

فصل ۷ توان و جذر

بخش اول: توان

اولویت‌ها در محاسبات اعداد توان‌دار

در سال هفتم آموختید که نوشتن یک عدد به صورت توان دار نوعی نماد خلاصه‌نویسی است، مثلاً به جای آن که ضرب ۱۰ تا ۳ را به صورت $۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳$ نمایش دهیم، از نماد $۳^{۱۰}$ استفاده می‌کنیم. با قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار نیز آشنا هستید.

توجه داشته باشید که در محاسبات، توان بر ضرب و تقسیم اولویت دارد. در اعداد منفی و کسری، وجود پرانتز در به دست آوردن حاصل اعداد توان‌دار مؤثر است:

عدد	خوانده می‌شود	حاصل
$(-۵)^۲$	منفی پنج به توان دو	$(-۵) \times (-۵) = +۲۵$
$-۵^۲$	قرینه پنج به توان دو	$-(۵ \times ۵) = -۲۵$
$-(-۵)^۲$	قرینه منفی پنج به توان دو	$-((-۵) \times (-۵)) = -۲۵$
$-(-۵)^۳$	قرینه منفی پنج به توان سه	$-((-۵) \times (-۵) \times (-۵)) = +۱۲۵$
$(-\frac{۲}{۳})^۲$	منفی دو سوم به توان دو	$(-\frac{۲}{۳}) \times (-\frac{۲}{۳}) = +\frac{۴}{۹}$
$\frac{-۲^۲}{۳}$	قرینه دو به توان دو بر سه	$-\frac{۲ \times ۲}{۳} = -\frac{۴}{۳}$
$-۰/۵^۲$	قرینه نیم به توان دو	$-(۰/۵ \times ۰/۵) = -۰/۲۵$

حاصل عبارت‌های توان‌دار زیر را با رعایت اولویت‌ها محاسبه کنید.

الف) $(-۳ - ۲^۲)^۲$

ب) $\frac{۳^۲}{۴} + (-\frac{۳}{۴})^۲ - (-۲^۲)^۳$

پ) $۱ - (-۵)^۲ - (۱ - ۵^۲)$

ت) $-(-(-۳^۲ - (-\frac{۱}{۲})^۲ - \frac{۲^۲}{۳}) - ۹)$

الف) $(-۳ - ۴)^۲ = -(-۷)^۲ = -۴۹$

ب) $-\frac{۹}{۴} + \frac{۹}{۱۶} - (-۴)^۳ = -\frac{۹}{۴} + \frac{۹}{۱۶} + \frac{۶۴}{۱} = \frac{۹۹۷}{۱۶}$

پ) $۱ - ۲۵ - (۱ - ۲۵) = ۱ - ۲۵ + ۲۴ = ۰$

ت) $-(-(-۹ - \frac{۱}{۴} - \frac{۴}{۳}) - ۹) = -(-۹ + \frac{۱}{۴} + \frac{۴}{۳} - ۹) = -(-\frac{۱۹}{۱۲}) = -\frac{۱۹}{۱۲}$

حاصل عبارت‌های زیر را در صورت امکان به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $-5^4 \times (-5)^1$

ب) $(-2)^8 \div (\frac{2}{5})^8$

پ) $-(-5)^{13} \div (-5)^9$

ت) $6 \cdot 10^0 \div 2 \cdot 10^8 \times 3^8$

الف) گاهی می‌توانیم قبل از حل مسئله علامت جواب نهایی آن را پیدا کنیم. در این عبارت، دو عدد منفی در هم ضرب می‌شوند، پس جواب نهایی حتماً مثبت است.

$(-2)^8 \div (\frac{2}{5})^8 = (2 \times \frac{5}{2})^8 = 5^8$

ب) هر دو عبارت مثبت هستند، پس حاصل نیز مثبت است.

$-(-5^{13} \div 5^9) = -5^4$

پ) عبارت اول مثبت و دومی منفی است، پس حاصل منفی است.

$6 \cdot 10^0 \div 6 \cdot 10^8 = 6 \cdot 10^{-8}$

ت) اگر عبارت را به صورت زیر حل کرده باشید، نادرست است!!

زیرا زمانی که پرانتز اولویت‌ها را بین ضرب و تقسیم مشخص نکرده است، محاسبه از چپ به راست صورت می‌گیرد.

$$(6 \cdot 10^0 \div 6 \cdot 10^8) \times 3^8 = \frac{2 \cdot 10^0 \times 3^8}{2 \cdot 10^8} \times 3^8 = 2 \cdot 10^{-2} \times 3^8$$

توان در توان و توان به توان

توان در توان: اگر بخواهیم یک عدد توان‌دار را مجدداً به توان برسانیم، لازم است حتماً از پرانتز استفاده کنیم. در این صورت، دو توان در هم ضرب می‌شوند، مثلاً اگر عدد 5^3 را به توان 4 برسانیم، آن‌گاه می‌نویسیم: $(5^3)^4 = 5^{12}$. این خاصیت را می‌توانیم برای هر چند بار به توان‌رساندن تعمیم دهیم، مثلاً:

توان به توان: همان‌گونه که از اسم آن مشخص است، در مواقعی که بخواهیم توان یک عدد توان‌دار را به توان برسانیم، از قانون توان به توان استفاده می‌کنیم، مثلاً: $2^{2^3} = 2^8$.

اگر چند توان بالای هم آمده باشند، از دو عدد بالاتر شروع می‌کنیم و محاسبات را انجام می‌دهیم:

$2^{2^{2^3}} = 2^{2^4} = 2^{16}$

عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $((2^2)^2)^3$

ب) $2^{2^{2^3}}$

پ) $(2^{2^4})^3$

ت) $(2^2)^{2^3}$

ث) $2^{2^{2^{2^2}}}$

ج) $(2^{2^3})^{5^2}$

چ) $(2^2)^{3^{2^2}}$

الف) 2^{12}

ب) $2^{2^{2^3}}$

پ) 2^{48}

ت) 2^{16}

ث) 2^{65536}

ج) 2^{200}

چ) 2^{3122}

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $(-4^2)^3$

ب) $-2^{3^2} \times (-2)^{2^2} \times (2^{-2})^5$

پ) $-(-(-8)^{3^{2^2}})^5$

ت) $-(-(-(-3^2)^3))^2 \times -3^{12}$

ث) $\underbrace{2^6 \times 2^6 \times 2^6 \times \dots \times 2^6}_{26 \text{ بار}}$

-2^{12} یا -16^3 یا $(-16)^3$ یا -16^3 یا -2^{12}

الف) هر چهار جواب مقابل درست است:

اما ساده‌ترین جواب، -2^{12} می‌باشد.

$-(2^9 \times 2^4 \times 2^{-10}) = -2^3$

ب) توجه داشته باشید حاصل نهایی عددی منفی است:

پ) حاصل نهایی عددی منفی است:

$$-\underbrace{\underbrace{\underbrace{(-(-8)^{81})^5}_{\text{منفی}}}_{\text{مثبت}}}_{\text{منفی}} = -8^{405}$$

ت) حاصل هر دو عبارت که در هم ضرب می‌شوند منفی است، پس حاصل نهایی عددی مثبت خواهد بود.

$$((3^2)^3)^2 \times 3^{12} = 3^{12} \times 3^{12} = 3^{24}$$

$$(2^6)^{2^6} = (2^6)^{64} = 2^{384}$$

ث) تعداد 2^6 ها، 2^6 تا است، پس:

یکسان‌سازی پایه‌ها

در ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار، باید پایه‌ها یا توان‌ها مساوی باشند تا بتوانیم از قوانین جمع و تفریق توان‌ها یا ضرب و تقسیم پایه‌ها استفاده کنیم. گاهی با استفاده از تجزیه می‌توانیم پایه‌های اعداد را به صورت مساوی درآوریم، مثلاً اگر بخواهیم عبارتی مانند

$8^6 \times 4^5$ را به صورت عددی توان‌دار بنویسیم، ۴ و ۸ را تجزیه می‌کنیم و به صورت 2^2 و 2^3 می‌نویسیم. در این صورت:

$$8^6 \times 4^5 = (2^3)^6 \times (2^2)^5 = 2^{18} \times 2^{10} = 2^{28}$$

برای سرعت بخشیدن در محاسبات، می‌توانید تجزیه اعداد زیر را که کاربرد بیشتری دارند به خاطر بسپارید.

توان‌های ۲	توان‌های ۳	توان‌های ۴	توان‌های ۵	توان‌های ۶	توان‌های ۷	توان‌های ۸	توان‌های ۹
$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$16 = 4^2$	$25 = 5^2$	$36 = 6^2$	$49 = 7^2$	$64 = 8^2$	$81 = 9^2$
$8 = 2^3$	$27 = 3^3$	$64 = 4^3$	$125 = 5^3$	$216 = 6^3$	$343 = 7^3$	$512 = 8^3$	$729 = 9^3$
$16 = 2^4$	$81 = 3^4$	$256 = 4^4$	$625 = 5^4$				
$32 = 2^5$	$243 = 3^5$	$1024 = 4^5$					
$64 = 2^6$	$729 = 3^6$						
$128 = 2^7$							
$256 = 2^8$							
$512 = 2^9$							
$1024 = 2^{10}$							

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

ب) $27^8 \times 9^{14}$

ت) $8^{12} \times (32^2)^{22} \times ((128)^5)^{10}$

الف) 125×5^9

پ) $2^9 \times 4^{20} \times 8^{12}$

الف) $5^3 \times 5^9 = 5^{12}$

ب) $(3^3)^8 \times (3^2)^{14} = 3^{24} \times 3^{28} = 3^{52}$

پ) $2^9 \times (2^2)^{20} \times (2^3)^{12} = 2^9 \times 2^{40} \times 2^{36} = 2^{85}$

ت) $8^{12} \times 32^{22} \times (128)^{50} = (2^3)^{12} \times (2^5)^{22} \times (2^7)^{50} = 2^{36} \times 2^{110} \times 2^{350} = 2^{496}$

یکسان‌سازی توان‌ها

در بعضی از مسئله‌ها، امکان یکسان‌سازی پایه‌ها وجود ندارد ولی می‌توانیم توان‌ها را مساوی کنیم. برای این منظور از «ب.م.م» توان‌ها استفاده می‌کنیم.

حاصل عبارت مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید. 

$$2^{39} \times 3^{26} = ?$$

«ب.م.م» ۲۶ و ۳۹ برابر ۱۳ است. عبارت داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم: 

$$(2^2)^{13} \times (3^2)^{13} = 8^{13} \times 9^{13} = 72^{13}$$

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید. 

الف) $5^{2000} \times 4^{3000}$

ب) $2^{55} \times 6^{22}$

پ) $5^{75} \times 10^{25}$

ت) $(10^{150} \div 20^{50}) \times 5^{11}$

الف) «ب.م.م» ۲۰۰۰ و ۳۰۰۰ برابر ۱۰۰۰ است: 

$$(5^2)^{1000} \times (4^3)^{1000} = 25^{1000} \times 64^{1000} = 1600^{1000}$$

$$(2^5)^{11} \times (6^2)^{11} = 32^{11} \times 36^{11} = 1152^{11}$$

ب) «ب.م.م» ۵۵ و ۲۲ برابر ۱۱ است:

$$(5^3)^{25} \times 10^{25} = 125^{25} \times 10^{25} = 1250^{25}$$

پ) «ب.م.م» ۷۵ و ۲۵ برابر ۲۵ است:

$$(10^3)^{50} \div 20^{50} = (1000 \div 20)^{50} = 50^{50}$$

ت) ابتدا حاصل عبارت داخل پرانتز را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{پس حاصل عبارت برابر است با } 50^{50} \times 50^{11} = 50^{61}$$

توان منفی

هر عدد به توان منفی برابر است با معکوس آن عدد به توان مثبت، مثلاً:

الف) $2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

ب) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

پ) $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125} = 0.008$

ت) $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1} = \left(-\frac{8}{1}\right)^1 = -8$

ث) $-2^{-2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}$

ج) $(-2)^{-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. 

الف) $\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)^{-1}$

ب) $\frac{2^{-5} - 4^{-2}}{10^{-2}}$

پ) $\frac{1 - (-2)^{-2}}{-(-2^{-2})^3}$

ت) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \times (0.25)^{-5}$

ث) $10^{-2} \times 10^{-1}$

$(4-2)^{-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

الف) ابتدا داخل پرانتز را محاسبه کرده سپس به توان -۱ می‌رسانیم: 

ب) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{1}{32} - \frac{1}{16}}{\frac{1}{100}} = \frac{-\frac{1}{32}}{\frac{1}{100}} = -\frac{100}{32} = -\frac{25}{8}$

پ) $\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{-\left(-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\frac{1}{64}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{64}} = \frac{3}{4} \times 64 = 48$

ت) $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{100}{25}\right)^5 = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} \times 4^5 = 2^3 \times 2^{10} = 2^{13}$

ث) $-\left(\frac{2}{10}\right)^{-\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}} = -\left(\frac{2}{10}\right)^{-10} = -\left(\frac{1}{5}\right)^{10} = -5^{-10}$

مقایسه اعداد توان دار

برای مقایسه دو عدد توان دار، اگر امکان داشته باشد، پایه‌ها یا توان‌های اعداد را مساوی کرده سپس آن‌ها را مقایسه می‌کنیم.

عدد $۱۶^۰$ بزرگ‌تر است یا $۸^{۱۴}$ ؟

در دو عدد بالا می‌توانیم پایه‌ها را مساوی کنیم:

$$۱۶^۰ = (۲^۴)^۰ = ۲^۰ \quad , \quad ۸^{۱۴} = (۲^۳)^{۱۴} = ۲^{۴۲}$$

چون $۲^{۴۲}$ از $۲^۰$ بزرگ‌تر است، پس $۸^{۱۴}$ از $۱۶^۰$ بزرگ‌تر است.

عدد $۲^۳$ بزرگ‌تر است یا $۳^۲$ ؟

«ب.م.م» $۳^۰$ و $۲^۰$ برابر ۱ است، پس:

$$۲^۳ = (۲^۳)^۱ = ۸^۱ \quad , \quad ۳^۲ = (۳^۲)^۱ = ۹^۱$$

پس $۳^۲$ از $۲^۳$ بزرگ‌تر است.

عدد $۱۷^{۱۴}$ بزرگ‌تر است یا $۳^{۱۱}$ ؟

در مثال بالا، نه پایه‌ها و نه توان‌ها را می‌توانیم مساوی کنیم، بنابراین به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$۱۶^{۱۴} = (۲^۴)^{۱۴} = ۲^{۵۶} \quad , \quad ۳^{۲۱} = (۲^۵)^۱ = ۲^{۵۵}$$

چون $۱۶^{۱۴}$ از $۳^{۲۱}$ بزرگ‌تر است، پس $۱۷^{۱۴}$ حتماً از $۳^{۱۱}$ بزرگ‌تر خواهد بود.

اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$-۰/۰۱^{-۳} \quad , \quad -۰/۰۲^{-۲} \quad , \quad -۰/۰۳^{-۱} \quad , \quad -۰/۰۱ \quad , \quad (-۰/۰۱)^{-۲} \quad , \quad (-۰/۰۲)^{-۳}$$

$$-۰/۰۱^{-۳} = -۱۰۰^۳ = -۱۰۰۰۰۰۰ \quad , \quad -۰/۰۲^{-۲} = -\left(\frac{۱۰۰}{۲}\right)^۲ = -۵۰^۲ = -۲۵۰۰$$

$$-۰/۰۳^{-۱} = -\left(\frac{۱۰۰}{۳}\right)^۱ = -\frac{۱۰۰}{۳} \quad , \quad -۰/۰۱ = -\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$(-۰/۰۱)^{-۲} = (-۱۰۰)^۲ = ۱۰۰۰۰ \quad , \quad (-۰/۰۲)^{-۳} = \left(-\frac{۱۰۰}{۲}\right)^۳ = -۵۰^۳ = -۱۲۵۰۰۰$$

$$-۰/۰۱^{-۳} < (-۰/۰۲)^{-۳} < -۰/۰۲^{-۲} < -۰/۰۳^{-۱} < -۰/۰۱ < (-۰/۰۱)^{-۲}$$

پس داریم:

تجزیه اعداد توان دار

یکی از راه‌های ساده کردن اعداد توان دار، تجزیه آن‌ها به شمارنده‌های اول است. در عبارت‌های کسری که بین جملات صورت و مخرج ضرب وجود دارد، اگر عددی را از صورت به مخرج یا از مخرج به صورت کسر جابه‌جا کنیم، علامت توان آن قرینه می‌شود.

عبارت مقابل را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A = \frac{۱۲^{-۵} \times ۲۰^۳}{۳۰^{-۴} \times ۵^۷}$$

برای آن که توان‌ها مثبت شود، $۱۲^{-۵}$ را به مخرج کسر و $۳۰^{-۴}$ را به صورت کسر جابه‌جا کرده و علامت توان آن‌ها را قرینه

می‌کنیم:

$$A = \frac{۳۰^۴ \times ۲۰^۳}{۱۲^۵ \times ۵^۷} \xrightarrow{\text{اعداد } ۱۲ \text{ و } ۳۰ \text{ را تجزیه می‌کنیم}} A = \frac{(۲ \times ۳ \times ۵)^۴ \times (۲^۲ \times ۵)^۳}{(۲^۲ \times ۳)^۵ \times ۵^۷} = \frac{\cancel{۲^۴} \times ۳^۴ \times \cancel{۵^۴} \times \cancel{۲^۴} \times \cancel{۵^۳}}{\cancel{۲^۴} \times ۳^۵ \times \cancel{۵^۳}} = \frac{۳^۴}{۳^۵} = \frac{۱}{۳}$$

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $75 \times 5^6 \times 3^7$

ب) $\frac{2^{-48} \times 10^9}{(6/4)^{-8}}$

پ) $\frac{4^{-3} \times 25^{-8}}{5^{-16} \times 2^6}$

ت) $\frac{(0/9) \times (\frac{3}{5})^2 \times 10^4}{5^{-2} \times 0/1 \times 30^3}$

الف) اگر 75 را به شمارنده‌های اول تجزیه کنیم، به صورت 3×5^2 در می‌آید، پس:

$$3 \times 5^2 \times 5^6 \times 3^7 = 5^8 \times 3^8 = 15^8$$

$$(6/4)^{-8} = (\frac{6^4}{10})^{-8} = (\frac{10}{6^4})^8 = 10^8 \times 6^{-32}$$

ب) ابتدا $(6/4)^{-8}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{2^{-48} \times 10^9}{10^8 \times 6^{-32}} = \frac{6^{32} \times 10}{2^{48}} = \frac{(2^6)^8 \times 10}{2^{48}} = \frac{2^{48} \times 10}{2^{48}} = 10$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{5^6}{4^3 \times 25^8 \times 2^6} = \frac{5^6}{2^6 \times 5^{16} \times 2^6} = \frac{1}{2^{12}} = 2^{-12}$$

پ) ابتدا اعداد را با توان مثبت نوشته، سپس تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{5^2 \times \frac{9}{10} \times \frac{3^2}{5^2} \times 10^4}{\frac{1}{10} \times 30^3} \xrightarrow[\text{نزدیک در نزدیک}]{\text{دور در دور}} \frac{5^2 \times 9 \times 3^2 \times 10^4 \times 10}{10 \times 5^3 \times 30^3} = \frac{3^{21} \times 3^2 \times 2^{31} \times 5^{31}}{3^{27} \times 5^{27}} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

نصف، ثلث، ربع و خمس

برای پیدا کردن نصف یک عدد توان‌دار، کافی است آن عدد را بر 2 تقسیم کرده یا در $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم. به همین ترتیب برای پیدا کردن ثلث، آن را بر 3 تقسیم کرده یا در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم. به مثال زیر دقت کنید:

حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

پ) ربع 16^{-1}

ب) ثلث $(\frac{1}{9})^8$

الف) نصف 8^1

ج) 27 برابر 81^5

ث) نصف $0/25^{-1}$

ت) خمس 125^{n-1}



ب) $(\frac{1}{9})^8 \div 3 = 9^{-8} \div 3 = (3^2)^{-8} \div 3 = 3^{-16} \div 3 = 3^{-17}$

الف) $8^1 \div 2 = (2^3)^1 \div 2 = 2^3 \div 2 = 2^2 = 4$

پ) $16^{-1} \div 4 = (4^2)^{-1} \div 4 = 4^{-2} \div 4 = 4^{-3} = \frac{1}{64}$

ث) داریم: $0/25^{-1} = (\frac{25}{100})^{-1} = (\frac{100}{25})^1 = 4^1 = 4$

$2^2 \div 2 = 2^1$

پس کافی است نصف 2^2 را پیدا کنیم:

$27 \times 81^5 = 3^3 \times (3^4)^5 = 3^3 \times 3^{20} = 3^{23}$

ج)

نسبت ثلث 9^{2n+1} به 27 برابر 81^n چه عددی است؟

9^{2n+1} ثلث $9^{2n+1} \div 3 = (3^2)^{2n+1} \div 3 = 3^{4n+2} \div 3 = 3^{4n+1}$

81^n برابر $27 = 81^n \times 27 = (3^4)^n \times 3^3 = 3^{4n} \times 3^3 = 3^{4n+3}$

$\Rightarrow \frac{3^{4n+1}}{3^{4n+3}} = 3^{4n+1-4n-3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

عبارت‌های توان‌دار با متغیرهای جبری

قوانین مربوط به اعداد توان‌دار را می‌توانید برای متغیرها نیز به کار ببرید. چند مثال در ادامه آمده است:

عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^4 \times \left(\frac{1}{y}\right)^{-4}}{\left(\frac{1}{x^3}\right)^{-1} \times x^{-1}}$

ب) $\left(\frac{a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{5}}}{a^{-3}}\right)^{-7}$

پ) $\frac{(-ax^m)^3 \div (a^{-1})^3}{a^6(x^{-m})^3}$

ت) $\frac{25^{n+1} \times 15}{5^{2n+3}}$

ث) $(x^{-1}y^{-1}z)^{-2} \times \frac{1}{x^2} \times \left(\frac{1}{y}\right)^{-1} \times (yz^{-1})^{-3}$

الف) 

$$\frac{x^2}{y^3} \times \frac{y^3}{x^{-1}} = \frac{x^2 \times x^1}{y^3} = x^3$$

$$\frac{(a^{\frac{3}{5}} \times a^{\frac{2}{5}})^{-7}}{a^{21}} = \frac{(a^{\frac{5}{5}})^{-7}}{a^{21}} = \frac{a^{-7}}{a^{21}} = a^{-28}$$

ب)

$$\frac{-a^3 x^{3m} \div a^{-3}}{a^6 x^{-3m}} = \frac{-a^3 x^{3m} \times a^3 \times x^{3m}}{a^6 x^{-3m}} = -x^{6m}$$

پ)

$$\frac{(5^2)^{n+1} \times 15}{5^{2n} \times 5^3} = \frac{5^{2n+2} \times 5 \times 3}{5^{2n} \times 5^3} = \frac{5^{2n} \times 5^2 \times 5 \times 3}{5^{2n} \times 5^3} = 3$$

ت)

$$x^2 y^2 z^{-2} \times x^{-2} \times y \times y^{-2} z^2 = z$$

ث)

جمع‌های یکسان

اگر بخواهیم چند عدد توان‌دار دقیقاً یکسان را با هم جمع کنیم، می‌توانیم تعداد آن‌ها را بشماریم و عدد حاصل را در یکی از آن‌ها ضرب کنیم. گاهی این کار به ما کمک می‌کند که با تبدیل جمع به ضرب بعضی از عبارت‌ها را ساده کنیم.

عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $2^5 + 2^5$

ب) $3^8 + 3^8 + 3^8$

پ) $8^{20} + 8^{20}$

الف) $2 \times 2^5 = 2^6$

ب) $3 \times 3^8 = 3^9$

پ) $8^{20} + 8^{20} = 2 \times 8^{20} = 2 \times (2^3)^{20} = 2 \times 2^{60} = 2^{61}$



حاصل عبارت زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$2^{10} + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + \dots + 2^{100} = ?$$

$$2^{10} + 2^{10} = 2 \times 2^{10} = 2^{11}$$

$$2^{11} + 2^{11} = 2 \times 2^{11} = 2^{12}$$

$$2^{12} + 2^{12} = 2 \times 2^{12} = 2^{13}$$

⋮

$$2 \times 2^{100} = 2^{101}$$

حاصل دو عدد اول را می‌یابیم:

حاصل به دست آمده را با عدد سوم محاسبه می‌کنیم:

به همین ترتیب حاصل را با عدد چهارم محاسبه می‌کنیم:

اگر همین کار را ادامه دهیم، در نهایت حاصل کل عبارت برابر می‌شود با:

حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $(2^{40} + 2^{40} + 2^{40})(3^{40} + 3^{40})$

ب) $2^{50} - 2^{49} - 2^{48} - \dots - 2^{21} - 2^{20} - 2^{20}$

پ) $\frac{3^5 + 3^5 - 2^5 - 2^5 - 2^5}{3^2 + 3^2}$

ت) $2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots + 2^{-4}$

ث) $(4 + 4 + 4) + (4^2 + 4^2 + 4^2) + (4^3 + 4^3 + 4^3) + \dots + (4^{10} + 4^{10} + 4^{10})$

$(3 \times 2^{40})(2 \times 3^{40}) = 2^{41} \times 3^{41} = 6^{41}$

الف)

ب) عبارت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$2^{50} - \underbrace{(2^{20} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} + \dots + 2^{49})}_{2^{21}} = 2^{50} - (2 \times 2^{49}) = 2^{50} - 2^{50} = 0$$

$$\frac{2 \times 3^5 - 3 \times 2^5}{2 \times 3^2} = \frac{2 \times 3(3^4 - 2^4)}{2 \times 3 \times 3} = \frac{81 - 16}{3} = \frac{65}{3}$$

پ)

ت) به عبارت داده شده، 2^{-4} را اضافه و کم می‌کنیم و آن را از انتها به ابتدا می‌نویسیم:

$$\underbrace{2^{-4} + 2^{-4} + 2^{-3} + \dots + 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} - 2^{-4}}_{2 \times 2^{-4} = 2^{-3}} + \dots + 2^{-3} + 2^{-2} + 2^{-1} - 2^{-4}$$

پس حاصل عبارت موردنظر برابر است با $1 - 2^{-4}$.

ث) به عبارت داده شده 4 تا اضافه کرده و 4 تا از آن کم می‌کنیم:

$$\underbrace{(4 + 4 + 4 + 4) + (4^2 + 4^2 + 4^2) + (4^3 + 4^3 + 4^3) + \dots + (4^{10} + 4^{10} + 4^{10}) - 4}_{4 \times 4^1 = 4^2} = 4 \times 4^{10} - 4 = 4^{11} - 4$$

بنابراین حاصل عبارت فوق برابر است با:

فاکتورگیری

اعداد توان‌داری را که با هم جمع و تفریق شده‌اند و دارای عامل مشترک هستند، می‌توانیم با فاکتورگیری از عامل مشترک، به ضرب تبدیل کنیم. در تبدیل این عبارت‌ها به ضرب، «ب.م.م» ضرایب را به عنوان ضریب فاکتورگیری و متغیرهای یکسان با توان کم‌تر را به عنوان متغیر فاکتورگیری انتخاب می‌کنیم و سایر عامل‌ها را به همراه علامت بین آن‌ها، درون پرانتز قرار می‌دهیم.

$$\frac{5^{70} - 5^{68} - 5^{66}}{5^{66}} = ?$$

عبارت مقابل را با تبدیل به ضرب، ساده کنید.

عامل مشترک در صورت کسر، 5^{66} است، پس:

$$\frac{5^{66}(5^4 - 5^2 - 1)}{5^{66}} = 625 - 25 - 1 = 599$$

$$3 \times 2^{12} - 2^{13} + 6 \times 2^{11} = ?$$

عبارت مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

عامل مشترک بین سه جمله 2^{11} است، پس:

$$2^{11}(3 \times 2^1 - 2^2 + 6) = 2^{11}(6 - 4 + 6) = 2^{11} \times 8 = 2^{11} \times 2^3 = 2^{14}$$

عبارت‌های زیر را ساده کنید.

پ) $\frac{5^{x+2} + 5^{x+1} + 5^x}{5^x \times 31}$

ب) $\frac{3^{-20} + 3^{10}}{3^{-8} + 3^{22}}$

الف) $2^{100} - 2^{99}$

ت) $\frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^{29}}{2^{29}+2^{28}+2^{27}+\dots+2^0}$

ث) $\frac{2+2^2+2^{2^2}+2^{2^{2^2}}}{2^3+2^4+2^6+2^{18}}$

$2^{99}(2^1 - 1) = 2^{99} \times 1 = 2^{99}$

الف) از 2^{99} فاکتور می‌گیریم:

ب) در صورت کسر، از 3^{-20} و در مخرج کسر، از 3^{-8} فاکتور می‌گیریم:

$\frac{3^{-20} (1+3^{30})}{3^{-8} (1+3^{22})} = 3^{-20-(-8)} = 3^{-12}$

$\frac{5^x (5^2 + 5^1 + 1)}{5^x \times 31} = \frac{31}{31} = 1$

پ) از 5^x فاکتور می‌گیریم:

ت) در مخرج کسر، از 2^{20} فاکتور می‌گیریم:

$\frac{(1+2+2^2+2^3+\dots+2^{29})}{2^{20} (2^{29}+2^{28}+\dots+2+1)} = \frac{1}{2^{20}} = 2^{-20}$

ث) صورت کسر را به صورت زیر می‌نویسیم و در مخرج کسر از 2^2 فاکتور می‌گیریم:

$\frac{(2+2^2+2^4+2^{16})}{2^2 (2+2^2+2^4+2^{16})} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

مجموع‌های متناهی و نامتناهی

به دست آوردن مجموع‌های داده‌شده در این قسمت را در سال‌های آینده به طور کامل فرا خواهید گرفت. در این بخش فقط به ذکر چند نمونه می‌پردازیم.

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{100}$

ب) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}}$

پ) $5 + 55 + 555 + \dots + 5555 \dots 5$
تا ۱۰۰

ت) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$

ث) $\frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots$

ج) $0/1 + 0/02 + 0/003 + 0/0004 + \dots$

$7A = 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{101}$

الف) فرض کنیم: $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{100}$ ، پس داریم:

$7A - A = (7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{100} + 7^{101}) - (7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{100}) = 7^{101} - 7$

$\Rightarrow 6A = 7^{101} - 7 \Rightarrow A = \frac{7^{101} - 7}{6}$

$A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{50}}$

ب) قرار می‌دهیم:

$3A = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{49}}$

۳A را محاسبه می‌کنیم:

$3A - A = (3 + 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{49}}) - (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{49}} + \frac{1}{3^{50}})$

اکنون $3A - A$ را به دست می‌آوریم:

$\Rightarrow 2A = 3 - \frac{1}{3^{50}} \Rightarrow A = \frac{1}{2} (3 - \frac{1}{3^{50}})$

پ) قرار می‌دهیم:

$$A = 5 + 55 + 555 + \dots + \underbrace{555\dots5}_{\text{تا } 100}$$

$$A = 5(1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{111\dots1}_{\text{تا } 100})$$

از 5 فاکتور می‌گیریم:

$$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{999\dots9}_{\text{تا } 100}) = \frac{5}{9}[(1 \cdot 1 - 1) + (1 \cdot 2 - 1) + (1 \cdot 3 - 1) + \dots + (1 \cdot 100 - 1)]$$

$$= \frac{5}{9} \left[\underbrace{(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot 100)}_{\frac{1 \cdot 101 - 1 \cdot 0}{9}} - \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_{100} \right] = \frac{5(1 \cdot 101 - 910)}{81}$$

ت) فرض می‌کنیم:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

$$2A = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

$$2A - A = (2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots) - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots) = 2 \Rightarrow A = 2$$

ث) قرار می‌دهیم:

$$A = \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots$$

$$5A = 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots$$

$$5A - A = (4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \dots) - (\frac{4}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{4}{5^3} + \dots) \Rightarrow 4A = 4 \Rightarrow A = 1$$

ج) ابتدا قرار می‌دهیم:

$$A = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

$$10A = 1 + \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{4}{1000} + \dots$$

$$10A - A = 1 + (\frac{2}{10} - \frac{1}{10}) + (\frac{3}{100} - \frac{2}{100}) + (\frac{4}{1000} - \frac{3}{1000}) + \dots \Rightarrow 9A = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

اکنون طرفین تساوی را دوباره در 10 ضرب می‌کنیم:

$$90A = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots$$

$$90A - 9A = 10 \Rightarrow 81A = 10 \Rightarrow A = \frac{10}{81}$$

عبارت‌های شرطی

در این گونه عبارت‌ها، معمولاً برای دست‌یافتن به پاسخ مسئله در جای مناسب از فرض داده‌شده در حل آن استفاده می‌کنیم.

اگر $5^x = 1$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) 5^{x+2}

ب) 5^{x-1}

پ) 125^x

الف) $5^{x+2} = 5^x \times 5^2 = 10 \times 25 = 250$

ب) $5^{x-1} = 5^x \div 5^1 = 10 \div 5 = 2$

پ) $125^x = (5^3)^x = (5^x)^3 = 10^3 = 1000$

اگر $2^x = 3$ باشد، حاصل 125^{1-x} را به دست آورید.

$$125^{1-x} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{1-x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x} = 8^{x-1} = (2^3)^{x-1} = 2^{3x-3} = 2^{3x} \times 2^{-3} = \underbrace{(2^x)^3}_{3^3} \times \frac{1}{8} = 3^3 \times \frac{1}{8} = \frac{27}{8}$$

اگر $2^a = 5$ ، $2^b = 3$ و $3^c = 8$ باشد، حاصل $M = 2abc + 1$ را به دست آورید.

$$2^a = 5 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } b \text{ می‌رسانیم}} (2^a)^b = 5^b \xrightarrow{\text{به جای } 5^b \text{ می‌گذاریم}} 2^{ab} = 3 \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } c \text{ می‌رسانیم}} (2^{ab})^c = 3^c$$

$$\xrightarrow{\text{به جای } 3^c \text{ قرار می‌دهیم}} 2^{abc} = 8 = 2^3 \Rightarrow abc = 3$$

$$M = 2(3) + 1 = 7$$

پس خواهیم داشت:

اگر $x = 27^9$ باشد، 9^{108} چند است؟

$$27^9 = x \Rightarrow (3^3)^9 = x \Rightarrow 3^{27} = x \quad (1)$$

داریم:

$$9^{108} = (3^2)^{108} = 3^{216} = (3^{27})^8 \xrightarrow{(1)} x^8$$

بنابراین:

اگر $3^x = 4$ و $2^x = 1$ باشد، حاصل $(2 - 3^x)^x - (7 - 3^x)^x$ را بیابید.

$$\underbrace{((7 - 4)^x - 2^x)}_3 = (3^x - 2)^x = (4 - 2)^x = 2^x = 1$$

معادلات توانی

در معادله‌های توانی، معمولاً دو طرف معادله را تا جایی ساده می‌کنند که پایه‌ها در دو طرف تساوی یکی شود و آن‌گاه توان‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم.

$$8^{2x-4} \times 4 = 16^{x+3}$$

معادله توانی مقابل را حل کنید.

ابتدا در هر دو طرف تساوی، پایه‌ها را به کمک تجزیه به ۲ تبدیل می‌کنیم.

$$(2^3)^{2x-4} \times 2^2 = (2^4)^{x+3} \Rightarrow 2^{6x-12} \times 2^2 = 2^{4x+12} \Rightarrow 2^{6x-10} = 2^{4x+12}$$

$$\Rightarrow 6x - 10 = 4x + 12 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$$

$$3^{x+1} + 3^x = 108$$

معادله توانی مقابل را حل کنید.

معمولاً زمانی که بین جمله‌های یک معادله توانی جمع و تفریق باشد، می‌توانیم از فاکتورگیری برای حل آن استفاده کنیم.

$$3^x(3^1 + 1) = 108 \Rightarrow 3^x = \frac{108}{4} = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

معادله‌های توانی زیر را حل کنید.

الف) $7^{2x+6} = 1$

ب) $6^{3x-2} + 3 = 216^{\frac{x-2}{3}} + 3x$

پ) $2^{3x-2} \times 5/25^{x-3} = 4^{2x+1} \times \frac{1}{2^{2x}}$

ت) $\frac{4^{x+1} - 4^x}{2} = 24$

$$2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$$

الف) چون هر عدد به توان صفر برابر یک است، پس:

ب) $6^{3x-2} + 3 = (6^3)^{\frac{x-2}{3}} + 3x \Rightarrow \cancel{6^{3x-2}} + 3 = \cancel{6^{3x-2}} + 3x \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow x = 1$

پ) $2^{3x-2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3} = (2^2)^{2x+1} \times 2^{-2x}$

ب) $x = 1$

$$\Rightarrow 2^{3x-2} \times 2^{-2x+6} = 2^{4x+2} \times 2^{-2x}$$

به جای $\frac{1}{5}$ ، قرار می‌دهیم 2^{-2} :

$$\Rightarrow 2^{x+4} = 2^{2x+2} \Rightarrow x + 4 = 2x + 2 \Rightarrow x = 2$$

ت) $4^{x+1} - 4^x = 2 \times 24 \Rightarrow 4^x(4 - 1) = 48 \Rightarrow 4^x = \frac{48}{3} = 16 \Rightarrow 2^{2x} = 2^4 \Rightarrow x = 2$

ت) $x = 2$

بخش دوم : جذر

جذر و رادیکالها

اگر $x \times x = m$ باشد، آن‌گاه می‌گوییم جذر عدد m برابر x می‌باشد. جذر یا ریشه دوم یک عدد می‌تواند مثبت یا منفی باشد، مثلاً جذر ۲۵ برابر است با $+۵$ و -۵ یا ریشه دوم ۴۹ برابر است با $+۷$ و -۷ . به جذر مثبت هر عدد رادیکال آن عدد می‌گویند، بنابراین $\sqrt{۲۵} = +۵$ و $\sqrt{۴۹} = +۷$ است.

اعدادی که رادیکال آن‌ها عددی طبیعی باشد، مجذور کامل طبیعی نامیده می‌شوند. مجذورهای کامل کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ عبارتند از:

رادیکال ($\sqrt{\quad}$)	ریشه دوم یا جذر	عدد (مجذور کامل)
۱	± 1	۱
۲	± 2	۴
۳	± 3	۹
۴	± 4	۱۶
۵	± 5	۲۵
۶	± 6	۳۶
۷	± 7	۴۹
۸	± 8	۶۴
۹	± 9	۸۱
۱۰	± 10	۱۰۰

اعدادی که مجذور کامل نیستند، جذر دقیق هم ندارند مانند $\sqrt{۵}$ یا $\sqrt{۷}$. به این دسته از اعداد، اعداد گنگ می‌گویند. می‌توانیم مقدار تقریبی این اعداد را با استفاده از مجذورهای کامل قبل و بعد از آن عدد پیدا کنیم.

مقدار تقریبی $\sqrt{۵۲}$ را به دست آورید. 

چون $\sqrt{۴۹} < \sqrt{۵۲} < \sqrt{۶۴}$ است، پس $\sqrt{۵۲}$ عددی بین ۷ و ۸ می‌باشد. با نصف کردن فاصله بین ۷ و ۸ مشاهده می‌کنیم که $\frac{۷}{۵} \times \frac{۷}{۵} = \frac{۴۹}{۲۵} = ۱.۹۶$ ، بنابراین $\sqrt{۵۲}$ کم‌تر از $\frac{۷}{۵}$ است.

عدد	۷/۱	۷/۲	۷/۳	۷/۲۵	۷/۲۲
مجذور	۵۰/۴۱	۵۱/۸۴	۵۳/۲۹	۵۲/۵۶	۵۲/۱۲

بنابراین $\sqrt{۵۲} = ۷/۲۲$.

مقدار تقریبی $\sqrt{۷۰۰}$ را پیدا کنید. 

داریم: 

$$\sqrt{۷۰۰} = \sqrt{۷ \times ۱۰۰} = \sqrt{۷} \times \sqrt{۱۰۰} = ۱۰\sqrt{۷}$$

$$\sqrt{۴} < \sqrt{۷} < \sqrt{۹} \Rightarrow ۲ < \sqrt{۷} < ۳$$

بنابراین کافی است مقدار تقریبی $\sqrt{۷}$ را به دست آوریم:

چون $\frac{۲}{۵} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۴}{۲۵} = ۰.۱۶$ ، پس $\sqrt{۷} > \frac{۲}{۵}$ و چون $\frac{۳}{۶} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۹}{۳۶} = ۰.۲۵$ ، بنابراین می‌توان حدس زد $\sqrt{۷} = \frac{۲}{۶۵}$ لذا

$$\sqrt{۷۰۰} = ۱۰ \times \frac{۲}{۶۵} = \frac{۲۰}{۶۵}$$

مقدار تقریبی $\sqrt{۰/۰۰۹}$ را پیدا کنید. 

$$\sqrt{۰/۰۰۹} = \sqrt{۰/۰۰۰۹۰} = \sqrt{\frac{۹۰}{۱۰۰۰۰}} = \frac{\sqrt{۹۰}}{۱۰۰}$$

برای پیدا کردن $\sqrt{۹۰}$ ، مانند مثال‌های قبل عمل می‌کنیم:

$$\sqrt{۸۱} < \sqrt{۹۰} < \sqrt{۱۰۰} \Rightarrow ۹ < \sqrt{۹۰} < ۱۰ \Rightarrow \sqrt{۹۰} = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \sqrt{۰/۰۰۹} = \frac{۹/۵}{۱۰۰} = ۰/۰۰۹$$

اگر a و b دو عدد دلخواه باشند، برای محاسبه $\sqrt{a \pm b}$ ابتدا باید مجموع یا اختلاف a و b را پیدا کرده، سپس جذر بگیریم ولی در محاسبه $\sqrt{a \times b}$ یا $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ، می‌توانیم ابتدا ضرب یا تقسیم را انجام داده بعد جذر بگیریم یا اول جذر بگیریم بعد ضرب و تقسیم را انجام دهیم و این بستگی به مسئله دارد، مثلاً:

(الف) ابتدا جمع می‌کنیم، سپس جذر می‌گیریم. $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

(ب) ابتدا جذر می‌گیریم، سپس ضرب می‌کنیم. $\sqrt{49 \times 81} = \sqrt{49} \times \sqrt{81} = 7 \times 9 = 63$

(پ) ابتدا ضرب می‌کنیم، سپس جذر می‌گیریم. $\sqrt{12/5 \times 2} = \sqrt{25} = 5$

توجه داشته باشید $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

حاصل عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}}$

(ب) $\frac{\sqrt{18 \times 2}}{\sqrt{64 \times 25}}$

(پ) $\sqrt{4/9 \times 0/5 \times 2000}$

(ت) $\frac{2\sqrt{12}}{5\sqrt{27}} \times \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}$

(ث) $\sqrt{\sqrt{0/02} + \sqrt{0/0004} + 8/8}$

(الف) $\sqrt{\frac{9+16}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$

(الف) ابتدا حاصل زیر رادیکال را به دست می‌آوریم، سپس جذر می‌گیریم:

(ب) $\frac{\sqrt{36}}{8 \times 5} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$

(پ) عدد را به صورت زیر می‌نویسیم: $\sqrt{\frac{49 \times 5 \times 200 \times 1000 \times 0/01}{100}} = \sqrt{49 \times 100} = 7 \times 10 = 70$

(پ) عدد را به صورت زیر می‌نویسیم:

(ت) همه اعداد را زیر یک رادیکال می‌نویسیم:

(ت) $\frac{2}{5} \sqrt{\frac{12 \times 45}{27 \times 8}} = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} \xrightarrow{(*)} \sqrt{\frac{2}{5}}$

توجه داشته باشید که در قسمت (*) صورت و مخرج را در $\sqrt{2} \times \sqrt{5}$ ضرب می‌کنیم.

(ث) $\sqrt{\frac{0/02 + 0/02}{0/04} + 8/8} = \sqrt{0/2 + 8/8} = \sqrt{9} = 3$

(ث)

جمع و تفریق رادیکال‌های متشابه: مانند جمع و تفریق عبارت‌های جبری، در عبارت‌های رادیکالی نیز فقط رادیکال‌های

متشابه با هم جمع و تفریق می‌شوند. به نمونه‌های زیر دقت کنید:

(الف) $\sqrt{10} - \sqrt{1} \neq \sqrt{9}$ (چون $\sqrt{10}$ و $\sqrt{1}$ متشابه نیستند، نمی‌توانیم آن‌ها را از هم کم کنیم).

(ب) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$

(پ) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$


توجه داشته باشید $\sqrt{2} + \sqrt{2} \neq \sqrt{4}$

(ت) $\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

(ث) $3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} = 7\sqrt{7}$

(ج) $10\sqrt{12} - \sqrt{12} = 9\sqrt{12}$

گاهی می‌توانیم به کمک تجزیه رادیکال‌ها را با هم متشابه کرده و جمع و تفریق کنیم:


حاصل $\sqrt{8} + \sqrt{32}$ را به دست آورید. 

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$


$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \times 2} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

پس خواهیم داشت:

عبارت‌های رادیکالی زیر را ساده کنید. 

الف) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$ ب) $5\sqrt{3} - 4\sqrt{27} + 2\sqrt{48}$ پ) $\frac{\sqrt{72} - \sqrt{32}}{\sqrt{8}}$ ت) $\frac{\sqrt{125} - \sqrt{5}}{\sqrt{45} + 2\sqrt{20}}$

الف) $3\sqrt{\frac{2^2 \times 3}{2}} - 2\sqrt{\frac{5^2 \times 3}{5}} = 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$ 

ب) $5\sqrt{3} - 4\sqrt{\frac{3^2 \times 3}{3}} + 2\sqrt{\frac{2^4 \times 3}{4}} = 5\sqrt{3} - 12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = \sqrt{3}$

پ) $\frac{\sqrt{3^2 \times 2^2 \times 2} - \sqrt{2^4 \times 2}}{\sqrt{2^2 \times 2}} = \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$

ت) $\frac{\sqrt{5^2 \times 5} - \sqrt{5}}{\sqrt{3^2 \times 5} + 2\sqrt{2^2 \times 5}} = \frac{5\sqrt{5} - \sqrt{5}}{3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{7\sqrt{5}} = \frac{4}{7}$

ضرب رادیکال‌ها: در ضرب دو یا چند رادیکال در هم، نیازی به متشابه‌بودن رادیکال‌ها نیست. اگر رادیکال‌ها ضریب داشته

باشند، ضریب‌ها در هم و اعداد زیر رادیکال نیز در هم ضرب می‌شوند،^۱ مثلاً:

الف) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

ب) $5\sqrt{2} \times 3\sqrt{8} = 15\sqrt{16} = 15 \times 4 = 60$

پ) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$

ت) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

ث) $2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. 

الف) $\sqrt{5}(3\sqrt{5} + \sqrt{125})$

ب) $(2\sqrt{3} - \sqrt{11})(2\sqrt{3} + \sqrt{11})$

پ) $(5\sqrt{2})^3$

ت) $(3\sqrt{3})^4$

ث) $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^6$

$3\sqrt{25} + \sqrt{625} = 3 \times 5 + 25 = 40$

الف) 

ب) $(2\sqrt{3} - \sqrt{11})(2\sqrt{3} + \sqrt{11}) = 4 \times 3 + 2\sqrt{33} - 2\sqrt{33} - 11 = 12 - 11 = 1$

ب)

داشته باشید که می‌توانید از اتحاد مزدوج نیز استفاده کنید: 

$(2\sqrt{3} - \sqrt{11})(2\sqrt{3} + \sqrt{11}) = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{11})^2 = 12 - 11 = 1$

در ادامه مبحثی با همین عنوان آورده شده است.

۱- در این قسمت، فرجه رادیکال‌ها مساوی در نظر گرفته می‌شود.

$$(5\sqrt{2})(5\sqrt{2})(5\sqrt{2}) = 125\sqrt{8} = 125\sqrt{2^2 \times 2} = 250\sqrt{2} \quad \text{پ)}$$

$$(3\sqrt{3})(3\sqrt{3})(3\sqrt{3})(3\sqrt{3}) = 81 \times \sqrt{81} = 81 \times 9 = 729 \quad \text{ت)}$$

$$(3\sqrt{3})^4 = 3^4 \times (\sqrt{3})^4 = 81 \times (\sqrt{3^2})^2 = 81 \times 9 = 729$$

یا به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$\sqrt{2^2 \times 2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow (3\sqrt{2})^6 = 3^6 \times 2^3 = 5832$$

ث) ابتدا $\sqrt{8} + \sqrt{2}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

اگر از عددی توان‌دار جذر بگیریم، توان آن نصف می‌شود یا اگر پایه آن مجذور کامل باشد، بدون آن که تغییری در توان آن

$$\sqrt{9^{10}} = 9^5 \quad \text{یا} \quad \sqrt{9^{10}} = 3^{10}$$

بدهیم، از پایه جذر می‌گیریم، مثلاً:

$$\sqrt{8^3 \times 10^7 \times 5} = ?$$

حاصل عبارت مقابل را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

$$\sqrt{(2^3)^3 \times (2 \times 5)^7 \times 5} = \sqrt{2^9 \times 2^7 \times 5^7 \times 5} = \sqrt{2^{16} \times 5^8} = 2^8 \times 5^4 = (2^2)^4 \times 5^4 = 4^4 \times 5^4 = 20^4$$

مربع کامل

اگر پس از تجزیه عددی به شمارنده‌های اول، توان همه عوامل‌های آن زوج باشد، آن عدد مربع کامل است.

کدام یک از اعداد زیر مربع کامل است؟

$$15^{15} \quad (4) \quad 3 \times 125 \quad (3) \quad 9 \times 27^3 \quad (2) \quad 3^{10} + 3^{10} \quad (1)$$

$$3^{10} + 3^{10} = 2 \times 3^{10} = 2^{11}$$

گزینه (۱) مربع کامل نیست، زیرا:

$$3^2 \times (3^3)^3 = 3^2 \times 3^9 = 3^{11}$$

گزینه (۲) مربع کامل نیست، زیرا:

$$3 \times (2^2 \times 3)^5 = 3 \times 2^{10} \times 3^5 = 3^6 \times 2^{10}$$

گزینه (۳) مربع کامل است، زیرا:

$$(3 \times 5)^{15} = 3^{15} \times 5^{15}$$

گزینه (۴) مربع کامل نیست، زیرا:

کوچک‌ترین عددی که باید در ۸۰۰ ضرب شود تا حاصل مربع کامل شود چه عددی است؟

$$800 = 2^5 \times 5^2$$

ابتدا ۸۰۰ را به شمارنده‌های اول تجزیه می‌کنیم:

پس کافی است توان عدد ۲ در تجزیه، کوچک‌ترین عدد زوج بعد از ۵ شود، بنابراین عدد ۲ را در ۸۰۰ ضرب کنیم تا توان همه عوامل‌های آن زوج شود.

بین ۲۰۰ و ۷۰۰ چند مربع کامل وجود دارد؟

اعدادی که به صورت x^2 هستند را در نظر می‌گیریم که در آن‌ها: $200 < x^2 < 700$ ، سپس از طرفین نامعادله جذر

$$14/1 < x < 26/4 \Rightarrow x = 15, 16, 17, \dots, 26$$

می‌گیریم:

که تعداد آن‌ها ۱۲ تا است و می‌توانید آن‌ها را ببینید:

$15^2 = 225$	$18^2 = 324$	$21^2 = 441$	$24^2 = 576$
$16^2 = 256$	$19^2 = 361$	$22^2 = 484$	$25^2 = 625$
$17^2 = 289$	$20^2 = 400$	$23^2 = 529$	$26^2 = 676$

رادیكال مقابل را ساده کنید. 


$$\sqrt{10^2 + 3^2 + 3^2} = ?$$

ابتدا حاصل زیر رادیكال را محاسبه می‌کنیم: 

$$\sqrt{100 + 16 + 9} = \sqrt{125} \Rightarrow \sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

استفاده از اتحادها در محاسبه بعضی از رادیكالها

در حل بعضی از مسئله‌های این قسمت، از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج استفاده شده است.

حاصل عبارت زیر را به دست آورید. 


$$(2\sqrt{10} - \sqrt{8})^{100} (\sqrt{10} + \sqrt{2})^{100} = ?$$

در پرانتز اول به جای $\sqrt{8}$ می‌نویسیم $2\sqrt{2}$ ، سپس از ۲ فاکتور می‌گیریم: 


$$2\sqrt{10} - 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{10} - \sqrt{2})$$

$$[2(\sqrt{10} - \sqrt{2})(\sqrt{10} + \sqrt{2})]^{100} = 2^{100} (10 - 2)^{100} = 2^{100} \times 8^{100} = 2^{100} \times (2^3)^{100} = 2^{400}$$

پس:

حاصل عبارت زیر را به دست آورید. 

$$(\sqrt{5} - 2)^{22} (\sqrt{5} + 2)^{20}$$

عبارت داده‌شده را به صورت زیر می‌نویسیم: 

$$(\sqrt{5} - 2)^2 [(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)]^{18}$$

اکنون برای محاسبه عبارت داخل کروشه از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم:

$$(\sqrt{5} - 2)^2 [5 - 4]^{18} = (\sqrt{5} - 2)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}} 5 + 4 - 4\sqrt{5} = 9 - 4\sqrt{5}$$


اگر $x = \sqrt{9 + \sqrt{9 + \sqrt{9}}}$ باشد، حاصل $x^4 - 36\sqrt{3}$ را به دست آورید. 

$$x = \sqrt{9 + \sqrt{12}} \Rightarrow x^2 = 9 + \sqrt{12} = 9 + 2\sqrt{3}$$

ابتدا X را ساده‌تر می‌نویسیم: 

$$\Rightarrow x^4 = (9 + 2\sqrt{3})^2 = 81 + 12 + 36\sqrt{3} = 93 + 36\sqrt{3} \Rightarrow x^4 - 36\sqrt{3} = 93$$

پس:

حاصل عبارت زیر را به دست آورید. 

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = ?$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{\underbrace{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}})(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}_{\text{اتحاد مزدوج: } 4 - 2 - \sqrt{2}}} = \sqrt{2} \times \sqrt{2 + \sqrt{2}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} \sqrt{\underbrace{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})}_{\text{اتحاد مزدوج: } 4 - 2}}$$



$$\Rightarrow = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

نمایش اعداد رادیكالی روی محور

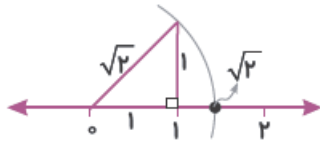
با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توانیم اعداد گنگ را روی محور اعداد حقیقی^۱ نمایش دهیم.

۱- اگر عددی جذر دقیق نداشته باشد، گنگ است، مانند $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ و ... به مجموعه اعداد گویا و گنگ روی هم، مجموعه اعداد حقیقی می‌گویند.

هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

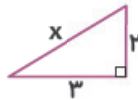
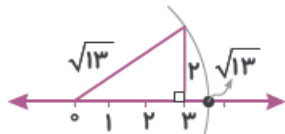
- | | | |
|-----------------|-----------------|------------------------|
| الف) $\sqrt{2}$ | ب) $\sqrt{13}$ | پ) $-\sqrt{5}$ |
| ت) $\sqrt{11}$ | ث) $2-\sqrt{8}$ | ج) $-1-\sqrt{17}$ |
| چ) $\sqrt{7}-3$ | ح) $5\sqrt{2}$ | خ) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ |

الف) از مبدأ مختصات، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع قائم ۱ و ۱ در سمت راست می‌دهیم. طول وتر این مثلث $\sqrt{2}$ است. اکنون دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $\sqrt{2}$ باز کرده و از مبدأ کمان می‌زنیم. محل تلاقی کمان و محور اعداد، نمایش عدد $\sqrt{2}$ خواهد بود.



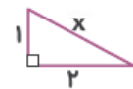
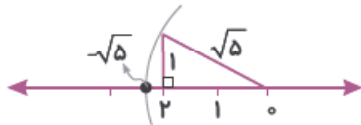
$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

ب) طول اضلاع قائم مثلث قائم‌الزاویه را ۲ و ۳ در نظر می‌گیریم و از مبدأ مختصات به سمت راست مثلث را تشکیل می‌دهیم. نقطهٔ روی محور، $\sqrt{13}$ را نشان می‌دهد.



$$x^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \Rightarrow x = \sqrt{13}$$

پ) از مبدأ مختصات، مثلثی به اضلاع قائم ۲ و ۱ به سمت چپ، تشکیل می‌دهیم. نقطهٔ روی محور نمایش $-\sqrt{5}$ خواهد بود.



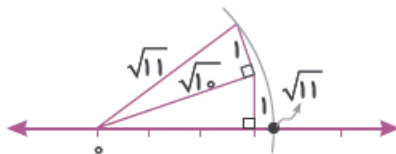
$$x^2 = 1^2 + 2^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$$

ت) چون دو عدد طبیعی وجود ندارد که مجموع مربع‌های آن‌ها ۱۱ شود، بنابراین ابتدا نزدیک‌ترین عدد به $\sqrt{11}$ که با مجموع مربع‌های دو عدد طبیعی می‌توانیم بسازیم یعنی $\sqrt{10}$ را رسم می‌کنیم، زیرا:

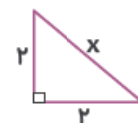


$$x^2 = 3^2 + 1^2 = 10 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

اکنون مثلث دیگری تشکیل می‌دهیم که یک ضلع قائم آن $\sqrt{10}$ و ضلع دیگر قائم آن ۱ واحد باشد. وتر مثلث دوم برابر $\sqrt{11}$ است. حال دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ $\sqrt{11}$ باز کرده و به مرکز مبدأ مختصات کمان می‌زنیم. نقطهٔ روی محور، $\sqrt{11}$ می‌باشد.



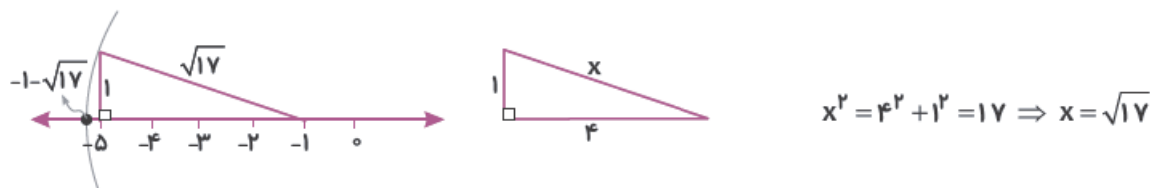
ث) از نقطهٔ ۲ به سمت چپ مثلثی تشکیل می‌دهیم که اضلاع قائم آن ۲ و ۲ باشد، زیرا:



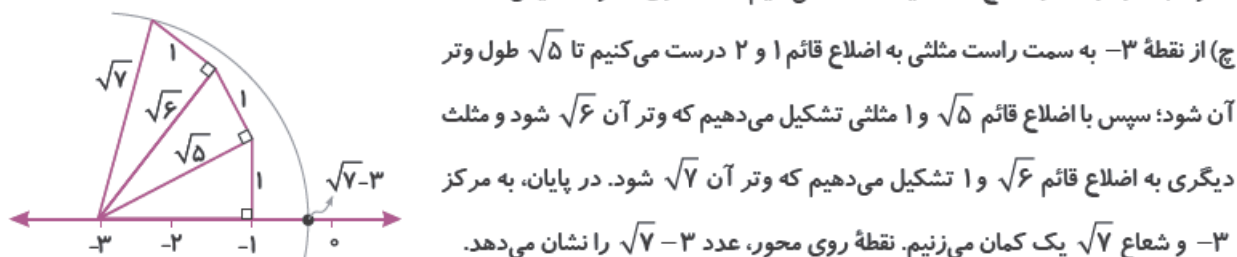
$$x^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \Rightarrow x = \sqrt{8}$$

اکنون به مرکز ۲ و شعاع $\sqrt{8}$ یک کمان می‌زنیم. نقطهٔ مشخص‌شده روی محور، $2-\sqrt{8}$ است.

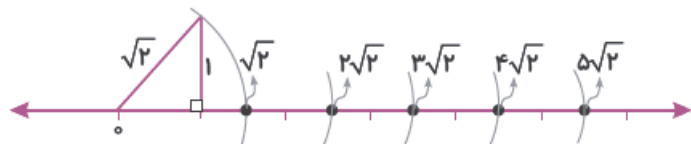
ج) از نقطه ۱- به سمت چپ مثلثی تشکیل می‌دهیم که اضلاع قائم آن ۱ و ۴ است. زیرا:



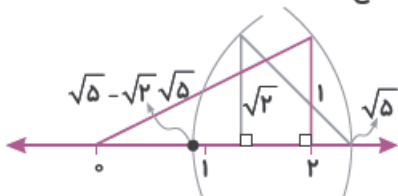
اکنون به مرکز ۱- و شعاع $\sqrt{17}$ یک کمان می‌زنیم. نقطه روی محور، نمایش $1 - \sqrt{17}$ است.



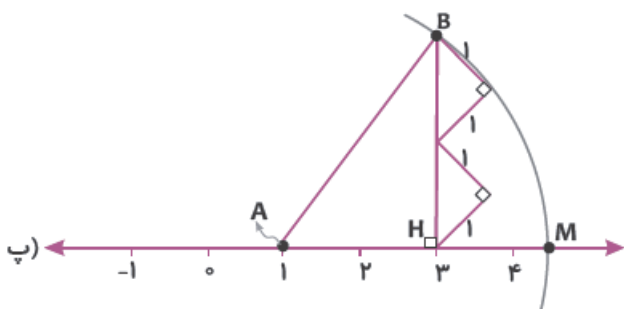
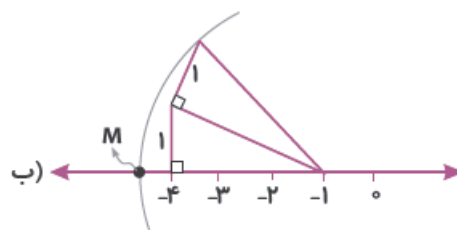
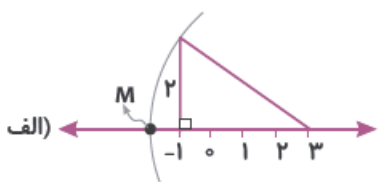
ح) ابتدا $\sqrt{2}$ را پیدا می‌کنیم، سپس مجدداً دهانهٔ پرگار را روی $\sqrt{2}$ قرار می‌دهیم و ۴ بار دیگر به اندازهٔ $\sqrt{2}$ کمان می‌زنیم. آخرین نقطه، نمایش عدد $5\sqrt{2}$ است.



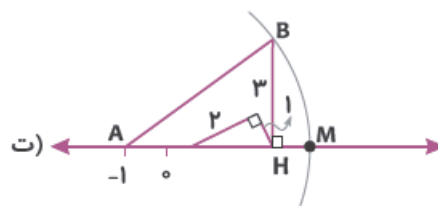
خ) ابتدا نقطه $\sqrt{5}$ را روی محور پیدا می‌کنیم، سپس از نقطه $\sqrt{5}$ به سمت چپ مثلثی تشکیل می‌دهیم که طول اضلاع قائم آن ۱ و ۱ باشد. سپس به مرکز $\sqrt{5}$ و شعاع $\sqrt{2}$ کمان می‌زنیم. نقطه $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ روی محور کاملاً واضح است.



در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه M چه عددی را نمایش می‌دهد؟



به مرکز A و شعاع AB کمان زده‌ایم.



به مرکز A و شعاع AB کمان زده‌ایم.

الف) $3 - \sqrt{2}$ (طول وتر مثلث $\sqrt{2}$ است و از نقطه ۳ به سمت چپ کمانی به شعاع $\sqrt{2}$ زده‌ایم.)

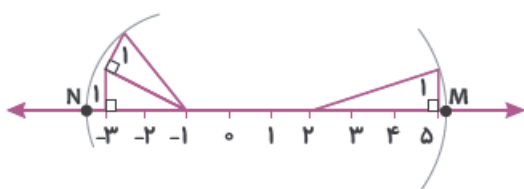
ب) $1 - \sqrt{11}$ (از نقطه ۱ کمانی به طول $\sqrt{11}$ و در سمت چپ ۱ زده‌ایم.)

پ) طول BH برابر $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ است. در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$AB^2 = 2^2 + (2\sqrt{2})^2 = 4 + 8 = 12 \Rightarrow AB = \sqrt{12} \Rightarrow M = 1 + \sqrt{12}$$

ت) طول AH برابر است با $1 + \sqrt{5}$. در مثلث قائم‌الزاویه ABH داریم:

$$AB^2 = (1 + \sqrt{5})^2 + 3^2 = 1 + 5 + 2\sqrt{5} + 9 = 15 + 2\sqrt{5} \Rightarrow AB = \sqrt{15 + 2\sqrt{5}} \Rightarrow M = -1 + \sqrt{15 + 2\sqrt{5}}$$



با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) نقطه M چه عددی را نمایش می‌دهد؟

ب) نقطه N چه عددی را نمایش می‌دهد؟

پ) طول پاره‌خط MN را بنویسید.

ت) عدد متناظر با بردار \overline{MN} را بنویسید.

الف) $2 + \sqrt{10}$

ب) $1 - \sqrt{6}$

پ) برای پیدا کردن طول پاره‌خط MN ، کافی است طول انتهای پاره‌خط را از طول ابتدای آن کم کنیم.

$$MN = 2 + \sqrt{10} - (-1 - \sqrt{6}) = 3 + \sqrt{10} + \sqrt{6}$$

ت) برای نوشتن عدد متناظر با یک بردار، باید به جهت آن بردار توجه داشته باشیم چون جهت \overline{MN} از چپ به راست است، پس

عدد متناظر با بردار \overline{MN} برابر است با $-(3 + \sqrt{10} + \sqrt{6})$.

پرسش‌های تشریحی



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $(\frac{3}{4})^{10} \times 7^{12} \times (\frac{28}{3})^{10}$

ب) $-2^{20} \times 2^{20} \times (-2)^{20}$

پ) $[45^{10} \div 5^3 \times 15^3] \div 3^{23}$

ت) $\frac{(-4)^5 \div (\frac{4}{3})^5}{(-3)^3 \times (-3)^2}$

ث) -5^{22}

ج) $(-25^2)^3$

چ) $(-\frac{1}{3})^{-22} \cdot 5^2$

ح) $\frac{7^{15} \times 49^6}{343^3}$

خ) $\frac{9^4 \times 3^8 \times 81^6}{27^2 \times 243^5}$

د) $(20^6 \div 4^{10}) \div 8^5$

ذ) $(27^3)^9 \div 9^{23}$

ر) $28^4 \times 5^{21}$

ز) $26^{00} \times 32^{00} \times 43^{00}$

س) $\frac{6^{333} \times 2^{222}}{864111}$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(-3)^{-3}$

ب) -4^{-2}

پ) $(2^{-2} - 3^{-1})^{-2}$

ت) $0/3^{-1} - \frac{1-0/4^{-1}}{-(-0/2)^{-1}}$

ث) $0/25^{-0/25} + 0/16^{-0/5}$

ج) $3^{-1} - 2^{-1}(4^{-1} - (-5^{-1})^{-1})^{-1}$

چ) $\frac{3^{-2} \times 9^2 \times 6^{-2} - 2^3 \times 4^{-2} \times 6}{3^2 \times 6^{-2} - 2^{-1} \times 6}$

۳- اگر $x=1$ باشد، مقدار A را به دست آورید.

$$A = 5^{2x} \cdot 5^{(2x)} \cdot 5^{(2x)}$$

۴- عدد 27^{11} بزرگ‌تر است یا 9^{16} ؟

۵- اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

الف) $(-0/1)^3, (0/01)^2, -0/3^3, -0/03^2$

ب) $236^0, 324^0, 712^0$

پ) $16^{20!}, 8^{21!}, 4^{22!}, 2^{23!}$

ت) $2^{2^{2^2}}, (2^{2^2})^{2^2}, ((2^2)^2)^{2^2}, 2^{2^2}, (((2^2)^2)^2)^3$



۶- عدد ۲۴۲۱۱ بزرگ‌تر است یا ۸۳۱۴ ؟

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن و به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $۹^{۴۲} \times ۸^{۸۴} \times ۶^{۱۲} \times ۱۶^۶$

ب) $\frac{۴۵^{۱۰} \times ۱۸^{-۵}}{۵^{۱۰} \times ۴^{-۴}}$

پ) $\frac{(\frac{1}{9})^{-۵} \times ۳^{-۱} \times (۰/۵)^{-۵}}{۸۱ \times ۲۰^{۱۰}}$

ت) $\frac{۲^۴ \times ۰/۳^۲ \times ۱۰^۵}{(\frac{۳}{۵})^{-۳} \times (1-\frac{1}{۲})^۲} \times ۳^{-۵}$

ث) $\frac{۱۵^۹ \times ۱۰۰^۸}{۲۷^۳ \times ۱۲۵^{۱۰} \times ۱۶^۴}$

۸- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

(ت) ربع ۶۴^{n-1}

(پ) نصف $۳۲^{۱۲}$

(ب) خمس $۱۲۵^{۱۵}$

(الف) ثلث $۲۷^۵$

(ث) نصف ربع $۸^۸$

۹- عبارت‌های زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{(\frac{x}{y})^{-۳} \div (x^{-۳}y^۲)^{-۱}}{(\frac{1}{y^۲})^{-۱} \times (\frac{x^{-۱}}{y})^{-۳}}$

ب) $[a(a^{\frac{-1}{b}})^{\frac{1}{b}}]^{1-b^۲}$

پ) $[\frac{۳^{۴a-۳}}{(۳^۲-a)} \times (\frac{1}{a^{\frac{1}{۲-۱}}})] \div ۹^{۲-۲a}$

ت) $((x^{-۳}y)^{-۱})^{-۲} (-x^۲y)^{-۱} (xy^{-۱})^{-۳}$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورده، در صورت امکان به صورت عددی توان‌دار بنویسید.

الف) $\frac{۴^{۱۸} - ۴^{۱۷}}{۴^{۱۷} - ۴^{۱۶}}$

ب) $(۲ \times ۷^{۱۰} - ۷^{۱۱} + ۱۹ \times ۷^۹) \times ۲^{-۴}$

پ) $۲^{۲۲} - ۲^{۲۱} - ۲^{۲۰}$

ت) $\frac{۳^{-۱۰۰} - ۳^{-۲}}{(1-۳^{۴۹})(1+۳^{۴۹})}$

ث) $\frac{۴^{۷۱} + ۴}{۲^{۱۴۰} + ۱}$

ج) $\frac{۹^{۱۰} - ۹^۹ - ۹^۸}{۳^{۱۴}}$

چ) $\frac{-۵^{-۹۵} - ۵^{-۹۵} - ۵^{-۹۵} - ۵^{-۹۵} - ۵^{-۹۵}}{-۵^{-۹۴}}$

ح) $۲ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + \dots + ۲^{۵۰}$

خ) $۱ + (۲^{۲۰} + ۲^{۱۹} + ۲^{۱۸} + \dots + ۲^۲ + ۲ + ۱)$

د) $\frac{۴^۷ + ۴^۷ + ۴^۷ - ۳^۷ - ۳^۷ - ۳^۷ - ۳^۷}{۱۰۱۰۱}$

ذ) $۲^{-۱} + ۲^{-۲} + ۲^{-۳} + \dots + ۲^{-۱۰}$

ر) $\frac{1}{۶} + \frac{1}{۳۶} + \frac{1}{۲۱۶} + \dots + \frac{1}{۶^۵}$

ز) $۳ + ۳۳ + ۳۳۳ + \dots + \underbrace{۳۳۳\dots ۳}_{۳۶}$

۱۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ب) $۷ + \frac{۷}{۲} + \frac{۷}{۴} + \frac{۷}{۱۶} + \dots$

الف) $\frac{1}{۳} + \frac{1}{۹} + \frac{1}{۲۷} + \dots$

پ) $\frac{1}{۲^۲} \times \frac{1}{۴^۴} \times \frac{1}{۸^۸} \times \frac{1}{۱۶^{۱۶}} \times \dots$

۱۲- مقدار A را پیدا کنید.

$$A = \frac{4(5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{104}) + 5}{5^1 \times 5^2 \times 5^3 \times \dots \times 5^{104}}$$

۱۳- معادلات توانی زیر را حل کنید.

الف) $81^{x-4} = 27^{3x}$

ب) $125 \times 25^{x-1} = 5^{10x}$

پ) $5^{x+3} = 5^x + \frac{124}{125}$

ت) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + \dots + 2^{x+97} = 2^{50x} - 2^x$

۱۴- در مجموعه $A = \{4^5, 4^5 + 1, 4^5 + 2, \dots, 4^9\}$ چند مربع کامل وجود دارد؟

۱۵- مجموعه‌های زیر چند عضوی‌اند؟

الف) $\{2^{2^0} + 2, 2^{2^0} + 4, 2^{2^0} + 6, \dots, 2^{2^1}\}$

ب) $\{2^{2^0} + 2, 2^{2^0} + 4, 2^{2^0} + 8, \dots, 2^{2^1}\}$

پ) $\{2^{2^0} + 1, 2^{2^0} + 2, 2^{2^0} + 3, \dots, 2^{2^1}\}$

۱۶- اگر $x^x + 1 = x$ باشد و $A = x^{x^{x^x}}$ ، آن‌گاه A^x کدام است؟

د) $x+1$

ع) $1 - \frac{1}{x}$

ب) $\frac{x+1}{x}$

الف) $x-1$

$3^{3n+1} \times 3^{n+1}$

۱۷- به ازای چه مقدار n، عدد مقابل توانی از ۱۸ است؟

$2^{4+n} \times 3^{5-n}$

۱۸- به ازای چند عدد صحیح n، عدد مقابل مضرب ۶ است؟

۱۹- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \dots + \frac{1025}{2^{10}}$

ب) $\frac{3}{(1 \times 2)^2} + \frac{5}{(2 \times 3)^2} + \frac{7}{(3 \times 4)^2} + \dots + \frac{41}{(20 \times 21)^2}$

پ) $(2 \times 1^2) + (3 \times 2^2) + (4 \times 3^2) + \dots + (51 \times 50^2)$

ت) $\frac{(2+3)(2^2+3^2)(2^4+3^4)(2^8+3^8)\dots(2^{256}+3^{256})+2512}{3512}$

۲۰- گر $2^x = 2$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

ت) 8^{x+2}

پ) 4^x

ب) 2^{x-2}

الف) 2^{x+1}

۲۱- اگر $5^{y+3} = 3^{2x-y+1}$ باشد، x و y را پیدا کنید.

۲۲- اگر $4^{2a} = 8$ باشد، حاصل 2^{4a-6} را پیدا کنید.

۲۳- اگر $2^x = 7$ و $7^y = 4$ باشد، حاصل $(3-xy)^{100}$ را بیابید.

۲۴- اگر $5^{ab} = 3$ و $3^{ac} = 25^a$ باشد، حاصل $2-abc$ را بیابید.

۲۵- اگر $2^p = 5$ باشد، حاصل $\frac{32^{p+3}}{10^5}$ چند است؟

۲۶- مقدار تقریبی اعداد زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sqrt{300}$

ب) $\sqrt{160}$

پ) $\sqrt{0/004}$

ت) $\sqrt{3/2}$

ث) $\sqrt{0/55}$

۲۷- مقدار دقیق عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{9}}}}}}$

ب) $\sqrt{4+4\sqrt{4+\sqrt{25}}}$

پ) $\sqrt{\frac{2/5 \times 0/009 \times 8/1}{0/00016 \times 9}}$

۲۸- حاصل عبارتهای زیر را پیدا کنید.

الف) $\sqrt{8\sqrt{2}\left(\sqrt{\sqrt{\frac{10}{3}+\sqrt{\frac{2}{4/5}}}}}\right)}$

ب) $\sqrt{\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\dots}{\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\dots}}$

پ) $\sqrt{50 \times 5^4 \times 2^{10}} - 3 + \sqrt{90 \times 3 \times 5}$

ت) $\sqrt{\frac{a^6 b^4 c^{-2}}{c^4}}$

۲۹- چند عدد طبیعی مربع کامل ۳ رقمی وجود دارد؟

۳۰- جذر عددی $3/2$ است. آن عدد را پیدا کنید.

۳۱- کدامیک از اعداد زیر مربع کامل هستند؟

ت) $11^2 \times 2$

پ) $60 \times 35 \times 5^3$

ب) $3^6 + 3^6 + 3^6$

الف) $15^5 \times 10$

۳۲- عبارتهای زیر را تا حد امکان ساده کنید.

الف) $\frac{\sqrt{45}}{3\sqrt{20}}$

ب) $-\frac{5}{3}\sqrt{27} \times 6\sqrt{3}$

پ) $\sqrt{50} + \sqrt{8}$

ت) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{27} + 10\sqrt{75}$

ث) $\frac{\sqrt{6}-2}{3-\sqrt{6}}$

ج) $(\sqrt{27}-2\sqrt{3})^{100}$

چ) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

ح) $(\sqrt{5}-2)^{20}(\sqrt{5}+2)^{20}$

خ) $(3-\sqrt{8})^{10}(3+\sqrt{8})^{12}$

د) $(5\sqrt{8}-9\sqrt{2})^{30}$

ذ) $[\sqrt{10}(\sqrt{10}-3)-3(3-\sqrt{10})]^{1394}$

۳۳- اگر $a > 1$ ، $x > 0$ و $\sqrt{x}-1=a(a-2)$ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}+2-a}$

۳۴- حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{12}\sqrt{12}\sqrt{12}\sqrt{\dots}}}}}}}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{12}+\sqrt{12}+\sqrt{12}+\sqrt{\dots}}}}$

۳۵- اگر $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}=128$ باشد، مقدار x را پیدا کنید.

۳۶- حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $\sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{100}}$

ب) $\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$

پ) $\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{x}} \times \sqrt{\frac{1}{x^3}} \times \sqrt{\frac{1}{x^5}} \times \dots \times \sqrt{\frac{1}{x^{99}}}}{\sqrt{x^2} \times \sqrt{x^4} \times \sqrt{x^6} \times \dots \times \sqrt{x^{100}}} \right)^{-1}$

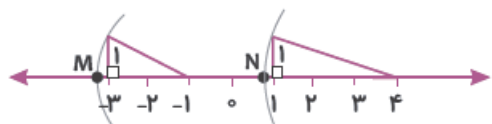
۳۷- هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد حقیقی نمایش دهید.

الف) $-\sqrt{15}$

ب) $\sqrt{3} - 1$

پ) $-1 - \sqrt{19}$

ت) $\sqrt{2} - 3$



۳۸- با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) نقطه‌های M و N چه اعدادی را نشان می‌دهند؟

ب) طول پاره‌خط MN چه عددی است؟

پ) عدد متناظر با بردار MN را بیابید.

پاسخ‌نامه پرسش‌های تشریحی



۱- الف) 7^{22}

ب) 2^6

پ) 5^{10}

ت) ۱

ث) -5^4

ج) -2^{75}

چ) -3^{-100}

ح) 7^{18}

خ) 3^9

د) $\frac{5^6}{2^{23}}$

ذ) 3^{65}

ر) 80^{21}

ز) 192^{200}

س) ۱

ت) $\frac{109}{30}$

پ) ۱۴۴

ب) $-\frac{1}{16}$

۲- الف) $-\frac{1}{27}$

ث) $\sqrt{2} + \frac{5}{4}$ توجه داشته باشید که در محاسبه $25^{-0/25} = 0/25$ به $(\frac{100}{25})^{\frac{1}{4}}$ می‌رسید که به صورت $2^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}}$ در خواهد آمد.

ج) $\frac{5}{21}$

چ) ۱

۳- ۲۵ توجه داشته باشید که در محاسبه مقدار A به $A = 5^{2 \times 1052}$ می‌رسید، واضح است X هر مقداری باشد، حاصل 1^x

$2711 = 3^{33} > 3^{32} = 916$

برابر یک خواهد بود.

۴- ۲۷۱۱، زیرا:

-۵

الف) $-(0/0.1)^2 < -0.03^2 < (-0/1)^3 < -0/3^3$

ب) $7^{120} < 2^{360} < 3^{240}$

پ) $16^{20} < 8^{21} < 4^{22} < 2^{23}$

ت) $2^{3^{3^{3^3}}} < \underbrace{((2^2)^3)^{3^3}}_{2^{3^8}} < \underbrace{(2^{2^3})^{2^3}}_{2^{2^6}} < \underbrace{(((2^3)^2)^4)^3}_{2^{72}} < \underbrace{2^{3^4}}_{2^{81}}$

۶- چون $24311 = 355$ از $81^4 = 356$ کوچکتر است، پس حتماً 24311 از 81^4 کوچکتر خواهد بود.

۷- الف) 2496 (ب) $9^5 \times 2^3$ (پ) $(\frac{3}{200})^5$ (ت) 2^9
 ث) 5^{-5}

۸- الف) 3^{14} (ب) 5^{44} (پ) 2^{59} (ت) 4^{3n-4}
 ث) 2^{21}

۹- الف) x^{-9} (ب) $\frac{1}{a}$ (پ) 3^{6a-3} (ت) $-x^{-1}y^4$

۱۰- الف) 4 (ب) -7^9 (پ) 2^{20} (ت) 3^{-100}
 ث) 4 (ج) 639 (چ) 1

۲-۲۵۱ (عبارت موردنظر را A فرض کنید، حاصل $A - 2A$ را محاسبه کنید.) (خ) 2^{21}

د) $4 = \frac{3 \times 4^7 - 4 \times 3^7}{10101} = \frac{4^7 \times 4(4^6 - 3^6)}{4^7 \times 7 \times 13 \times 37} = \frac{4(4^3 - 3^3)(4^3 + 3^3)}{7 \times 13 \times 37} = \frac{4 \times 3^3 \times 91}{7 \times 13 \times 37} = \frac{4 \times 3^3 \times 7 \times 13}{7 \times 13 \times 37} = \frac{4 \times 3^3}{37} = \frac{108}{37}$

ذ) $1 - 2^{-10}$ (عبارت موردنظر را A بگیرید، سپس حاصل $A - 2A$ را به دست آورید.)

ر) $(1 - \frac{1}{5})^6$ (عبارت موردنظر را A فرض کنید و از $6A - A$ استفاده کنید.)

ز) $\frac{10^6 - 10^0}{27} - 20$

۱۱- الف) $\frac{1}{2}$ (ب) 14

پ) ۴ فرض کنید $A = 2^2 \times 2^4 \times 2^8 \times \dots$ ، کافی است حاصل $B = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots$ را به دست آورید که از رابطه $B - \frac{B}{2}$ که

برابر یک می شود، حاصل کل عبارت برابر خواهد بود با $2^2 = 4$.

۱۲- توجه داشته باشید که حاصل $5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{104}$ برابر می شود با $\frac{5^{105} - 5}{4}$.

۱۳- الف) $x = -\frac{16}{5}$ (ب) $x = \frac{1}{8}$ (پ) $x = -3$ (ت) $x = 2$

۱۴- $A = \{4^5, 4^5 + 1, \dots, \underbrace{4^5 + 4^5}_{4^6}, 4^6 + 1, \dots, \underbrace{4^6 + 4^6}_{4^7}, 4^7 + 1, \dots, \underbrace{4^7 + 4^7}_{4^8}, 4^8 + 1, \dots, \underbrace{4^8 + 4^8}_{4^9}\}$

همان طور که واضح است در مجموعه A اعداد مقابل مربع کامل هستند: $4^5 = 2^{10}, 4^6 = 2^{12}, 4^7 = 2^{14}, 4^8 = 2^{16}, 4^9 = 2^{18}$

پس ۵ عدد مربع کامل هستند.

$$\text{الف) } \frac{2^{21} - 2^{20} - 2}{2} + 1 = \frac{2^{20}(2-1) - 2}{2} + 1 = 2^{19} \quad -15$$

$$\text{ب) } \{2^{20} + 2, 2^{20} + 4, 2^{20} + 8, \dots, 2^{20} + 2^{20}\}$$

واضح است تعداد جمله‌ها ۲۰ تا است

$$\text{پ) } \{2^{20} + 1, 2^{20} + 2, \dots, 2^{20} + 2^{20}\}$$

واضح است تعداد جمله‌ها ۲۰ تا است

$$x^x = x-1, A = x^{x^x} \times x^{-1} = \frac{x-1}{x} \quad -16$$

$$\Rightarrow A^x = \left(x^{\frac{x-1}{x}}\right)^x = x^{x-1} = x^x \times x^{-1} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

$$n=1-17$$

۱۸- عدد: ۴, ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲, -۳.

$$\text{الف) } 1 + \frac{2+1}{2} + \frac{4+1}{2^2} + \frac{8+1}{2^3} + \dots + \frac{1024+1}{2^{10}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \left(1 + \frac{1}{2^{10}}\right) \quad -19$$

$$= \underbrace{\left(1 + \left(1 + \dots + 1\right)\right)}_{11} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{10}}\right)}_{1 - \frac{1}{1024}} = 12 - \frac{1}{1024}$$

ب) $1 - \frac{1}{2^{12}}$ (کافی است در هر کسر صورت را به شکل اختلاف دو عدد ضرب شده در مخرج بنویسید).

پ) از رابطه $n^2(n+1) = n^3 + n^2$ استفاده کنید تا به عبارت زیر برسید:

$$S = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 50^3) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 50^2)$$

اکنون با استفاده از فرمول‌هایی که برای مجموع‌های بالا در درس‌نامه آمده است به جواب ۱۶۶۸۵۵۰ خواهید رسید.

ت) کافی است صورت کسر را در $(3-2)$ ضرب کنید و از اتحاد مزدوج استفاده کنید:

$$\frac{(3-2)(3+2)(3^2+2^2)}{(3^2-2^2)} = \frac{(3^4-2^4)}{(3^2-2^2)} \xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} \text{صورت کسر} = (3^{512} - 2^{512}) + 2^{512} = 3^{512}$$

که حاصل کسر برابر یک خواهد شد.

$$\text{ت) } 512000$$

$$\text{پ) } 400$$

$$\text{ب) } 5$$

$$\text{۲۰- الف) } 40$$

$$y = -3, x = -2 - 21$$

$$\frac{1}{8} - 22$$

۲۳- ۱ (کافی است طرفین تساوی $2^x = 7$ را به توان y برسانید).

۲۴- صفر (کافی است طرفین تساوی $5^{ab} = 3$ را به توان ac برسانید).

$$2^{10} - 25$$

$$\text{ت) } 1/78$$

$$\text{پ) } 0/06$$

$$\text{ب) } 12/64$$

$$\text{۲۶- الف) } 17/32$$

$$\text{ث) } 0/74$$

۲۷- الف) ۳

۲۸- الف) ۴

۲۹- ۲۲ تا

۳۰- ۱۶ = x

۳۱- فقط (ب) مربع کامل است.

۳۲- الف) $\frac{1}{2}$

۳۳- ج) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ۳۵۰

(ب) ۴
 (ب) $\frac{3}{2}$
 (پ) $\frac{45}{4}$
 (پ) $-5\sqrt{2}$
 (ت) $\frac{a^2b^2}{c^2}$

(ب) -۹۰
 (پ) $7\sqrt{2}$
 (ت) $67\sqrt{3}$

ج) $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5+4+4\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2 + 4\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{اتحاد مربع دو جمله‌ای}} \sqrt{(\sqrt{5}+2)^2} = \sqrt{5}+2$

ح) ۱ (خ) $17+12\sqrt{2}$ (د) ۲۱۵ (ذ) ۱

۳۳- ۱ (کافی است با توجه به فرض مسئله به رابطه $\sqrt{x} = (a-1)^2$ برسید و آن را در عبارت داده شده جایگزین کنید).

۳۴- ۳

۳۵- ۲۸

۳۶- الف) $\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}^{100}-1)}{(\sqrt{5}-1)}$ (کافی است $\sqrt{5}A - A$ را محاسبه کنید).

(ب)

$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5}-\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\underbrace{5-4}_1} \xrightarrow{\text{با ادامه روند}} \sqrt{5}-\sqrt{4} + \sqrt{4}-\sqrt{5} + \dots + \sqrt{100}-\sqrt{99} = 100-2 = 98$

(پ) x^{2525}

۳۷- (با کمی دقت و با توجه به آنچه در درس نامه آموختید به راحتی می‌توانید اعداد مورد نظر را روی محور نشان دهید).

۳۸- الف) $N = 4 - \sqrt{10}, M = -1 - \sqrt{5}$

(ب) $5 + \sqrt{5} - \sqrt{10}$

(پ) $-5 - \sqrt{5} + 10$

پرسش‌های ۴ گزینه‌ای

محاسبات و اولویت‌ها ...

۱- نسبت مجذور $(-x^{10})$ به مکعب $(-x)^5$ برابر است با:

x^{-5} (۴)	x^5 (۳)	$-x^{-5}$ (۲)	$-x^5$ (۱)
--------------	-----------	---------------	------------

۲- حاصل $\frac{3 \cdot 2^0 \div 6^{12} \times 6^8}{5^2}$ برابر با کدام گزینه است؟

5^{-8} (۴)	6^6 (۳)	36^4 (۲)	1 (۱)
--------------	-----------	------------	---------

۳- حاصل $5 \cdot 12 \div 5 \cdot 11 \div 5 \cdot 11$ برابر است با:

10^{12} (۴)	1 (۳)	50 (۲)	10^{24} (۱)
---------------	---------	----------	---------------

۴- حاصل $(\frac{5}{3})^6 \div (-2)^6$ به صورت عددی توان‌دار کدام است؟

$-\frac{100^6}{3}$ (۴)	12^6 (۳)	-12^6 (۲)	$(\frac{100}{3})^6$ (۱)
------------------------	------------	-------------	-------------------------

۵- نصف $18^5 \div 6^4 \times 3^4$ برابر است با:

6^5 (۴)	$(\frac{3}{2})^5$ (۳)	3^{10} (۲)	$(\frac{3}{4})^4$ (۱)
-----------	-----------------------	--------------	-----------------------

$$\frac{-(-4^2)^5 \div (-4)^5}{-2^2 \times (-(-2)^2)^2} = ?$$

2^8 (۴)	-2^4 (۳)	-2^8 (۲)	2^4 (۱)
-----------	------------	------------	-----------

۶- حاصل عبارت مقابل به صورت عددی توان‌دار برابر با کدام گزینه است؟

۷- حاصل $1 - (-3)^2 \times (-2)^3$ برابر است با:

80 (۴)	-80 (۳)	-73 (۲)	71 (۱)
----------	-----------	-----------	----------

توان به توان، توان در توان و یکسان‌سازی توان‌ها و پایه‌ها

۸- حاصل $5^{50} \times 3^{100}$ به صورت عددی توان‌دار برابر است با:

45^{100} (۴)	15^{50} (۳)	45^{50} (۲)	15^{150} (۱)
----------------	---------------	---------------	----------------

$$(8^2)^5 \times 4^{2^3} \times (32^2)^{3^2} = ?$$

2^{136} (۴)	2^{78} (۳)	2^{152} (۲)	2^{118} (۱)
---------------	--------------	---------------	---------------

۹- حاصل عبارت مقابل کدام است؟

۱۰- اگر $A = (-(-5)^{233})^3$ ، آن‌گاه A برابر است با:

-5^{192} (۴)	5^{268} (۳)	-5^{268} (۲)	5^{192} (۱)
----------------	---------------	----------------	---------------

۱۱- ساده‌شده $\frac{3^{85} \times 3^{34}}{288^{10}}$ کدام است؟

17^{65} (۴)	288^7 (۳)	124^5 (۲)	288^{10} (۱)
---------------	-------------	-------------	----------------

۱۲- حاصل عبارت مقابل به صورت یک عدد توان‌دار کدام است؟

$$2^1 \times 4^2 \times 8^3 \times 16^4 \times 32^5 = ?$$

4^8 (۴)	2^5 (۳)	2 (۲)	$\frac{137}{260}$ (۱)
-----------	-----------	---------	-----------------------



توان منفی

۱۳- حاصل $(-5)^{-1} - (-5)^{-2}$ برابر است با:

(۱) $\frac{25}{4}$ (۲) -10 (۳) $-\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{4}{25}$

۱۴- عدد $10^{-1} / 1^{-10}$ چند رقمی است؟

(۱) ۱۰ رقمی (۲) ۱۱ رقمی (۳) ۱ رقمی (۴) کوچک‌تر از ۱ است.

۱۵- حاصل $(\frac{1}{8})^{-\frac{2}{3}}$ برابر است با:

(۱) -4 (۲) -2 (۳) 8 (۴) 4

۱۶- ساده‌شده $5^6 \times (\frac{5}{14})^{-2}$ برابر با کدام گزینه است؟

(۱) $2 \cdot 5^6$ (۲) 5^{10} (۳) 4^{10} (۴) $2 \cdot 5^5$

۱۷- حاصل $[-3^{-2}]^{-1}$ کدام است؟

(۱) -81 (۲) 81 (۳) $\frac{1}{81}$ (۴) $-\frac{1}{81}$

مقایسهٔ اعداد توان‌دار

۱۸- مقدار عددی کدام گزینه از بقیه بزرگ‌تر است؟

(۱) $-(-2)^3$ (۲) $-(-2)^4$ (۳) -4^2 (۴) $(-2)^3$

۱۹- مقدار عددی کدام گزینه از سایر گزینه‌ها کوچک‌تر است؟

(۱) 8^{16} (۲) 3^{210} (۳) 4^{23} (۴) 6^{48}

۲۰- اگر $81^a > 27^m$ باشد، کوچک‌ترین عدد طبیعی که به جای m می‌توانیم قرار دهیم کدام است؟

(۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

۲۱- کدام یک از اعداد زیر بزرگ‌ترند؟

(۱) $3^7!$ (۲) $9^6!$ (۳) $27^5!$ (۴) $81^4!$

۲۲- مقدار عددی کدام گزینه کوچک‌تر است؟

(۱) $(-\frac{1}{3})^{-1}$ (۲) $-1/3^{-1}$ (۳) $-1/2^{-2}$ (۴) $-1/1^{-3}$

عبارت‌های توان‌دار با متغیرهای جبری

۲۳- حاصل $(-x^2y)^2 (-xy^4)^3$ به صورت عددی توان‌دار کدام است؟

(۱) $-x^7y^{14}$ (۲) x^7y^9 (۳) $-x^{14}y^9$ (۴) x^7y^{14}

۲۴- ساده‌شدهٔ عبارت $[x(x^{-y})^y]^{\frac{1}{y}}$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) x^y (۳) x^{-y} (۴) x^{-y^2}

۲۵- حاصل عبارت $(\frac{a}{b^{-1}})^{-2}(ab)^2$ برابر است با:

۱) a^2b (۲) ab (۳) a (۴) 1

۲۶- ساده شده $\frac{8^{n+1}}{4^{2n} \times 2^3}$ کدام است؟

۱) 2 (۲) 2^n (۳) $\frac{1}{2^n}$ (۴) 8^n

۲۷- حاصل $\frac{(xy^{-1})^{-3} \div (y^{-1}x)^{-1}}{\frac{y}{x}}$ برابر است با:

۱) xy (۲) $\frac{x}{y}$ (۳) $\frac{y}{x}$ (۴) 1

نصف، ثلث، ربع و خمس

۲۸- نصف عدد $(\frac{1}{8})^{-1}$ چند برابر 4^{-6} است؟

۱) 2^{17} (۲) 2^{-17} (۳) 2^{41} (۴) 2^{-41}

۲۹- نصف عدد $\frac{1}{0.125^5}$ برابر است با:

۱) 2^{14} (۲) 5^4 (۳) $(\frac{1}{5})^{14}$ (۴) $(\frac{1}{2})^{14}$

۳۰- خمس عدد $(125)^4 \div (\frac{1}{2})^{16}$ برابر است با:

۱) 5^4 (۲) 5^{12} (۳) 5^3 (۴) 0.5^6

۳۱- نصف عدد $6 \times 2^6 - 5 \times 2^7$ به صورت عددی توان دار برابر است با:

۱) 2^8 (۲) 2^7 (۳) 2^4 (۴) 5^4

۳۲- ثلث عدد $(-\frac{1}{9})^{-3}$ برابر است با:

۱) $(\frac{1}{3})^5$ (۲) $(-\frac{1}{3})^5$ (۳) -3^5 (۴) 3^5

فاکتورگیری و جمع های یکسان

۳۳- حاصل $2^{29} - 2^{30}$ کدام است؟

۱) 1 (۲) 2^1 (۳) 2^{15} (۴) 2^{29}

۳۴- ساده شده عبارت $1 + \frac{3^{70} - 3^{35}}{3^{35}}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) 3^{35} (۲) 3^{70} (۳) $3^{35} - 1$ (۴) $3^{70} - 1$

۳۵- حاصل $1 - 2 - \dots - 2^{18} - 2^{19} - 2^{20}$ کدام است؟

۱) 1 (۲) 2 (۳) 2^{19} (۴) $2^{19} - 1$

۳۶- حاصل $(5^2 + 5^2)(5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2)$ به صورت عددی توان دار برابر است با:

۱) $2 \cdot 5^6$ (۲) $1 \cdot 5^3$ (۳) $1 \cdot 5^6$ (۴) $2 \cdot 5^3$

۳۷- حاصل $\frac{2^{-15} - 2^{-14}}{2^{14}}$ کدام گزینه است؟

۱) 2^{-29} (۲) -2^{-29} (۳) 2^{-1} (۴) -2^{-1}



۳۸- ساده شده عبارت $3^1 + 3^1 + 3^1 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + 3^3 + \dots + 3^{11} + 3^{11}$ برابر است با:

$3^{11} \times 2$ (۴) 3^{12} (۳) $3^{11} - 3$ (۲) 3^{11} (۱)

۳۹- حاصل $2 \times 2^5 - 2^7 - 2^8$ برابر است با:

2^7 (۴) 2^6 (۳) 2^5 (۲) $2^5 - 1$ (۱)

عبارت‌های شرطی

۴۰- اگر $3^a = 2^5$ باشد، 2^{5-a} برابر است با:

$\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{9}{8}$ (۳) $\frac{9}{16}$ (۲) $\frac{3}{16}$ (۱)

۴۱- اگر $2^x = 10$ باشد، حاصل $(10^x - 10^x) - (10^x + 10^x)$ کدام است؟

380 (۴) 420 (۳) 400 (۲) 200 (۱)

۴۲- اگر $3^a = 8$ باشد، $\frac{3^{a+1}}{12}$ برابر است با:

3 (۴) 2 (۳) 1 (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

۴۳- اگر $M = 16^1$ باشد، آن‌گاه 3^{3^2} بر حسب M کدام است؟

$M^2 \sqrt{M}$ (۴) $M \sqrt{M}$ (۳) M^3 (۲) M^2 (۱)

۴۴- اگر $x^x = 3$ باشد، $x^{x^{x+1}}$ کدام است؟

18 (۴) 81 (۳) 27 (۲) 9 (۱)

۴۵- اگر $a^3 = b$ و $b^a = 3$ باشد، آن‌گاه a^{6^a} برابر است با:

6 (۴) 9 (۳) 1 (۲) b^2 (۱)

۴۶- اگر $a^x + b^x = 0$ باشد، حاصل $\frac{a^{2x} + b^{2x}}{(ab)^x}$ برابر کدام گزینه است؟

-4 (۴) -2 (۳) 4 (۲) 2 (۱)

۴۷- اگر $(\frac{1}{p})^{-p} = 7$ باشد، 25^p کدام است؟

-49 (۴) $\frac{1}{21}$ (۳) $\frac{1}{14}$ (۲) $\frac{1}{49}$ (۱)

معادله‌های توانی

۴۸- اگر $9^{x-2} = 27^{x+1}$ باشد، آن‌گاه x برابر است با:

-1 (۴) 2 (۳) -7 (۲) 5 (۱)

۴۹- اگر $4^x + 4^x = 2 \times 8^{x+1}$ باشد، آن‌گاه x برابر با کدام گزینه است؟

-2 (۴) 3 (۳) -3 (۲) -1 (۱)

۵۰- اگر $25^{4x} = \frac{5^{x-1}}{125}$ باشد، آن‌گاه x برابر است با:

$\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{3}{7}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۱)

۵۱- در معادله توانی $75 \times 25^x = 5^{10} \times 3$ مقدار x برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $-\frac{1}{8}$

۵۲- در معادله توانی $4^x = 125^{3-x} / 125$ مقدار x برابر است با:

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۳ (۴) ۹

۵۳- پاسخ معادله $4^{x+1} = 4^x + 48$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) ۳

جذرهای دقیق و تقریبی

۵۴- حاصل $\sqrt{500}$ به کدام عدد زیر نزدیکتر است؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۷۱ (۳) ۷۲ (۴) ۷۳

۵۵- عدد $1 - \sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟

- (۱) ۰ و -۱ (۲) -۲ و -۳ (۳) -۳ و -۴ (۴) -۴ و -۵

۵۶- مقدار کدام گزینه با سایر گزینهها متفاوت است؟

- (۱) جذر ۴۹ (۲) ± 7 (۳) $\sqrt{49}$ (۴) ریشه دوم ۴۹

۵۷- حاصل $\sqrt{\frac{0.009 \times 0.4}{1/21}}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{3}{55}$ (۲) $\frac{6}{11}$ (۳) $\frac{55}{121}$ (۴) $\frac{5}{11}$

۵۸- حاصل $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{9}}}} - 5}$ برابر است با:

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) ۴ (۳) $\sqrt{8}$ (۴) ۲

۵۹- حاصل $\sqrt{\sqrt{\frac{61}{16} + \frac{5}{4}}}$ برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{9}{4}$ (۳) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۶۰- مقدار تقریبی کدام گزینه بیشتر است؟

- (۱) $\sqrt{10} - \sqrt{5}$ (۲) $\sqrt{1/21}$ (۳) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{0/19}$

جمع، تفریق و ضرب رادیکالها

۶۱- ساده شده $\sqrt{48} - \sqrt{27}$ برابر است با:

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۶۲- حاصل $2 - \sqrt{2}(\sqrt{2} \times \sqrt{2} + \sqrt{2})$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $2\sqrt{2}$ (۴) ۲

۶۳- اگر $a = \sqrt{x} + 1$ باشد، حاصل $x + 2a$ بر حسب a کدام است؟

- (۱) a (۲) ۱ (۳) a^2 (۴) $a^2 + 1$

۶۴- ساده شده عبارت $\sqrt{\frac{45}{20}} \times \frac{2\sqrt{0/4}}{\sqrt{0/9+1/6}}$ برابر است با:

- (۱) $0/2$ (۲) $\frac{6}{5}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{5}{4}$

۶۵- کدام گزینه درست است؟

- (۱) $\sqrt{25} - \sqrt{4} = \sqrt{21}$ (۲) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{4}$ (۳) $\sqrt{64+36} = 14$ (۴) $\sqrt{\frac{0/49}{0/09}} = \frac{7}{3}$

۶۶- حاصل $(\sqrt{27} - \frac{6}{\sqrt{3}})^2$ برابر با کدام گزینه است؟

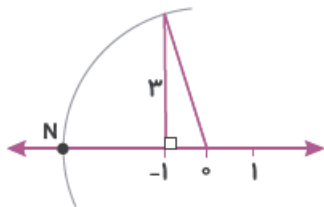
- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) 9 (۳) $\sqrt{3}$ (۴) 3

۶۷- ساده شده عبارت $3\sqrt{2}(\sqrt{8} - 2\sqrt{32})$ برابر است با:

- (۱) -12 (۲) -36 (۳) -24 (۴) -48

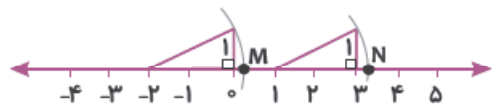
نمایش اعداد رادیکالی روی محور

۶۸- با توجه به شکل زیر، نقطه N چه عددی را نمایش می دهد؟



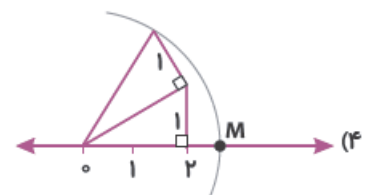
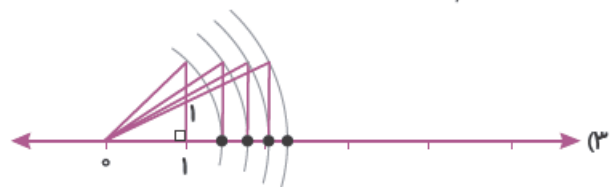
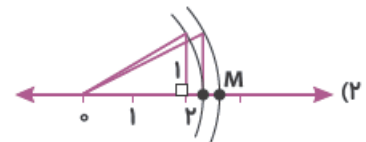
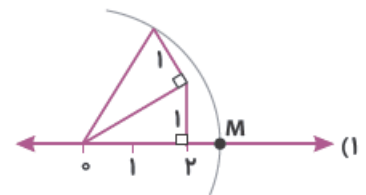
- (۱) $-1 - \sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{10} - 1$ (۳) $-\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{10} - 1$

۶۹- در شکل زیر، طول پاره خط MN برابر است با:



- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) 3 (۳) $2 - \sqrt{5}$ (۴) $4 - 2\sqrt{5}$

۷۰- در کدام گزینه، نقطه M نمایشگر عدد $\sqrt{6}$ نیست؟



پاسخ نامه پرسش های ۴ گزینه ای



۱- گزینه ۱

$$\frac{(-x^{10})^2}{((-x)^5)^3} = \frac{x^{20}}{-x^{15}} = -x^5$$

واضح است که مکعب هر عدد، توان سوم آن عدد است.

۲- گزینه ۳

در صورت کسر، از چپ به راست حاصل عبارت را پیدا می کنیم:

$$3^0 \div 6^{12} = \frac{6^{20} \times 5^{20}}{6^{12}} = 6^8 \times 5^{20}$$

$$\Rightarrow \frac{6^8 \times 5^{20} \times 6^8}{5^{20}} = 6^{16}$$

۳- گزینه ۴

$$5/5 \div 0/0 \cdot 11 = \frac{55}{10} \div \frac{11}{1000} = \frac{55}{10} \times \frac{1000}{11} = 500$$

$$\Rightarrow 500 \cdot 12 \div 50 \cdot 12 = 10^{12}$$

۴- گزینه ۳

حاصل عبارت عددی مثبت است، پس گزینه های (۲) و (۴) حذف می شوند.

$$(20 \div \frac{5}{3})^6 = (20 \times \frac{3}{5})^6 = 12^6$$

۵- گزینه ۲

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{6^3}{6^3} \times 35}} \times 3^4 = 3 \times 35 \times 3^4 = 3^{10}$$

حاصل صورت و مخرج هر دو منفی است:

$$\frac{-(4^{10} \div 4^5)}{-(2^2 \times 2^4)} = \frac{4^5}{2^6} = \frac{2^{10}}{2^6} = 2^4$$

۶- گزینه ۱

۷- گزینه ۱

$$-1 - 9 \times (-8) = -1 + 72 = 71$$

۸- گزینه ۲

$$5^0 \times (3^2)^{50} = 5^0 \times 9^{50} = 45^{50}$$

۹- گزینه ۴

$$8^{10} \times 4^8 \times 3^{218} = (2^3)^{10} \times (2^2)^8 \times (2^5)^{18} \\ = 2^{30} \times 2^{16} \times 2^{180} = 2^{226}$$

۱۰- گزینه ۲

$$A = -(-(-5)^{256})^3 = (-5^{256})^3 = -5^{768}$$

۱۱- گزینه ۳

$$\frac{(2^5)^{17} \times (3^2)^{17}}{288^{10}} = \frac{3^{217} \times 9^{17}}{288^{10}} = \frac{288^{17}}{288^{10}} = 288^7$$

۱۲- گزینه ۳

$$2^1 \times (2^2)^{\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^4)^{\frac{1}{4}} \times (2^5)^{\frac{1}{5}} \\ = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$

۱۳- گزینه ۱

$$(-\frac{1}{25} - (-\frac{1}{5}))^{-1} = (-\frac{1}{25} + \frac{1}{5})^{-1} = (\frac{4}{25})^{-1} = \frac{25}{4}$$

۱۴- گزینه ۲

$$(\frac{1}{10})^{-(-\frac{1}{10})^{-1}} = (\frac{1}{10})^{-10} = 10^{10} = \underbrace{10000000000}_{10 \text{ تا صفر}}$$

۱۵- گزینه ۴

$$(8)^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

۱۶- گزینه ۲

$$(\frac{14}{56})^2 \times 5^6 = (25)^2 \times 5^6 = 5^4 \times 5^6 = 5^{10}$$

۱۷- گزینه ۱

$$[-3^{-4}]^{-1} = [-\frac{1}{81}]^{-1} = -81$$

۱۸- گزینه ۱ برابر ۸+، گزینه (۲) برابر ۱۶-،

گزینه (۳) برابر ۱۶- و گزینه (۴) برابر ۸- است.

۱۹- گزینه ۳ داریم:

$$(1) \quad 8^{16} = (2^3)^{16} = 2^{48}$$

$$(2) \quad 3^{310} = (25)^{10} = 25^{10}$$

$$(3) \quad 4^{23} = (2^2)^{23} = 2^{46}$$

$$(4) \quad 6^{48} = (2^6)^8 = 2^{48}$$

واضح است که عدد گزینه (۳) از بقیه کوچکتر است.

۲۰- گزینه ۳ داریم:

$$27^m > 81^{10} \Rightarrow (3^3)^m > (3^4)^{10}$$

$$\Rightarrow 3^{3m} > 3^{40} \Rightarrow 3m > 40 \Rightarrow m > \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$$

پس کوچک ترین عدد طبیعی با شرایط بیان شده ۱۴ است.

۲۱- گزینه ۱ زیرا:

$$(1) \quad 3^7! = 3^1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$$

$$(2) \quad 9^6! = 3^2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$$

$$(3) \quad 27^5! = 3^3 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$(4) \quad 81^4! = 3^4 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4$$



۴۳- گزینه ۴

$$3^{2^0} = (2^5)^{2^0} = 2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$$

$$= 16^{10} \times 16^{10} \times 16^5 = M \times M \times \sqrt{M} = M^2 \sqrt{M}$$

۴۴- گزینه ۲

$$x^{x^{x+1}} = x^{x^x \times x} = x^{x^x} = (x^x)^x = 3^3 = 27$$

۴۵- گزینه ۳

$$a^{6a} = (a^3)^{2a} = b^{2a} = (b^a)^2 = 3^2 = 9$$

۴۶- گزینه ۳

چون $a^x + b^x = 0 \Rightarrow a^x = -b^x$

لذا: $(a^x)^2 = (-b^x)^2 \Rightarrow a^{2x} = b^{2x}$

$$\Rightarrow \frac{a^{2x} + b^{2x}}{(ab)^x} = \frac{a^{2x} + a^{2x}}{a^x(-a^x)} = \frac{2 \times a^{2x}}{-a^{2x}} = -2$$

۴۷- گزینه ۱

چون $(\frac{1}{p})^{-p} = 7$ پس $2^p = 7$ است.

لذا:

$$0/25^p = (\frac{25}{100})^p = (\frac{1}{4})^p = (2^{-2})^p$$

$$= (2^p)^{-2} = 7^{-2} = \frac{1}{49}$$

۴۸- گزینه ۲

$$(3^3)^{x+1} = (3^2)^{x-2} \Rightarrow 3^{3x+3} = 3^{2x-4}$$

$$\Rightarrow 3x+3 = 2x-4 \Rightarrow x = -7$$

۴۹- گزینه ۲

$$y \times 4^x = y \times 8^{x+1} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{3x+3}$$

$$\Rightarrow 2x = 3x+3 \Rightarrow x = -3$$

۵۰- گزینه ۳

$$5^{x-1} = 125 \times 25^{4x} \Rightarrow 5^{x-1} = 5^3 \times 5^{8x}$$

$$\Rightarrow x-1 = 3+8x \Rightarrow 7x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{7}$$

۵۱- گزینه ۱

$$7 \times 5^{10x} = 7^5 \times 5^{2x} \Rightarrow 5^{10x} = 5^2 \times 5^{2x}$$

$$\Rightarrow 10x = 2+2x \Rightarrow 8x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

۵۲- گزینه ۴

$$(\frac{1}{8})^{3-x} = 4^x \Rightarrow (2^{-3})^{3-x} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow 2^{3x-9} = 2^{2x} \Rightarrow 3x-9 = 2x \Rightarrow x = 9$$

۵۳- گزینه ۱

$$4^{x+1} - 4^x = 48 \Rightarrow 4^x(4-1) = 48$$

$$\Rightarrow 4^x = 16 = 4^2 \Rightarrow x = 2$$

۵۴- گزینه ۲

$$\sqrt{500} = \sqrt{100 \times 50} = 10\sqrt{50} = 10 \times 7.07 = 70.7$$

۵۵- گزینه ۳

۵۶- گزینه ۳ زیرا $\sqrt{49} = +7$ ولی سایر گزینه‌ها

برابر ± 7 است.

۵۷- گزینه ۱

$$\sqrt{\frac{9 \times 4 \times 0.0001}{121 \times 0.01}} = \frac{3 \times 2 \times 0.01}{11 \times 0.1} = \frac{0.06}{11} = \frac{6}{110} = \frac{3}{55}$$

۵۸- گزینه ۴

$$\sqrt{\sqrt{\frac{81}{16}}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

۵۹- گزینه ۱

۶۰- گزینه ۲، $\sqrt{1/21} = 1/1$ اما سایر گزینه‌ها

کوچک‌تر از ۱ هستند.

۶۱- گزینه ۲

$$\sqrt{2^4 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

۶۲- گزینه ۳

$$\sqrt{2(2+\sqrt{2})} - 2 = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2}$$

۶۳- گزینه ۴

$$\sqrt{x} = a-1 \Rightarrow x = (a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$$

$$\Rightarrow x + 2a = a^2 + 1$$

۶۴- گزینه ۲

$$\sqrt{\frac{9}{4}} \times \frac{2\sqrt{0/4}}{\sqrt{2/5}} = \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{2/5}} = 3 \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

۶۵- گزینه ۴

۶۶- گزینه ۴

$$(3\sqrt{3} - \frac{6}{\sqrt{3}})^2 = (\frac{3 \times 3 - 6}{\sqrt{3}})^2 = (\frac{3}{\sqrt{3}})^2 = \frac{9}{3} = 3$$

۶۷- گزینه ۲

$$3(\sqrt{16} - 2\sqrt{64}) = 3(4 - 16) = -36$$

۶۸- گزینه ۳

۶۹- گزینه ۲

$$1 + \sqrt{5} - (-2 + \sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = 3$$

۷۰- گزینه ۳ توجه داشته باشید که نقطه M در

گزینه (۳) نمایش عدد $\sqrt{5}$ می‌باشد.