



برگی از درخت المپیاد ریاضی

# جبر مقدماتی

(از مقدمات تا المپیاد)

مؤلف:

کریم مختاری



انتشارات خوشخون



مسابقه‌ها، کنکورها و المپیادهای علمی نقش عمده‌ای را در باور کردن و شکفتن استعداد دانش‌آموزان ایفا می‌کنند و باید به جرأت ادعا کرد که این مسابقات توانسته‌اند اعتماد به نفس لازم در جوانان عزیز کشورمان برای رقابت علمی با جوانان سایر نقاط جهان را تا حد زیادی افزایش دهند.

کتاب‌های موجود در دوره‌های تحصیلی به هیچ عنوان نمی‌توانند دانش‌آموزان را برای آماده شدن در این رقابت‌ها اغنا کنند، لذا لازم است در کنار کتاب‌های درسی، خلأ موجود خصوصاً برای دانش‌آموزان مستعد و ممتاز شناسایی و پر شود. در همین راستا انتشارات خوشخوان با استعانت از حضرت حق تعالی و به کمک آنان در زمانی نه چندان دور، مدال‌آور المپیادهای علمی در سطح ایران و جهان بوده‌اند، کتاب‌هایی را تألیف و به دانش‌آموزان ارائه می‌نمایند. امید است مورد پسند و استفاده‌ی دانش‌آموزان و دبیران این مرز و بوم قرار گیرند.

تقدیم به دو زن

یکی عشق آموخت مرا و دیگری جان سوخت

«مادر و همسر»

از فراق تو مرا چون سوخت جان

چون ننالم بی تو ای جان جهان

باید که خاک من از خون بنا گردد . . .

بنای آزادی بی مرگ و خون کی میسر شد؟

پیکار می کنم، می میرم، این است عشق من

می دانی، من ایرانی ام . . .

به خودم گفتم باید حرف های بزرگی رو توی مقدمه نوشت. چون فرصت های خیلی کمی پیش می آد که آدم حرف و بغض دلش رو راست راست به بقیه بگه. خاصه برای ما معلم های ریاضی که بحث و درسمون خیلی دقیقه و کم تر جا برای احساسات باز می شه. به خودم گفتم کسایی که این کتاب رو می خونن دبیرستانی ان، بزرگ شدن. خاصه این که بچه های المپیادی هم باشن معرکه است. اونم چه المپیادی . . . به خودم گفتم که کی جوون و نو جوون ما می خواد به خودش بیاد و برای سربلندی و حفظ فرهنگ و اقتصاد و . . . خودش کاری کنه؟ تا کی ما باید برای روابط جبری که خودمون ایجادش کردیم و ساختیم (خیام، خوارزمی، ابوریحان و بقیه رفقا رو می گم) از زبان لاتین استفاده کنیم؟

کنون دین و خاک و تاریخ ایران منتظر قدم های استوار علم و عشق توست.

که جایگاه بلند او را برایش باز آفرینی که اگر دقیق بنگری، تو نیازمند این مهم هستی، نه او هدف از نوشتن این کتاب، پوشش همه مباحث جبر در المپیاد ریاضی تا سطح مرحله اول و تا حدود بسیار قابل قبولی از مرحله دوم بود. یعنی بهترین راه برای شروع مبحث جبر المپیاد ریاضی خواندن همین کتاب است! پس خوشحال باش!

کتاب ۶ فصل داره:

**فصل اول** آشنایی با عبارات های جبری بخصوص چند جمله ای ها و بخصوص تر چند جمله ای های درجه ی اوله. در فصل اول نکته ای وجود داره و اون ارتباط خوبی که بین جبر و هندسه ایجاد شده، یعنی توی این فصل تا حدودی رویکرد هندسه تحلیلی ای داشتیم. چون اعتقاد داشتیم این نگاه توی حل سوالات المپیاد تأثیر داره ولی غالباً جدی گرفته نشده.

**فصل دوم** به برادران اتحاد تخصص داردا! خانواده ای با بی نهایت عضو! این فصل حکم جعبه ابزار رو برای یه المپیاد ریاضی ای و فیزیکی و نجومی داره. به همین خاطر کمی زیاد شده، خیلی جدی بگیریدش.

**فصل سوم** هم در مورد چند جمله‌ای‌های درجه دوم و بالاتر بحث می‌کند که سوالات خاص خودش رو تو المپیاد داره. راستی روابط ویت و حواشیش رو هم تو همین فصل آوردیم.

**فصل چهارم** مربوط می‌شه به عزیز مغزها، «تابع» و معادلاتش. بعد از تعریف تابع و ویژگی‌های اصلی تابع مثل یک‌به‌یک بودن، صعودی و نزولی بودن و ... چند تا تابع خاص و بسیار پرکاربرد در المپیاد ریاضی، معرفی شدن و در آخر هم به مقدار لازم و کافی از معادلات تابعی بهش اضافه کردم.

**فصل پنجم** در مورد نامساوی‌های جبری بحث می‌کند. این فصل تقریباً از فصل سوم و چهارم مستقله و بعد از خواندن فصل دوم می‌شه که خونده بشه. البته اگه معلمتون گفت یا دلیل جدی وجود داشت.

**فصل ششم** هم اختصاص داره به موجودات دوست داشتنی به نام دنباله. مثل فصل چهارم بعد از بحث در مورد کلیات دنباله، دنباله‌های خاص رو معرفی کردم. راستی برای این‌که توی سؤال‌های سخت کم نیارید به اندازه‌ی لازم و کافی در مورد نمادهای  $\Sigma$  و  $\Pi$  سؤال و تمرین گذاشتم. خیالتون راحت. خسته که نشدی برادر؟! (شایدم خواهر!) الان دیگه تموم می‌شه. بزارید یکم دیگه از کتابمون تعریف کنم. هر فصل کتاب ۴ قسمت داره:

**۱. متن:** توی متن از صفر کلوین شروع کردم به درس دادن و مثل یک معلم خوب (خودم رو می‌گم) با مثال‌های کاربردی و المپیادی مطلب رو جلو بردم. مطمئناً سؤال‌های این قسمت فقط با سؤال‌های آسون مرحله‌ی اول برابری می‌کنه و انتظار بیشتری ازش نباید داشته باشید ولی انصافاً تو منتقل کردن مفاهیم ترکونده.

**۲. مسائل حل شده:** این قسمت مکمل متن هر فصله. یعنی سؤال‌های متوسط و سخت و سخت‌تر از سخت هر فصل با نظمی مثال زدنی توی این قسمت آورده شده. در ضمن نکات تکمیلی هر فصل، تو لابه‌لای جواب‌های این مسائل بیان شدن. حدود ۷۵ درصد سوالات از مراحل اول و دوم المپیاد کشورمون و المپیاد کشورهای مختلف انتخاب شده که به ترتیب آموزشی براتون مرتب کردم.

**۳. تمرین:** تو دو تا قسمت قبل بیشتر زحمت‌ها پای من و کمی پای شما بود، و این در آموزش یعنی مزخرف‌ترین چیز. آموزش حل مسأله فقط و فقط و فقط و ... از طریق حل مسأله اتفاق می‌افته. یعنی اگه می‌خوای بتونی خودت سؤال‌های المپیاد رو حل کنی باید از مسیر این تمرین‌های بگذری. حالا برای این‌که ناامید نشی **هر سؤال در دو مرحله و به صورت جدا راهنمایی شده** که این ایده‌ی بسیار مؤثر رو مدیون جناب آقای داود معصومی (استاد بنده) هستیم. تمرین‌ها، موضوع‌بندی و سطح‌بندی شده‌اند تا ذهن شما رو منظم شکل بدن. اینجا هم حدود ۷۵ درصد تمرین‌ها از سوالات مرحله‌ی اول و دوم و سوالات المپیاد کشورهای مختلف انتخاب شده.

**۴. سؤال مرحله اول (تست):** تو این قسمت، تمام سوالات مرحله اول مربوط به هر فصل از سال ۱۳۶۷ تا حالا همراه با دو مرحله راهنمایی آورده شده که شما رو از داشتن کتاب دیگه‌ای بی‌نیاز کنه. انصافاً برای این کتاب آدم‌های زیادی روزها و شب‌ها زحمت کشیدن که باید ازشون تشکر بشه. آخه

می‌دونید، کار، قبل از چاپ چند بار بازنویسی و ویراست شده که زحمتش پای این عزیزان بوده:  
خانم‌ها ساناز عزیززاده، غزاله فرج‌پور، زهرا فریدون‌پور، آرزو عزیززاده، مینا ترکاشوند، فاطمه یاورتنو و  
فریبا ابراهیمی و صد البته آقایان افشین فرج‌پور، سهند حسین‌زاده، آرش کریمی، محمود مزرعه کاظمی،  
مجید دینی‌پور و حسین ذاکری‌نیا.

دانش‌آموزان گذشته و استادان آینده‌ی من یعنی آقایان حسین نفیسی، محمدرضا لطفعلی‌زاده و  
اسماعیل طلاپور در قسمت تست‌های هر فصل بسی زحمت کشیدند که ازشون بسی ممنونم.  
آخرکاری از متخصصین آموزش المپیاد جناب آقای رسول حاجی‌زاده (مدیرمسئول انتشارات) جناب  
آقای مهندس پیمان اکبری (مسئول درخت المپیاد انتشارات) و جناب آقای دکتر محمدجمال صادقی  
(مسئول المپیاد ریاضی انتشارات) که با نظرات دقیقشون باعث بهتر شدن این کتاب شدند ممنونم.  
برای انتقال نظرات و پیشنهادات ارزشمند خود می‌توانید از روش‌های زیر استفاده کنید:

Email:1357mokhtari@gmail.com

Telegram.me/karimmokhtari

بلندهمت باشید - مختاری



## فهرست مطالب

۱	آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و معادله درجه اول	فصل ۱	
۴۳	اتحادها و تجزیه	فصل ۲	
۱۲۳	چند جمله‌ای‌های درجه دوم و بالاتر	فصل ۳	
۱۶۵	تابع و معادلات تابعی	فصل ۴	
۲۴۵	نامساوی‌ها	فصل ۵	
۲۹۷	دنباله‌ها	فصل ۶	



## آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

چندجمله‌ای‌ها از زمان‌های بسیار دور به کار گرفته شده‌اند. شکل فعلی چندجمله‌ای از قرن ۱۵ به وجود آمد. در قرون پیشین معادلات به صورت تشریحی نوشته می‌شدند که نمونه‌ی آن‌ها در کارهای دانشمندان ایرانی مانند خوارزمی و نوشته‌های چینی دیده شده است.

به هنگام بحث درباره‌ی چندجمله‌ای‌ها، سؤالات متعددی پیش می‌آید. آیا عدد صفر چندجمله‌ای است؟ در این صورت، درجه‌ی آن چند است؟ آیا  $\frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 1}$  چندجمله‌ای است؟ این عبارت پس از ساده‌سازی به صورت  $x$  است، اما به ازای همه مقادیر  $x$  تعریف نشده است.

بروز این سؤالات، نشان‌دهنده‌ی وجود کم‌دقتی در تعاریف و مفاهیم است. اگر همه‌ی مفاهیم به درستی تعریف شده باشند، کافی است به تعاریف مراجعه شود تا معلوم شود چه چیزی در تعریف صدق می‌کند یا نمی‌کند. البته بروز برخی کم‌دقتی‌ها اجتناب‌ناپذیر است، زیرا سطح برخی از مطالب، ممکن است بالاتر از آن باشد تا بتوان آن‌ها را با دقت کامل در سطح دبیرستان مطرح کرد. بحث چندجمله‌ای‌ها نیز اندکی پیچیدگی دارد ولی سعی داریم در این کتاب با دقت کافی آن‌ها را مطرح سازیم.



### آشنایی مقدماتی

۱-۱

سال‌هاست که می‌دانید در ریاضیات برای نشان دادن یک متغیر از نمادهایی که غالباً حروف لاتین و انگلیسی است، استفاده می‌شود و به عبارت ایجاد شده یک عبارت جبری گفته می‌شود. در این فصل با عبارت‌هایی که از جمع و تفریق تک‌جمله‌ای‌ها<sup>۱</sup> ساخته شده باشد سروکار داریم و به مجموع حداقل دو (۱) به هر عبارتی که به صورت حاصل‌ضرب یک عدد حقیقی در توان صحیح نامنفی یک یا چند متغیر نوشته شود، یک



یک جمله‌ای «چند جمله‌ای» می‌گوییم به طور مثال،  $x^2 + 2x + 1$  یک سه جمله‌ای است که بیش‌ترین توان متغیر آن، ۲ است. به بیش‌ترین توان متغیر در یک عبارت جبری درجه چند جمله‌ای می‌گوییم.

**مثال ۱-۱**

درجه چند جمله‌ای‌های زیر را مشخص کنید.

۱)  $\sqrt{3}x^4 - \frac{6}{5}x^2 - 7$

۲)  $5x^6 - 4x^5 + \frac{3}{7}x^2 - 5$

**حل: ۱)** سه جمله‌ای درجه‌ی ۴ با ضرایب حقیقی

**۲)** چهارجمله‌ای درجه‌ی ۶ با ضرایب گویا

فرم کلی یک چندجمله‌ای غیرصفر را می‌توان به صورت زیر نشان داد<sup>۱</sup>:  $(n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0)$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

اکنون می‌توانیم به جای  $x$  هر عدد حقیقی قرار دهیم و مقدار چندجمله‌ای را به ازای آن عدد به دست آوریم.

**مثال ۲-۱**

مقدارهای خواسته شده را به دست آورید.

۱)  $f(x) = 9x^2 - 30x + 25$ ;  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(\frac{5}{3})$

۲)  $g(x) = (3x - 5)^2$ ;  $g(0)$ ,  $g(1)$ ,  $g(\frac{5}{3})$

**حل:**

$f(0) = 25$

$f(1) = 9 \times 1^2 - 30 \times 1 + 25 = 4$

$f(\frac{5}{3}) = 9 \times \frac{25}{9} - 30 \times \frac{5}{3} + 25 = 25 - 50 + 25 = 0$

$g(0) = (-5)^2 = 25$

$g(1) = (3 \times 1 - 5)^2 = (-2)^2 = 4$

$g(\frac{5}{3}) = (3 \times \frac{5}{3} - 5)^2 = (5 - 5)^2 = 0$

برای اختصار، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها را فقط با یک مثال بیان می‌کنیم.

**مثال ۳-۱**

حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

$P(x) = x^2 - 3x + 2$        $Q(x) = x - 1$

۱)  $P(x) + Q(x)$

۲)  $P(x) - Q(x)$

۳)  $P(x) \cdot Q(x)$

۴)  $\frac{P(x)}{Q(x)}$

چند جمله‌ای گویند. دقت کنید که توان حروف نباید منفی باشد. (۱) دقت کنید که شماره‌ها در ضرایب (مانند  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ) فقط برای نام‌گذاری است.



آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

حل:

$$\begin{aligned} ۱) \quad P(x) + Q(x) &= (x^2 - 3x + 2) + (x - 1) = x^2 + (-3 + 1)x + (2 - 1) \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad P(x) - Q(x) &= (x^2 - 3x + 2) - (x - 1) = x^2 + (-3 - 1)x + (2 - (-1)) \\ &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) \quad P(x) \cdot Q(x) &= Q(x) \cdot P(x) &= (x - 1)(x^2 - 3x + 2) \\ x^3 - 3x^2 + 2x - x^2 + 3x - 2 &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3x + 2 & x - 1 \\ -(x^2 - x) & x - 2 \\ \hline -2x + 2 & \\ -(-2x + 2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)} = (x - 2)$$

**مثال ۴-۱** اگر چند جمله‌ای  $P(x)$  از درجه‌ی  $m$  و چند جمله‌ای  $Q(x)$  از درجه‌ی  $n$  باشد و  $m > n$ ، درجه‌ی عبارتهای زیر را به دست آورید.

۱)  $P(9)$

۲)  $P(x) + Q(x)$

۳)  $P(x) - Q(x)$

۴)  $P(x) \cdot Q(x)$

۵)  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  خارج قسمت

۶)  $P(5x)$

۷)  $P(x^2)$

۸)  $P(Q(x))$

حل: ابتدا با توجه به اطلاعات مسئله فرم کلی  $P(x)$  و  $Q(x)$  را می‌نویسیم:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

۱. می‌دانیم که  $P(9) \in \mathbb{R}$  یعنی  $P(9)$  یک عدد ثابت است و متغیری در آن وجود ندارد. پس از درجه‌ی صفر است. به عبارت دیگر هر عدد را می‌توان یک چندجمله‌ای درجه‌ی صفر تعریف کرد.<sup>۱</sup>
۲. مشخص است که این عبارت از درجه‌ی  $m$  است (درجه‌ی بیش‌تر) با این حال می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= [(a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_{n+1} x^{n+1}) \\ &+ (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)] \\ &+ [b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0] \\ &= a_m x^m + \dots + a_{n+1} x^{n+1} + (a_n + b_n) x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} \\ &+ \dots + (a_2 + b_2) x^2 + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

۳. مانند روش قبل بررسی کنید. جواب همان  $m$  است.
۴. درجه‌ی  $P(x) \cdot Q(x)$  را باید از حاصل ضرب جملات اول (جملات با بیش‌ترین درجه) به دست آورد.

$$P(x) \cdot Q(x) = (a_m x^m + \dots)(b_n x^n + \dots) = a_m b_n x^{(m+n)} + \dots$$

بنابراین جواب  $m + n$  است.

۵. جواب  $(m - n)$  است.
۶. در این مورد باید به جای  $x$  عبارت  $5x$  را جایگذاری کنید. در این صورت ضرایب تغییر می‌کنند ولی درجه‌ی عبارت تغییر نخواهد کرد.
۷. باید در  $P(x)$ ، به جای  $x$  قرار دهیم  $x^2$ ، در این صورت:

$$\begin{aligned} P(x^2) &= a_m (x^2)^m + a_{m-1} (x^2)^{m-1} + \dots + a_0 \\ &= a_m x^{2m} + a_{m-1} x^{2m-2} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

بنابراین جواب  $2m$  است.

۸. به جای متغیر  $x$  در  $P(x)$  باید  $Q(x)$  را قرار دهیم:

$$P(Q(x)) = a_m (b_n x^n + \dots + b_0)^m + a_{m-1} (b_n x^n + \dots + b_0)^{m-1} + \dots + a_0$$

اکنون با استفاده از قاعده‌ی  $(x^n)^m = x^{nm}$  می‌فهمیم که  $P(Q(x))$  از درجه‌ی  $mn$  است.

(۱) گاهی می‌نویسند:  $5 = 5 \times 1 = 5 \times x^0$ . ولی باید توجه کرد که  $0^\circ$  تعریف نشده است، یعنی برابر هیچ عددی نیست. پس اگر بخواهیم دقیق باشیم  $5x^0$  به ازای  $x = 0$  برابر ۵ نیست.



به تساوی‌های زیر دقت کنید:

$$۱) x + ۵ = ۲x + ۱۰$$

این تساوی فقط به ازای  $x = -۵$  برقرار است.

$$۲) (x - ۱)(x - ۲)(x - ۳) \cdots (x - ۱۰۰) = ۰$$

این تساوی فقط به ازای اعضای مجموعه‌ی  $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq ۱۰۰\}$  برقرار است.

$$۳) ۲[x] + ۱ = ۵$$

این تساوی فقط به ازای اعضای  $\{x \in \mathbb{R} \mid ۲ \leq x < ۳\}$  برقرار است. (منظور از  $[ \cdot ]$  جزء صحیح عدد است. به طور مثال،  $[۲,۴] = ۲$  و  $[-۱,۸] = -۲$ .)

$$۴) ۲(x - ۵) = ۲x - ۱۰$$

این تساوی به ازای تمام اعداد برقرار است.

$$۵) \frac{۲(x - ۵)}{x - ۱} = \frac{۲x - ۱۰}{x - ۱}$$

این تساوی به ازای تمام اعدادی که می‌توان در عبارت قرار داد برقرار است.<sup>۱</sup>

به تساوی‌هایی که به ازای هر مقدار حقیقی عضو دامنه برقرار هستند، اتحاد می‌گوییم.

مانند تساوی‌های شماره‌ی ۴ و ۵ که گاهی آن را با علامت  $\equiv$  نشان می‌دهیم.

دقت کنید که معادله می‌تواند؛ صفر، یک یا بیش‌تر و یا حتی تعداد نامتناهی جواب داشته باشد (تساوی

۳). به سادگی می‌توانید استدلال کنید که شرط لازم و کافی برای این‌که یک چند جمله‌ای متحد با صفر

باشد این است که تمام ضرایب آن صفر باشد:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$$

مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد:

مثال ۵-۱

$$(a - 1)x^5 + (b + a - 1)x^3 + 4x^2 - 2d + b - 2a$$

$$\equiv 4x^3 + (2c - 6)x^2 + 2d - 2a$$

اتحاد صورت کامل‌تر تساوی است، پس تمام قضایای تساوی در اتحاد برقرار است (ولی عکس این جمله

درست نیست)، پس می‌نویسیم:

$$(a - 1)x^5 + (b + a - 5)x^3 + (10 - 2c)x^2 + (b - 4d) \equiv 0$$

۱) توجه کنید که نمی‌توان  $x = ۱$  را قرار داد. زیرا به ازای این مقدار طرفین نامساوی بی‌معنی و تعریف نشده خواهند بود.

در قسمت دامنه‌ی توابع به این موضوع کاملاً پرداخته‌ایم.

اکنون با توجه به این که این چند جمله‌ای متحد با صفر است، نتیجه می‌گیریم:

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$b + a - 5 = 0 \Rightarrow b = 5 - a = 4$$

$$10 - 2c = 0 \Rightarrow c = 5$$

$$b - 4d = 0 \Rightarrow 4d = 4 \Rightarrow d = 1$$

با روش حل مثال بالا، می‌توان به سادگی قضیه‌ی زیر را اثبات کرد.

### قضیه

شرط لازم و کافی برای این که دو چندجمله‌ای متحد باشند این است که از یک درجه باشند و تمام ضرایب آن‌ها برابر باشند.

$$\begin{aligned} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ \equiv b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \\ \Leftrightarrow a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0. \end{aligned}$$

**مثال ۶-۱** اگر  $g(x) \equiv x^2$ ،  $p(x) \equiv ax^n + bx^2$  و  $p(p(x)) \equiv p(g(x))$  آن‌گاه مقدار  $a + b$  را بیابید. ( $n \geq 2$ )

می‌دانیم که  $p(p(x))$  از درجه‌ی  $n^2$  و  $p(g(x))$  از درجه‌ی  $2(n)$  است. پس با توجه به قضیه‌ی قبل باید درجه‌ی آن‌ها برابر باشد.

$$n^2 = 2n \Rightarrow n = 0 \text{ یا } n = 2$$

واضح است که  $n = 0$  در فرض مسئله ( $n \geq 2$ ) صدق نمی‌کند. با قرار دادن  $n = 2$  داریم:

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx^2 = (a+b)x^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} p(p(x)) = (a+b)((a+b)x^2)^2 = (a+b)^3 x^4 \\ p(g(x)) = (a+b)(x^2)^2 = (a+b)x^4 \end{cases} \end{aligned}$$

برای متحد بودن این دو چندجمله‌ای، باید:

$$(a+b)^3 = (a+b) \Rightarrow a+b = 0, 1, -1$$



اکنون یکی از پرکاربردترین قضیه‌های ابتدایی جبر را بیان می‌کنیم.

### قضیه

$$\forall P(x), (Q(x) \neq 0) \exists! M(x), R(x) : P(x) \equiv Q(x)M(x) + R(x)$$

$$\deg(Q(x)) > \deg(R(x))$$

در تقسیم هر چندجمله‌ای به نام  $P(x)$  به هر چندجمله‌ای دیگری به نام  $Q(x)$ ، (با این شرط که  $Q(x) \neq 0$ )، چندجمله‌ای‌های منحصر به فردی به نام‌های  $M(x)$  و  $R(x)$  وجود دارند که:

درجه‌ی  $R(x)$  حتماً کم‌تر از درجه‌ی  $Q(x)$  است و  $P(x) \equiv Q(x)M(x) + R(x)$

در قضیه‌ی بالا اگر  $P(x)$  از درجه‌ی  $m$  و  $Q(x)$  از درجه‌ی  $n$  باشد،  $M(x)$  از درجه‌ی  $(m - n)$  و  $R(x)$  از درجه‌ی کم‌تر از  $n$  (یا  $0$  یا  $1$  یا  $2$  یا  $\dots$  یا  $n - 2$  یا  $n - 1$ ) خواهد بود.

**مثال ۷-۱** باقی‌مانده‌ی تقسیم  $P(x)$  را بر  $Q(x) = x - 1$  به دست آورید.

$$P(x) = x^{100} + 2x^{99} + 3x^{98} + \dots + 99x^2 + 100x + 101$$

**حل:** چون  $Q(x)$  از درجه‌ی  $1$  است پس  $R(x)$  حتماً از درجه‌ی صفر است یعنی حتماً عدد است. طبق قضیه‌ی تقسیم داریم:

$$P(x) \equiv Q(x)M(x) + R(x) \Rightarrow P(1) = \underbrace{Q(1)M(1)}_0 + R(1)$$

در واقع در این اتحاد، عددی را قرار دادیم که  $Q(x)$  برابر صفر شود و  $Q(x) \cdot M(x)$  از تساوی حذف شود تا به سادگی  $R(x)$  را (که در این جا عدد است و آن را با  $r$  نشان می‌دهیم) به دست آوریم:

$$P(1) = 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 101 = \frac{102 \times 101}{2} = 51 \times 101 = r$$

**مثال ۸-۱** اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم  $u(x)$  بر  $x$  و  $(x + 1)$  به ترتیب برابر  $4$  و  $-2$  و باقی‌مانده‌ی تقسیم  $v(x)$  بر  $x$  و  $(x + 1)$  به ترتیب برابر  $-3$  و  $2$  شود. باقی‌مانده‌ی تقسیم  $u(x)v(x)$  را بر  $(x + 1)$  به دست آورید.



$$\begin{cases} u(x) = xM_1(x) + 4 \\ u(x) = (x+1)M_2(x) - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u(0) = 4 \\ u(-1) = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(x) = xN_1(x) - 3 \\ v(x) = (x+1)N_2(x) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(0) = -3 \\ v(-1) = 2 \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم که خارج قسمت تقسیم جدید، یعنی  $x^2 + x = x(x+1)$  از درجه‌ی ۲ است. پس باقی‌مانده یا درجه‌ی ۱ است و یا صفر. باقی‌مانده را درجه یک در نظر گرفته و ادامه می‌دهیم. (اگر باقی‌مانده درجه صفر باشد نگرانی وجود ندارد زیرا  $a = 0$  به دست خواهد آمد.)

$$u(x)v(x) = [x(x+1)]S(x) + (R(x) = ax + b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(0)v(0) = [0 \times 1]S(0) + (R(0) = a \times 0 + b) \\ u(-1)v(-1) = [-1 \times \underbrace{(-1+1)}_0]S(-1) + (R(-1) = -a + b) \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر به دست آمده، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 4 \times -3 = b \\ -2 \times 2 = -a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -12 \\ a = -8 \end{cases}$$

پس باقی‌مانده برابر است با:

$$R(x) = -8x - 12$$

✓ **نکته ۱.** به سادگی از قضیه‌ی تقسیم نتیجه می‌شود که اگر  $P(a) = 0$  را ریشه‌ی  $P(x)$  می‌نامیم) آنگاه  $(x - a)$  از عامل‌های  $P(x)$  است:

$$P(a) = 0 \Leftrightarrow P(x) = (x - a)G(x)$$

✓ **نکته ۲.** اگر  $P(x)$  درجه‌ی  $n$  باشد آنگاه حداکثر بر  $n$  عبارت درجه یک بخش‌پذیر است و به عبارت دیگر حداکثر  $n$  ریشه خواهد داشت.



آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

**مثال ۹-۱**  $A(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  و  $(x+2)$  و  $(x+1)$  و  $(x-1)$  عامل‌های  $A(x)$  هستند.  $a$ ،  $b$  و  $c$  را به دست آورید.

**حل:** با توجه به نکات قبل  $A(x)$  حداکثر ۳ عامل می‌تواند داشته باشد. پس تمام عوامل  $A(x)$  را شناخته‌ایم:

$$A(x) = (x-1)(x+1)(x+2)$$

عبارت دیگری نمی‌تواند در این ۳ عامل ضرب شود تا  $A(x)$  را بسازد زیرا در آن صورت درجه‌ی عبارت سمت راست از ۳ بیش‌تر خواهد شد:

$$A(1) = 1 + a + b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad A(1) = A(-1) \Rightarrow a + c = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$A(-1) = -1 + a - b + c = 0$$

$$A(-2) = -8 + 4a - 2b + c = 0$$

با جایگذاری نتایج به دست آمده در تساوی سوم، خواهیم داشت:  $a = -c = 2$ .

**مثال ۱۰-۱** آیا چند جمله‌ای  $p(x)$  از درجه‌ی ۲ با ضرایب صحیح وجود دارد به طوری که:

$$p(10) = 5$$

$$p(-9) = -5$$

**حل:** نشان می‌دهیم که غیرممکن است هر سه‌تای  $a$ ،  $b$  و  $c$  صحیح باشند:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(10) = a \times (10)^2 + b(10) + c = 5 \\ p(-9) = a(-9)^2 + b(-9) + c = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(10) - p(-9) = a(10^2 - (-9)^2) + b(10 - (-9)) = 5 - (-5) = 10$$

$$\Rightarrow a \times 19 + b \times 19 = 19(a + b) = 10$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{10}{19}$$

پس قطعاً حداقل یکی از  $a$  و  $b$  صحیح نیست، زیرا در غیر این صورت  $(a + b) \in \mathbb{Z}$ .



✓ **نکته ۳.** اگر  $p(x)$  یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح باشد، برای هر دو عدد صحیح مانند  $m$  و  $n$ ،  $p(m) - p(n)$  بر  $m - n$  بخش پذیر است. به عبارت ریاضی:  
اگر ضرایب  $p(x)$  صحیح باشد:

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \exists! q \in \mathbb{Z} : p(m) - p(n) = (m - n)q$$

**مثال ۱۱-۱** اگر چندجمله‌ای  $ax^3 + bx + c$  بر  $x^2 + tx + 1$  بخش پذیر باشد آن‌گاه ثابت کنید  $a^2 - c^2 = ab$  ( $a \neq 0$ ).

**حل:** روش اول: طبق قضیه‌ی تقسیم داریم:  $ax^3 + bx + c \equiv (x^2 + tx + 1)M(x) + 0$   
می‌خواهیم کاری عجیب انجام دهیم. اگر قرار دهیم  $x^2 + tx + 1 = 0$  خواهیم داشت  $x^2 = -tx - 1$ . اکنون در اتحاد بالا، تساوی به دست آمده را جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} ax \times x^2 + bx + c &\equiv (x^2 + tx + 1)M(x) \\ \Rightarrow ax \times (-tx - 1) + bx + c &\equiv (-tx - 1 + tx + 1)M(x) \equiv 0 \\ \Rightarrow -atx^2 - ax + bx + c &\equiv -at(-tx - 1) - ax + bx + c \equiv 0 \\ \Rightarrow +at^2x + at - ax + bx + c &\equiv (at^2 - a + b)x + (at + c) \equiv 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} at + c = 0 \Rightarrow t = -\frac{c}{a} \\ at^2 - a + b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$t = -\frac{c}{a}$  را در تساوی دوم جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{c}{a}\right)^2 - a + b = 0 &\Rightarrow \frac{c^2}{a} - a + b = 0 \\ \xrightarrow{\times a} c^2 - a^2 + ab = 0 &\Rightarrow a^2 - c^2 = ab \end{aligned}$$

همان طور که مشاهده می‌کنید گاهی لازم است به جای  $x$  یا توانی از  $x$  (مانند  $x^2$ ) مقدار عددی و یا جبری را قرار داد تا مسئله حل شود. برای پیدا کردن تسلط کافی در این تکنیک، در موارد زیر، باقی مانده‌ی  $P(x)$  بر  $Q(x)$  را به دست آورید.

۱)  $P(x) = 5x^2 + 3x^4 + x^3 + x - 7$  ,  $Q(x) = x^2 + 1$

۲)  $P(x) = x^3 - 8x + 4$  ,  $Q(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}$



آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

روش دوم: با روش تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر هم، باقی‌مانده و خارج‌قسمت را بر حسب  $a$ ،  $b$  و  $t$  به دست می‌آوریم:

$$\begin{array}{r|l} ax^3 + bx + c & x^2 + tx + 1 \\ -(ax^3 + atx^2 + ax) & ax - at \\ \hline -atx^2 + x(b-a) + c & \\ -(-atx^2 - at^2x - at) & \\ \hline x(at^2 + b - a) + (at + c) & \end{array}$$

برای این‌که باقی‌مانده صفر باشد باید داشته باشیم  $at + c = 0$  و  $at^2 + b - a = 0$  که از این‌جا به بعد همان روش قبلی را انجام می‌دهیم.



### چند جمله‌ای‌های درجه یک - معادلات و نمودار آن‌ها

۲-۱

دو جمله‌ای درجه اول  $p(x) = 2x + 6$  را در نظر بگیرید. این چند جمله‌ای فقط به ازای یک مقدار برابر  $1^0$  است:

$$p(x) = 2x + 6 = 1^0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

#### قضیه

در حالت کلی اگر  $a \neq 0$ ، آنگاه معادله‌ی  $ax + b = k$  حتماً یک جواب دارد:

$$ax = k - b \Rightarrow x = \frac{k - b}{a}$$

معادلات زیر را حل کنید.

مثال ۱۲-۱

$$۱) \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$۲) \frac{7 + \frac{1}{x^2+4}}{\frac{1}{x^2+4} - 6} = \frac{-36}{29}$$

$$۳) 94x^3(x-1) + x(x^2-x) = 0$$

$$۴) \frac{6x-4}{6} = -(1-x)$$

$$۵) \frac{6x-4}{6} = -\left(\frac{2}{3} - x\right)$$

حل:

۱. طرفین وسطین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\sqrt{x} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{3}\sqrt{x} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}} \\ \Rightarrow \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{x}} &= (\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{x} \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = x = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

۲. تغییر پارامتر می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^3 + 4} = a &\Rightarrow \frac{7 + a}{a - 6} = \frac{-36}{29} \\ 203 + 29a &= -36a + 216 \Rightarrow 65a = 13 \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{x^3 + 4} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow x^3 + 4 &= 5 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

۳. فاکتورگیری می‌کنیم:

$$94x^3(x-1) + x(x(x-1)) = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(94x+1) = 0$$

اکنون حاصل ضرب ۳ چندجمله‌ای صفر شده است. پس هر کدام از آن‌ها که صفر باشند معادله جواب دارد:

$$\begin{cases} x^2 = 0 & \Rightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 & \Rightarrow x = 1 \\ 94x + 1 = 0 & \Rightarrow x = -\frac{1}{94} \end{cases}$$

۴. طرفین وسطین می‌کنیم:

$$6x - 4 = 6x - 6 \Rightarrow -4 = -6$$

وقتی  $x$  از طرفین معادله حذف می‌شود در واقع در معادله تأثیر ندارد و هر مقداری داشته باشد به نتیجه‌ی  $-4 = -6$  خواهیم رسید که مطمئن هستیم نتیجه‌ی غلطی است. پس این معادله هیچ جوابی ندارد.

۵. طرفین وسطین می‌کنیم:

$$6x - 4 = 6x - 4 \Rightarrow -4 = -4$$



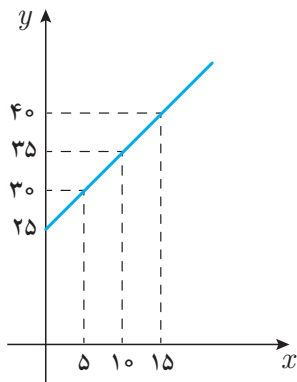
در این مورد هم  $x$  در معادله تأثیری ندارد و هر چه باشد به تساوی درست و قابل قبول  $-4 = -4$  می‌رسیم. پس به ازای تمام مقادیر  $x$  این معادله جواب دارد، یعنی این تساوی یک اتحاد است.

### مثال ۱۳-۱ در دستگاه مختصات:

۱. نمودار سن پدرتان را بر حسب سن خودتان رسم کرده و یک رابطه‌ی جبری درجه‌ی اول بین متغیرهای  $x$  و  $y$  بنویسید.
۲. نمودار مجموع سن پدرتان و برادرتان را بر حسب سن خودتان رسم کرده و یک رابطه‌ی جبری درجه اول بین متغیرهای  $x$  و  $y$  بنویسید. (فرض کنید برادرتان از شما بزرگ‌تر است).
۳. در کدام نمودار میزان تغییرات هر دو محور برابر است؟ یعنی در کدام نمودار اگر ۱ واحد به  $x$  اضافه شود به  $y$  نیز ۱ واحد اضافه می‌شود؟ در نمودار دوم نسبت تغییرات عرض (متغیر وابسته - تابع -  $y$ ) به تغییرات طول (متغیر مستقل -  $x$ ) چند است؟

حل:

۱. فرض می‌کنیم پدر از شما ۲۵ سال بزرگ‌تر باشد:



$$x: \text{سن شما} \Rightarrow y = x + 25$$

$y$ : سن پدر

با نقطه‌گذاری نمودار را رسم می‌کنیم. واضح است که اگر یک واحد به  $x$  (سن شما) اضافه شود به  $y$  (سن پدرتان) هم یک واحد اضافه می‌شود:

$$\frac{\text{تغییرات متغیر وابسته}}{\text{تغییرات متغیر مستقل}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

۲. فرض می‌کنیم برادر از شما ۵ سال بزرگ‌تر باشد:

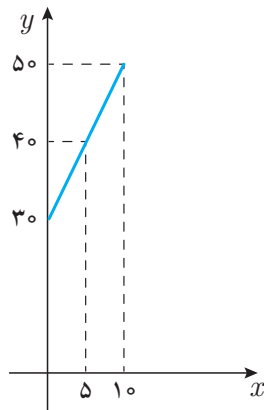
$x$ : سن شما

$x + 5$ : سن برادر

$x + 25$ : سن پدر

مجموع سن پدر و برادر:  $y$

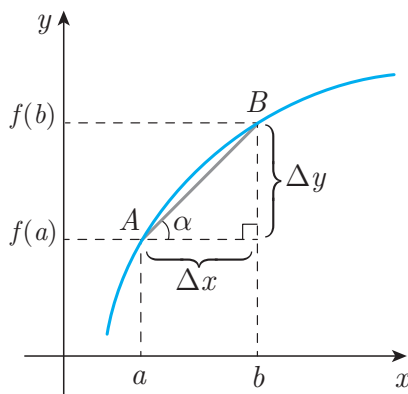
$$\Rightarrow y = (x + 25) + (x + 5) = 2x + 30$$



این بار اگر ۱ واحد به  $x$  (سن شما) اضافه شود به  $y$  (مجموع سن پدر و برادر) ۲ واحد اضافه می‌شود:

$$\frac{\text{تغییرات متغیر وابسته}}{\text{تغییرات متغیر مستقل}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

۳. در قسمت‌های بالا حل شده است.



نمودار چند جمله‌ای  $f(x)$  را رسم کرده‌ایم. برای هر دو نقطه از نمودار به نسبت اختلاف  $y$  ها بر اختلاف  $x$  ها شیب گفته می‌شود.

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \tan \alpha$$

در نمودارهای غیرخطی شیب متفاوت است و بستگی به نقاط  $A$  و  $B$  دارد. ولی در خط، شیب همواره ثابت است.

### قضیه

نمودار چند جمله‌ای درجه اول  $y = p(x) = ax + b$  یک خط راست است. در این نمودار:

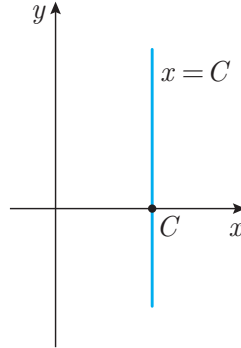
۱.  $a$  برابر شیب خط است.
۲. محل برخورد خط با محور عرض‌ها در فاصله‌ی  $b$  از مبدأ است. (عرض از مبدأ)
۳. محل برخورد خط با محور طول‌ها در فاصله‌ی  $-\frac{b}{a}$  از مبدأ است. ( $a \neq 0$ ) (طول از مبدأ)
۴. اگر  $a = 0$ ، آن‌گاه نمودار یک خط افقی است.

رابطه‌ی جبری بالا به ازای هر  $a$  و  $b$  حقیقی یک خط را مشخص می‌کند ولی دقت کنید که تمام خطوط را مشخص نمی‌کند. خطوطی که بر محور  $x$  ها عمودند و با معادلاتی به صورت  $x = c$  نشان داده می‌شوند به ازای هیچ  $a$  و  $b$  ای از رابطه‌ی  $y = ax + b$  به دست نمی‌آید و باید آن‌ها را جداگانه بررسی کرد. در



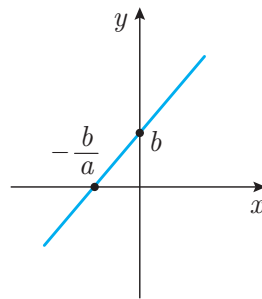
آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

واقع  $y = ax + b$ ، معادله‌ی خطوطی را می‌سازد که دارای شیب هستند. برای خط‌های عمود بر محور  $x$ ها (مانند  $x = 2$  یا  $x = -\frac{5}{4}$  و ...) شیب تعریف نمی‌شود. ( $\tan \frac{\pi}{4} \notin \mathbb{R}$ )

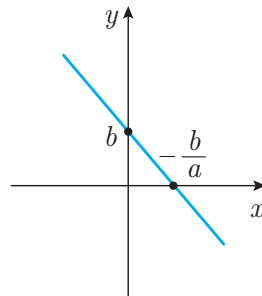


برای  $y = ax + b$  توجه کنید:

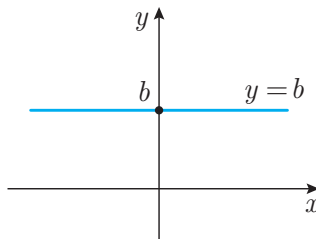
اگر شیب مثبت باشد ( $a > 0$ )، با افزایش  $x$  مقدار  $y$  نیز اضافه می‌شود، مانند  $y = 2x + 6$ .



اگر شیب منفی باشد ( $a < 0$ )، با افزایش  $x$  مقدار  $y$  کاهش می‌یابد، مانند  $y = -2x + 6$ .



اگر شیب صفر باشد ( $a = 0$ )، با افزایش یا کاهش  $x$ ، مقدار  $y$  تغییر نکرده و مستقل از  $x$  است، مانند  $y = 6$ .



دقت کنید که  $y = 2x + 6$  یک رابطه جبری است که به ازای هر مقدار  $x$  یک مقدار  $y$  وجود دارد که در آن صدق می‌کند. ( $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = 2x + 6$ ) می‌توان هر  $x_0$  و  $y_0$  ای که در این رابطه با هم مرتبط هستند و در واقع با هم در این رابطه جبری صدق می‌کنند را به صورت  $(x_0, y_0)$  نشان داد. منظورمان این است که اگر در این رابطه جبری مقدار  $x$  را برابر  $x_0$  قرار دهیم آن‌گاه مقدار  $y$  برابر  $y_0$  خواهد شد. حالا تمام  $(x_0, y_0)$ هایی که در این رابطه جبری صدق می‌کنند با هم تشکیل یک مجموعه می‌دهند که به آن، مجموعه‌ی جواب این رابطه جبری گفته می‌شود و صورت ریاضی آن  $M = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}, y = 2x + 6\}$  است. اعضای این مجموعه را به روش‌های گوناگونی می‌توان نشان داد که یکی از بهترین آن‌ها، نمودار در مختصات دکارتی است. سعی کنید تفاوت بین رابطه جبری و مجموعه جواب آن و نمودار را خوب بفهمید. (یادگیری ریاضی یعنی فهم این مفاهیم)

**مثال ۱۴-۱** معادله‌ی خطی را به دست آورید که طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن به ترتیب  $p$  و  $q$  است. ( $p, q \neq 0$ )

**حل:** این خط از نقاط  $(0, p)$  و  $(q, 0)$  می‌گذرد، پس:

$$\text{شیب} = m = \frac{p - 0}{0 - q} = -\frac{p}{q}$$

از طرفی می‌دانیم که عرض از مبدأ آن  $b = p$  است، پس:

$$y = -\frac{p}{q}x + p \Rightarrow qy + px = pq \Rightarrow \frac{y}{p} + \frac{x}{q} = 1$$

**مثال ۱۵-۱** رابطه‌ی بین شیب و عرض از مبدأ (در صورت وجود) قطرهای دایره‌ای به مرکز  $(2, 2)$  را بنویسید.

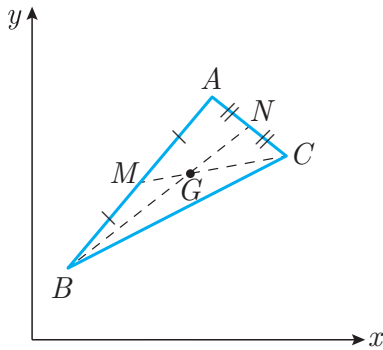
**حل:** فرم کلی معادله‌ی خط‌های غیرقائم به صورت  $y = ax + b$  است. اگر خط بخواهد از نقطه‌ی  $(2, 2)$  بگذرد باید:

$$2 = 2a + b \Rightarrow b = 2 - 2a$$

و خواهیم داشت:

$$y = ax + (2 - 2a)$$

معادله‌ی متغیردار بالا در واقع دسته‌ای از خطوط را مشخص می‌کند و به ازای هر مقدار حقیقی  $a$  ( $\forall a \in \mathbb{R}$ ) این معادله‌ی متغیردار تبدیل به یک معادله‌ی خط می‌شود. البته توجه کنید که خط قائم گذرنده از  $(2, 2)$  با معادله‌ی  $x = 2$  را نمی‌توان از فرم کلی بالا به دست آورد و باید جداگانه آن را لحاظ کرد.



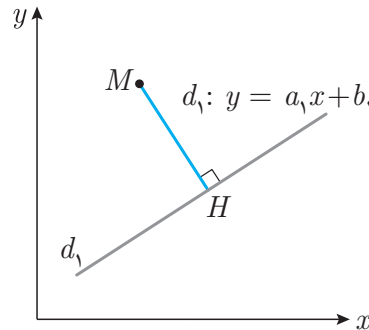
در این‌جا به بحث در مورد فرمول‌های اصلی نمی‌پردازیم ولی صورت آن‌ها را برایتان آورده‌ایم تا در صورت نیاز استفاده کنید:

$$۱) |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

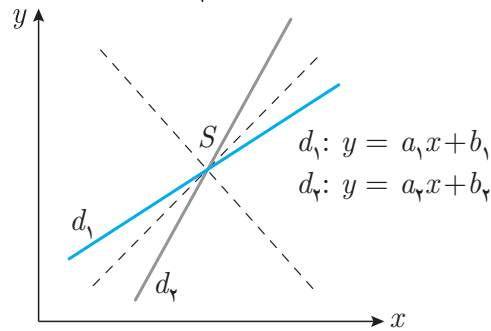
$$۲) (AB \text{ وسط پاره خط } M) = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$۳) S_{ABC} = \frac{1}{2} |(x_A - x_B)y_C + (x_B - x_C)y_A + (x_C - x_A)y_B|$$

$$۴) (محل برخورد میانه‌ها) G = \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$



$$۵) \text{فاصله‌ی نقطه‌ی } M \text{ از خط } d_1 = \frac{|y_M - a_1 x_M - b_1|}{\sqrt{1 + a_1^2}}$$



$$۶) \text{معادله‌ی نیم‌سازهای دو خط } d_1 \text{ و } d_2 : \frac{|y - a_1 x - b_1|}{\sqrt{1 + a_1^2}} = \frac{|y - a_2 x - b_2|}{\sqrt{1 + a_2^2}}$$

$$۷) \text{معادله دایره به مرکز } (\alpha, \beta) \text{ و شعاع } r : (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$



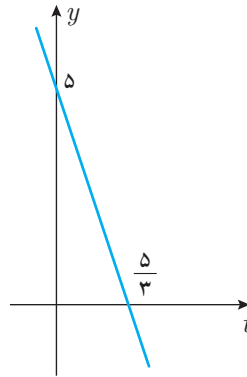
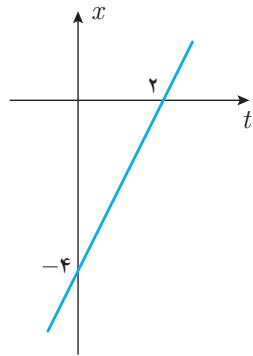
مثال ۱۶-۱

هر سه نمودار  $x - t$ ,  $y - t$ , و  $y - x$  را برای رابطه‌های جبری زیر رسم کنید:

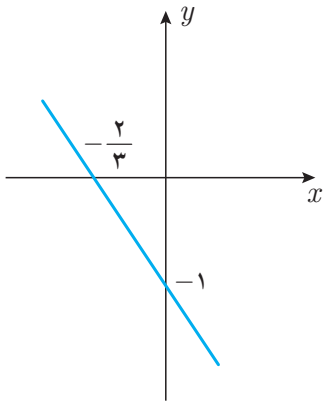
۲.  $x = \sin t$  و  $y = \cos t$

۱.  $x = 2t - 4$  و  $y = -3t + 5$

حل: ۱.

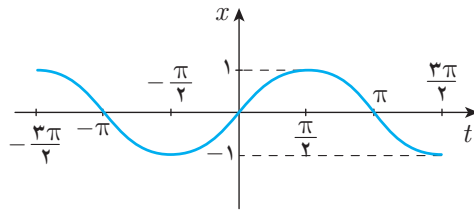
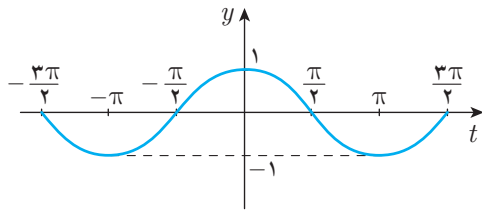


برای رسم  $y - x$  باید رابطه‌ی بین  $x$  و  $y$  را پیدا کنیم:

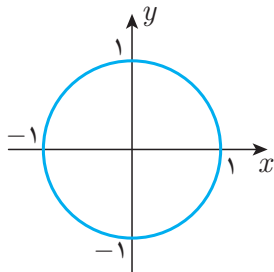


$$\begin{cases} x = 2t - 4 \\ y = -3t + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x + 4}{2} \\ t = \frac{5 - y}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x + 4}{2} = \frac{5 - y}{3} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x - 1$$



برای رسم  $y - x$ :



$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \sin^2 t \\ y^2 = \cos^2 t \end{cases}$$

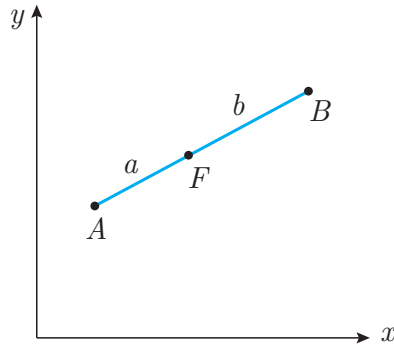
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۱ واحد:

## مسائل حل شده فصل اول

## ع-۱

۱. با فرض این‌که مختصات نقاط  $A$  و  $B$  به ترتیب  $(x_A, y_A)$  و  $(x_B, y_B)$  باشند، مختصات نقطه‌ی  $F$  را به دست آورید.



حل: ابتدا مختصات بردار  $\overrightarrow{AB}$  را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{AB} \\ &= \left( \frac{(x_B - x_A)a}{a+b}, \frac{(y_B - y_A)a}{a+b} \right) \Rightarrow F = A + \overrightarrow{AF} \\ \Rightarrow F &= \left( x_A + \frac{(x_B - x_A)a}{a+b}, y_A + \frac{(y_B - y_A)a}{a+b} \right) \\ &= \left( \frac{bx_A + ax_B}{a+b}, \frac{by_A + ay_B}{a+b} \right)\end{aligned}$$

۲. نقاط  $M_0 = (-3, \beta - 3)$ ،  $N_0 = (-2\alpha - 2, -1)$  و  $P_0 = (\alpha, 2\beta + 1)$  به ترتیب وسط اضلاع  $PM$ ،  $PN$  و  $NM$  از  $\triangle MNP$  هستند. اگر مختصات مرکز ثقل  $\triangle MNP$ ،  $G = \left(-\frac{4}{3}, 0\right)$  باشد.

(الف) نشان دهید که  $G$  مرکز ثقل  $\triangle M_0N_0P_0$  نیز هست.  
(ب)  $\alpha$  و  $\beta$  را بیابید.

حل:

(الف) باید نشان دهیم:

$$\frac{x_{M_0} + x_{N_0} + x_{P_0}}{3} = \frac{x_M + x_N + x_P}{3}$$

برای این کار از سمت چپ شروع می‌کنیم:

$$x_{M_0} + x_{N_0} + x_{P_0} = \frac{(x_N + x_P)}{2} + \frac{(x_M + x_P)}{2} + \frac{(x_M + x_N)}{2}$$

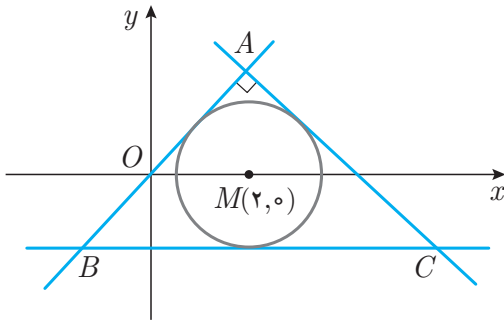
$$= x_M + x_N + x_P$$

برای  $y$  نیز به همین شیوه عمل می‌شود.

(ب) از نتیجه‌ی قسمت قبل استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} -3 + (-2\alpha - 2) + \alpha = -4 \\ (\beta - 3) + -1 + (2\beta + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

۳. با توجه به شکل، مرکز دایره‌ی محاطی  $M = (2, 0)$  و شعاع دایره‌ی محاطی  $\sqrt{2}$  است (دایره به سه ضلع مثلث  $ABC$  مماس است). با استفاده از اطلاعات زیر معادله‌ی اضلاع مثلث را به دست آورید:

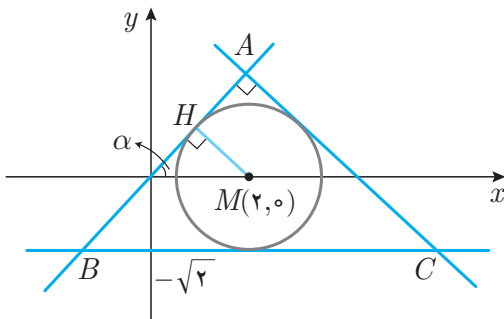


$$\hat{A} = 90^\circ \text{ (الف)}$$

(ب) ضلع  $BC$  موازی محور طول‌ها است.

$$C = (4 + \sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ (ج)}$$

(د) ضلع  $AB$  از مبدأ می‌گذرد.



حل: از نقطه‌ی  $M$  به نقطه‌ی تماس  $AB$  و دایره  $(H)$

وصل می‌کنیم. می‌دانیم که شعاع  $MH$  بر  $AB$  عمود است.

$$\begin{aligned} \triangle OMH : OH^2 &= OM^2 - HM^2 = 4 - 2 = 2 \\ \Rightarrow OH &= \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم که شیب ضلع  $AB$  برابر است با  $\tan 45^\circ = 1$  و چون این خط از مبدأ می‌گذرد معادله‌ی آن به دست می‌آید:

$$AB : y = 1 \times x + 0 = x$$

شیب خط  $BC$  برابر صفر است و از نقطه‌ی  $C = (4 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$  می‌گذرد، پس:



$$BC : y = -\sqrt{2}$$

می‌دانیم که خطوط عمود بر هم، شیب‌شان قرینه و معکوس یکدیگر است:

$$m_{AB} = 1 \Rightarrow m_{AC} = \frac{-1}{1} = -1$$

مختصات  $C$  را در معادله‌ی  $AC$  جایگذاری می‌کنیم:

$$AC : y = -x + b \Rightarrow -\sqrt{2} = -(4 + \sqrt{2}) + b$$

$$\Rightarrow b = 4 \Rightarrow AC : y = -x + 4$$

۴. بدون رسم شکل بررسی کنید:

(الف) نقطه‌ی  $P_1 = (3, 7/1)$  بالای خط  $-3x + y + 2 = 0$  قرار دارد یا پایین آن؟ سمت

راست آن قرار دارد یا چپ آن؟

(ب) نقطه‌ی  $P_2 = (2, 2)$  داخل دایره‌ی  $x^2 + y^2 = 9$  قرار دارد یا خارج آن؟

حل:

(الف) معادله‌ی خط را به صورت  $y = 3x - 2$  می‌نویسیم. اگر در این معادله  $x = 3$  را قرار

دهیم،  $y = 7$  به دست می‌آید. یعنی خط در طول ۳ دارای عرض ۷ است. پس نقطه‌ی

$(3, 7/1)$  بالای آن است.

از طرفی اگر در این معادله  $y = 7/1$  را قرار دهیم  $x \simeq 3/3$  به دست می‌آید. پس این

نقطه سمت چپ این خط است. (برای یادگیری بیشتر خودتان نمودار این خط و نقطه را

رسم کنید.)

(ب) مرکز این دایره مبدأ مختصات و شعاع آن ۳ است:

$$OP_2 = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} < 3$$

چون  $OP_2 < R$  پس  $P_2$  در داخل دایره قرار دارد.

۵. نقطه‌ای روی خط  $3x + y + 4 = 0$  پیدا کنید که از نقاط  $M = (-5, 6)$  و  $N = (3, 2)$  به

یک فاصله باشد.

حل: تمام نقاطی که از  $M$  و  $N$  به یک فاصله‌اند بر روی عمودمنصف  $MN$  قرار دارند. ابتدا معادله‌ی

عمودمنصف  $MN$  را به دست می‌آوریم:

$$(MN \text{ وسط}) H = \left( \frac{-5+3}{2}, \frac{6+2}{2} \right) = (-1, 4)$$

و نیز:

$$m_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{6 - 2}{-5 - 3} = \frac{-1}{2} \Rightarrow (عمودمنصف) m = 2$$

پس معادله‌ی عمودمنصف به صورت زیر در می‌آید:

$$y = 2x + b \xrightarrow{H} 4 = 2 \times -1 + b \Rightarrow b = 6$$

$$معادله‌ی عمودمنصف : y = 2x + 6$$

حال به دنبال نقطه‌ای می‌گردیم که هم روی خط عمودمنصف ( $y = 2x + 6$ ) باشد و هم روی خط  $3x + y + 4 = 0$  (و یا  $y = -3x - 4$ ). پس باید محل تقاطع این دو خط را پیدا کنیم. برای این کار  $x$  و  $y$  هر دو خط را یکسان در نظر گرفته و دستگاه دو معادله و دو مجهول را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -3x - 4 \end{cases} \Rightarrow y - y = (2x + 6) - (-3x - 4) = 5x + 10$$

$$\Rightarrow 5x + 10 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 2$$

۶. در هر یک از حالت‌های زیر، معادله‌ی متغیردار خط‌های گفته شده را بنویسید:

(الف) تمام خطوطی که موازی محور طول‌ها هستند.

(ب) تمام خطوطی که از نقطه‌ی  $(-1, 4)$  می‌گذرند.

(ج) تمام خطوطی که بر خط  $5x + 3y = 8$  عمودند.

(د) تمام خطوطی که مجموع طول از مبدأ و عرض از مبدأ آن‌ها  $10$  است.

حل:

(الف) به ازای هر  $b$  از اعداد حقیقی یک معادله‌ی خط موازی با محور طول‌ها به صورت  $y = b$  ساخته می‌شود.

(ب)

$$y = ax + b \Rightarrow -1 = 4a + b \Rightarrow b = -1 - 4a \Rightarrow y = ax + (-1 - 4a)$$

به ازای هر  $a$  این رابطه‌ی جبری یک خط را مشخص می‌کند که از نقطه‌ی  $(-1, 4)$  می‌گذرد.

البته علاوه بر خطوط مورد اشاره، خط قائم  $x = 4$  نیز از آن نقطه می‌گذرد.



(ج) ابتدا خط  $5x + 3y = 8$  را استاندارد می‌کنیم:

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{8}{3} \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

به دنبال خطوطی می‌گردیم که شیب آن‌ها  $\frac{3}{5}$  بوده ولی عرض از مبدأ آن‌ها متغیر باشد.

$$y = \frac{3}{5}x + b$$

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} & \text{طول از مبدأ:} \\ b & \text{عرض از مبدأ:} \end{cases} \quad (د)$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} + b = 1^\circ \Rightarrow b\left(-\frac{1}{a} + 1\right) = 1^\circ$$

$$\Rightarrow b\left(\frac{a-1}{a}\right) = 1^\circ \Rightarrow b = \frac{1^\circ a}{a-1}$$

پس معادله‌ی این خطوط به صورت زیر خواهد بود:

$$y = ax + \left(\frac{1^\circ a}{a-1}\right)$$

۷. معادله‌ی قطرهای دایره‌ای در حالت کلی به صورت  $(s-2t+1)x + (s+t+1)y = 4s+4-2t$  است.

(الف) مختصات مرکز دایره را به دست آورید.

(ب) معادله‌ی خط مماس بر دایره را در نقطه‌ی  $(^\circ, ^\circ)$  از محیط دایره به دست آورید.

حل:

(الف) به ازای هر مقدار دلخواه برای  $s$  و  $t$  یک قطر به دست می‌آید. کافی است که معادله‌ی دو تا

از قطرها را در دستگاه حل کنیم تا محل برخورد آن‌ها (مرکز دایره) به دست آید:

$$\begin{cases} s = -1, t = 1 \\ t = s = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x - 2 = -x + 4 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

(ب) خط مماس، بر شعاع گذرنده از  $(^\circ, ^\circ)$  عمود است:

$$m_{\text{شعاع}} = \frac{2-0}{2-0} = 1 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-1}{1} = -1$$

با توجه به این که عرض از مبدأ خط مماس صفر است می نویسیم:

$$y = -x + 0 \Rightarrow y = -x$$

۸. تمام چندجمله‌ای‌ها مانند  $A(x)$  را بیابید که شرط زیر را داشته باشند:

$$xA(x-2) \equiv (x-100)A(x)$$

حل: ابتدا  $x = 0$  را در اتحاد داده شده قرار می‌دهیم:

$$0 \times A(-2) = (-100)A(0) \Rightarrow 0 \equiv -100(A(0)) \Rightarrow A(0) = 0$$

اکنون  $x = 2$  را قرار می‌دهیم:

$$2 \times A(0) \equiv -98A(2) \Rightarrow 0 \equiv -98A(2) \Rightarrow A(2) = 0$$

با همین نوع استدلال به دست می‌آوریم:

$$A(4) = A(6) = \dots = A(98) = 0$$

اگر بخواهیم  $x = 100$  را جایگذاری کنیم اطلاعات بیش‌تری به دست نمی‌آوریم:

$$100A(98) = 0 \times A(100) \Rightarrow 0 = 0$$

از طرفی طبق قضیه‌ی تقسیم می‌دانیم که اگر  $A(a) = 0$  آن‌گاه  $A(x)$  بر  $x - a$  بخش پذیر است:

$$A(x) = (x - a)M(x) \Leftrightarrow A(a) = 0$$

پس:

$$A(x) = x(x-2)(x-4)\dots(x-96)(x-98)M(x)$$

$A(x)$  به دست آمده را در رابطه‌ی اولیه جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & x \underbrace{(x-2)(x-4)\dots(x-98)(x-100)}_{A(x-2)} M(x-2) \\ & \equiv (x-100) \underbrace{x(x-2)(x-4)\dots(x-96)(x-98)}_{A(x)} M(x) \end{aligned}$$



آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و معادله‌ی درجه‌ی اول

با ساده کردن طرفین داریم:  
 $M(x - 2) = M(x)$   
 پس با تغییر  $x$  به  $x - 2$  چند جمله‌ای  $M(x)$  هیچ تغییری نمی‌کند. پس حتماً از درجه‌ی صفر است و همیشه مقدار ثابتی دارد:

$$M(x) = m \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow A(x) = mx(x - 2)(x - 4) \cdots (x - 98)$$

۹. به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $p(n)$  را برابر با حاصل ضرب ارقام غیرصفر عدد  $n$  تعریف می‌کنیم. (اگر  $n$  عدد یک‌رقمی باشد  $p(n) = n$ ) به طور مثال:

$$p(250) = 2 \times 5 = 10$$

$$p(70205) = 7 \times 2 \times 5 = 70$$

$$p(8) = 8$$

$S$  را به دست آورید.

$$S = p(1) + p(2) + p(3) + \cdots + p(999)$$

حل: همه‌ی اعداد یک یا دورقمی را با قرار دادن صفر در ابتدای آن‌ها به عددی سه‌رقمی تبدیل می‌کنیم.

$$S = p(001) + p(002) + p(003) + \cdots + p(999)$$

اگر  $p'(n)$  را حاصل ضرب تمام ارقام عدد تعریف کنیم، خواهیم داشت: ( $S'$  متفاوت از  $S$  است)

$$S' = 0 \times 0 \times 1 + 0 \times 0 \times 2 + \cdots + 9 \times 9 \times 9$$

اکنون برای راحتی کار می‌نویسیم:

$$S' = (0 \times 0 \times 0 + 0 \times 0 \times 1 + 0 \times 0 \times 2 + \cdots + 9 \times 9 \times 9) - 0 \times 0 \times 0$$

اگر رقم‌های یکان، دهگان و صدگان را به ترتیب با  $a$ ،  $b$  و  $c$  نشان دهیم، پراتز بالا در واقع حاصل جمع تمام حالت‌های ممکن از  $abc$  است که طبق اصل ضرب  $10 \times 10 \times 10$  حالت مختلف دارد. از طرفی مجموع این حالات را می‌توان به صورت زیر نیز به دست آورد.

$$S' = (0 + 1 + \cdots + 8 + 9)(0 + 1 + \cdots + 8 + 9)(0 + 1 + \cdots + 8 + 9) - 0 \times 0 \times 0$$



دقت کنید که به طور مثال:

$$p'(۱۰۵) = ۱ \times ۰ \times ۵ = ۰, \quad p(۱۰۵) = ۱ \times ۱ \times ۵$$

یعنی اگر در  $p'(n)$  به جای  $۰$  ها،  $۱$  قرار دهیم،  $p(n)$  به دست می آید و با این تبدیل  $S'$  به  $S$  تبدیل می شود:

$$S' = \text{مجموع } p'(n) \text{ ها} = (۰ + ۱ + \dots + ۸ + ۹)^۳ - ۰ \times ۰ \times ۰$$

$$S = \text{مجموع } p(n) \text{ ها} = (۱ + ۱ + ۲ + \dots + ۸ + ۹)^۳ - ۱ \times ۱ \times ۱ = ۴۶^۳ - ۱$$

۱	۲	۲۲	۲۳
۲۸	۲۹	۲۱۰	۲۱۱
۲۱۶	۲۱۷	۲۱۸	۲۱۹
۲۲۴	۲۲۵	۲۲۶	۲۲۷

۱۰. از یک سمت شروع کرده و در هر خانه‌ی صفحه‌ی شطرنج به ترتیب  $۱, ۲, ۲^۲, ۲^۳, \dots$  را می نویسیم. مجموع اعدادی که در خانه‌های سفید نوشته شده است، چه کسری از مجموع اعداد کل است؟ «مقدماتی ۸۴»

**حل:** می خواهیم نشان دهیم در هر مربع  $۲ \times ۲$  که به صورت زیر از این صفحه‌ی شطرنج انتخاب شود، نسبت مجموع اعداد خانه‌های سفید به مجموع کل مقدار ثابتی است:

$۲^k$	$۲^{k+۱}$
$۲^{k+۸}$	$۲^{k+۹}$

$$\begin{aligned} \frac{\text{مجموع سفیدها}}{\text{مجموع کل}} &= \frac{۲^k + ۲^{k+۹}}{۲^k + ۲^{k+۱} + ۲^{k+۸} + ۲^{k+۹}} \\ &= \frac{۲^k(۱ + ۲^۹)}{۲^k(۱ + ۲ + ۲^۸ + ۲^۹)} = \frac{۱ + ۵۱۲}{۱ + ۲ + ۲۵۶ + ۵۱۲} = \frac{۵۱۳}{۷۷۱} \end{aligned}$$

۱۶ تا از این مربع‌ها داریم که در تمام‌شان این نسبت برقرار است. یعنی نسبت کل نیز همین است. در این مسئله از قضیه‌ی زیر استفاده کرده‌ایم:

### قضیه

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_i}{n_1 + n_2 + \dots + n_i} = k \text{ آن‌گاه } \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} = \dots = \frac{m_i}{n_i} = k$$

برای اثبات کافی است  $n$  ها را به جای  $m$  ها جایگذاری کنید.



۱. اگر چند جمله‌ای  $(x + \sqrt{2}y - 3z)^7$  را بسط داده و جملات مشابه را با هم جمع کنیم، چه تعدادی از جمله‌های آن فقط متغیر  $x$  دارند؟
۲. در هر یک از خانه‌های جدول زیر یک چند جمله‌ای بنویسید به طوری که حاصل جمع هر سه خانه‌ی پشت سر هم برابر  $2x^2$  شود. جدول را به چند حالت مختلف می‌توان پر کرد؟

	$-x^2 + 4x$					$6x - 8$
--	-------------	--	--	--	--	----------

۳. با استفاده از اطلاعات زیر اثبات کنید  $(a^2 + b^2) \in \mathbb{Q}$ .

$$\begin{cases} ۱) a, b \in \mathbb{R} \\ ۲) (a^6 + a^2 + 1) \in \mathbb{Q} \\ ۳) (a^6 + a^4 + a^2 + a^4b^2 + a^2b^2 + b^2) \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

۴. در هر مورد با تعیین  $a$  و  $b$  رابطه‌ی زیر را به اتحاد تبدیل کنید:

- ۱)  $a(x+1)^2 + b(x+1) - ax^2 - bx = 8x + 3$   
 ۲)  $(x^2 + ax + 1)^2 = x^4 + bx^3 + 6x^2 + bx + 1$   
 ۳)  $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = (x-a)(x-b)(x^2 + x + 1)$

۵. الف) ثابت کنید:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4) = (x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

ب) ثابت کنید اگر  $a, b, c$  سه عدد مثبت حقیقی باشند که در رابطه‌ی

$$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

صدق می‌کنند حتماً می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه با طول اضلاع  $a, b, c$  ساخت.

۶. باقی‌مانده‌ی  $p(x^{1357})$  را بر  $(x-1)(x+1)$  بیابید:

$$p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{1394} + x^{1395}$$

۷. اثبات کنید چند جمله‌ای  $f(x)$  حداقل در دو مقدار از بازه‌ی  $[-5, +5]$  برابر صفر است:

$$17f^4(x) + 17f^2(x) = f(x^2 + 3x - 3) - f(x)$$

۸. چند جمله‌ای  $A(x)$ ،  $n$  ریشه‌ی حقیقی دارد. اثبات کنید که یکی از آن‌ها در بازه‌ی  $[0, 2]$  است به شرطی که:

$$\begin{cases} A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ -2 \leq a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0 \leq 0 \end{cases}$$