22500}{2}=11250$$

پس بیشترین سود هنگامی به دست می‌آید که ۱۱۲۵۰ واحد از کالا فروش رود و این مقدار سود برابر است با:

$$P(x)=\frac{-x^2}{15}+1500x-600,000$$

$$\Rightarrow P(11250)=\frac{-(11250)^2}{15}+1500(11250)-600,000$$

$$\Rightarrow P(11250)=-\frac{11250\times11250}{15}+11250\times1500-600,000$$

$$=(-750\times11250)+(1500\times11250)-600,000=11250(1500-750)-600,000$$

$$\Rightarrow P(11250)=750(11250)-600,000=8,437,500-600,000=7,837,500$$

درس پنجم: توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

تعریف تابع ثابت

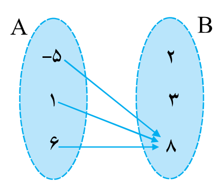
اگر تابع را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم به‌طوری که عباراتی را به عنوان ورودی بگیرد و به ازای هر ورودی یک خروجی به ما بدهد، این تابع زمانی یک تابع ثابت نامیده می‌شود که به ازای تمام ورودی‌ها فقط یک خروجی همیشه ثابت داشته باشد، مثلاً تابع $\begin{cases} C: A \to B \\ C(x) = ۲ \end{cases}$ به ازای هر $x \in A$ دارای یک خروجی ثابت $C(x) = ۲$ است. پس این تابع یک تابع ثابت می‌باشد.

دامنهٔ تابع ثابت

در این فصل دامنهٔ توابع معمولاً زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ می‌باشند که به صورت نقطه‌نقطه و یا پیوسته هستند. یعنی دامنهٔ توابع در دو حالت ۱- مجموعهٔ نقاط جدا از هم و ۲- مجموعه‌های پیوسته (بازه‌ای) بیان می‌شوند.

نمایش‌های مختلف یک تابع ثابت

۱- نمایش زوج مرتبی: نمایش یک تابع به صورت زوج مرتبی زمانی یک تابع ثابت است که مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج‌های مرتب با هم برابر باشند مثلاً تابع $f = \{(-۳,۴),(۰,۴),(۲,۴),(۱۵,۴)\}$ یک تابع ثابت $f(x) = ۴$ است.



۲- نمایش پیکانی: نمایش یک تابع به صورت پیکانی زمانی معرف یک تابع ثابت است که همهٔ پیکان‌ها به یک عضو از مجموعهٔ دوم وارد شوند. مثلاً تابع روبه‌رو یک تابع ثابت $f(x) = ۸$ است.

۳- نمایش نموداری یا مختصاتی: نمایش مختصاتی یک تابع زمانی نشان‌دهندهٔ یک تابع ثابت است که همهٔ نقاط تابع روی یک خط افقی (موازی با محور x ها) قرار داشته باشند.

تعریف تابع چند ضابطه‌ای

توابعی را که برای قسمت‌های مختلف دامنه‌شان ضابطه‌های مختلفی دارند توابع چندضابطه‌ای یا چندقطعه‌ای می‌نامیم مانند تابع زیر:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۱ & -۲ < x \le ۸ \\ ۳x + ۱ & ۱۰ < x \le ۱۲ \end{cases}$$

دامنهٔ تابع f، اجتماع دو مجموعهٔ $-۲ < x \le ۸$ و $۱۰ < x \le ۱۲$ است یعنی:

$$D_f = (-۲,۸] \cup (۱۰,۱۲]$$

۸۷. در تابع پلکانی $f(x)=\begin{cases}(k-۳)x+۴ & x\ge ۰\\ k-۴ & x<۰\end{cases}$ ، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱- ۳) ۴ ۴) ۳

۸۸. حاصل $[\sqrt{۱}]+[-\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+[-\sqrt{۴}]+\cdots+[\sqrt{۹}]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶- ۳) ۱- ۴) ۸

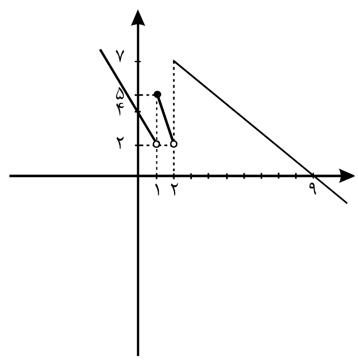
۸۹. اگر $f(x)=|۲x-۵|$ باشد، مقدار $f(۲+\sqrt{۲})+f(۱+\sqrt{۲})$ کدام است؟ (سراسری ۹۵)

۱) ۲ ۲) $۴\sqrt{۲}-۴$ ۳) ۳ ۴) $۲\sqrt{۲}+۴$

۹۰. اگر $f(x)=۵x-۲$ و $g(x)=۲x^۲+۳$ مقدار $(\frac{۲f+g}{f^۲})(۱)$ چقدر است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۱}{۴۹}$

۹۱. اگر نمودار مقابل مربوط به تابع f باشد، ضابطهٔ تابع f کدام است؟



۱) $f(x)=\begin{cases}-۲x+۴ & x<۱\\ -۳x+۸ & ۱\le x<۲\\ -x+۹ & x\ge ۲\end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases}-۲x+۴ & x\le ۱\\ -۳x+۸ & ۱<x<۲\\ -x+۹ & x\ge ۲\end{cases}$

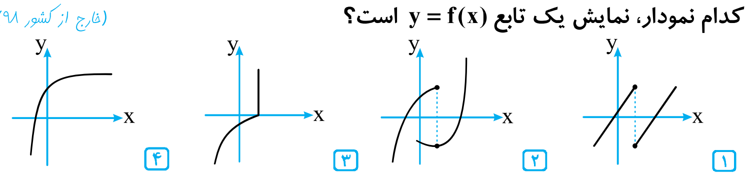
۳) $f(x)=\begin{cases}-۲x+۴ & x<۱\\ -۲x+۶ & ۱\le x<۲\\ -x+۹ & x\ge ۲\end{cases}$

۴) $f(x)=\begin{cases}-۲x+۴ & x<۱\\ -۲x+۶ & ۱\le x<۲\\ -x+۹ & x>۲\end{cases}$

۹۲. اگر $f=\{(۳,n^۲-۲n),(m,۸),(۲n-۵,t),(۴,۳m+۲)\}$ یک تابع ثابت سه عضوی باشد. $m+n+t$ ، کدام است؟ (سراسری ۹۸)

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

۹۳. کدام نمودار، نمایش یک تابع $y=f(x)$ است؟ (خارج از کشور ۹۸)

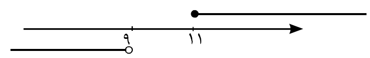


۹۴. اگر تابع درآمد به صورت $y=-\frac{۱}{۳}x^۲+۲۸x$ و تابع هزینه $y=۱۶x+۵۵$ باشد، ماکسیمم مقدار سود، کدام است؟ (خارج از کشور ۹۸)

۱) ۴۵ ۲) ۴۸ ۳) ۵۳ ۴) ۵۷

برای به‌دست آوردن برد باید بین دو مجموعهٔ به‌دست آمده، اجتماع بگیریم:

$R=[11,\infty)\cup(-\infty,9)$ اگـر روی نمـودار مشخص کنیم خواهیم دید:



$$R=[11,\infty)\cup(-\infty,9)=\mathbb{R}-[9,11)$$

۸۷. گزینهٔ ۲ چون در تابع پلکانی ضوابط تابع، اعدادی ثابت هستند پس باید ضریب x صفر شود.

$$(k-3)=0 \Rightarrow k=3$$

حال تابع پلکانی را دوباره مینویسیم:

$$f(x)=\begin{cases} 4 & x\geq 0 \\ 3-4=-1 & x<0 \end{cases}$$

بنابراین:

$$f(-1)\xrightarrow{-1<0} f(-1)=-1$$

۸۸. گزینهٔ ۳

$$[\sqrt{1}]=[1]=1$$
$$[-\sqrt{2}]=[-1.4]=-2$$
$$[\sqrt{3}]=[1.73]=1$$
$$[-\sqrt{4}]=[-2]=-2$$
$$[\sqrt{5}]=[2.23]=2$$
$$[-\sqrt{6}]=[-2.4]=-3$$
$$[\sqrt{7}]=[2.6]=2$$
$$[-\sqrt{8}]=[-2\sqrt{2}]=[-2.8]=-3$$
$$[\sqrt{9}]=[3]=3$$
$$1-2+1-2+2-3+2-3+3=-1$$

۸۹. گزینهٔ ۱

$$f(x)=|2x-5|$$
$$\Rightarrow f(2+\sqrt{2})=|2(2+\sqrt{2})-5|$$
$$=|4+2\sqrt{2}-5|=|2\sqrt{2}-1|=2\sqrt{2}-1$$
$$\Rightarrow f(1+\sqrt{2})=|2(1+\sqrt{2})-5|$$
$$=|2+2\sqrt{2}-5|=|2\sqrt{2}-3|=3-2\sqrt{2}$$
$$f(2+\sqrt{2})+f(1+\sqrt{2})$$
$$=(2\sqrt{2}-1)+(-2\sqrt{2}+3)=2$$

۹۰. گزینهٔ ۱

$$(2f+g)(x)=2f(x)+g(x)$$
$$=2(5x-2)+(2x^2+3)$$
$$=10x-4+2x^2+3$$
$$=2x^2+10x-1$$
$$f^2(x)=(f(x))^2=(5x-2)^2$$
$$=25x^2-20x+4$$
$$\left(\frac{2f+g}{f^2}\right)(x)=\frac{(2f+g)(x)}{f^2(x)}$$
$$=\frac{2x^2+10x-1}{25x^2-20x+4}$$
$$\left(\frac{2f+g}{f^2}\right)(1)=\frac{2(1)^2+10(1)-1}{25(1)^2-20(1)+4}$$
$$=\frac{2+10-1}{25-20+4}=\frac{11}{9}$$

۹۱. گزینهٔ ۱ ابتدا بازه‌های تعریف تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} f_1 & x<1 \\ f_2 & 1\leq x<2 \\ f_3 & x\geq 2 \end{cases}$$

پس گزینه‌های ۲ و ۴ غلط هستند، از بین گزینه‌های ۱و۳ دو ضابطهٔ f_1 و f_3 برابر هستند بنابراین نیاز به محاسبهٔ آن‌ها نیست و فقط کافی است ضابطهٔ f_2 در بازهٔ $1\leq x<2$ را بیابیم که معادلهٔ یک خط است که دو نقطهٔ $(1,5),(2,2)$ روی آن قرار دارند:

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2-5}{2-1}=\frac{-3}{1}=-3$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$\Rightarrow y-2=(-3)(x-2)$$
$$\Rightarrow y-2=-3x+6 \Rightarrow y=-3x+6+2$$
$$\Rightarrow y=-3x+8$$

۹۲. گزینهٔ ۴ در نمایش زوج مرتبی تابع ثابت، مؤلفه‌های دوم همگی با هم برابرند:

$$n^2-2n=8=t=3m+2$$

پس خواهیم داشت:

$$t=8$$