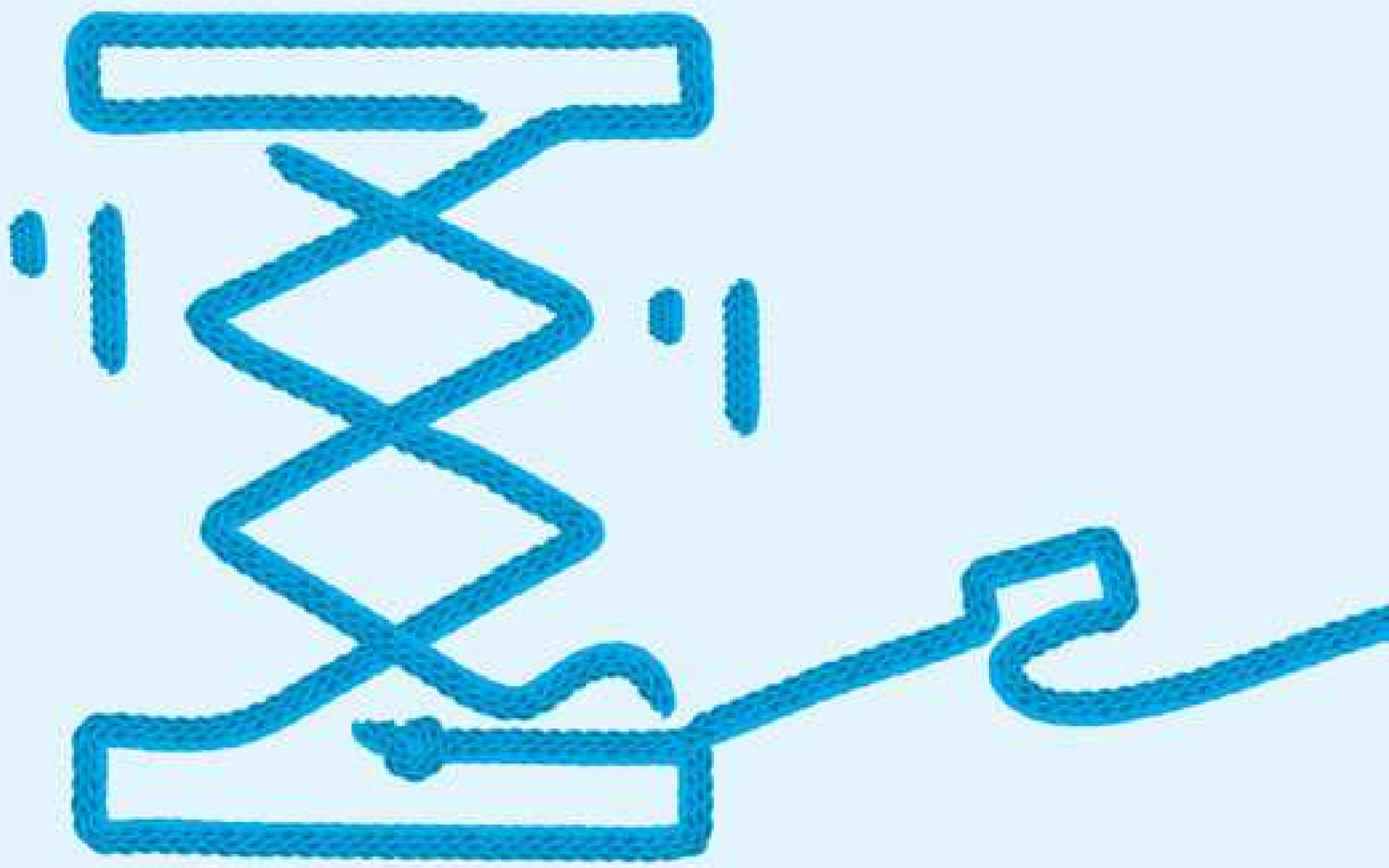
فصل ۱۲

کاربرد مشتق

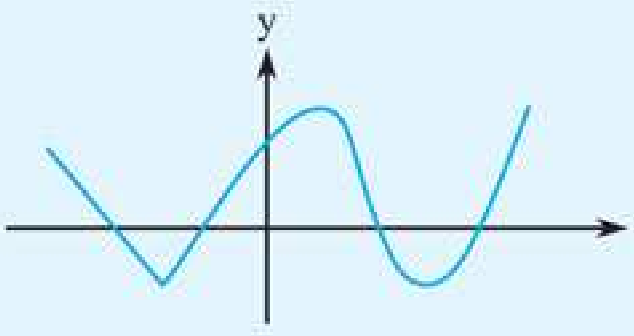
- تا این‌جا حسابی با مشتق آشنا شدیم.
- کاربردهایی از آن را (در محاســبهٔ حد)، در یافتن معادلهٔ خط مماس و البته آهنگ تغییر لحظه‌ای توابع دیده‌ایم.
- در این فصل دربارهٔ یکنوایی، نقاط بحرانی و اکسترمم‌ها بحث می‌کنیم.

بیشتر مشتق‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم، ساده‌اند. در کل، مباحث نسبتاً دشوار هستند، پس به چند قضیهٔ کمکی نیاز خواهیم داشــت. فصل کوتاه اســت و سهمیهٔ کنکوری‌اش ۲ سؤال است.

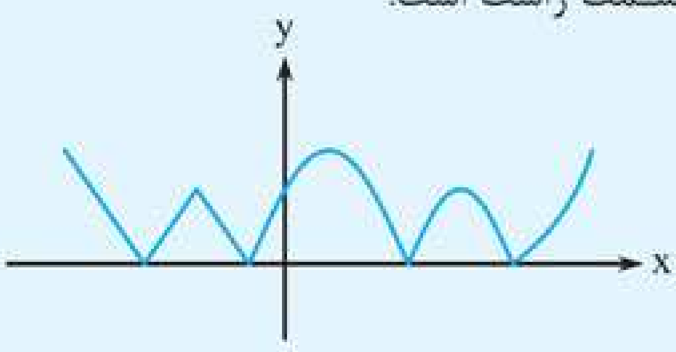
- با این‌که فصل سختی است و امکان طرح مسائل دشوار از آن، به سادگی وجود دارد، ولی طراحــان عزیــز و گرامی کنکور معمــولاً مهربان برخــورد می‌کنند. در هر حــال، اگر خیلی بدشانس باشید، مسائلی در سطح هایپرتست خواهید دید (و در بدترین سناریو، مسائلی با نصف دشواری نیترو تست.)
- مواد لازم: تعیین علامت ـ حل معادله ـ مشتق ـ نمودار



نکته اگر نمودار $y=f(x)$ شکل سمت چپ باشد، آن‌گاه نمودار $y=|f(x)|$ هم به صورت شکل سمت راست است:



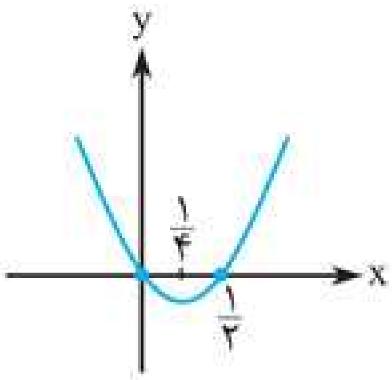
$y=f(x)$



$y=|f(x)|$

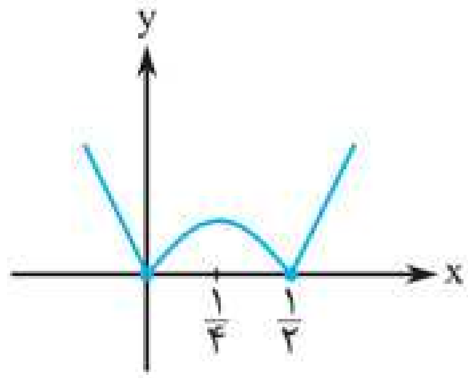
مثال **نمودار توابع زیر را رسم کنید:**

۱ $y=|2x^2-x|$



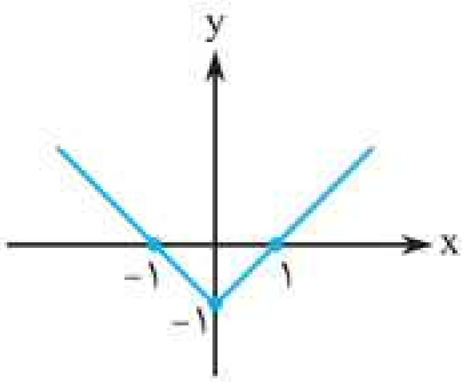
$y=2x^2-x$

$\Rightarrow$



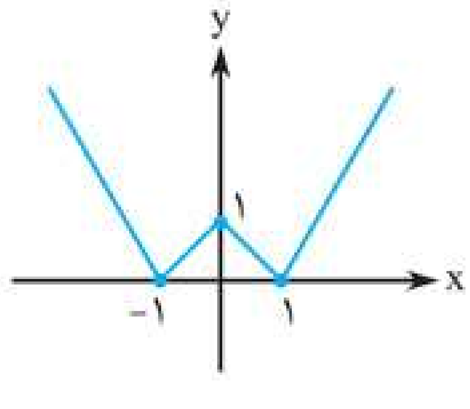
$y=|2x^2-x|$

۲ $y=||x|-1|$



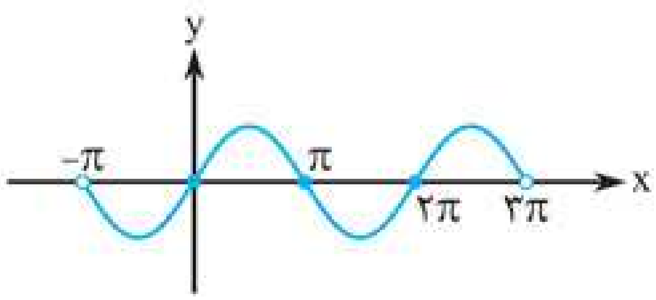
$y=|x|-1$

$\Rightarrow$



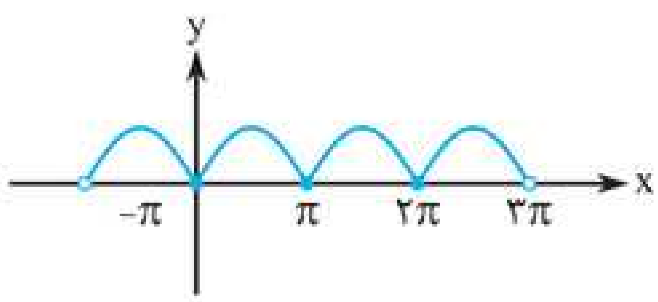
$y=||x|-1|$

۳ $y=|\sin x|\ ;\ x\in(-\pi, 3\pi)$



$y=\sin x$

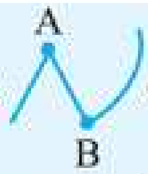
$\Rightarrow$



$y=|\sin x|$

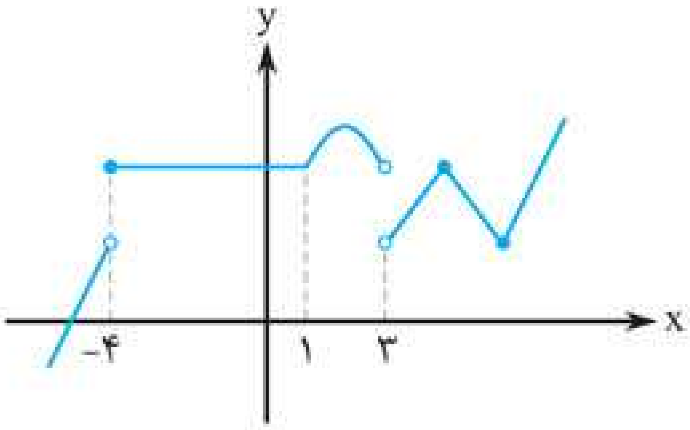
نکته اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم، آن‌گاه از روی این نمودار می‌توانیم نقاطی که $f(x)$ در آن مشتق **ندارد** را تعیین کنیم. این نقاط عبارتند از:

۱ نقاطی که $y=f(x)$ در آن‌ها پیوسته نیست. این نقاط به فرم  یا  و امثال این‌ها هستند.

۲ نقاط نوک‌تیز نمودار: مانند  به این نقاط، نقاط گوشه‌ای می‌گویند. (نقاط A و B)

۳ نقاطی که در آن‌ها خط مماس به‌صورت عمودی است. این نقاط را صورت مسئله تا حد خوبی مشخص می‌کند. این شکلی هستند:  در این حالت می‌گوییم تابع $f(x)$ در نقطهٔ A، مماس قائم دارد.

■ در مثـــال ۱، با توجه به نمودار $y=|۲x^{۲}-x|$ می‌فهمیم که این تابع دو نقطهٔ گوشـــه‌ای دارد. لذا در دو نقطه مشـــتق‌ناپذیر اســـت. تابع $f(x)=||x|-۱|$ ســـه نقطهٔ گوشـــه‌ای دارد و تابع $y=|\sin x|$ ؛ $x\in(-\pi\,,۳\pi)$ هم سه نقطهٔ گوشه‌ای دارد.



مثال **نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. این تابع در چند نقطه از دامنه‌اش، مشتق‌پذیر نیست؟**

پاسخ تابع در $x=-۴$ ناپیوســـته اســـت. در $x=۱$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. دقت کنید $x=۳$ اصلاً در دامنه نیست، پس نباید بررسی شود. دو نقطهٔ گوشه‌ای بزرگ‌تر از ۳ هم دارد. جمعاً در چهار نقطه مشتق‌ناپذیر است.

نکته تعریف مشتق تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x_{\circ}$، به‌صورت زیر است:

۱ $$\lim_{x\to x_{\circ}}\frac{f(x)-f(x_{\circ})}{x-x_{\circ}}=f'(x_{\circ})$$

۲ $$\lim_{h\to \circ}\frac{f(x_{\circ}+h)-f(x_{\circ})}{h}=f'(x_{\circ})$$

هر دو تعریف بالا، معادل هستند.

مثال با توجه به نکتهٔ بالا، داریم:

۱ $$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=f'(۱)$$

۲ $$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-f(۲)g(۲)}{x-۲}=(f(x)g(x))'_{x=۲}=f'(۲)g(۲)+f(۲)g'(۲)$$

۳ $$\lim_{h\to \circ}\frac{(x_{\circ}+h)f(x_{\circ}+h)-x_{\circ}f(x_{\circ})}{h}=(xf(x))'_{x=x_{\circ}}=f(x_{\circ})+x_{\circ}f'(x_{\circ})$$

■ چه مشـــتق‌هایی را با تعریف حد حل کنیم؟ جوابش ســـاده اســـت. هرجا قدرمطلق، جزءصحیح یا تابع چندضابطه‌ای دیدیم، از تعریف حدی مشتق، مسئله را حل می‌کنیم.

مثال **فرض کنید $f(x)=x^{۲}|x-۱|$ باشد. در این صورت $f'_{+}(۱)$ را بیابید.**

پاسخ دقت کنید $f'_{+}(۱)$، یعنی مشتق راست $f(x)$ در $x=۱$، با تعریف حدی به‌صورت حد راست بیان می‌شود:

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}|x-۱|-\circ}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{x^{۲}(x-۱)}{(x-۱)}=۱$$

در همین مثال مشتق $f'_-(1)$ را هم حساب می‌کنیم:

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2|x-1|-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2(x-1)}{x-1}=-1$$

از آن‌جا که $f'_+(1)\neq f'_-(1)$ اســت، لذا تابع $f(x)$ در $x=1$ مشـــتق‌پذیر نیست. در این مثال نقطهٔ $x=1$ یک نقطهٔ گوشـــه‌ای است زیرا اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد ولی $f'_-(a)$ و $f'_+(a)$ هر دو موجود ولی نابرابر باشند، آنگاه $x=a$ نقطهٔ گوشه‌ای است. حتی اگر یکی از مشتقات چپ یا راست وجود نداشته باشد و دیگری وجود داشته باشد، باز هم نقطهٔ گوشه‌ای است.

نکته اگر $f(x)$ یک تابع باشد، آن‌گاه به $f'(x)$ مشتق اول $f(x)$ می‌گویند. به مشتق $f'(x)$، مشتق دوم تابع $f(x)$ می‌گویند و با $f''(x)$ نمایش می‌دهند. به مشتق $f''(x)$، مشتق سوم $f(x)$ می‌گویند و با $f'''(x)$ نمایش می‌دهند. مثلاً از این تعریف متوجه می‌شویم که مشتق دوم $f'(x)$، همان $f'''(x)$ یعنی مشتق سوم $f(x)$ است.

مثال فرض کنید $f(x)=x^3+2x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}$ باشد. دراین‌صورت $f''(4)$ را به‌دست آورید.

پاسخ

$$1)\ f'(x)=3x^2+4x+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$2)\ f''(x)=6x+4-\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\Rightarrow f''(4)=24+4-\frac{3}{4}(4)^{-\frac{5}{2}}=28-\frac{3}{4\times 2^5}=28-\frac{3}{128}=\frac{3581}{128}$$

نکته فرض کنید $f(x)$ تابعی دلخواه باشد. منظور از آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)$ بر بازهٔ $[a\,,b]$، کسر زیر است:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

در بعضـــی از مســـائل می‌گویند، آهنگ متوســـط تغییر در نقطـــهٔ $x=x_0$ با نمو Δx، که بایـــد از فرمول $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ استفاده کنیم.

مثال آهنگ متوسط تغییر توابع زیر دربازه‌های داده‌شده را به‌دست آورید.

$$1)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}};[4\,,9]\Rightarrow\frac{f(9)-f(4)}{9-4}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{5}=\frac{-1}{30}$$

$$2)\ f(x)=x^2+8x;[-1\,,2]\Rightarrow\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{20-(-7)}{3}=\frac{27}{3}=9$$

$$3)\ f(x)=\frac{2x+1}{x+3};[0\,,2]\Rightarrow\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\frac{5}{5}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

مثال آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ در نقطهٔ $x=1$ و نمو $\Delta x=0/44$ را بیابید.

پاسخ این بار باید از فرمول دوم برویم:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{f(1/44)-f(1)}{0/44}=\frac{\frac{2/44}{\sqrt{1/44}}-\frac{2}{\sqrt{1}}}{0/44}=\frac{\frac{2/44}{1/2}-2}{0/44}=\frac{5}{66}$$

نکته فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر (یا آهنگ آنی تغییر) تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x = x_۰$، همان $f'(x_۰)$ است.

مثال فرض کنید $f(x) = \sqrt{x} + x$ باشد. آهنگ آنی تغییر تابع $f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = ۹$ را به‌دست آورید.

پاسخ آهنگ لحظه‌ای یا آنی، یعنی مشتق:

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + ۱ \Rightarrow f'(۹) = \frac{۱}{۶} + ۱ = \frac{۷}{۶}$$

مثال آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \frac{۲x+۱}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $[۱,۴]$ با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در $x = \alpha$ برابر است. α را بیابید. (مشابه تجربی خارج ۹۴)

پاسخ صورت مسئله می‌گوید:

$$\frac{f(۴) - f(۱)}{۴ - ۱} = f'(\alpha) \Rightarrow \frac{\frac{۹}{۲} - ۳}{۳} = \frac{۲(\sqrt{\alpha}) - \frac{۱}{۲\sqrt{\alpha}}(۲\alpha + ۱)}{\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۲\alpha - ۱}{۲\alpha\sqrt{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \alpha\sqrt{\alpha} = ۲\alpha - ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^۳ = (۲\alpha - ۱)^۲ = ۴\alpha^۲ - ۴\alpha + ۱ \Rightarrow \alpha^۳ - ۴\alpha^۲ + ۴\alpha - ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow (\alpha^۳ - ۱) - ۴\alpha(\alpha - ۱) = ۰ \Rightarrow (\alpha - ۱)(\alpha^۲ + \alpha + ۱ - ۴\alpha) = ۰ \Rightarrow (\alpha - ۱)(\alpha^۲ - ۳\alpha + ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow \alpha = ۱ \text{ یا } \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲} \xrightarrow{\text{چک}} \alpha = ۱ \text{ یا } \alpha = \frac{۳ + \sqrt{۵}}{۲}$$

توجه بسیار مهم است که دقت کنیم طراح از ما آهنگ تغییر چه تابعی را می‌خواهد.

مثال فرض کنید $f(x) = \frac{۳x^۲ + ۱}{x}$ باشد. آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $x^۲ f(x)$، در نقطه‌ای به طول ۲ را بیابید.

پاسخ دقت کنید که کسی از ما آهنگ تغییر $f(x)$ را نخواسته. سؤال آهنگ تغییرلحظه‌ای $y = x^۲ f(x)$ را می‌خواهد و لذا باید از همین تابع مشتق بگیریم:

$$y = x^۲ f(x) = ۳x^۳ + x \longrightarrow y' = ۹x^۲ + ۱ \xrightarrow{x=۲} y' = ۹ \times ۴ + ۱ = ۳۷$$

تست **نقطهٔ $M(x, y)$ روی نمودار $y = \sqrt{x+۳}$ در حال حرکت است. آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ وقتی $x = ۱$ است، برابر کدام است؟**

۱) $\frac{\sqrt{۵}}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲\sqrt{۵}}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

پاسخ **گزینهٔ «۲»** دقت کنید که مبدأ $O(۰, ۰)$ است و فاصلهٔ $M(x, y)$ از مبدأ برابر است با:

$$|MO| = \sqrt{(x - ۰)^۲ + (y - ۰)^۲} = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

اما برای نقطهٔ M، می‌دانیم که $y = \sqrt{x+۳}$ است. لذا:

$$|MO| = \sqrt{x^۲ + \sqrt{x+۳}^۲} = \sqrt{x^۲ + x + ۳}$$

این $f(x) = \sqrt{x^۲ + x + ۳}$ تابعی است که قرار است از آن مشتق بگیریم:

$$f'(x) = \frac{۲x + ۱}{۲\sqrt{x^۲ + x + ۳}} \xrightarrow{x=۱} f'(۱) = \frac{۳}{۲\sqrt{۵}}$$

نکته اگر $f(x)$ تابعی درجهٔ ۲ باشد، یعنی $f(x)=ax^2+bx+c$، آن‌گاه آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازهٔ $[x_1, x_2]$، با آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع در مرکز این بازه، یعنی در $x=\frac{x_1+x_2}{2}$، برابر است. به‌عبارتی:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\frac{x_1+x_2}{2})$$

مثال **آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x)=\frac{x^2}{2}+3x+12$ در بازهٔ $[\sqrt{2}+1, 5-\sqrt{2}]$ را به‌دست آورید.**

پاسخ با توجه به نکتهٔ قبل، کافی است مقدار $f'(x)$ را در مرکز بازه، یعنی در $3=\frac{5-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{2}$ حساب کنیم:

$$f'(x)=x+3 \xrightarrow{x=3} f'(3)=6$$

معادلهٔ خط مماس

اصل مطلب فرض کنید $y=f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای نوشتن معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=f(x)$ از نقطه‌ای واقع بر آن، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱ مختصات نقطهٔ تماس را به‌دست می‌آوریم. معمولاً صورت مسئله طول نقطهٔ تماس را می‌دهد: $x=x_0$. با داشتن x_0، به‌راحتی و با قراردادن در ضابطهٔ $y=f(x)$ می‌توانیم عرض نقطهٔ تماس را پیدا کنیم، یعنی $y_0=f(x_0)$. حالا نقطهٔ تماس $A=(x_0, y_0)$ را داریم.

۲ شیب خط مماس بر نمودار $y=f(x)$ در $x=x_0$ برابر با $a=f'(x_0)$ است.

۳ اگر از ما معادلهٔ خط مماس را بخواهند، چنین است: $y-y_0=a(x-x_0)$

اما اگر از ما معادلهٔ خط عمود (یا قائم) را بخواهند، همین مراحل را می‌نویسیم ولی معادلهٔ آخر $y-y_0=-\frac{1}{a}(x-x_0)$ است.

مثال **معادلهٔ خط عمود بر نمودار $y=x^3+2x$ در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن را بیابید.**

پاسخ چون سؤال گفته نقطه واقع بر نمودار است، پس باید مانند نکتهٔ قبل عمل کنیم. اول نقطهٔ تماس را پیدا می‌کنیم. با داشتن $x=1$، به‌سادگی $y=3$ به‌دست می‌آید. لذا $A(1, 3)$. حالا شیب را به کمک مشتق به‌دست می‌آوریم:

$$y'=3x^2+2 \xrightarrow{x=1} y'(1)=5 \Rightarrow a=5$$

حالا چون معادلهٔ خط عمود (قائم) را در نقطهٔ $A(1, 3)$ می‌خواهیم، می‌شود:

$$y-3=-\frac{1}{5}(x-1) \Rightarrow y=-\frac{x}{5}+\frac{16}{5}$$

مثال **فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، به‌نحوی که $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-6}{x-2}=3$ است. معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=2x+f(x)$، در نقطه‌ای به‌طول $x=2$، واقع بر این نمودار را به‌دست آورید.**

پاسخ اولاً از $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-6}{x-2}=3$ نتایج جالبی به‌دست می‌آوریم. چون حد مخرج صفر است ولی حد کسر $+\infty$ یا $-\infty$ نیست، پس باید حد صورت هم صفر باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to 2}(f(x)-6)=0 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=6$$

۵. فرض کنید $f(x)=x^{۳}-۶x$ باشد. خط مماس بر نمودار $y=f(x)$ در نقطهٔ دلخواه $(x_۱ \text{ و } f(x_۱))$ نمودار $y=f(x)$ را در نقطهٔ دیگری به مختصات $(x_۲, y_۲)$ قطع می‌کند. تابع $g(x)$ به این صورت تعریف می‌شود که $g(x_۱)=y_۲$. ضابطهٔ $g(x)$ کدام است؟

۱) $g(x)=-۸x^{۳}+۱۲x$
۲) $g(x)=۸x^{۳}-۱۲x$
۳) $g(x)=-۴x^{۳}+۶x$
۴) $g(x)=۴x^{۳}-۶x$

۶. خط $y=mx$ بر نمودارهای $y=x^{۲}+ax+۴$ و $y=۳x^{۲}+(۲a+۱)x+۳$ مماس است. بیشترین مقدار $m+a$ کدام است؟

۱) ۲۰
۲) ۲۱
۳) ۲۲
۴) ۲۳

۷. فرض کنید $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+x+۱$ باشد. خط L، در نقطه‌ای به طول $x=۲$ بر نمودار $y=f(x)$ مماس است. خط L' موازی L و مماس بر $y=f(x)$ است. این خط‌ها نمودار را در نقاط A, B, C, D قطع می‌کنند. مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟

۱) ۶
۲) ۹
۳) ۱۲
۴) ۱۵

۸. فرض کنید $f(x)=\dfrac{x-۱}{x^{۴}+x-۲}$ باشد و عرض‌ازمبدأ خط مماس بر تابع $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f^{۲}(x)}$، در نقطه‌ای به طول $x=k$ واقع بر آن، برابر ۳ باشد. شیب این خط مماس کدام است؟

۱) $۱\pm\dfrac{۶}{\sqrt{۳}}$
۲) $-۱\pm\dfrac{۶}{\sqrt{۳}}$
۳) $۲\pm\dfrac{۱۲}{\sqrt{۳}}$
۴) $-۲\pm\dfrac{۱۲}{\sqrt{۳}}$

۹. فرض کنید $f(x)=\dfrac{۲x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+۲}$ باشد. نقطهٔ $M(x,y)$ روی نمودار $y=f^{-۱}(x)$ در حرکت است. آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصلهٔ نقطهٔ $M(x,y)$ از مبدأ مختصات، در نقطه‌ای به طول ۱ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲\sqrt{۲}}$
۲) $\dfrac{۳}{۲\sqrt{۲}}$
۳) $\dfrac{۵}{۲\sqrt{۲}}$
۴) $\dfrac{۷}{۲\sqrt{۲}}$

۱۰. اگر β و α ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}=x+۱$ باشند، آن‌گاه تابع $f(x)=|\alpha x^{۲}+x+\beta|(\beta x^{۲}+x+\alpha)$، چند نقطهٔ مشتق‌ناپذیر دارد؟

۱) صفر
۲) یک
۳) دو
۴) سه

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. گزینهٔ «۱» طبق تعریف مشتق:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=f'(۲)$$

اما:

$$f'(x)=\frac{۵}{(x+۳)^{۲}}\Rightarrow f'(۲)=\frac{۵}{۵^{۲}}=\frac{۱}{۵}$$

ولی چون $f(x)$ مشتق‌پذیر است، پس پیوسته نیز هست. لذا $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$ و این یعنی $f(۲)=۶$ است.
از طرفی بنا به قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-۶}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f'(x)}{۱}=f'(۲)\Rightarrow f'(۲)=۳$$

حالا برویم سراغ خط مماس بر تابع $y=۲x+f(x)$ در نقطهٔ $x=۲$ واقع بر آن:

۱) $x_{\circ}=۲\Rightarrow y_{\circ}=۲\times ۲+f(۲)=۴+۶=۱۰\Rightarrow A=(۲,۱۰)$

۲) $a=y'(۲)\Rightarrow y'=۲+f'(x)\Rightarrow y'(۲)=۲+f'(۲)=۲+۳=۵$

۳) معادلهٔ خط مماس: $y-۱۰=۵(x-۲)\Rightarrow y=۵x$

- انتظار چنین سؤال دشواری برای کنکور را داشته باشید. خوب خوب تمرینش کنید تا سر جلسه غافلگیر نشوید.
حـــالا اگر نقطهٔ بیرون از نمودار بود چه کنیم؟ خدا را شـــکر کنید کـــه در کتاب مهروماه نکتهٔ زیر را می‌خوانید:

نکته فرض کنید $y=f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و نقطهٔ $B(x_۱,y_۱)$، نقطه‌ای بیرون نمودار $y=f(x)$ باشد. برای این‌که معادلهٔ خط مماس بر نمودار $y=f(x)$ و گذرنده از نقطهٔ B را پیدا کنیم، ابتدا باید نقطهٔ تماس را پیدا کنیم و بعد به کمک نکتهٔ قبل مسئله را حل کنیم. اما نقطهٔ تماس را چه‌طور پیدا کنیم؟ جواب معادلهٔ زیر، همان طول نقطهٔ تماس است:

۱ $$\frac{f(x)-y_۱}{x-x_۱}=f'(x)$$

اگر مسئله از ما معادلهٔ خط قائم یا خط عمود را بخواهد، جواب معادله زیر، طول نقطهٔ تماس خواهد بود:

۲ $$\frac{f(x)-y_۱}{x-x_۱}=-\frac{۱}{f'(x)}$$

این نکته کارتان را خیلی ساده‌تر می‌کند!

مثال **معادلهٔ خط مماس بر $y=x^۲-۲x$ که از نقطهٔ $(۲,-۱)$ می‌گذرد را بنویسید.**

پاسخ از آن‌جا که $(۲,-۱)$ در ضابطهٔ $y=x^۲-۲x$ صدق نمی‌کند، پس این نقطه خارج از نمودار این تابع است. چون خط مماس را می‌خواهیم، پس باید از معادلهٔ ۱ در نکتهٔ قبل استفاده کنیم:

$$\frac{f(x)+۱}{x-۲}=f'(x)\Rightarrow\frac{x^۲-۲x+۱}{x-۲}=۲x-۲\Rightarrow x^۲-۲x+۱=(۲x-۲)(x-۲)$$

$$\Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰\Rightarrow (x-۳)(x-۱)=۰\Rightarrow x_۱=۳\ ,\ x_۲=۱$$

پس مسئله دو جواب دارد. حالت اول $x_۱=۳$ است:

۱) $x_۱=۳\Rightarrow y_۱=۹-۶=۳\Rightarrow A=(۳,۳)$

۲) $a=y'(۳)\xrightarrow{y'(x)=۲x-۲}a=۶-۲=۴$

۳) خط مماس: $y-۳=۴(x-۳)\Rightarrow y=۴x-۹$

حالت دوم هم $x_۲=۱$ است:

۱) $x_۲=۱\Rightarrow y_۲=۱-۲=-۱\Rightarrow A=(۱,-۱)$

۲) $a=y'(۱)\xrightarrow{y'(x)=۲x-۲}a=۲-۲=۰$

۳) خط مماس: $y+۱=۰(x-۱)\Rightarrow y=-۱$

مثال **عرض‌ازمبدأ خط گذرنده از نقطهٔ $(-۲,۱)$ و مماس بر نمودار $y=۲\sqrt{x}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ به وضوح $x=-۲$ اصلاً در دامنهٔ $y=۲\sqrt{x}$ نیست، لذا $(-۲,۱)$ نقطه‌ای خارج از نمودار $y=۲\sqrt{x}$ است. چون دنبال خط مماس هستیم، پس باید از رابطهٔ ۱ در نکتهٔ قبل کمک بگیریم:

$$\frac{f(x)-۱}{x-(-۲)}=f'(x)\Rightarrow\frac{۲\sqrt{x}-۱}{x+۲}=۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}})\Rightarrow\sqrt{x}(۲\sqrt{x}-۱)=x+۲\Rightarrow ۲x-\sqrt{x}=x+۲$$

$$\Rightarrow x-\sqrt{x}-۲=۰\Rightarrow(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۱)=۰\Rightarrow\sqrt{x}=۲ \text{ یا } \sqrt{x}=-۱ \text{(غ‌ق‌ق)}\Rightarrow\sqrt{x}=۲\Rightarrow x=۴$$

لذا طول نقطهٔ تماس $x_1=۴$ است. پس:

$$۱)\ y=۲\sqrt{x}\Rightarrow y_1=۲\sqrt{۴}=۴\Rightarrow A=(۴,۴)$$

$$۲)\ a=y'(۴)\xrightarrow{y'(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}}a=\frac{۱}{\sqrt{۴}}=\frac{۱}{۲}$$

$$۳)\ \text{خط مماس}: y-۴=\frac{۱}{۲}(x-۴)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۲\Rightarrow \text{عرض از مبدأ}=۲$$

- از آزمون (۱) لذت ببرید. مشتق هم تمام شد.

آزمون تستی

۱. فرض کنید $f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۳}$ باشد، حاصل $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{۲}x^2-\frac{۱}{x}$، اختلاف آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x=۲$ از آهنگ متوسط تغییر در بازهٔ $[۱,۴]$، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $۰/۲۵$ ۲) $۰/۵$ ۳) $۰/۴۵$ ۴) $۰/۷۵$

۳. خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=ax^2+bx$، در نقطهٔ $x=۲$ مشترک‌اند. مقدار b، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

(منظور طراح محترم این است که در نقطهٔ به طول ۲ واقع بر هر دو نمودار، معادلهٔ خط مماس یکسان است و در واقع دو خط مماس منطبق‌اند)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۴. تابع با ضابطهٔ $y=\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}-۱}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) -۸ ۴) -۱۲

۵. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۴x-۵}{x+۱}$ و دامنهٔ $[۰,۸]$، خط مماس بر نمودار آن موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل کند. این خط مماس محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) -۲ ۲) $-۱/۵$ ۳) -۱ ۴) $-۰/۵$

۶. تابع $f(x)=||x^2-4|-2|$ ، در چند نقطه مشتق ندارد؟ (با دقت رسم کنید و اصلاً عجله نکنید.) (مشابه ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۷. شیب خط گذرنده از نقطهٔ $(2, 4)$ و مماس بر نمودار تابع $y=4\sqrt{x}-x$ ، کدام است؟

۱) ۰ یا ۱ ۲) ۰ یا ۲ ۳) ۲ یا ۴ ۴) ۱ یا ۴

۸. خط مماس بر منحنی $y=\frac{2x}{x^2+1}$ ، در نقطه‌ای به طول $x=1$ واقع بر آن، در همین نقطه بر $y=2x^2+ax+b$ هم مماس است. b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) چنین چیزی ممکن نیست.

۹. اگر خط $y=3x+1$ در نقطه‌ای به طول ۲ بر نمودار $y=x+f(x)$ مماس باشد، آن‌گاه حد $\lim\limits_{x\to1}\frac{f^2(2x)-f^2(2)}{x^3-1}$ ، برابر کدام است؟ (یادتان نرود که در اکثر حدهای $\frac{0}{0}$ ، هوپیتال را دارید.) (مشابه ریاضی خارج ۹۸)

۱) ۷ ۲) ۱۰ ۳) $\frac{20}{3}$ ۴) $\frac{40}{3}$

۱۰. در تابع $f(x)=x^2-3x+1$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)$ در بازهٔ $[2, 3]$، با آهنگ متوسط تغییر همین تابع در بازهٔ $[-1, a]$ برابر است. a کدام است؟ (دربارهٔ تابع درجهٔ ۲ ، کدام نکتهٔ مهم را داشتیم؟)

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

هایپرتست

۱. خطی که در نقطهٔ $(1, 2)$ بر $y=2x^2+x-1$ مماس اســـت، در نقطهٔ به طول ۳ بر $y=\frac{2x+a}{bx+1}$ مماس است. مجموعهٔ مقادیر ممکن a کدام است؟

۱) $\{6, 8\}$ ۲) $\{-6, 2\}$ ۳) $\{3, -9\}$ ۴) $\{-4, -2\}$

۲. فرض کنید $f(x)=[x]|x-[x]|$ باشد. در این‌صورت مشتق راست $f(x)$ در $x=1$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) وجود ندارد.

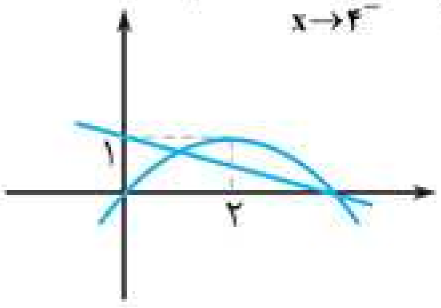
۳. خط $y=mx+1$ در نقطه‌ای به طول $x=-2$ بر نمودار $y=mx^2+3x+n$ مماس است. مقدار n کدام است؟ (مشابه تجربی خارج ۹۷)

۱) $\frac{11}{3}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{5}$ ۴) $\frac{19}{6}$

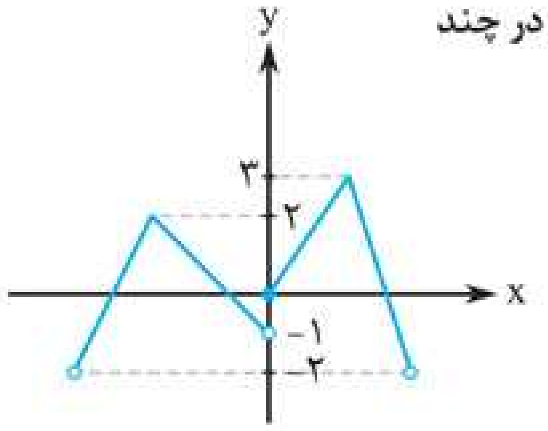
۴. به‌ازای کدام مقدار a ، خط به معادلهٔ $y=-3x+2$ بر منحنی $y=\frac{x^2+a}{x-2}$ مماس است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) -1 ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۵. نمودار سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim\limits_{x\to4^-}\frac{f(x)+g(x)}{4-x}$ ، کدام است؟



۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{5}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$



۶. نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت روبه‌رو است. تابع $y=f(x)+|f(x)|$ در چند نقطه از دامنه‌اش مشتق‌ناپذیر است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۷. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}۳x+۲ & ;x\geq ۳\\ ۲-x & ;x<۳\end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(۳+h^۲)-f(۳)}{h^۲}$، کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۳ ۳) -۱ یا ۳ ۴) وجود ندارد

۸. تابع $f(x)=|x^۲-(a+۳)x+۳a|$، در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. a را بیابید.

۱) $a\in(۱,+\infty)$ ۲) $a=۳$ ۳) $a=-۳$ ۴) نشدنی

۹. نقطهٔ $M(x,y)$ روی نمودار $y=۲\sqrt{x-۱}+۳$ در حرکت است. آهنگ لحظه‌ای تغییر فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ $A(۲,۳)$، وقتی $x=۲$ است برابر کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰. خط $y=ax+۲$ بر منحنی $y=x^۳+bx^۲$، در نقطه‌ای به‌طول ۱ مماس است. این خط و این منحنی در یک نقطهٔ دیگر هم تلاقی دارند. مجموع طول و عرض این نقطه، چند است؟ (اگر صورت مسئله را به خوبی متوجه شوید، راه‌حل هم ساده است)

۱) -۸ ۲) -۶ ۳) ۸ ۴) ۶

نیتروتست

۱. از نقطهٔ $A(۱,۲)$ دو خط مماس بر سهمی $y=x^۲+x+۱$ رسم کرده‌ایم. اگر نقاط تماس B و C باشند، مساحت مثلث ABC کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲. فرض کنید $f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۲$ باشد. اگر خط $y=f''(x)$ بر نمودار $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=۱$ مماس باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

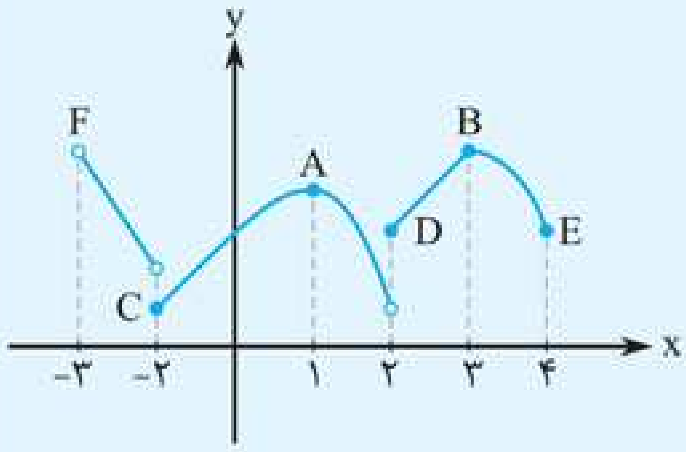
۳. اگر $f(۴-x)=\begin{cases}x^۲+۲x & ;x\geq ۱\\ x^۳+x+۱ & ;x<۱\end{cases}$ باشد، آهنگ متوسط تغییر $f(x)$ در بازهٔ $[۱,۴]$ برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶}{۳}$

۴. فرض کنید $f(x+۱)=x^۳+۲\sqrt{x+۳}$ باشد. عرض‌ازمبدأ خط مماس بر $y=f^{-۱}(x)+x$ در نقطه‌ای به طول $x=۵$ واقع بر نمودار، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۲}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

اصل مطلب نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل را در نظر بگیرید. از روی نمودار می‌فهمیم که $f(x)$ روی بازهٔ $(-۳,-۲)$ اکیداً نزولی است. روی بازهٔ $[-۲,۱]$ اکیداً صعودی و روی بازهٔ $(۱,۲]$ اکیداً نزولی است. هم‌چنین روی بازهٔ $[۲,۳]$ اکیداً صعودی و روی $[۳,۴]$ اکیداً نزولی است. قسمت اول کاربرد مشتق، تشخیص این بازه‌ها، نه از روی نمودار، بلکه از روی ضابطهٔ $f(x)$ است. (دو نکتهٔ اول).



به نقطهٔ A توجه کنید. این نقطه از همسایه‌های نزدیک خود بالاتر است. به چنین نقطه‌ای یک ماکزیمم نسبی می‌گوییم. یک تابع ممکن است یک، دو، هزار، بی‌شمار یا هیچ ماکزیمم نسبی داشته باشد. معمولاً برای راحتی، نقطه‌های ماکزیمم نسبی را Max_L می‌نامیم. در این مثال $Max_L = A , B$. به طریق مشابه، نقطهٔ C هم از همسایه‌های نزدیک خود پایین‌تر است. این نقطه را مینیمم نسبی می‌گویند و با Min_L نمایش می‌دهیم. یک تابع می‌تواند هیچ، یک یا چندین Min_L داشته باشد. در این مسئله $Min_L = C$.

نقطهٔ D با این‌که نقطهٔ مشکوکی است، اما نه Max_L است و نه Min_L. زیرا D از همسایه‌های سمت چپ خود بالاتر و از همسایه‌های سمت راست خود پایین‌تر است. به هر نوع نقطهٔ مشکوک روی نمودار (که بعداً کاملاً مشخص می‌شوند)، نقطهٔ بحرانی می‌گویند. در این مسئله A ، B ، C و D نقاطی بحرانی‌اند. به‌علاوه، نقاط ابتدا یا انتهای نمودار، اگر در دامنه باشند، بحرانی حساب می‌شوند. لذا E هم بحرانی است، اما F بحرانی نیست.

■ **یکنوایی و ماکزیمم و مینیمم‌های نسبی:** اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، برای تعیین بازه‌های صعودی و نزولی تابع $f(x)$، کافی است از آن مشتق بگیریم و سپس $f'(x)$ را تعیین علامت کنیم. در ضمن، همین جدول همهٔ Max نسبی و Min نسبی‌ها را مشخص می‌کند.

مثال **تابع $f(x) = x^۳ + x^۲ - ۵x + ۲$ روی چه بازه‌ای صعودی و روی چه بازه‌ای نزولی است؟ Max_L ، Min_L آن را بیابید.**

پاسخ ابتدا دقت کنید که $f'(x) = ۳x^۲ + ۲x - ۵ = (۳x+۵)(x-۱)$ که باید تعیین علامتش کنیم:

x		$-\frac{۵}{۳}$		۱	
$f'(x)$	+	○	−	○	+
$f(x)$	↗	Max_L	↘	Min_L	↗

همان‌طور که می‌بینید، $f(x)$ روی $(-\infty , -\frac{۵}{۳}]$ اکیداً صعودی، روی $[-\frac{۵}{۳} , ۱)$ اکیداً نزولی و روی $[۱ , +\infty)$ هم اکیداً صعودی است. در $x = -\frac{۵}{۳}$، یک قلّه به‌وجود آمده است که یعنی Max نسبی و در $x = ۱$ یک درّه به‌وجود آمده است که یعنی Min نسبی. برای یافتن عرض این نقاط، کافی است در $f(x)$ عددگذاری کنیم:

۱) $x_{Min} = ۱ \Rightarrow y_{Min} = f(x_{Min}) = f(۱) = ۱ + ۱ - ۵ + ۲ = -۱ \Rightarrow Min_L = (۱ , -۱)$

دستهٔ دوم:

$$((x-2)(x^2-x))'=0 \Rightarrow (x^3-3x^2+2x)'=0 \Rightarrow 3x^2-6x+2=0$$

$$\xrightarrow{\Delta} x=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

که با جای‌گذاری در ضابطهٔ $f(x)$ می‌توانیم عرض این نقاط را هم پیدا کنیم. کلاً این تابع چهار نقطهٔ بحرانی داشت.

تست **نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x)=(x-1)|x^2+x-2|$، سه رأس یک مثلث هستند. مساحت این مثلث کدام است؟** (مشابه ریاضی ۹۲)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ گزینهٔ «۳»

اول نقاط بحرانی $f(x)$ را پیدا می‌کنیم:

۱) $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1$ یا $-2 \Rightarrow A(1,0), B(-2,0)$

۲) $((x-1)(x^2+x-2))'=0 \Rightarrow (x^3-3x+2)'=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x=1$ یا $x=-1$

$\Rightarrow A(1,0), C(-1,-4)$

لذا در واقع سه نقطهٔ بحرانی وجود دارد که عبارت‌اند از $A(1,0)$، $B(-2,0)$ و $C(-1,-4)$. مساحت مثلث ABC هم از فرمول بندکفشی:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\\ -1 & -4\\ 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|(0+8-0)-(0+0-4)|=6$$

نکته هر عدد صحیح یک نقطهٔ بحرانی برای تابع $f(x)=ax-a[x]$ است. اگر $a>0$ (یعنی ضریب x مثبت باشد)، این نقاط بحرانی، همه Min نسبی‌اند. اما اگر $a<0$ باشد، همهٔ این نقاط بحرانی Max نسبی‌اند. البته باید حواس‌مان به نقاط ابتدا یا انتهای بازه باشد.

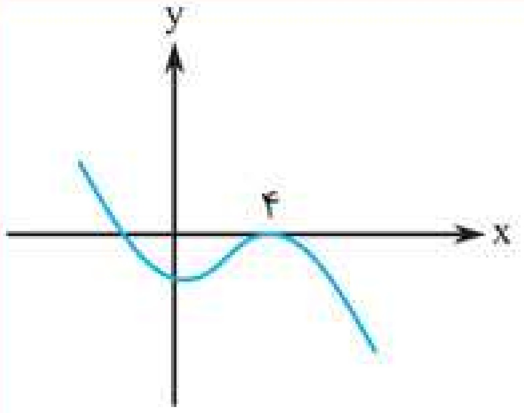
مثال **فرض کنید $f(x)=3[x]-3x : x\in[-2,3]$ باشد. در این‌صورت، $f(x)$ چند نقطهٔ بحرانی و از چه انواعی دارد؟**

پاسخ اولاً $x=-2$ و $x=3$، نقاط ابتدا و انتهای دامنه، نقاطی بحرانی‌اند. ولی اکسترمم نسبی نیستند. اما برای بقیهٔ اعداد صحیح بازهٔ $(-2,3)$، یعنی عددهای -1، 0، 1 و 2، باید علامت a را پیدا کنیم. a هم‌علامت ضریب x است نه $[x]$، که در این‌جا -3 است. لذا این نقاط، طول ماکزیمم‌های نسبی این تابع‌اند. برای یافتن عرض نقاط، کافی است عددگذاری کنیم، که می‌شود: $(2,0)$، $(1,0)$، $(0,0)$، $(-1,0)$.

نکته به‌طور کلی اگر $(c,f(c))$ یک اکسترمم نسبی باشد، حتماً نقطه‌ای بحرانی هم هست. اما یک نقطهٔ بحرانی ممکن است اکسترمم نسبی نباشد. در واقع، نقاط بحرانی صرفاً نقاط مشکوک تابع برای بررسی اکسترمم‌ها هستند و در خیلی از مواقع، اکثر آن‌ها نقاط بی‌اهمیتی هستند.

نکته قبلاً گفتیم که اگر $(x_۰, y_۰)$ یک اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ باشد، آن‌گاه $y_۰ = f(x_۰)$ و $f'(x_۰) = ۰$ است. حالا اگر $f(x)$ تابعی کسری به‌صورت $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ باشد، این قضیه البته که درست است اما می‌توان از نکتهٔ خیلی ساده‌تری استفاده کرد، و آن نکته این است که برای توابع کسری مشتق‌پذیر، اگر $(x_۰, y_۰)$ یک اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه: $y_۰ = \dfrac{g(x_۰)}{h(x_۰)}$ و $y_۰ = \dfrac{g'(x_۰)}{h'(x_۰)}$

تست نمودار تابع $y = ax^۳ + bx^۲ - ۱۶$ به‌صورت مقابل است. مقدار $۲a + b$ کدام است؟ (مفهومی)

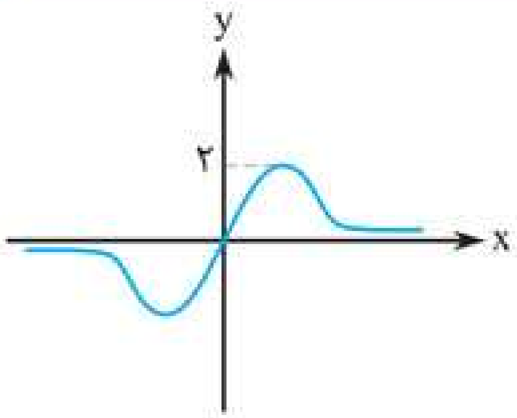


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ گزینهٔ «۲» دقت کنید که از نمودار معلوم است $x = ۴$ هم ریشهٔ مضاعف تابع و هم طول ماکزیمم نسبی آن است. به‌عبارتی $f(۴) = ۰$ و طبق نکتهٔ قبل، $f'(۴) = ۰$ است. لذا:

$$\begin{cases} ۶۴a + ۱۶b - ۱۶ = ۰ \\ (۳ax^۲ + ۲bx)_{x=۴} = ۴۸a + ۸b = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a + b - ۱ = ۰ \\ ۶a + b = ۰ \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}, b = ۳ \Rightarrow ۲a + b = ۲$$

مثال شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = \dfrac{ax + b}{x^۲ + ۱}$ است. a را بیابید.



پاسخ در مسائل نمودارها حتماً باید به $f(۰)$ توجه کنیم. نمودار از مبدأ می‌گذرد، پس $f(۰) = ۰$ است.

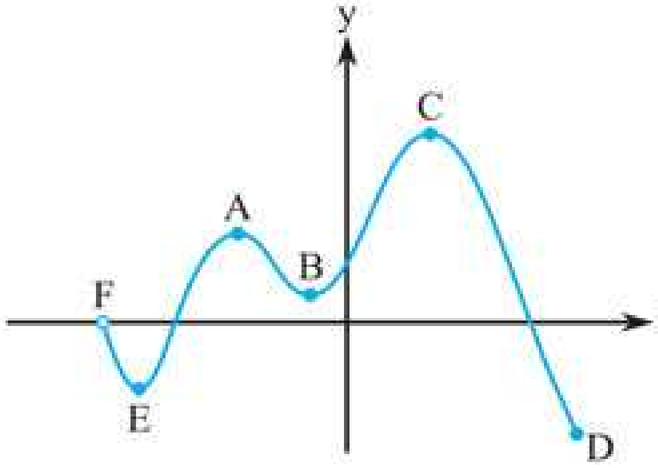
$$f(۰) = \frac{a(۰) + b}{۰^۲ + ۱} = b = ۰ \Rightarrow b = ۰$$

حالا چون نمودار کسری است و $y = ۲$ عرض نقطهٔ Max نسبی است پس طبق نکتهٔ قبل، داریم: $\dfrac{ax}{x^۲ + ۱} = \dfrac{a}{۲x} = ۲$ که به دستگاه زیر ختم می‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x^۲ + ۱} = \dfrac{۱}{۲x} \\ a = ۴x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x^۲ = x^۲ + ۱ \\ a = ۴x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \text{ یا } x = -۱ \\ a = ۴x \end{cases} \xrightarrow{\text{به‌وضوح } x > ۰} \begin{cases} x = ۱ \\ a = ۴x = ۴(۱) = ۴ \end{cases}$$

اکسترمم‌های مطلق

- نمودار $y = f(x)$ به‌صورت مقابل را در نظر بگیرید:



می‌دانیم که C و A ماکزیمم‌های نسبی و B و E مینیمم نسبی این تابع هستند. نقطهٔ C علاوه بر این‌که Max نسبی است، یعنی از همسایه‌های نزدیک به خودش بالاتر است، از همهٔ نقاط نمودار هم بالاتر است. به چنین نقطه‌ای که از همهٔ نقاط یک نمودار بالاتر است، Max مطلق می‌گویند.

$$۲)\ x_{Max} = -\frac{۵}{۳} \Rightarrow y_{Max} = f(x_{Max}) = f(-\frac{۵}{۳}) = \frac{-۱۲۵}{۲۷} + \frac{۲۵}{۹} + \frac{۲۵}{۳} + ۲ = \frac{۲۲۹}{۲۷}$$

$$\Rightarrow Max_L = (-\frac{۵}{۳}, \frac{۲۲۹}{۲۷})$$

تست تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x^۳ + ax^۲ + ۳x + ۲$ همواره صعودی است. حدود a کدام است؟

(برگرفته از کتاب درسی)(مفهومی ـ محاسباتی)

۱) $a < ۲$ ۲) $a < ۳\sqrt{۲}$ ۳) $-۲ < a < ۳\sqrt{۲}$ ۴) $-۳\sqrt{۲} < a < ۳\sqrt{۲}$

پاسخ گزینهٔ «۴»

این‌که $f(x)$ همواره صعودی است، به‌معنای آن است که $f'(x)$ همواره نامنفی است.

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۲ax + ۳$$

و می‌دانیم یک تابع درجهٔ ۲ به شرطی همواره نامنفی است که $\Delta \le ۰$ و ضریب $x^۲$ هم مثبت باشد. در این‌جا ضریب $x^۲$ برابر ۶+ است و دربارهٔ Δ داریم:

$$\Delta = ۴a^۲ - ۴\times۶\times۳ \le ۰ \Rightarrow a^۲ - ۱۸ \le ۰ \Rightarrow (a - \sqrt{۱۸})(a + \sqrt{۱۸}) \le ۰ \Rightarrow -\sqrt{۱۸} \le a \le \sqrt{۱۸}$$

اگر تابع $f(x) = ۲x^۳ + ax^۲ + bx - ۱$، فقط روی بازهٔ $[-۲, ۱]$ و زیرمجموعه‌هایش نزولی باشد، آن‌گاه $a - b$ کدام است؟

(مفهومی ـ تکنیکی)

۱) ۱۵ ۲) ۹ ۳) -۹ ۴) -۱۵

پاسخ گزینهٔ «۱» معنی صورت مسئله این است که جدول تعیین علامت $f'(x)$ چنین است:

x		-۲		۱	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+

این یعنی $x_۱ = -۲$ و $x_۲ = ۱$ ریشه‌های $f'(x) = ۰$ هستند. اما:

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۲ax + b = ۰$$

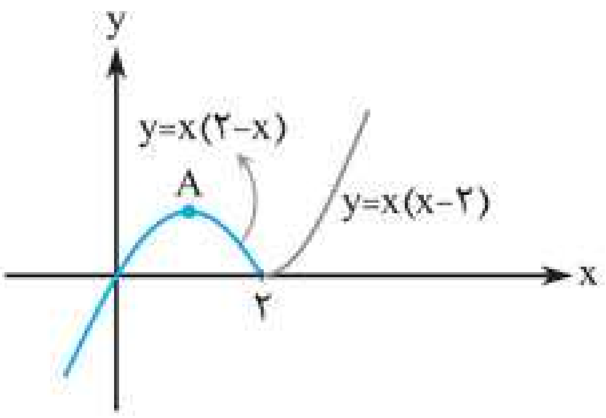
چون ریشه‌ها $x_۱ = -۲$ و $x_۲ = ۱$ هستند، پس:

$$۶x^۲ + ۲ax + b = ۶(x-۱)(x+۲) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ \Rightarrow ۲a = ۶, b = -۱۲ \Rightarrow a = ۳, b = -۱۲$$

نکته در توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلق‌دار، بهتر است نمودار رسم کنیم.

مثال تابع $f(x) = x|x-۲|$ روی چه بازه‌هایی صعودی، روی چه بازه‌هایی نزولی است، و در چه نقاطی ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی دارد؟

پاسخ با رسم $y = x|x-۲|$ شروع می‌کنیم:



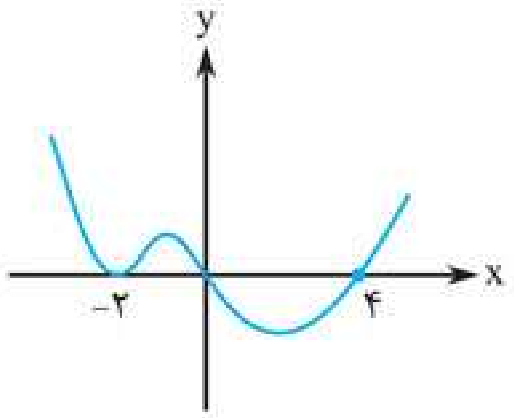
دقت کنید که نقطهٔ A عملاً رأس سهمی ناقص $y = x(۲-x)$ است. بنابراین $x_A = ۱$ است. (یادآوری: در هر سهمی طول نقطهٔ رأس، میانگین ریشه‌ها است.) لذا $y_A = f(x_A) = f(۱) = ۱$. این یعنی مختصات Max نسبی $(۱, ۱)$ است. این تابع روی بازهٔ $(-\infty, ۱]$ اکیداً صعودی، روی $[۱, ۲]$ اکیداً نزولی و روی $[۲, \infty)$ اکیداً صعودی است.

- یکی از سؤالات متداول کنکور این است که ضابطه و برد تابع $f(x)$ را، مثلاً روی بازه‌ای که نزولی است، بیابید. از روی نمودار بدیهی است که:

$$f(x) = x(۲-x)\ ;\ R_f = [۰, ۱]$$

■ گاهی طراح زیادی خوش‌اخلاق می‌شود و نمودار $y=f'(x)$ را می‌دهد و سؤالاتی دربارهٔ یکنوایی، Max_L و Min_L تابع $y=f(x)$ می‌پرسد. کافی است به یاد بیاورید که از روی نمودار $y=f'(x)$، به‌راحتی می‌توانیم جدول تعیین علامت آن را رسم‌کنیم و البته از روی جدول تعیین علامت $f'(x)$، عین آب خوردن می‌توان یکنوایی $f(x)$ و بقیهٔ مخلفات آن را تعیین کرد.

مثال **فرض کنید نمودار $y=f'(x)$ به‌صورت مقابل باشد. دربارهٔ یکنوایی وماکزیمم نسبی ومینیمم نسبی تابع $f(x)$ بحث کنید.**



پاسخ از نمودار $y=f'(x)$، جدول تعیین علامت $f'(x)$ را رسم می‌کنیم.

x		-۲		۰		۴	
$f'(x)$	+	۰	+	۰	−	۰	+

و از روی این جدول، می‌فهمیم که:

x		-۲		۰		۴	
$f'(x)$	+	۰	+	۰	−	۰	+
$f(x)$	↗		↗		↘		↗
		هیچ		Max_L		Min_L	

لــذا طول نقطهٔ Max_L برابر ۰ و طول نقطهٔ Min_L برابر ۴ است. تابع $f(x)$ روی $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی، روی $[0,4]$ اکیداً نزولی و روی $[4,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

تبصرهٔ مهم: حق نداریم از بازه‌های یکنوایی، اجتماع بگیریم.

مثلاً در مثال قبل به هیچ‌وجه نمی‌توانیم بگوییم $f(x)$ در $(-\infty,0]\cup[4,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

نقاط اکسترمم نسبی

نکته به نقطه‌ای که Max یا Min باشـد، اکسترمم می‌گوییم. اگر نقطهٔ (x_0,y_0) اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر $y=f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x_0)=y_0$ و $f'(x_0)=0$ است. ولی از کجا بفهمیم که نقطهٔ (x_0,y_0) واقعاً Max نسبی است یا Min نسـبی؟ این‌جاست که $f''(x)$ را نیاز داریم. اگر $f''(x_0)>0$ باشد، آن‌گاه (x_0,y_0) یک‌نقطهٔ Min نسبی است. اما اگر $f''(x_0)<0$ باشد. آن‌گاه (x_0,y_0) یک‌نقطهٔ Max نسبی است. توجه کنید که این قضیه دوشرطی نیست.

مثال **نقطهٔ به طول ۳ واقع بر نمودار $f(x)=x^4-4x^3$، چگونه نقطه‌ای است؟**

پاسخ دقت کنید که $f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$ اسـت. لذا $f'(3)=0$ است. ولی از آن‌جا که $f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$ اسـت، لذا $f''(3)=36>0$. پس $x=3$ طـول یک نقطهٔ Min نسبی برای تابع $f(x)$ است. طبعاً عرض این نقطه $y_{Min}=f(x_{Min})=f(3)=-27$ است.

تست **فرض کنید $f(x)=ax^2+(a^2-6)x+a$ باشد. به‌ازای کدام مقدار a، این تابع در $x=-\frac{1}{2}$ دارای Min نسبی است؟** (مفهومی ـ دقت)

۱) $a=-2$　　۲) $a=2$　　۳) $a=3$　　۴) نشدنی

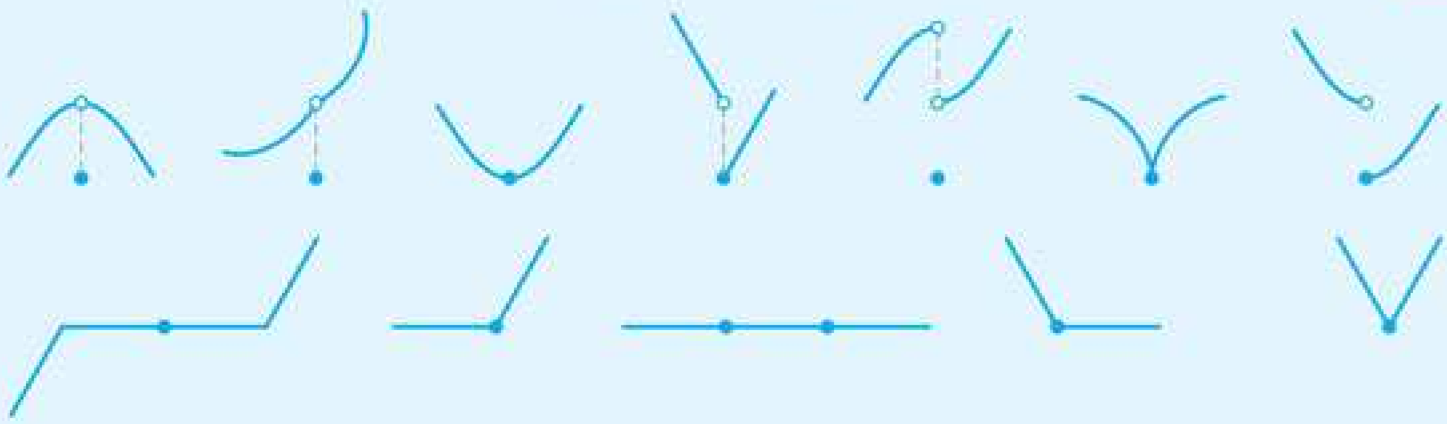
پاسخ **گزینهٔ «۳»** چون $x=-\frac{1}{2}$ طول یک Min نسبی است پس، $f'(-\frac{1}{2})=0$ است.

یعنی: $f'(x)=2ax+(a^2-6)\Rightarrow f'(-\frac{1}{2})=-a+a^2-6=0\Rightarrow a^2-a-6=(a-3)(a+2)=0$

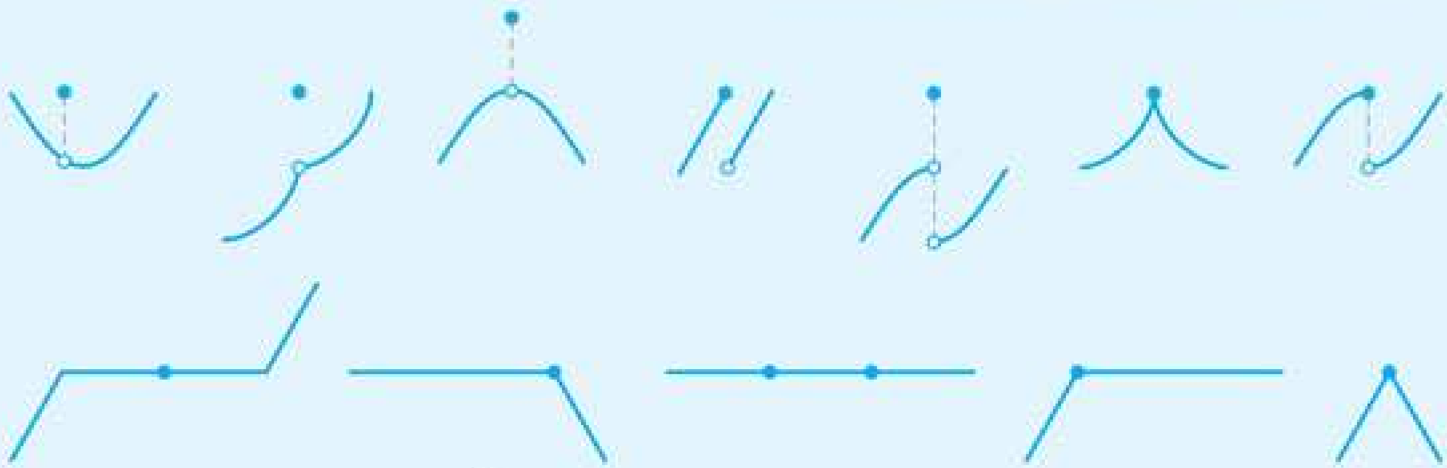
$a=-2$ یا $a=3 \Rightarrow$ اگر $a=3$ باشد، آن‌گاه $f(x)=3x^2+3x+3$ است. لذا $f''(x)=6$ و بنابراین $f''(-\frac{1}{2})=6>0$ است. این یعنی $x=-\frac{1}{2}$ طول یک Min نسبی است، همان‌طور که می‌خواهیم. پس $a=3$ قابل قبول است.

اما اگر $a=-2$ باشد، آن‌گاه $f(x)=-2x^2-2x-2$ است. بنابراین $f''(x)=-4$، به‌خصوص $f''(-\frac{1}{2})=-4<0$. این یعنی $x=-\frac{1}{2}$ طول یک Max نسبی است. سؤال این را نمی‌خواهد، پس $a=-2$ قابل قبول نیست.

نکته در نمودارها، نقاط Min نسبی به یکی از صورت‌های زیر هستند:

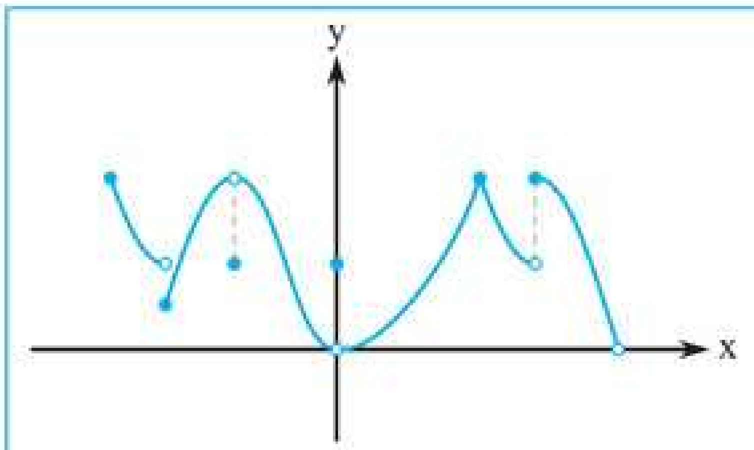


نقاط Max نسبی به یکی از صورت‌های زیر هستند:



دقت کنید اکسترمم نسبی نمی‌تواند در ابتدا یا انتهای بازه باشد. اصلاً نسبی یعنی نقطه‌ای که دو طرف آن همسایه‌هایی نزدیک وجود دارد.

تست **با توجه به نمودار $y=f(x)$، این تابع به‌ترتیب چند Min نسبی و چند Max نسبی دارد؟** (مفهومی)



۱) دو ـ دو

۲) دو ـ سه

۳) سه ـ دو

۴) سه ـ سه

پاسخ **گزینهٔ «۲»** این تابع دو Min نسبی و سه Max نسبی دارد. این نقاط را می‌توانید با کمی دقت پیدا کنید.

نکته می‌گوییم نقطهٔ $(c\,,f(c))$ برای تابع $y=f(x)$ یک نقطهٔ بحرانی است، اگر یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

۱ $f'(c)$ اصلاً موجود نباشد (نقاط مرزی چندضابطه‌ای‌ها و ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق، کاندیدهای اصلی این وضعیت هستند که باید بررسی شوند.)

۲ $f'(c)=0$ باشد.

از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر دامنهٔ $f(x)$ بازه‌ای بسته باشد (که معمولاً هست)، آن‌گاه نقاط ابتدا و انتهای بازه، بحرانی محسوب می‌شوند، زیرا در این نقاط مشتق وجود ندارد.

تست تابع $f(x)=\sqrt{4x-x^2}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟ (محاسباتی)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ **گزینهٔ «۳»** اول دامنهٔ $f(x)$ را حساب می‌کنیم: $4x-x^2\geq 0\Rightarrow x(4-x)\geq 0\Rightarrow x\in[0\,,4]$

همین‌جا معلوم می شود که $x=0$ و $x=4$ دوتا از نقاط بحرانی‌اند. برای یافتن بقیهٔ نقاط بحرانی، مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=0\Rightarrow x=2\xrightarrow{2\in[0\,,4]}x=2\ \checkmark$$

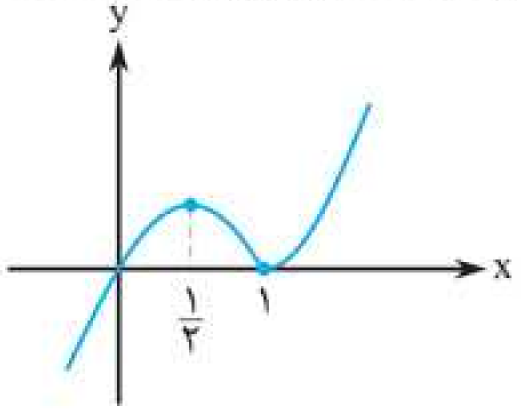
لذا این تابع سه نقطهٔ بحرانی دارد که عبارت‌اند از:

$A(0\,,f(0))=(0\,,0)$ و $B(4\,,f(4))=(4\,,0)$ و $C(2,f(2))=(2\,,2)$

مثال تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=x\,|\,2x-2\,|$ را پیدا کنید.

پاسخ در توابع چندضابطه‌ای و قدرمطلقی، برای یافتن تعداد نقاط بحرانی، بهترین راه رسم است.

$$y=f(x)=x\,|\,2x-2\,|=2x\,|\,x-1\,|\Rightarrow$$



این تابع دو نقطهٔ بحرانی دارد. یکی Max_L و یکی Min_L. البته که $x_{Min}=1$ ، $x_{Max}=\frac{1}{2}$. دقت کنید که روی نمودار همهٔ نقاط Max و Min نسبی و همهٔ نقاطی که تابع در آن‌ها مشتق‌ناپذیر است (فصل قبل)، بحرانی هستند.

نکته نقاط بحرانی تابع $y=h(x)\,|\,g(x)\,|$ (با دامنهٔ $\mathbb{R}$) دو دسته هستند که به‌راحتی می‌توان مختصات آن‌ها را به‌دست آورد:

۱ جواب‌های معادلهٔ $g(x)=0$

۲ جواب‌های معادلهٔ $(h(x)g(x))'=0$ یا نقاطی که در آن‌ها $h(x)g(x)$ مشتق‌ناپذیر است.

مثال نقاط بحرانی تابع $f(x)=(x-2)\,|\,x^2-x\,|$ را به‌دست آورید.

پاسخ **دستهٔ اول:** عبارت‌اند از جواب‌های معادلهٔ $x^2-x=0$. یعنی $x\in\{0\,,1\}$. بنابراین $(0\,,0)$ و $(1,0)$ را از این دسته پیدا کردیم.

آزمون تستی

۱. در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x-4|$ ، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

(یادتان هست که این تابع را باید رسم کنید.) (تجربی ۹۸)

۱) $\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{5}$

۲. بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{12-x}$ ، در ناحیهٔ اول واقع شود، کدام است؟ (تجربی ۹۸)

۱) $8\sqrt{2}$ ۲) $8\sqrt{3}$ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

۳. در تابع با ضابطهٔ $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصلهٔ دو نقطهٔ ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

(بهتر است نمودار تابع را ...) (تجربی خارج ۹۸)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) ۳ ۳) $3\sqrt{2}$ ۴) ۴

۴. فاصلهٔ نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ ، از نیمساز ناحیهٔ اول کدام است؟ (تجربی۹۹)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

۵. مقدار ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ ، کدام است؟

۱) $-1+\sqrt{5}$ ۲) $1+\sqrt{5}$ ۳) $-1+\sqrt{3}$ ۴) $1+\sqrt{3}$

۶. کوتاه‌ترین فاصلهٔ نقطهٔ $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادلهٔ $y = \sqrt{2x+7}$ ، کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۴ ۲) ۴/۵ ۳) ۵ ۴) $3\sqrt{2}$

۷. کوتاه‌ترین فاصلهٔ سهمی $y^2 = 4x$ از نقطهٔ $M(3, 0)$ ، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\dfrac{3}{2}$ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) ۳

۸. اگر $[-2, 1]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx$ روی آن نزولی است، آن‌گاه $2a + 2b$ کدام است؟

۱) ۱۸- ۲) ۱۸ ۳) ۲۷- ۴) ۲۷

۹. برد تابع $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{14-2x}$ ، برابر است با ....

۱) $[\sqrt{5}, \sqrt{15}]$ ۲) $[\sqrt{10}, \sqrt{15}]$ ۳) $[-\sqrt{5}, \sqrt{10}]$ ۴) $[0, \sqrt{10})$

۱۰. ماکزیمم مطلق تابع $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x+5}$ ، برابر کدام است؟

۱) $-\dfrac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\dfrac{1}{2}$ ۴) ۱-

۱۱. تابع $f(x) = 8x - 4[2x]$ با دامنهٔ $[-2, 1]$ چند اکسترمم نسبی و از چه نوعی دارد؟

۱) ۷ تا مینیمم نسبی ۲) ۷ تا ماکزیمم نسبی ۳) ۵ تا مینیمم نسبی ۴) ۵ تا ماکزیمم نسبی

دقت کنید که نقطهٔ D، از همهٔ نقاط نمودار پایین‌تر است. به چنین نقطه‌ای Min مطلق می‌گویند. همان‌طور که می‌بینید، نقطهٔ D انتهای نمودار است و از سمت راست همسایه‌ای ندارد، لذا یک Min نسبی نیست. در واقع، هیچ لزومی ندارد که یک Max یا Min مطلق، یک Max یا Min نسبی باشد و برعکس. روش پیداکردن اکسترمم‌های مطلق، از اکسترمم‌های نسبی هم راحت‌تر است. توجه کنید یک تابع می‌تواند هیچ، یک، دو یا ... بی‌شمار اکسترمم مطلق داشته باشد. مثلاً تابع $y=\tan x$ اکسترمم مطلق ندارد (به نمودار آن توجه کنید)، اما نمودار $y=\sin x$ نشان می‌دهد که این تابع بی‌شمار Max مطلق (در نقاط $(2k\pi+\frac{\pi}{2},1)$) و بی‌شمار Min مطلق (در نقاط $(2k\pi-\frac{\pi}{2},-1)$) دارد و جالب است که همهٔ این نقاط، اکسترمم نسبی هم هستند. اما دربارهٔ اکسترمم مطلق یک نکتهٔ جالب داریم که در واقع، قضیه‌ای از یک ریاضی‌دان بزرگ به نام وایرشتراس است.

نکته اگر $f(x)$ تابعی پیوسته باشد که دامنهٔ آن به‌صورت بازهٔ بسته $[a,b]$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ حتماً هم Max مطلق دارد و هم Min مطلق. برای پیدا کردن این Max مطلق و Min مطلق، کافی است نقاط بحرانی $f(x)$ را پیدا کنیم و همه را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ عددگذاری کنیم. کوچک‌ترین عددی که به‌دست می‌آوریم همان Min مطلق و بزرگ‌ترین عددی که به‌دست می‌آوریم Max مطلق است. از همین‌رو، در بعضی مسائل به جای Max مطلق می‌گویند بیشترین مقدار تابع یا به‌جای Min مطلق می‌گویند کم‌ترین مقدار تابع. جالب است که به کمک این قضیه، برد توابع پیوسته به‌راحتی قابل محاسبه است: $R_f=[y_{Min}, y_{Max}]$.

مثال کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=x^3-3x+1;\ x\in[0,2]$ را به‌دست آورید.

پاسخ باید نقاط بحرانی را به‌دست آوریم. همین اول کار دوتاشون معلوم شدند: $x=2$ و $x=0$. از طرفی:

$$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)=0 \Rightarrow x=1 \text{ یا } x=-1 \xrightarrow{-1\notin[0,2]} x=1$$

لذا سه نقطهٔ بحرانی داریم که طول آن‌ها ۲، ۱ و ۰ است. این نقاط را در ضابطهٔ تابع $f(x)$ عددگذاری می‌کنیم:

۱) $x=0 \Rightarrow f(0)=1$

۲) $x=1 \Rightarrow f(1)=1-3+1=-1$

۳) $x=2 \Rightarrow f(2)=8-6+1=3$

لذا کم‌ترین مقدار این تابع ۱− و بیشترین مقدار آن ۳ است. برد تابع هم بازهٔ $[-1,3]$ است.

تست فرض کنید $f(x)=x-2\sqrt{x}-1:\ x\in[0,\frac{25}{4}]$ باشد. در این‌صورت، بیشترین فاصلهٔ نقطه‌ای روی نمودار $y=f(x)$ از محور xها کدام است؟ (محاسباتی ـ دقت)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ **گزینهٔ «۴»** دقت کنید $x=0$ و $x=\frac{25}{4}$ دو نقطهٔ بحرانی $f(x)$ هستند و:

$$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=0 \Rightarrow x=1$$

بنابراین $f(x)$ سه نقطهٔ بحرانی به طول‌های $\frac{25}{4}$، ۱ و ۰ دارد. لذا:

۱) $x=0 \Rightarrow f(0)=-1$

$۲)\ x=۱ \Rightarrow f(۱)=۱-۲\sqrt{۱}-۱=-۲$

$۳)\ x=\frac{۲۵}{۴} \Rightarrow f(\frac{۲۵}{۴})=\frac{۲۵}{۴}-۲\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}-۱=\frac{۱}{۴}$

■ حالا خوب دقت کنید! جواب مسئله $\frac{۱}{۴}$ نیست، زیرا ما بیشترین مقدار $f(x)$ را نمی‌خواهیم. ما بیشترین فاصله $f(x)$ از محور x ها را می‌خواهیم که برابر ۲ است. زیرا نقطهٔ $(۱,-۲)$، درواقع ۲ واحد پایین‌تر از محور x ها است. این مسئله، یکی از شایع‌ترین بی‌دقتی‌های این فصل است.

بهینه‌سازی

■ بیشترین استفادهٔ اکسترمم‌های مطلق در مسائل بهینه‌سازی است. در این مسائل، ابتدا باید صورت مسئله را مدل‌سازی کنیم. یعنی مسئله را برحسب یک تابع با دامنهٔ مشخص بیان کنیم و سپس به کمک نقاط بحرانی مسئله را حل کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال فرض کنید محیط مستطیلی ۱۲ باشد.

الف) مساحت مستطیل را برحسب تابعی از طول آن بیان کنید.

ب) بیشترین مقدار ممکن برای مساحت این مستطیل را بیابید.

پاسخ الف) فرض کنیم طول مستطیل x و عرض مستطیل y باشد. در این‌صورت، فرض مسئله می‌گوید $۲(x+y)=۱۲$. این یعنی $y=۶-x$ است. حالا دقت کنید که اگر S مساحت مستطیل باشد، آن‌گاه:

$$S=xy=x(۶-x) \Rightarrow S(x)=۶x-x^۲\ ;\ ۰<x<۶$$

دقت کنید که چون $x\,,\,y>۰$، لذا $x>۰$ و $۶-x>۰$، که یعنی $۰<x<۶$.

ب) بیشترین مقدار یعنی ماکسیمم مطلق. پس باید نقاط بحرانی را پیدا کنیم. در این مسئله، ۰ و ۶ اصلاً در بازه نیستند، لذا کاری به آن‌ها نداریم و می‌رویم سراغ مشتق:

$$S'(x)=۶-۲x=۰ \Rightarrow x=۳ \xrightarrow{۳\in(۰,۶)} x=۳\ \checkmark$$

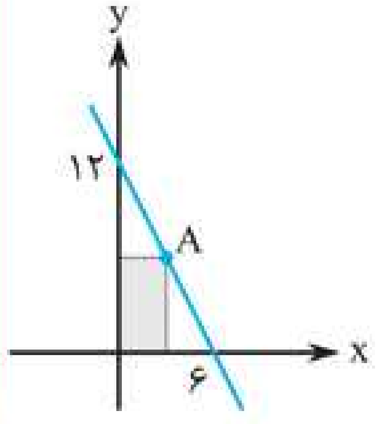
در نتیجه:
$$\text{Max}\,S=f(۳)=۶\times۳-۹=۹$$

دقت کنید که اگر $x=۳$ باشد، آن‌گاه $y=۳$ است. لذا این مستطیل خاص که بیشترین مساحت را دارد، در واقع یک مربع است.

تست **نقطهٔ A در ناحیهٔ اول، روی خط $۲x+y=۱۲$ قرار دارد. از این نقطه بر هر دو محور، عمودهایی رسم می‌کنیم تا یک مستطیل ایجاد شود. حداکثر مساحت این مستطیل چه‌قدر است؟** (مفهومی-محاسباتی)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰

پاسخ گزینهٔ «۳»



از آن‌جا که نقطهٔ $A(x\,,\,y)$ روی خط $۲x+y=۱۲$ و در ناحیهٔ اول قرار دارد، پس مختصات این نقطه در معادلهٔ خط صدق می‌کند:

$$۲x+y=۱۲ \Rightarrow y=۱۲-۲x$$

از آن‌جا که در ربع اول $x>۰$ و $y>۰$ است، داریم:

$$x>۰\,,\,۱۲-۲x>۰ \Rightarrow ۰<x<۶$$

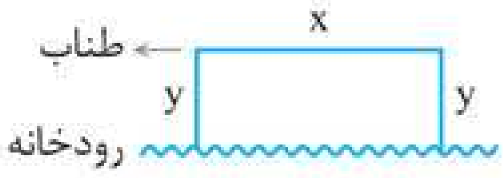
در ضمن، مساحت مستطیل رنگی برابر با xy است. یعنی:

$$S = xy = x(۱۲-۲x) \Rightarrow f(x) = ۱۲x - ۲x^۲$$
$$\Rightarrow f'(x) = ۱۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow MaxS = f(۳) = ۱۸$$

بیشترین مساحت از زمینی که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است، محصور نمود، چند متر مربع است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) ۹۵۸ ۲) ۹۶۸ ۳) ۹۷۸ ۴) ۹۸۸

پاسخ گزینهٔ «۲»

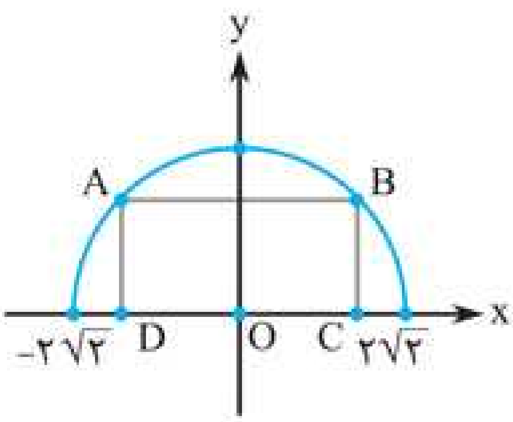


فرض کنیم طول مستطیل x و عرض آن y باشد. دقت کنید که یک ضلع این زمین رودخانه است و بنابراین طول طناب مساوی با مجموع سه ضلع دیگر است، نه کل محیط.

$$۲y + x = ۸۸ \Rightarrow y = \frac{۸۸ - x}{۲}$$

$$S = xy = \frac{x(۸۸-x)}{۲} = \frac{۸۸x - x^۲}{۲} \Rightarrow f(x) = \frac{۸۸x - x^۲}{۲} \Rightarrow f'(x) = ۴۴ - x = ۰$$
$$\Rightarrow x = ۴۴ \Rightarrow MaxS = f(۴۴) = ۹۶۸$$

مثال **با توجه به نمودار تابع $y = \frac{۳}{۲}\sqrt{۸ - x^۲}$، بیشترین مساحت از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آن‌ها منطبق بر محور طول‌ها و دو رأس آن بر منحنی $y = \frac{۳}{۲}\sqrt{۸ - x^۲}$ قرار گیرند، چند مترمربع است؟**



پاسخ بدیهی است که به‌خاطر دامنه باید $۸ - x^۲ \geq ۰$ باشد که یعنی $-۲\sqrt{۲} \leq x \leq ۲\sqrt{۲}$. دقت کنید که مساحت مستطیل $ABCD$ برابر با $AB \times BC$ است.

تمرکز ما، طبق معمول روی نقطه‌ای است که در ربع اول قرار دارد، یعنی نقطهٔ B. دقت کنید که $BC = y_B$ است، اما $AB \neq x_B$. درواقع: $AB = DC = ۲OC = ۲x_B$

لذا مساحت مستطیل $ABCD$ برابر است با: $S(x) = ۲x_B y_B = ۲x \times \frac{۳}{۲}\sqrt{۸ - x^۲} = ۳x\sqrt{۸ - x^۲}$

$$\Rightarrow S'(x) = ۳\sqrt{۸-x^۲} + ۳x(-۲x) \times \frac{۱}{۲\sqrt{۸-x^۲}} = ۰ \Rightarrow \sqrt{۸-x^۲} = \frac{x^۲}{\sqrt{۸-x^۲}} \Rightarrow ۸ - x^۲ = x^۲$$

$$\Rightarrow x = \pm ۲ \xrightarrow{\text{x در ربع اول}} x = ۲ \Rightarrow MaxS = f(۲) = ۳ \times ۲\sqrt{۸-۴} = ۱۲$$

نکته اگر $m > ۰$ باشد و $ax + by = m$، آن‌گاه کم‌ترین مقدار $x^n + y^n$ زمانی رخ می‌دهد که $\frac{x^{n-۱}}{a} = \frac{y^{n-۱}}{b}$.

مثال **اگر $۳x + ۴y = ۱۵$ باشد، کم‌ترین مقدار $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ را به‌دست آورید.**

پاسخ ما کم‌ترین مقدار $x^۲ + y^۲$ را به‌دست می‌آوریم و از آن جذر می‌گیریم. طبق نکتهٔ قبل، داریم:

$$\frac{x^۱}{۳} = \frac{y^۱}{۴} \Rightarrow y = \frac{۴}{۳}x$$

اما فرض مسئله $۳x + ۴y = ۱۵$ است. لذا:

$$۳x + ۴(\frac{۴}{۳}x) = ۱۵ \Rightarrow \frac{۲۵}{۳}x = ۱۵ \Rightarrow x = \frac{۹}{۵} \Rightarrow \text{Min}(x^۲ + y^۲) = (\frac{۹}{۵})^۲ + (\frac{۴}{۳} \times \frac{۹}{۵})^۲ = \frac{۸۱}{۲۵} + \frac{۱۴۴}{۲۵} = ۹$$

بنابراین کم‌ترین مقدار $\sqrt{x^۲ + y^۲}$ برابر $\sqrt{۹} = ۳$ است.

- طراح می‌تواند از کاربرد مشتق در قالب هر نوع مسئله‌ای استفاده کند، حتی هندسه.

مثال **بیشترین مساحت ممکن یک مثلث قائم الزاویه به طول وتر ۸ را بیابید.**

پاسخ فرض می‌کنیم x و y طول اضلاع قائمهٔ این مثلث باشند. داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۶۴ \Rightarrow y = \sqrt{۶۴ - x^۲}$$

و مساحت مثلث قائم الزاویه هم می‌شود:

$$S = \frac{۱}{۲}xy = \frac{۱}{۲}x\sqrt{۶۴ - x^۲}$$

پس باید ماکزیمم تابع $f(x) = \frac{۱}{۲}x\sqrt{۶۴ - x^۲}$ را پیدا کنیم:

$$f(x) = \frac{۱}{۲}x\sqrt{۶۴ - x^۲} \Rightarrow f'(x) = \frac{۱}{۲}(\sqrt{۶۴ - x^۲} - \frac{x^۲}{\sqrt{۶۴ - x^۲}}) = \frac{۱}{۲}(\frac{۶۴ - ۲x^۲}{\sqrt{۶۴ - x^۲}}) = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ = ۶۴ \Rightarrow x = ۴\sqrt{۲} \Rightarrow \text{Max} f(x) = f(۴\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲}\sqrt{۳۲} = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

تست **قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر سهمی $f(x) = x^۲$ را نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم صفحهٔ مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطهٔ A، بین دو طول متوالی از محل تقاطع تابع f با خط نیمساز مورد نظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA'، کدام است؟** (تجربی ۱۴۰۰)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۸}$

پاسخ گزینهٔ «۳»

نگارش این سؤال کمی اذیت می‌کند و باید رمزگشایی کنیم. قسمت تقاطع ساده است: $x^۲ = x \Rightarrow x = ۰$ یا ۱

پس $۰ < x < ۱$ است. مختصات نقطهٔ A به صورت $(x, x^۲)$ است زیرا روی $y = x^۲$ قرار دارد. در ضمن از فصل ۴ (صفحهٔ ۹۶) می‌دانیم که قرینهٔ A نسبت به $y = x$ می‌شود: $A'(x^۲, x)$. حالا داریم:

$$|AA'| = \sqrt{(x^۲ - x)^۲ + (x - x^۲)^۲} = \sqrt{۲}\,|x - x^۲| \xrightarrow{۰<x<۱} |AA'| = \sqrt{۲}(x - x^۲)$$

حالا دیگر تابعی که باید ماکزیمم آن را بیابیم معلوم شد:

$$f(x) = \sqrt{۲}(x - x^۲) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{۲}(۱ - ۲x) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{Max} f(x) = f(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{۲}(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}) = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

- خوش‌به‌حالتان! کاربرد مشتق هم تمام شد. چند فصل دیگر با هم خداحافظی می‌کنیم.

هایپرتست

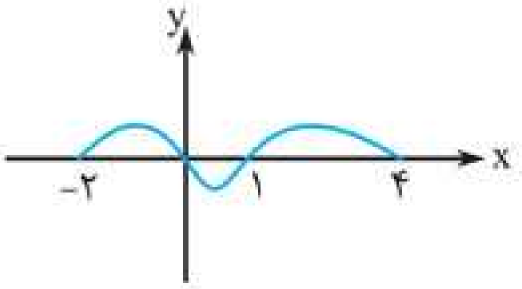
۱. می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درباز بسازیم که گنجایش آن ۱۰ لیتر است. مساحت قاعدهٔ آن چه‌قدر باشد تا کم‌ترین مقدار فلز را برای ساختن استوانه مصرف کنیم؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) $\sqrt[3]{50\pi}$ ۲) $\sqrt[3]{100\pi}$ ۳) $\sqrt{50\pi}$ ۴) $\sqrt{100\pi}$

۲. برد تابع $f(x)=\dfrac{|x|+1}{x^2+3}$ کدام است؟

۱) $(0,1)$ ۲) $(0,1]$ ۳) $(0,\frac{1}{2}]$ ۴) $(0,\frac{1}{3}]$

۳. نمودار $y=f'(x)$ به‌صورت زیر است. تعداد و نوع اکسترمم‌های نسبی تابع $y=-3f(4-2x)+1$ روی بازهٔ $[0,3]$، برابر کدام است؟



۱) ۲ ماکزیمم ـ ۱ مینیمم

۲) ۱ ماکزیمم ـ ۱ مینیمم

۳) ۲ ماکزیمم ـ ۲ مینیمم

۴) ۱ ماکزیمم ـ ۲ مینیمم

۴. چنانچه $b>0$ باشد و اگر $[-2,1]$ بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که تابع $f(x)=\dfrac{ax+1}{3x^2+b}$، در آن اکیداً صعودی است، آن‌گاه $b+\dfrac{1}{a}$ برابر کدام است؟ (حتماً پاسخ‌نامه را بخوانید.)

۱) $\frac{13}{2}$ ۲) 8 ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{5}{8}$

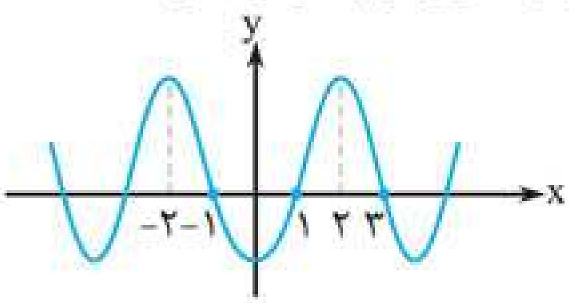
۵. فرض کنید $f(x)=x^3-2x$ باشد. اگر خط $y=x+k$ و نمودار $y=f(x)$ در سه نقطه تلاقی داشته باشند، حدود k کدام است؟

۱) $k\in(-1,1)$ ۲) $k\in(-2,2)$ ۳) $k\in\mathbb{R}-[-1,1]$ ۴) $k>2$

۶. فرض کنید $f(x)=x^3-4x\,;\,x\in[-2,+\infty)$ باشد. اگر نمودار $y=f(x)$ و $y=f(x+a)$، فقط یک نقطهٔ تلاقی داشته باشند، حدود عدد a کدام است؟

۱) $a>2$ ۲) $|a|>2$ ۳) $2<a<4$ ۴) $2<|a|\le 4$

۷. نمودار $y=f(x+1)$ به‌صورت زیر است. تابع $f(x+|x|)$ چند اکسترمم نسبی و از چه نوعی، دارد؟



۱) ۳ مینیمم ـ ۲ ماکزیمم

۲) ۳ مینیمم ـ ۳ ماکزیمم

۳) ۲ مینیمم ـ ۲ ماکزیمم

۴) بی‌شمار مینیمم ـ بی‌شمار ماکزیمم

۸. فرض کنید $f(x+1)=x^3-3x+1$ باشد. اگر (α,β) مختصات نقطهٔ مینیمم نسبی تابع $f(x-1)$ باشد، آن‌گاه عرض‌ازمبدأ خط مماس بر نمودار $y=\beta x+f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=\alpha$ واقع بر آن، کدام است؟

۱) -24 ۲) 20 ۳) 18 ۴) 11

۱۲. قرینهٔ نقطهٔ A واقع بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ را در دامنهٔ $[0,1]$، نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم صفحهٔ مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره خط AA'، کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ ۲) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$ ۳) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ۴) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

۱۳. به‌ازای کدام مقادیر a، تابع $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$، دارای ماکسیمم نسبی است؟ (ریاضی ۸۹)

۱) $|a|>2$ ۲) $a<0$ ۳) $a>0$ ۴) هیچ مقدار a

۱۴. می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این‌صورت بیشترین مساحت ممکن برای این مثلث، کدام است؟ (برگرفته از کتاب درسی)

۱) ۷۵۰ ۲) ۱۲۵۰ ۳) ۱۵۰۰ ۴) ۲۵۰۰

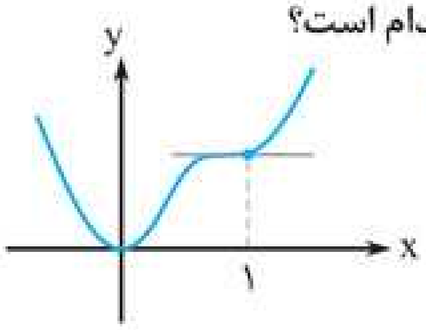
۱۵. حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط است، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

۱) 32π ۲) 64π ۳) $\frac{256\pi}{3}$ ۴) $\frac{512\pi}{3}$

۱۶. تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}|x^2-4|$، کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۰)

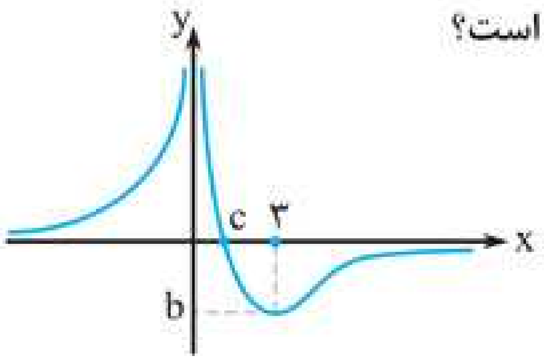
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۷. شکل زیر، نمودار تابع $f(x)=3x^4+ax^3+bx^2+cx$ است. $3a+2b+c$ کدام است؟ (مشابه ریاضی ۹۸)



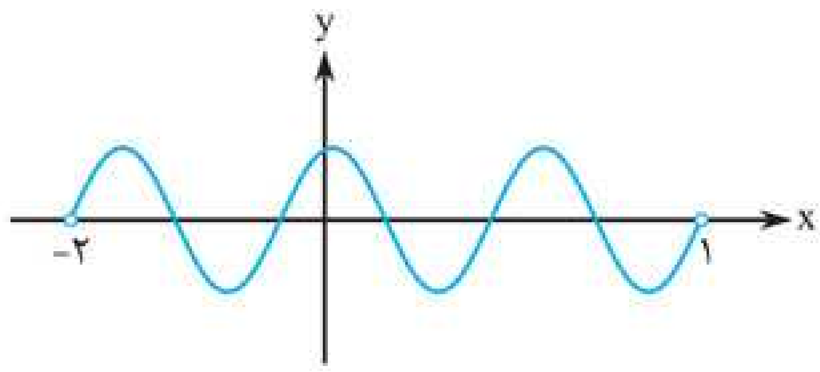
۱) -8
۲) -12
۳) -10
۴) -14

۱۸. شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+2}{x^2}$ است. مقدار $ab-c^{-1}$ کدام است؟



۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{4}{9}$ ۳) $-\frac{10}{27}$ ۴) $-\frac{4}{9}$

۱۹. نمودار $y=f'(x)$ به‌صورت زیر است. تعداد و نوع اکسترمم‌های نسبی تابع $y=3f(x)+2$ روی بازهٔ $[-2,1]$، برابر کدام است؟ (فرض‌کنید $D_f=[-2,1]$)



۱) ۲تا ماکزیمم نسبی ـ ۲تا مینیمم نسبی
۲) ۳ تا ماکزیمم نسبی ـ ۲ مینیمم نسبی
۳) ۲ تا ماکزیمم نسبی ـ ۲تا مینیمم نسبی
۴) ۳ تا ماکزیمم نسبی ـ ۳تا مینیمم نسبی

۱۸. گزینهٔ «۳»

طول نقطهٔ Min نسبی در تابع کسری $f(x)=\dfrac{ax+2}{x^2}$ برابر ۳ است. لذا داریم:

$$\frac{ax+2}{x^2}=\frac{a}{2x}\xrightarrow{x=3}\frac{3a+2}{9}=\frac{a}{6}\Rightarrow 6a+4=3a\Rightarrow a=-\frac{4}{3}\Rightarrow f(x)=\frac{-\frac{4}{3}x+2}{x^2}$$

بدیهی است که $f(c)=0$ و $f(3)=b$ است. لذا:

$$\begin{cases} f(c)=\dfrac{-\frac{4}{3}c+2}{c^2}=0\Rightarrow -\frac{4}{3}c+2=0\Rightarrow c=\dfrac{3}{2} \\ f(3)=b\Rightarrow \dfrac{-\frac{4}{3}(3)+2}{9}=-\dfrac{2}{9}=b \end{cases}\Rightarrow ab-c^{-1}=\frac{-10}{27}$$

۱۹. گزینهٔ «۲»

دقت کنید که نمودار $y=3f(x)+2$ همان نمودار $y=f(x)$ است که ۳ برابر در جهت محور y ها منبسط شده و سپس ۲ واحد به بالا انتقال یافته است. لذا عرض اکسترمم‌های آن ۳ برابر می‌شود و بعد هم ۲ واحد بزرگ می‌شوند. اما نه تعداد، نه نوع و نه حتی طول این اکسترمم‌ها، با اکسترمم‌های تابع $f(x)$ فرقی ندارد. از آن‌جا که نمودار $y=f'(x)$ را داریم، به‌راحتی می‌توانیم جدول تعیین علامت $y=f'(x)$ را رسم کنیم و از روی آن تعداد و نوع اکسترمم‌های $y=f(x)$ را تعیین کنیم:

x	-2		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		1
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	0	−	
$f(x)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘	
			Max		Min		Max		Min		Max		

لذا تابع $f(x)$ دارای ۲تا Min نسبی و ۳ تا Max نسبی است. تابع $y=3f(x)+2$ هم همین‌طور.

▪ حالا نوبت آزمون موضوعی شمارهٔ ۳ است. کمی سطح این آزمون بالاتر از کنکور است. می‌خواهیم با خیال راحت شما را به جلسهٔ آزمون بدرقه کنیم.

۹. کم‌ترین مقدار تابع $f(x)=[(2+\sqrt{3})^{x+2}+(2-\sqrt{3})^{x}]$، برابر کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۱۰. چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) اگر $f(x)$ تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه اکسترمم نسبی ندارد.

ب) اگر تابع $f(x)$ بی‌شمار نقطهٔ بحرانی داشته باشد، حتماً تابعی ثابت است.

پ) اگر تابع پیوستهٔ $f(x)$ وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه اکسترمم نسبی ندارد. ($f(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته)

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

نیترو تست

۱. ناحیهٔ محصور بین نمودار تابع $f(x)=|x-2|+1$ و خط گذرنده از نقطهٔ $(3, 3)$ یک مثلث است. حداقل مساحت این مثلث کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ۲) ۳ ۳) $\frac{7}{2}$ ۴) ۴

۲. حدود a کدام باشد تا تابع $f(x)=ax+|x^2-1|$ دارای مینیمم نسبی باشد ولی فاقد ماکزیمم نسبی باشد؟

۱) $|a|\leq 2$ ۲) $|a|<2$ ۳) $|a|\geq 2$ ۴) $|a|>2$

۳. نقطهٔ $A=(a, a+1)$، مینیمم نسبی تابع $f(x)=x^3-(a+2)x+b$ است. مختصات ماکزیمم نسبی این تابع کدام است؟

۱) $(-\frac{2}{3}, 0)$ یا $(-1, 6)$ ۲) فقط $(-1, 6)$ ۳) فقط $(-\frac{2}{3}, 0)$ ۴) $(-1, 0)$ یا $(-\frac{2}{3}, 6)$

۴. بیشترین محیط مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن بر منحنی $y=\sqrt{32-4x}$ در ربع اول واقع است، کدام است؟

۱) ۱۶ ۲) ۱۷ ۳) ۱۸ ۴) ۱۹

۵. به ازای چند مقدار k، خط $y=k$ نمودار تابع $f(x)=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$ را دقیقاً در ۳ نقطه قطع می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) هیچ ۴) بی‌شمار

۶. اگر تابع $f(x)=\frac{4x+a}{x^2+1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ اکسترمم نسبی داشته باشد، آن‌گاه معادلهٔ خط گذرنده از نقاط اکسترمم نسبی تابع کدام است؟

۱) $y=2x-3$ ۲) $y=3x-2$ ۳) $y=4x-3$ ۴) $y=3x-4$

۷. کمترین مقدار a، برای این‌که تابع $f(x)=x^2-2x+\sqrt{x-a}$ در دامنه‌اش صعودی باشد، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

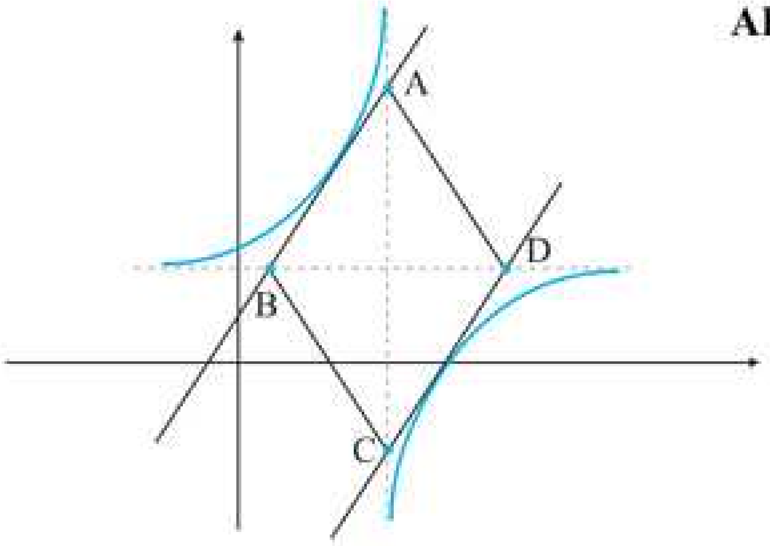
۸. اگر $\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}=\sqrt{2}+1$ باشد، آن‌گاه کمترین مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $2\sqrt{2}+2$

۹. فرض کنید $f(x)=(x+a)|x^{۲}+ax+۱|$ باشد. به ازای کدام مجموعه مقادیر a، تابع $f(x)$ تنها ۳ نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) $-۲<a<۲$ ۲) $-۲<a\leq ۲$ ۳) $-۲\leq a<۲$ ۴) نشدنی

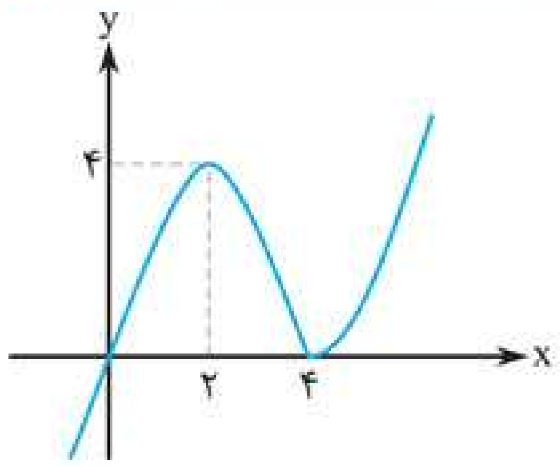
۱۰. نمودار $y=\dfrac{۲x-۸}{x-۳}$ به‌صورت مقابل است. اگر $AB \parallel CD$ باشد، مساحت چهارضلعی $ABCD$ کدام است؟



۱) ۱۴
۲) ۱۶
۳) ۱۸
۴) ۲۰

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱. گزینهٔ «۴»



نمودار $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است:

نقطهٔ Max نسبی $(۲,۴)$ و نقطهٔ Min نسبی $(۴,۰)$ است. فاصلهٔ دو نقطه از هم برابر است با:

$$\sqrt{(۴-۲)^{۲}+(۰-۴)^{۲}}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

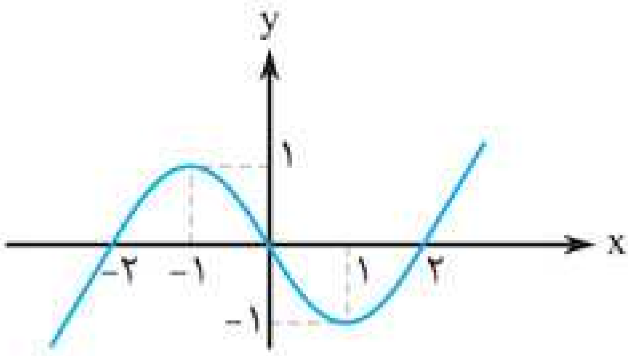
۲. گزینهٔ «۳»

$$S=xy=x\sqrt{۱۲-x}\Rightarrow f(x)=x\sqrt{۱۲-x}\Rightarrow f'(x)=\sqrt{۱۲-x}+x\times(\frac{-۱}{۲\sqrt{۱۲-x}})=۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{۱۲-x}=\frac{x}{۲\sqrt{۱۲-x}}\Rightarrow ۲(۱۲-x)=x\Rightarrow x=۸\Rightarrow \text{Max}S=f(۸)=۸\sqrt{۴}=۱۶$$

۳. گزینهٔ «۱»

بهتر است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم:



$$f(x)=\begin{cases}x^{۲}-۲x & ; \quad x\geq ۰\\ -x^{۲}-۲x & ; \quad x<۰\end{cases}$$

لذا $\text{Min}_L=(۱,-۱)$ و $\text{Max}_L=(-۱,۱)$ و در نتیجه فاصلهٔ دو نقطه می‌شود:

$$\sqrt{(۱-(-۱))^{۲}+(-۱-۱)^{۲}}=\sqrt{۲^{۲}+۲^{۲}}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

۴. گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=۱+\frac{۴-۲x}{۲\sqrt{۴x-x^{۲}}}=۰\Rightarrow \frac{۲-x}{\sqrt{۴x-x^{۲}}}=-۱\Rightarrow (x-۲)=\sqrt{۴x-x^{۲}}$$

$$\xrightarrow{x\ge 2} x^2-4x+4=4x-x^2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \xrightarrow[x\ge 2]{(*)} x=2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow y=f(2+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}+\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

(دقت کنید از (*) می‌دانیم که $x^2-4x=-2$ است و عددگذاری نقطهٔ $x=2+2\sqrt{2}$ را به همین نحو انجام دادیم که این‌طور سریع داخل رادیکال ۲ به‌دست آمد.)

معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول $y=x>0$ است. یعنی $y-x=0\ ;\ x>0$، پس با استفاده از فرمول فاصلهٔ نقطه از خط، داریم:

$$\frac{|(2+2\sqrt{2})-(2+\sqrt{2})|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

۵. گزینهٔ «۱»

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x^2+1)-2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-4x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}$

x		$2-\sqrt{5}$		$2+\sqrt{5}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

$\Rightarrow x_{Max}=2+\sqrt{5}$

$$\Rightarrow y_{Max}=f(x_{Max})=f(2+\sqrt{5})=\frac{(2+\sqrt{5})^2+2(2+\sqrt{5})-3}{(2+\sqrt{5})^2+1}$$

$$=\frac{10+6\sqrt{5}}{10+4\sqrt{5}}\overset{\text{گویاکردن}}{=\!=}\frac{(10+6\sqrt{5})(10-4\sqrt{5})}{100-16\times 5}=\frac{20(\sqrt{5}-1)}{20}=\sqrt{5}-1$$

۶. گزینهٔ «۱»

فرض‌کنید B نقطه‌ای روی نمودار $y=\sqrt{2x+7}$ باشد. پس مختصات B به‌صورت $B=(x\,,\sqrt{2x+7})$ است. این یعنی فاصلهٔ از A تا B برابر است با:

$$|AB|=\sqrt{(x-5)^2+(\sqrt{2x+7}-0)^2}=\sqrt{x^2-8x+32}\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2-8x+32}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}}=0\Rightarrow x=4\Rightarrow f(4)=\sqrt{16-32+32}=4$$

۷. گزینهٔ «۳»

فرض کنید نقطهٔ $N=(x_0\,,y_0)$ روی منحنی $y^2=4x$ قرار داشته باشد. تا همین‌جا می‌فهمیم که $y_0^2=4x_0$. فاصلهٔ این نقطه از $M(3\,,0)$ برابر است با:

$$\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-0)^2}=\sqrt{(x_0-3)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-3)^2+4x_0}=\sqrt{x_0^2-6x_0+9+4x_0}$$

$$=\sqrt{x_0^2-2x_0+9}$$

لذا تابع مورد نظر $f(x)=\sqrt{x^۲-۲x+۹}$ است که باید مینیمم آن را حساب کنیم:

$$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^۲-۲x+۹}}=۰\Rightarrow x=۱\Rightarrow \mathrm{Min}f(x)=f(۱)=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

نکته با مربع کامل کردن، حتی بدون مشتق هم می‌توانستیم این سؤال را حل کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(x^۲-۲x+۱+۸)}=\sqrt{\underbrace{(x-۱)^۲}_{\text{نامنفی}}+۸}\geq\sqrt{۰+۸}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}\Rightarrow \mathrm{Min}f(x)=۲\sqrt{۲}$$

۸. گزینهٔ «۳»

صورت مسئله می‌گوید جدول تعیین علامت $f'(x)$ به‌صورت

x		-۲		۱	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+

است. لذا -۲ و ۱ جواب‌های معادلهٔ $f'(x)=۰$ هستند.

$$f'(x)=۹x^۲+۲ax+b=۹(x-۱)(x+۲)\Rightarrow ۹x^۲+۲ax+b=۹x^۲+۹x-۱۸$$

$$\Rightarrow ۲a=۹\,,\,b=-۱۸\Rightarrow ۲a+۲b=-۲۷$$

۹. گزینهٔ «۱»

اول باید دامنهٔ $f(x)=\sqrt{x-۲}+\sqrt{۱۴-۲x}$ را حساب کنیم که $[۲\text{ و }۷]$ است.

فعلاً $x=۲$ و $x=۷$ نقاط بحرانی‌اند. به کمک مشتق داریم:

$$f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}-\frac{۲}{۲\sqrt{۱۴-۲x}}=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۴-۲x}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{۱۴-۲x}=۲\sqrt{x-۲}\Rightarrow ۱۴-۲x=۴(x-۲)\Rightarrow ۶x=۲۲\Rightarrow x=\frac{۱۱}{۳}\xrightarrow{\text{چک}}x=\frac{۱۱}{۳}\ \checkmark$$

برای پیدا کردن برد $f(x)$، کافی است نقاط بحرانی را عددگذاری کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}۱)f(۲)=\sqrt{۱۰}\\ ۲)f(۷)=\sqrt{۵}\\ ۳)f(\frac{۱۱}{۳})=\sqrt{\frac{۵}{۳}}+\sqrt{\frac{۲۰}{۳}}=۳\sqrt{\frac{۵}{۳}}=\sqrt{۱۵}\end{array}\right\}\Rightarrow \mathrm{Min}f(x)=\sqrt{۵}\,,\mathrm{Max}f(x)=\sqrt{۱۵}$$

$$\Rightarrow R_f=[\sqrt{۵}\,,\,\sqrt{۱۵}]$$

۱۰. گزینهٔ «۳»

دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر با $\mathbb{R}$ است. لذا بازهٔ بسته نداریم که بخواهیم ابتدا و انتهای آن را به‌عنوان نقاط بحرانی در $f(x)$ عددگذاری کنیم. در این مواقع، فقط مشتق و حد در بی‌نهایت می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{۱(x^۲-۴x+۵)-(x-۲)(۲x-۴)}{(x^۲-۴x+۵)^۲}=\frac{-x^۲+۴x-۳}{(x^۲-۴x+۵)^۲}=۰$$

$$\Rightarrow x=۱\text{ یا }۳\Rightarrow f(۱)=-\frac{۱}{۲}\,,f(۳)=\frac{۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=۰\ ,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=۰\Rightarrow \mathrm{Max}f(x)=\frac{۱}{۲}$$

۱۱. گزینهٔ «۳»

دقت‌کنید که $f(x)=۴(۲x-[۲x])$. از این‌جا می‌فهمیم که نقاط به‌صورت $\frac{n}{۲}$، مینیمم‌های این تابع هستند ($a>۰$ است).

$$[-۲,۱]\Rightarrow -۲,-\frac{۳}{۲},-\frac{۲}{۲},-\frac{۱}{۲},۰,\frac{۱}{۲},۱ \xrightarrow[\text{اکسترمم نسبی نیستند.}]{\text{ابتدا و انتهای بازه}}$$ ۵ نقطهٔ Min نسبی دارد.

۱۲. گزینهٔ «۲»

فرض کنید $A(x_۰,y_۰)$ نقطه‌ای روی منحنی $f(x)=\sqrt[۳]{-x}$ باشد. از این‌جا می‌فهمیم که $y_۰=\sqrt[۳]{-x_۰}$.
قرینهٔ این نقطه نسبت به $y=-x$، همان $A'(-y_۰,-x_۰)$ است (فصل ۴ صفحهٔ ۹۷ را ببینید). بنابراین:

$$|AA'|=\sqrt{(x_۰+y_۰)^۲+(y_۰+x_۰)^۲}=\sqrt{۲(x_۰+y_۰)^۲}$$
$$=\sqrt{۲}|x_۰+y_۰|=\sqrt{۲}|x_۰+\sqrt[۳]{-x_۰}|=\sqrt{۲}|x_۰-\sqrt[۳]{x_۰}|\xrightarrow{x_۰\in[۰,۱]}g(x_۰)=(\sqrt[۳]{x_۰}-x_۰)\sqrt{۲}$$

بنابراین باید ماکزیمم $g(x)$ را به‌دست آوریم:

$$g'(x)=\sqrt{۲}\left(\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}-۱\right)=۰\Rightarrow\sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{۱}{۲۷}}$$

بنابراین:

$$\text{Max}\,g(x)=g\left(\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}\right)=\left(\sqrt[۳]{\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}}-\frac{۱}{\sqrt{۲۷}}\right)\sqrt{۲}=\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}\right)\sqrt{۲}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳\sqrt{۳}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\frac{۴}{۳\sqrt{۶}}$$

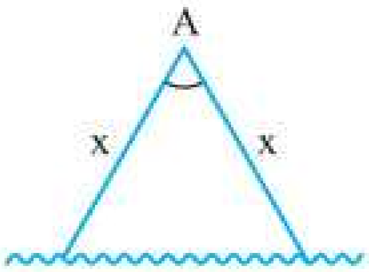
۱۳. گزینهٔ «۴»

$$f'(x)=۲x-\frac{a}{x^۲}=۰\Rightarrow\frac{۲x^۳-a}{x^۲}=۰\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$$

$$f''(x)=۲+\frac{۲a}{x^۳}\Rightarrow f''\left(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}\right)=۲+\frac{۲a}{\frac{a}{۲}}=۴>۰$$

لذا $f(x)$ فقط یک اکسترمم دارد: $x=\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}$. این اکسترمم هم از نوع Min نسبی است، زیرا $f''\left(\sqrt[۳]{\frac{a}{۲}}\right)>۰$، پس همین اکسترمم هم، ماکزیمم نسبی نیست. تازه اگر $a=۰$ باشد، همین یک اکسترمم را هم ندارد.

۱۴. گزینهٔ «۲»

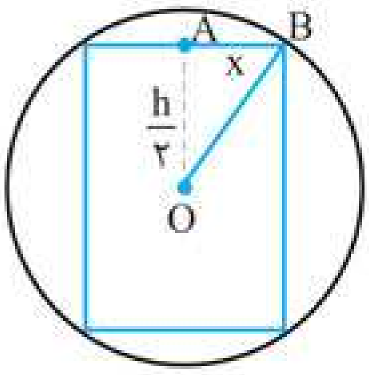


قاعده که رودخانه است، بنابراین $۲x=۱۰۰$ و لذا $x=۵۰$ از مثلثات می‌دانیم که:

$$S=\frac{۱}{۲}x^۲\sin\widehat{A}=\frac{۱}{۲}\times۵۰^۲\times\sin\widehat{A}=۱۲۵۰\sin\widehat{A}\le۱۲۵۰\times۱$$

که این بیشترین مساحت زمانی رخ می‌دهد که $\widehat{A}=۹۰^\circ$ باشد.

۱۵. گزینهٔ «۲»



شعاع قاعدهٔ استوانه را x و ارتفاع آن را h می‌نامیم:
در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم:

$$(\frac{h}{۲})^۲ + (x)^۲ = (۴\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow \frac{h^۲}{۴} + x^۲ = ۳۲ \Rightarrow h = ۲\sqrt{۳۲ - x^۲}$$

بنابراین مساحت جانبی استوانه می‌شود: $S_{\text{جانبی}} = ۲\pi x h = ۲\pi x \times ۲\sqrt{۳۲ - x^۲} = ۴\pi x\sqrt{۳۲ - x^۲}$

لذا تابعی که باید ماکزیمم آن را بیابیم $f(x) = ۴\pi x\sqrt{۳۲ - x^۲}$ است:

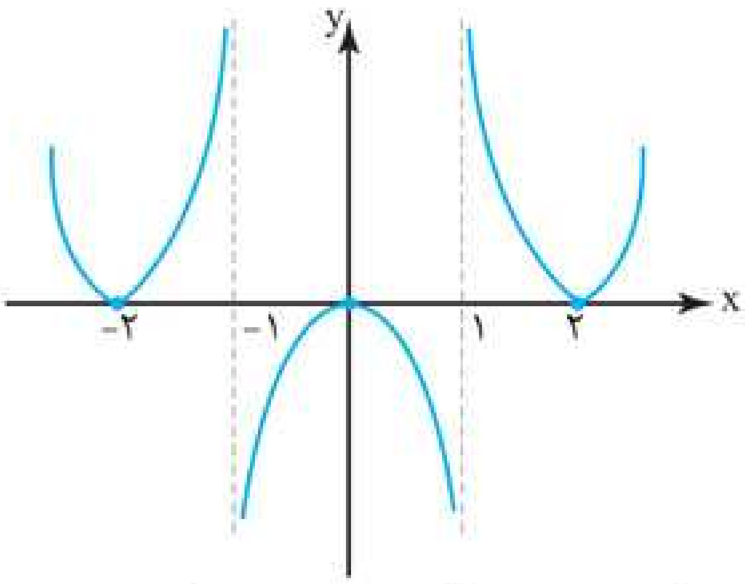
$$f'(x) = ۴\pi\sqrt{۳۲ - x^۲} - \frac{۸\pi x^۲}{۲\sqrt{۳۲ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow \frac{۴\pi(۳۲ - x^۲) - ۴\pi x^۲}{\sqrt{۳۲ - x^۲}} = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\pi \times ۳۲ = ۸\pi x^۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow S_{max} = f(۴) = ۶۴\pi$$

نکته فرض کنید شعاع کره‌ای r باشـــد. آن‌گاه شعاع بزرگ‌ترین استوانه که مساحت جانبی آن بیشترین مقدار ممکن باشد، برابر با $\frac{r}{\sqrt{۲}}$ است.

۱۶. گزینهٔ «۲»

هر جا تابع قدرمطلقی می‌بینیم، بهترین کار رسم است. برای دیدن آموزش رسم این موارد QR – code کتاب را اســـکن کنید یا وارد سایت مهروماه، صفحهٔ مربوط به کتاب جمع‌بندی ریاضی تجربی شـــوید. نمودار این تابع چنین است:



همان‌طور که می‌بینید این تابع دو مینیم و یک ماکزیمم نسبی دارد. یعنی سه تا اکسترمم نسبی دارد.

۱۷. گزینهٔ «۲»

اولاً $f(x)$ در مبدأ Min نسبی دارد. این یعنی $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۰$ و $f''(۰) > ۰$:

$$f'(x) = ۱۲x^۳ + ۳ax^۲ + ۲bx + c \Rightarrow f'(۰) = c = ۰$$

از طرفی خط مماس بر $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول ۱، موازی محور x ها اســـت. یعنی شـــیب آن صفر است. به‌عبارتی $f'(۱) = ۰$:

$$۱۲ + ۳a + ۲b = ۰ \Rightarrow ۳a + ۲b = -۱۲$$

بنابراین $۳a + ۲b + c = -۱۲$ است.