سلام

با شنیدن کلمهٔ جمع‌بندی یاد چه چیزهایی می‌افتید؟

بسته‌بندی، خالی‌بندی، کادربندی، جدول‌بندی، چشم‌بندی، تیتربندی و ...

راستش را بخواهید یک کتاب جمع‌بندی ممکن است به جای این‌که جمع‌بندی باشد، هر کدام از موارد بالا باشد!

حتماً می‌پرسید چه‌طور؟ جوابش این است که این‌طور:

- اگر کتاب جمع‌بندی طوری نوشته شود که شامل تمام موارد و مفاهیم و نکات باشد و سعی کند هیچ چیزی را از قلم نیندازد، دیگر جمع‌بندی نیست، بلکه بسته‌بندی است. ما در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم این کار را نکنیم؛ فقط موارد اصلی و مهم و حیاتی را آورده‌ایم.
- اگر کتاب جمع‌بندی ادعا کند تمام کنکور را پوشش می‌دهد و همه چیز را دارد و می‌تواند دانش‌آموز را به درصد ۱۰۰ و یا حتی بالاتر برساند، باز هم جمع‌بندی نیست؛ خالی‌بندی است. ما اما، هدفمان در این کتاب‌ها تمرکزکردن روی نکات مهم است، همه چیز را نگفته‌ایم و سعی نکرده‌ایم همهٔ تست‌های کنکور را حدس بزنیم؛ فقط در حد لازم و البته کافی.
- اگر کتاب جمع‌بندی فرقش با کتاب تست معمولی این باشد که مطالب را در جدول و کادر و نمودار بیاورد، می‌شود کتاب کادربندی یا جدول‌بندی.
- اگر کتاب جمع‌بندی ادعا کند که می‌تواند در یک زمان کوتاه چندهفته‌ای، درصد دانش‌آموز را ۶۰ تا ۸۰ درصد بالا ببرد (تازه بعضی‌ها تا ۱۰۰ درصد هم ادعا می‌کنند) کتاب چشم‌بندی است.
- اگر کتاب جمع‌بندی، توضیح و مثال درست و حسابی نداشته باشد و مطالب را تیتروار بیان کند و سریع از هر موضوعی عبور کند، می‌شود کتاب تیتربندی.

خب، دیگر بس است، هر چه که توانستیم در مورد کتاب‌های دیگران غیبت کردیم. اصلاً به ما و شما چه ربطی دارد که بقیه چه‌طورند؟ ما کتابی نوشته‌ایم که قرار است:

- به شما کمک کند در زمان کوتاه یک دورهٔ کامل از تمام مفاهیم اصلی و مهم کتاب درسی‌تان داشته باشید.
- تیپ‌ها و شکل‌های متداول سؤال‌ها را ببینید.
- با مثال‌ها و تمرین‌های مهم کتاب درسی آشنا شوید.
- نمونه سؤال‌های برگزیدهٔ آزمون‌های سراسری سال‌های قبل را ببینید.

با این هدف‌ها، برای نوشتن کتاب‌های جمع‌بندی، رفتیم سراغ حرفه‌ای‌ترین مؤلف‌ها: همهٔ تلاشمان را کردیم که برای هر کدام از درس‌ها یک کتاب ویژه، خوب، به درد بخور، خوش‌دست، خواندنی و جمع‌وجور بنویسیم. به نظرم که توانسته‌ایم قسمت زیادی از آن‌چه را که می‌خواستیم، انجام دهیم.

اما این‌که خودمان بنشینیم و قربان خودمان برویم که کاری ندارد! شما هستید که باید بگویید کارمان چه‌طور بوده؟ آیا کتابی که در دست دارید همهٔ این خوبی‌هایی که گفتیم را دارد؟

برای جواب‌دادن به این سؤال باید شروع کنید به خواندنش؛ جمع‌وجور و روان هم که هست، پس خیلی طول نمی‌کشد. بعدش برایمان بنویسید که به نظرتان چند چندیم؟ خوبی‌های کتاب و همین‌طور بدی‌هایش را به ما بگویید. به نظرتان چه چیزهایی باید اضافه یا کم شوند؟ و خلاصه‌اش این‌که ما برایتان یک کتاب جمع‌وجور نوشته‌ایم، اما شما برایمان یک جواب مفصل بنویسید.

خوش و خاطرجمع باشید.

مقدمه مؤلف

«هندسه راه شاهانه ندارد.»
اقلیدس

به نظرم کلاً درس‌خوندن راه شاهانه‌ای نداره، هندسه که اصلاًاا. هدف این کتاب هم اینه که تو این مسیر سخت شما رو همراهی کنه و مسیر درست رو بهتون نشون بده.

این کتاب ۳ تا بخش داره:

۱.کادرهای درس‌نامه: این‌جا هر چیزی رو که لازمه بدونید، براتون آوردم.

۲.تست: در این قسمت، بیشتر تست‌های کنکوری رو می‌بینید که طبقه‌بندی شدن، به اضافهٔ یه سری شبیه‌ساز.

۳.پاسخ‌های تشریحی: این‌جا هم پاسخ تست‌ها رو داریم که سعی کردم واقعاً تشریحی باشن (امیدوارم که موفق بوده باشم). هر جا لازم بود نکته آوردم و هر جا هم می‌شد روش‌های دوم و سوم و ... .

در تألیف این کتاب خیلیا کمکم کردن که جا داره از همشون تشکر کنم:

- نوید شاهی که کلی راهنماییم کرد. مرسی بابت همه‌چیز.
- مهندس سبزمیدانی که اصول تألیف رو به من یاد دادن.
- مهدی هاشمی که آخرای پروژه کلی زحمت کشید. مرسی که صبوری کردی. ☺
- خانم زهرا جالینوسی که کتاب رو ویرایش کردن. ممنونم ازتون.

و گروه تولید خیلی‌سبزمون که این‌قدر دقیق، منظم، خلاق و زحمت‌کش هستن.

در آخر ممنون می‌شم اگر انتقادات و پیشنهاداتتون رو باهام در میون بذارید:

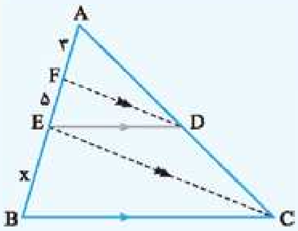
Keivan_saremi

فهرست

۳ ترکیب چند تالس

در بعضی از مسئله‌ها بیشتر از یک جفت پاره‌خط موازی وجود دارد. در چنین مواردی اول باید برای هر جفت از پاره‌خط‌های موازی قضیهٔ تالس را بنویسیم؛ بعد و به کمک رابطهٔ بین نسبت‌هایی که نوشته‌ایم مسئله را حل کنیم.

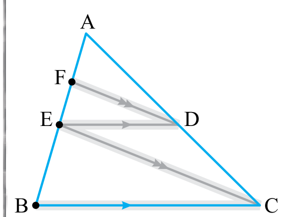
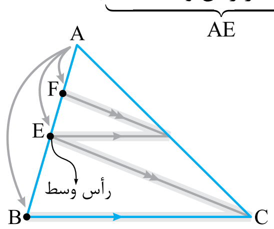
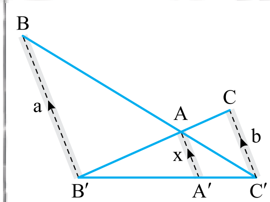
مثلاً در شکل زیر برای به دست آوردن مقدار x، باید یک بار در مثلث ABC و بار دیگر در مثلث AEC از قضیهٔ تالس استفاده کنیم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{AEC} \text{ نوع اول جزءبه‌کل در}: \dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AD}{AC} \\ \overset{\Delta}{ABC} \text{ نوع اول جزءبه‌کل در}: \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AC} \end{cases} \xrightarrow[\text{پس سمت چپشون هم باید برابر باشه}]{\text{سمت راست تساوی‌ها برابره}} \dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AE}{AB}$$

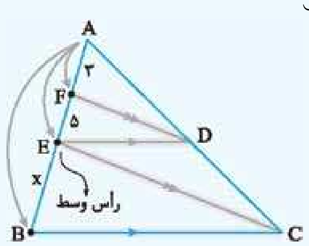
$$\Rightarrow \frac{۳}{۸}=\frac{۸}{x+۸} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۳}{۵}=\frac{۸}{x} \Rightarrow ۳x=۴۰ \Rightarrow x=\frac{۴۰}{۳}$$

این‌جا دو ساختار مهم وجود دارد که هم کتاب درسی و هم طراح‌ها دوستشان دارند. این ساختارها را در جدول زیر ببینید:

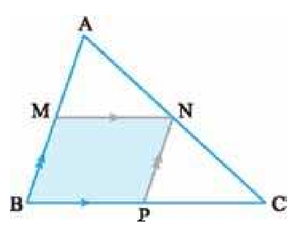
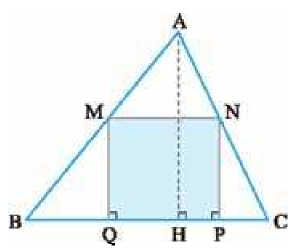
نام ساختار	شکل	روابطی که می‌توانیم در این ساختارها بنویسیم
W		اول فاصلهٔ رأس A را مثل شکل زیر از سه رأس W مشخص می‌کنیم و بعد رابطهٔ زیر را می‌نویسیم: $(\underbrace{\text{فاصلهٔ A از رأس وسط W}}_{AE})^۲ = \underbrace{\text{حاصل‌ضرب فواصل A از رأس‌های کناری W}}_{AF\times AB}$ $\Rightarrow AE^۲ = AF\times AB$ 
مقاومت‌های موازی		معکوس طول $\underbrace{\text{پاره‌خط وسط}}_{AA'}$ را برابر با مجموع معکوس طول $\underbrace{\text{کناری‌هایش}}_{BB' \text{ و } CC'}$ قرار می‌دهیم: $\dfrac{۱}{x}=\dfrac{۱}{a}+\dfrac{۱}{b}$ ⇐ مجموع معکوس a و b = معکوس x

حالا بیایید در شکل بالای صفحه، x را به کمک ساختار W پیدا کنیم:

$$(\overbrace{\text{فاصلهٔ A از رأس وسط W}}^{AE})^۲ = \underbrace{\text{حاصل‌ضرب فواصل A از رئوس کناری W}}_{AF\times AB} \Rightarrow (۳+۵)^۲=۳\times(۳+۵+x) \Rightarrow ۶۴=۳x+۲۴ \Rightarrow x=\frac{۴۰}{۳}$$

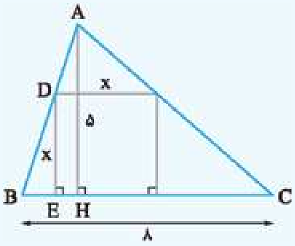


نکته می‌دانیم در چهارضلعی‌هایی مثل مربع، مستطیل، متوازی‌الاضلاع و ... ضلع‌های مقابل به هم موازی‌اند؛ پس هر وقت این چهارضلعی‌ها در یک مثلث محاط بشوند، می‌توانیم از قضیهٔ تالس استفاده کنیم. برای درک بهتر این موضوع جدول زیر را ببینید:

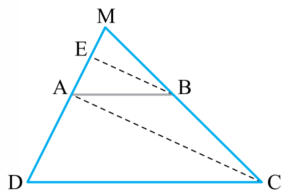
	متوازی‌الاضلاع	مربع یا مستطیل
شکل		
چه‌جوری از تالس استفاده کنیم؟	۱- استفاده از تالس با توجه به موازی‌بودن MN و BC ۲- استفاده از تالس با توجه به موازی‌بودن NP و AB	۱- استفاده از تالس در مثلث ABC (چون MN با BC موازیه) ۲- کشیدن ارتفاع AH و استفاده از قضیهٔ تالس در مثلث‌های ABH و ACH (چون NP و MQ با AH موازین)

مثلاً در شکل زیر برای پیداکردن طول ضلع مربع دو بار از قضیهٔ تالس استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABH} \text{ نوع اول جزءبه‌کل در}: \dfrac{BD}{AB}=\dfrac{x}{5} \\ \overset{\Delta}{ABC} \text{ نوع اول جزءبه‌کل در}: \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{x}{8} \end{cases} \xrightarrow{+} \dfrac{\overbrace{BD+AD}^{AB}}{AB}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{8} \Rightarrow 1=\dfrac{8x+5x}{40} \Rightarrow x=\dfrac{40}{13}$$



۳۰- در ذوزنقهٔ ABCD، پاره‌خط BE موازی قطر AC است. اگر AD = ۷ و AE = ۳ باشد، فاصلهٔ MD کدام است؟ (خارج ۹۳)



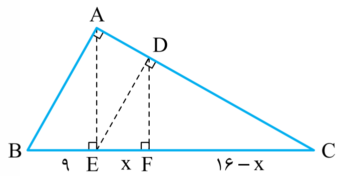
۱) ۱۲

۲) ۱۲/۲۵

۲) ۱۲/۵

۴) ۱۲/۷۵

۳۱- در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازهٔ x کدام است؟ (سراسری ۸۹)



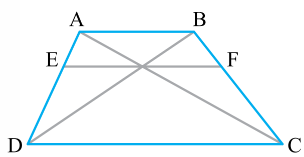
۱) ۴/۵۴

۲) ۵/۳۶

۳) ۵/۷۶

۴) ۶/۷۵

۳۲- در شکل روبه‌رو، AB || EF || DC و اندازهٔ پاره‌خط‌های AB و DC، به ترتیب ۵ و ۹ واحد است. اندازهٔ پاره‌خط EF کدام است؟ (خارج ۹۹)



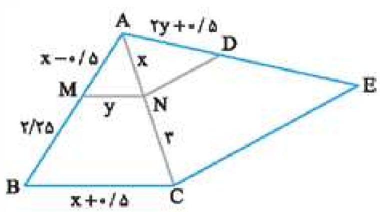
۱) $\frac{45}{7}$

۲) $\frac{45}{6}$

۳) $3\sqrt{5}$

۴) ۷

۳۳- در شکل مقابل، اگر MN || BC و ND || CE باشد، مقدار طول پاره‌خط DE کدام است؟ (مشابه تمرین کتاب درسی)



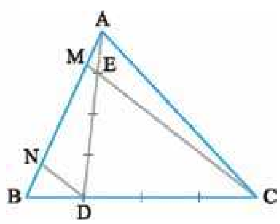
۱) ۳

۲) ۳/۲۵

۳) ۳/۵

۴) ۳/۷۵

۳۴- در شکل مقابل، اگر $BD=\frac{1}{4}BC$ ، $AE=\frac{1}{4}AD$ و DN || CM ، اندازهٔ AB چند برابر AM است؟ (خارج ۹۷)



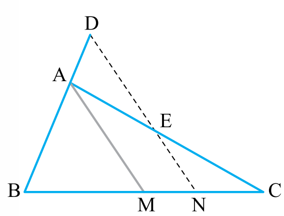
۱) ۴

۲) ۴/۵

۳) ۵

۴) ۶

۳۵- در مثلث ABC $(AB=\frac{2}{3}AC)$ ، پاره‌خط ND موازی میانهٔ AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟



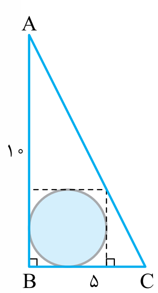
۱) $\frac{4}{9}$

۲) $\frac{5}{9}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{4}{5}$

۳۶- اگر اندازهٔ اضلاع قائمهٔ مثلث ABC، ۵ و ۱۰ باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی برابر کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۲ ـ نوبت اول با تغییر)

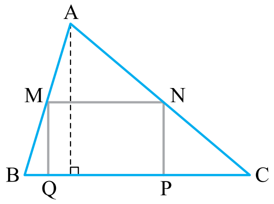


۱) $\frac{25}{9}\pi$

۲) $\frac{16}{9}\pi$

۳) $\frac{9}{4}\pi$

۴) $\frac{5}{4}\pi$

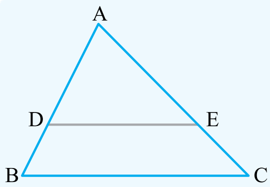


۳۷- **در شکل مقابل، اندازهٔ قاعدهٔ BC و ارتفاع وارد بر آن به ترتیب برابر ۶ و ۵ واحد است. اگر نسبت طول به عرض مستطیل محاط‌شده در مثلث $\frac{۳}{۲}$ باشد، مساحت مستطیل برابر کدام است؟**

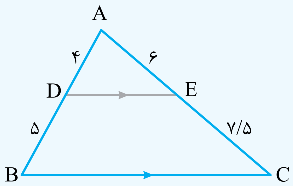
۱) $\frac{۱۰۰}{۹}$ ۲) $\frac{۲۰۰}{۲۷}$

۳) $\frac{۵۰}{۳}$ ۴) $\frac{۲۵}{۳}$

۴ عکس قضیهٔ تالس



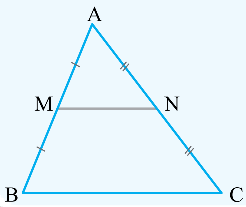
عکس قضیهٔ تالس هم برقرار است؛ یعنی در شکل مقابل از برقراری هر یک از نسبت‌های $\frac{BD}{AB}=\frac{CE}{AC}$ یا $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ یا $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$، می‌توانیم نتیجه بگیریم که $DE \parallel BC$ است.



مثلاً در شکل مقابل $DE \parallel BC$ است، دلیلش هم برقراری نسبت $\frac{۶}{۷/۵}=\frac{۴}{۵}$ است:

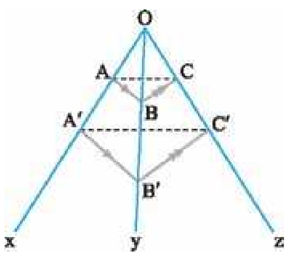
$$\frac{۴}{۵}=\frac{۶}{۷/۵} \Rightarrow \underbrace{۴\times ۷/۵}_{۳۰}=\underbrace{۶\times ۵}_{۳۰}$$

میان‌خط مثلث به پاره‌خطی که وسط دو ضلع از مثلث را به هم وصل می‌کند، یک **میان‌خط** آن مثلث می‌گوییم. **میان‌خط همیشه موازی و نصف ضلع سوم است.**



مثلاً برای پاره‌خط MN در شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} M \text{ وسط ضلع } AB \\ N \text{ وسط ضلع } AC \end{cases} \Rightarrow$$ MN میان‌خط مثلث ABC است. $\Rightarrow$ $MN \parallel BC$ و $MN=\frac{۱}{۲}BC$



۳۸- **در شکل مقابل، $A'B' \parallel AB$ و $B'C' \parallel BC$ است. اگر $\frac{AA'}{OA}=\frac{۵}{۴}$ باشد، نسبت $\frac{AC}{A'C'}$ کدام است؟**

(مشابه تمرین کتاب درسی)

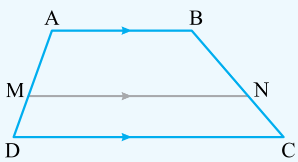
۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۹}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۳۹- **اضلاع مثلث ABC، برابر $AB=۴$، $AC=۶$ و $BC=۷$ هستند. از رأس C خطی موازی میانهٔ AM رسم شده و امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کرده است. اگر $AD+DC=۱۲$ باشد، طول میانهٔ AM برابر کدام است؟**

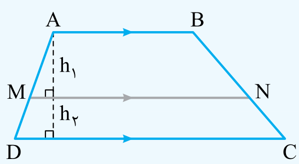
۱) ۳/۷۵   ۲) ۴   ۳) ۴/۲۵   ۴) ۴/۵

۵ قضیهٔ تالس در ذوزنقه



قضیهٔ تالس علاوه بر مثلث، در ذوزنقه هم برقرار است. به این ترتیب که اگر خطی موازی با یکی از قاعده‌های ذوزنقه رسم بشود، روی ساق‌های آن تکه‌هایی با طول‌های متناسب درست می‌کند. یعنی در ذوزنقهٔ روبه‌رو اگر $MN \parallel AB \parallel DC$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

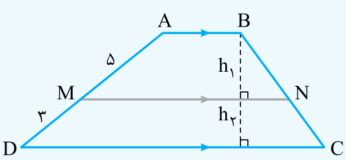
$$\boxed{\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}}$$



نکته ۱ عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه برقرار است؛ یعنی در شکل بالا اگر $\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$ باشد، می‌توانیم بگوییم $MN \parallel AB \parallel DC$ است.

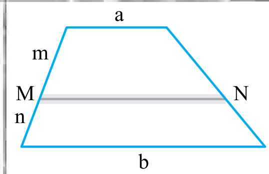
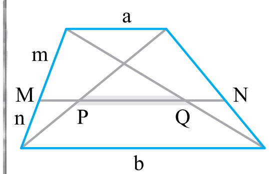
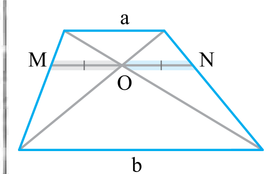
۲ خطی که موازی یکی از قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌شود، ارتفاع آن را هم متناسب با ساق‌ها قطع می‌کند؛ ببینید:

$$AB \parallel MN \parallel DC \Leftrightarrow \frac{h_1}{h_2}=\frac{AM}{MD}=\frac{BN}{NC}$$

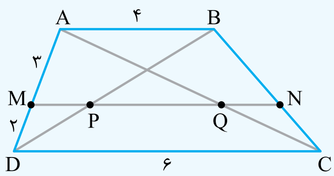


مثلاً در شکل مقابل با توجه به این‌که پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها است، می‌توانیم بگوییم $\frac{۵}{۳}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{AM}{MD}$ است.

نکته طراحان محاسبهٔ طول پاره‌خط MN و تکه‌هایی را که قطرهای ذوزنقه بر روی آن درست می‌کنند، خیلی دوست دارند. به همین خاطر روش پیداکردن طول همهٔ آن‌ها را در جدول زیر برایتان آورده‌ام:

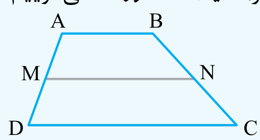
شکل	طول قطعات	توضیح
	$MN = \frac{mb+na}{m+n}$	طول پاره‌خطی که موازی قاعده‌های ذوزنقه است (MN) به کمک طول قاعده‌ها (a و b) و تکه‌های ایجادشده روی یکی از ساق‌ها (m و n) پیدا می‌شود.
	$PQ = \frac{mb-na}{m+n}$ $MP = QN = \frac{MN-PQ}{۲}$	طول تکه‌هایی که قطرهای ذوزنقه روی پاره‌خط MN درست می‌کنند، به کمک اندازهٔ قاعده‌ها (a و b) و تکه‌های ایجادشده روی یکی از ساق‌ها (m و n) پیدا می‌شود.
	$OM = ON = \frac{ab}{a+b}$	اگر خطی که موازی قاعده‌ها رسم می‌شود (MN)، از محل برخورد قطرها (O) بگذرد، طول تکه‌هایی که روی MN درست می‌شود (OM و ON) برابرند. طول این تکه‌ها به کمک اندازهٔ قاعده‌ها (a و b) پیدا می‌شود.

مثلاً در ذوزنقهٔ مقابل، طول تکه‌های MP، PQ و QN برابر می‌شوند با:



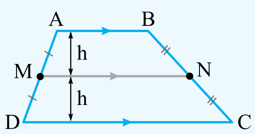
$$\begin{cases} MN = \frac{(۳\times۶)+(۲\times۴)}{۳+۲} = \frac{۲۶}{۵} = ۵/۲ \\ PQ = \frac{(۳\times۶)-(۲\times۴)}{۳+۲} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \end{cases} \Rightarrow MP = QN = \frac{MN-PQ}{۲} = \frac{۵/۲-۲}{۲} = ۱/۶$$

میان‌خط ذوزنقه به پاره‌خطی که وسط ساق‌های ذوزنقه را به هم وصل می‌کند (مثل پاره‌خط MN در شکل زیر)، **میان‌خط ذوزنقه** می‌گوییم.



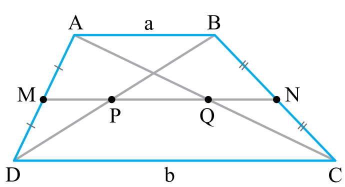
$$\begin{cases} \text{M وسط AD} \\ \text{N وسط BC} \end{cases} \Rightarrow \text{MN میان‌خط ذوزنقهٔ ABCD است.}$$

در مورد میان‌خط ذوزنقه باید موارد زیر را بدانید:

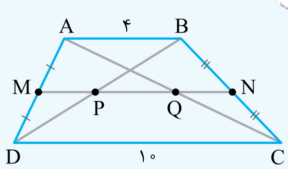


۱) میان‌خط هر ذوزنقه موازی قاعده‌های آن است. این خط مطابق شکل مقابل، ارتفاع ذوزنقه را نصف می‌کند.

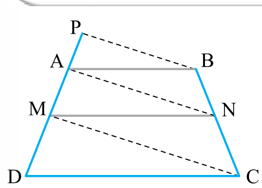
۲) اگر رابطه‌هایی را که در جدول بالا برای محاسبهٔ طول MN، MP، PQ و QN گفتیم، این‌جا برای میان‌خط بنویسیم، به جدول زیر می‌رسیم:

شکل	روابط
	$\text{طول میان‌خط} = MN = \frac{a+b}{۲}$ $PQ = \frac{b-a}{۲}$ $MP = QN = \frac{a}{۲}$

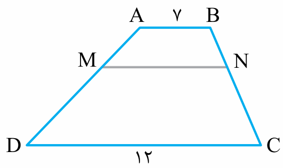
مثلاً در ذوزنقهٔ مقابل داریم: $MP = QN = \frac{۴}{۲} = ۲$ و $PQ = \frac{۱۰-۴}{۲} = ۳$ و $MN = \frac{۴+۱۰}{۲} = ۷$



۴۰- در شکل مقابل، DC || MN || AB و AN || MC || PB است. اگر ۳BN = ۲NC و PD = ۱۹ باشد، طول پاره‌خط MD کدام است؟



۱) ۳ ۲) ۵
۳) ۷ ۴) ۹

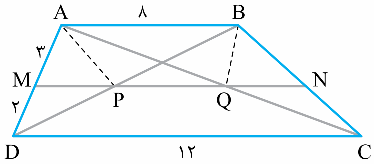


۴۱- در ذوزنقهٔ ABCD، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD}=\frac{۲}{۳}$ است. اندازهٔ MN کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۸ ۲) ۸ / ۷۵

۳) ۹ ۴) ۹ / ۵

۴۲- در ذوزنقهٔ ABCD شکل زیر، پاره‌خط MN موازی قاعده‌ها است. مساحت ذوزنقهٔ ABQP چند درصد مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟



۱) ۳۶

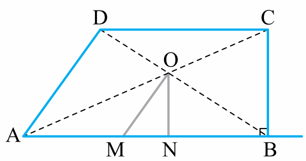
۲) ۴۲

۳) ۴۸

۴) ۵۴

۴۳- مطابق شکل زیر، محل تلاقی قطرهای ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD $(\hat{B}=۹۰^\circ)$، پاره‌خط‌های OM و ON به ترتیب موازی با AD و BC رسم شده‌اند.

نسبت $\frac{AM}{BN}$ کدام است؟ (سراسری ۹۹)



۱) ۱

۲) ۲

۳) کوچک‌تر از ۱

۴) بزرگ‌تر از ۱ کوچک‌تر از ۲

۴۴- در یک ذوزنقه خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های ذوزنقه کدام است؟ (سراسری ۹۸)

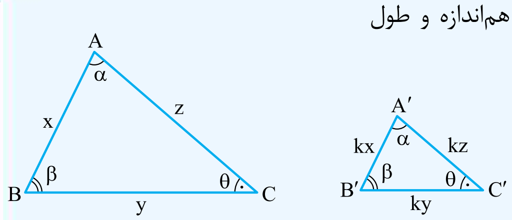
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۴۵- اگر در یک ذوزنقه، خطی که وسط ساق‌ها را به هم وصل می‌کند، توسط قطرها به سه قسمت مساوی تقسیم شود، نسبت قاعده‌های ذوزنقه برابر کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۶ تشابه مثلث‌ها

دو مثلث با یکدیگر متشابه‌اند، اگر و تنها اگر مثل شکل‌های زیر زاویه‌های آن‌ها هم‌اندازه و طول ضلع‌های نظیرشان متناسب باشند.

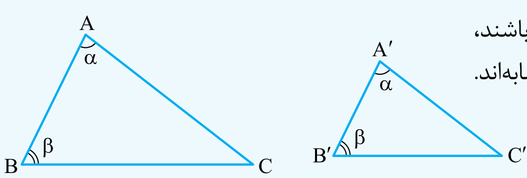


$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}' \\ \hat{B}=\hat{B}' \\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases},\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

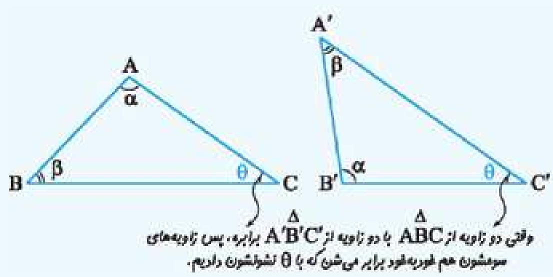
به نسبت ضلع‌های نظیر *(دو ضلعی که رو به رو به یه زاویهٔ برابرن، مثل BC و B′C′ که جفتشون رو به α هستن.)* در دو مثلث متشابه، **نسبت تشابه** می‌گوییم و معمولاً آن را با k نشان می‌دهیم.

حالت‌های تشابه

۱. تشابه با دو زاویهٔ برابر اگر دو زاویه از یک مثلث با دو زاویه از مثلثی دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند. مثلاً مثلث‌های مقابل با دو زاویهٔ برابر α و β با یکدیگر متشابه‌اند.



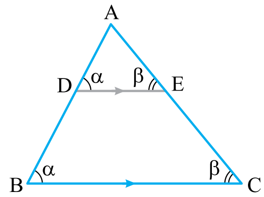
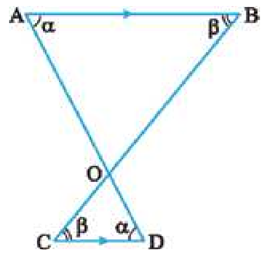
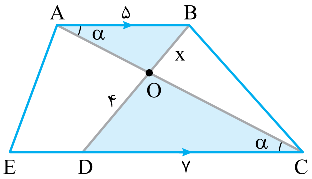
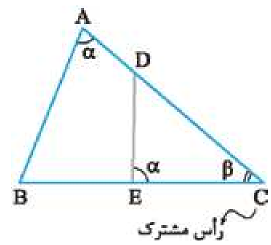
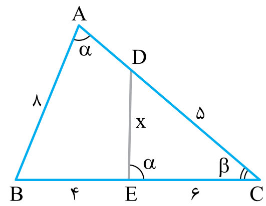
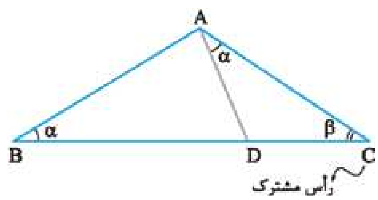
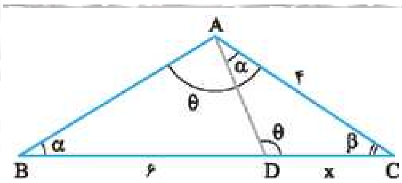
نوشتن نسبت تشابه: برای نوشتن نسبت تشابه دو مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم؛ به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. برای نمونه بیایید نسبت تشابه دو مثلث پایین را بنویسیم:



$$\Rightarrow \underbrace{\frac{BC}{A'C'}}_{\text{رو به } \alpha}=\underbrace{\frac{AC}{B'C'}}_{\text{رو به } \beta}=\underbrace{\frac{AB}{A'B'}}_{\text{رو به } \theta}$$

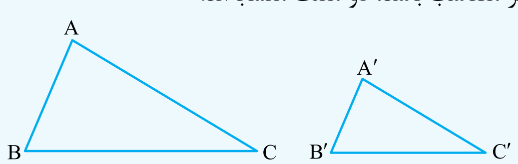
حواستون هست که تو صورت نسبت‌ها فقط اضلاع مثلث ABC و تو مخرجشون فقط اضلاع مثلث A′B′C′ قرار داره!

نکته در جدول زیر ساختارهای هندسی معروفی که در آن‌ها دو مثلث با دو زاویهٔ برابر متشابه هستند آمده است. این ساختارها را به خوبی بشناسید:

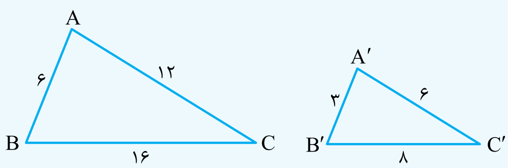
نام ساختار	شکل ساختار	مثلث‌های متشابه	مثال
تالسی		$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$	—
پروانه‌ای		$\overset{\Delta}{AOB} \sim \overset{\Delta}{COD}$	 $\dfrac{x}{\underbrace{۴}_{\text{رو به } \alpha}} = \dfrac{۵}{\underbrace{۷}_{\text{رو به } \hat{O}}} \Rightarrow x = \dfrac{۲۰}{۷}$
اشتراکی (مشترک در یک رأس و دارای یک زاویهٔ برابر)		$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{EDC}$	 $\dfrac{x}{\underbrace{۸}_{\text{رو به } \beta}} = \dfrac{۵}{\underbrace{۱۰}_{\text{رو به } \alpha}} \Rightarrow x = ۴$
		$\overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{ABC}$	 $\dfrac{x+۶}{\underbrace{۴}_{\text{رو به } \theta}} = \dfrac{۴}{\underbrace{x}_{\text{رو به } \alpha}} \Rightarrow \dots \Rightarrow x = ۲$

۲. تشابه با سه ضلع متناسب اگر سه ضلع از یک مثلث با سه ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشد، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

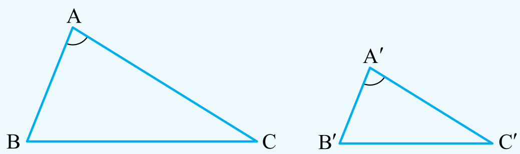


مثلاً مثلث‌های زیر با سه ضلع متناسب متشابه‌اند. علتش هم این است که بین طول ضلع‌های این دو مثلث، رابطهٔ $\frac{۱۶}{۸} = \frac{۱۲}{۶} = \frac{۶}{۳}$ برقرار است.

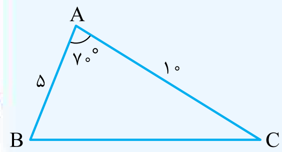


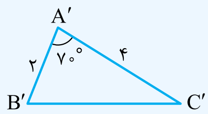
۳. تشابه با دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلثی دیگر متناسب باشند، به طوری که زاویهٔ بین آن‌ها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \,,\, \hat{A} = \hat{A}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

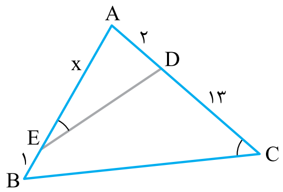


مثلاً مثلث‌های زیر با دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر متشابه‌اند، چون هر دو رابطهٔ $\underbrace{\frac{۱۰}{۴}=\frac{۵}{۲}}_{\text{تناسب دو ضلع}}$ و $\underbrace{\hat{A}=\hat{A}'=۷۰^\circ}_{\text{زاویهٔ بین برابر}}$، برقرار است.





۴۶- در شکل مقابل، $A\hat{E}D = A\hat{C}B$ است. مقدار x کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)



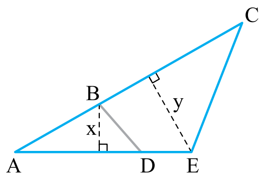
۱) ۷

۲) ۶

۳) ۵

۴) ۴

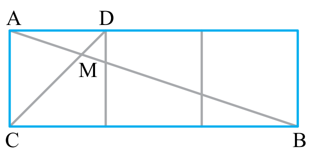
۴۷- در شکل مقابل، $AD = ۸$ ، $DE = ۴$ ، $AB = ۶$ و $BC = ۱۰$. نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$

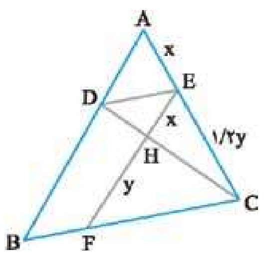
۴۸- در شکل روبه‌رو، سه مربع به اضلاع واحد، کنار هم قرار دارند. فاصلهٔ MA چند برابر $\sqrt{۱۰}$ است؟



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

۴۹- در شکل مقابل، $DE \parallel BC$ و $۳y = ۵x$ است. اگر $BF = ۳$ باشد، اندازهٔ BC کدام است؟ (سراسری تجربی ۱۴۰۲ ـ نوبت اول)



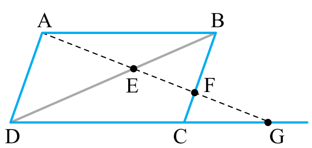
۱) ۶/۷۵

۲) ۶/۲۵

۳) ۵/۷۵

۴) ۵/۲۵

۵۰- در شکل زیر، چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است. مقدار $EF \times EG$ کدام است؟ (خارج ۹۹)



۱) $EA^۲$

۲) $ED^۲$

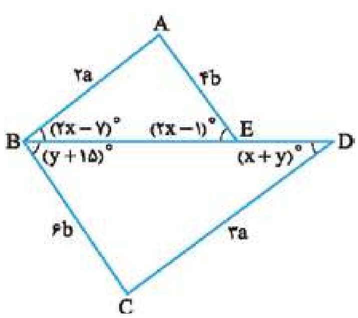
۳) $EB \times ED$

۴) $FB \times FC$

۵۱- مثلثی به اضلاع ۵، ۴ و a با مثلثی به طول اضلاع ۹، ۷ و b متشابه است. بیشترین مقدار ممکن برای عدد a کدام است؟

۱) $\frac{۳۶}{۷}$ ۲) $\frac{۴۵}{۷}$ ۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ۴) $\frac{۳۵}{۴}$

۵۲- در شکل مقابل، اگر $BE = ۲DE$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟ (تمرین کتاب درسی)



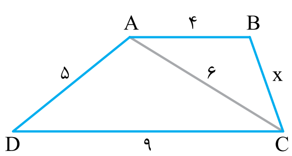
۱) ۸

۲) ۹

۳) ۱۰

۴) ۱۱

۵۳- در شکل مقابل، ABCD ذوزنقه است. مقدار x کدام است؟

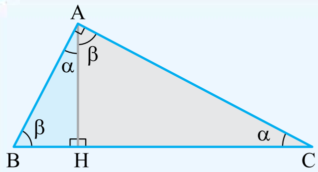


۱) ۱/۲۵ ۲) ۲/۵

۳) $\frac{۲۰}{۹}$ ۴) $\frac{۱۰}{۳}$

۷ روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

در هر مثلث قائم‌الزاویه، با کشیدن ارتفاع وارد بر وتر (مثل AH در شکل مقابل)، دو مثلث متشابه درست می‌شود (مثلث‌های ABH و ACH) که هر کدامشان با مثلث اصلی متشابه‌اند؛ یعنی:

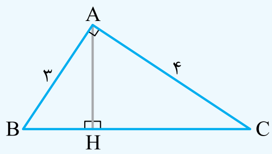


$$\overset{\Delta}{ABH} \sim \overset{\Delta}{ACH} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

با نوشتن نسبت تشابه هر یک از مثلث‌های بالا، روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه به صورت زیر به دست می‌آیند:

(۱) $AB^۲ = BH \times BC$ و (۲) $AC^۲ = CH \times BC$ و (۳) $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$ و (۴) $AH^۲ = BH \times HC$ و (۵) $AB \times AC = AH \times BC$

مثلاً بیایید به کمک رابطه‌های بالا طول پاره‌خط‌های BC ، AH، BH و HC را در مثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل پیدا کنیم:



محاسبهٔ طول BC: طول این پاره‌خط به کمک فیثاغورس (رابطهٔ ۳) پیدا می‌شود:

$$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۳^۲ + ۴^۲ \Rightarrow BC^۲ = ۲۵ \Rightarrow BC = ۵$$

البته می‌توانستیم این‌طور هم بگوییم که چون ۳، ۴ و ۵ عددهای فیثاغورسی‌اند، پس $BC = ۵$ است.

محاسبهٔ طول AH: طول این پاره‌خط را با استفاده از رابطهٔ (۵) پیدا می‌کنیم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow AH \times ۵ = ۳ \times ۴ \Rightarrow AH = \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

محاسبهٔ طول BH: از رابطهٔ (۱) استفاده می‌کنیم:

$$AB^۲ = BH \times BC \Rightarrow ۳^۲ = BH \times ۵ \Rightarrow BH = \frac{۹}{۵} = ۱/۸$$

محاسبهٔ طول HC: از رابطهٔ (۲) استفاده می‌کنیم:

$$AC^۲ = CH \times BC \Rightarrow ۴^۲ = CH \times ۵ \Rightarrow CH = \frac{۱۶}{۵} = ۳/۲$$

البته برای محاسبهٔ طول HC می‌توانستیم طول BH را از BC کم کنیم:

$$HC = BC - BH = ۵ - ۱/۸ = ۳/۲$$

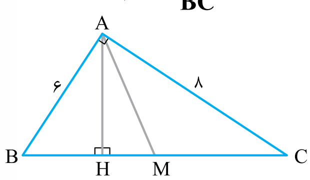
۵۴- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ دو پاره‌خطی که ارتفاع وارد بر وتر، بر روی وتر ایجاد می‌کند ۲/۵ و ۱۴/۴ سانتی‌متر است. طول ارتفاع وارد بر وتر، چند سانتی‌متر است؟ (سراسری ۱۴۰۱)

۱) ۴/۸ ۲) ۶ ۳) ۷/۲ ۴) ۸

۵۵- در مستطیل ABCD به طول $AB = ۱۷$، از نقطهٔ A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = ۱۵$ باشد، طول قطر مستطیل از عدد ۱۹ چه‌قدر بیشتر است؟ (تجربی خارج ۹۸)

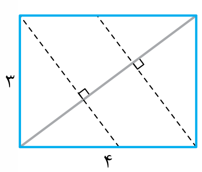
۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۵}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۵۶- مثلث قائم‌الزاویهٔ زیر با اضلاع قائمهٔ $AB = ۶$ و $AC = ۸$ مفروض است. اگر AH ارتفاع و AM میانهٔ مثلث باشد، نسبت $\frac{HM}{BC}$ کدام است؟



۱) ۰/۱۲
۲) ۰/۱۴
۳) ۰/۱۶
۴) ۰/۱۸

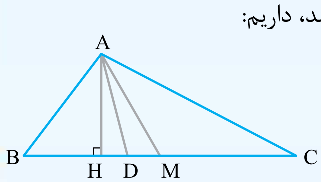
۵۷- در مستطیلی به طول اضلاع ۳ و ۴ واحد، از هر دو رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل کدام است؟ (سراسری ۹۶)

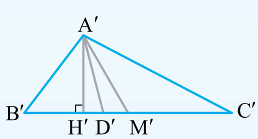


۱) ۵/۲۵ ۲) ۵/۷۵ ۳) ۶ ۴) ۷/۵

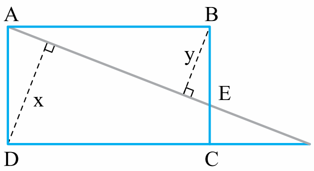
۸ نسبت اجزای فرعی در تشابه

اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت هر دو جزء متناظر مثل میانه‌ها، نیمسازها و ارتفاع‌ها و هم‌چنین محیط‌ها هم برابر نسبت تشابه (نسبت ضلع‌های نظیر) است. مثلاً اگر مثلث‌های زیر با نسبت تشابه $k = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}$ متشابه باشند، داریم:





$$\underbrace{\frac{AH}{A'H'}}_{\text{نسبت ارتفاع‌ها}} = \underbrace{\frac{AD}{A'D'}}_{\text{نسبت نیمسازها}} = \underbrace{\frac{AM}{A'M'}}_{\text{نسبت میانه‌ها}} = \frac{\text{محیط مثلث } ABC}{\text{محیط مثلث } A'B'C'} = k$$

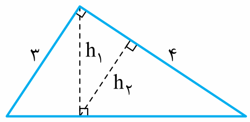


۵۸- در شکل مقابل، چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. اگر $BE = ۲EC$ باشد، نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۵}{۳}$

۵۹- در ذوزنقه‌ای به طول قاعده‌های ۶، ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطهٔ M متقاطع‌اند. فاصلهٔ M از قاعدهٔ بزرگ‌تر چه‌قدر است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



۶۰- در شکل مقابل، $h_۱$ و $h_۲$ ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_۲}{h_۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۴}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

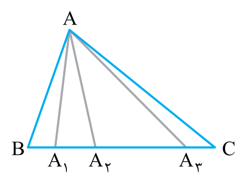
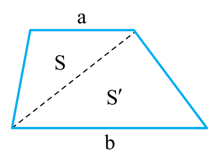
۶۱- مثلث ABC به طول اضلاع a، b و ۳ با مثلث $A'B'C'$ به طول اضلاع ۳، ۴ و ۵ متشابه است و دو مثلث قابل انطباق نیستند. بیشترین محیط مثلث ABC کدام است؟

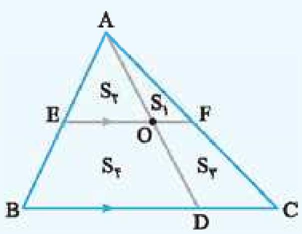
۱) ۷/۲ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳/۵

۹ نسبت مساحت دو مثلث

برای به دست آوردن نسبت مساحت دو مثلث موارد زیر را بلد باشید:

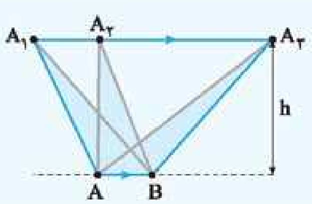
۱ اگر اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشد، در این صورت نسبت مساحت‌هایشان برابر نسبت قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌های برابر بر آن‌ها وارد می‌شود. دوتا از ساختارهای پرکاربردی که مثلث‌های هم‌ارتفاع ایجاد می‌کنند را در جدول زیر ببینید:

ساختار	توضیح
	اگر یک رأس مثلث را به نقاط مختلفی که روی ضلع مقابل به آن قرار دارند وصل کنیم، همهٔ مثلث‌هایی که درست می‌شوند هم‌ارتفاع‌اند. $\frac{S_{AA_۱A_۲}}{S_{ABA_۱}} = \frac{A_۱A_۲}{BA_۱}$ یا $\frac{S_{AA_۲A_۳}}{S_{ABC}} = \frac{A_۲A_۳}{BC}$ یا ...
	با رسم قطر هر ذوزنقه، دو مثلث هم‌ارتفاع درست می‌شود. $\frac{S}{S'} = \frac{a}{b}$



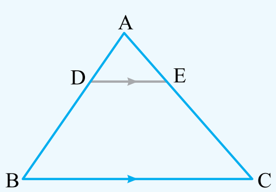
نکته در شکل مقابل، اگر پاره‌خط EF موازی قاعدهٔ BC باشد، آن‌گاه:

$$\boxed{\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{S_۳}{S_۴} = \left(\frac{OF}{OE}\right) = \left(\frac{DC}{BD}\right)}$$



۲ اگر در دو مثلث اندازهٔ قاعده‌ها و همچنین ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها یکسان باشند، مساحت دو مثلث با هم برابر است. شکل زیر یکی از ساختارهای هندسی مهمی است که مثلث‌هایی با مساحت‌های برابر به وجود می‌آورد. در این شکل $A_۱A_۳ \parallel AB$ بوده و مساحت مثلث‌های $A_۱AB$، $A_۲AB$ و $A_۳AB$ برابرند؛ زیرا هر سه مثلث هم در قاعدهٔ AB و هم در ارتفاع به طول h مشترک هستند.

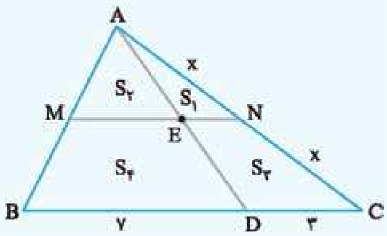
۳ اگر دو مثلث متشابه باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابرِ مربع نسبت تشابه‌شان است.



نتیجه هرگاه دو مثلث مطابق شکل مقابل، بنا بر ساختار تالسی با یکدیگر متشابه باشند، نسبت مساحت آن‌ها برابر است با:

$$\boxed{\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^۲ \text{ یا } \left(\frac{AE}{AC}\right)^۲ \text{ یا } \left(\frac{DE}{BC}\right)^۲}$$

مثلاً در شکل مقابل اگر $MN \parallel DC$ و $AN = NC$ باشد، مساحت قسمت‌های مختلف مثلث ABC به صورت زیر به دست می‌آید:



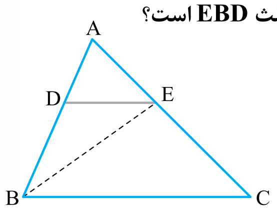
❶ مثلث‌های AEN و ADC طبق ساختار تالسی متشابه‌اند؛ پس:

$$\frac{S_{AEN}}{S_{ADC}} = \left(\frac{x}{۲x}\right)^۲ \Rightarrow \frac{S_۱}{S_۱+S_۳} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_۱}{S_۳} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow S_۱ = A \,,\, S_۳ = ۳A$$

❷ حالا با توجه به نکته‌ای که در صفحهٔ قبل گفتیم داریم:

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{S_۳}{S_۴} = \frac{۳}{۷} \xrightarrow[S_۳=۳A]{S_۱=A} \frac{A}{S_۲} = \frac{۳A}{S_۴} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{S_۲} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow S_۲ = \frac{۷}{۳}A \\ \frac{۳A}{S_۴} = \frac{۳}{۷} \Rightarrow S_۴ = ۷A \end{cases}$$

۶۲- در مثلث ABC، پاره‌خط DE موازی ضلع BC و $AD = \frac{۴}{۵}DB$ است. مساحت مثلث EBC چند برابر مساحت مثلث EBD است؟



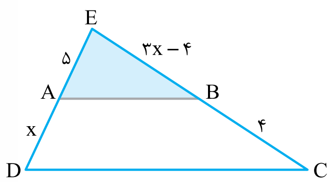
۱) ۲

۲) ۲/۲۵

۳) ۲/۵

۴) ۲/۷۵

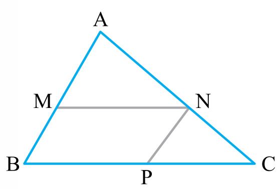
۶۳- در شکل مقابل، مساحت ذوزنقهٔ ABCD چند برابر مساحت مثلث EAB است؟ (خارج ۹۹)



۱) $\frac{۹}{۴}$ ۲) $\frac{۱۶}{۹}$

۳) $\frac{۲۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳۶}{۲۵}$

۶۴- در شکل مقابل، $\frac{MA}{MB} = \frac{۳}{۲}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ (سراسری ۹۵)



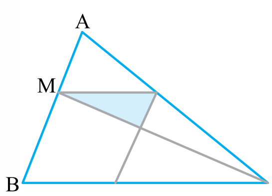
۱) ۴۸

۲) ۵۲

۳) ۵۴

۴) ۵۶

۶۵- در شکل مقابل، $\frac{MA}{MB} = \frac{۲}{۳}$. مساحت مثلث رنگی چند درصد مساحت متوازی‌الاضلاع است؟



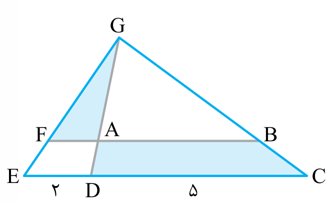
۱) ۲۰

۲) ۲۴

۳) ۲۵

۴) ۳۰

۶۶- در شکل روبه‌رو $DG = ۳DA$ و اندازهٔ پاره‌خط‌های DE و DC، به ترتیب ۲ و ۵ واحد هستند. مساحت مثلث AFG، چند درصد مساحت ذوزنقهٔ ABCD است؟ (سراسری ۹۹)



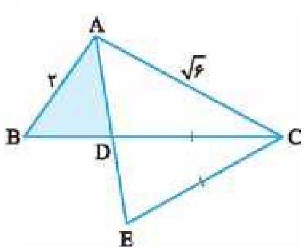
۱) ۴۰

۲) ۳۶

۳) ۳۲

۴) ۲۴

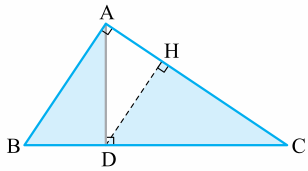
۶۷- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویهٔ A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE کدام است؟ (تجربی خارج ۹۹)



۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

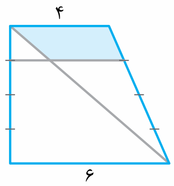
۶۸- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول اضلاع قائم $AB=\sqrt{۳}$ و $AC=۲$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HCD و ABD کدام است؟ (تجربی ۹۹)



۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۱}$ ۴) $\frac{۸}{۹}$

۶۹- در شکل روبه‌رو، ساق‌های ذوزنقه به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است. مساحت ذوزنقهٔ رنگی، چند درصد از مساحت ذوزنقهٔ بزرگ است؟

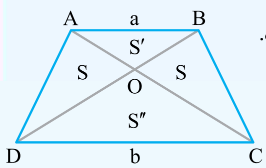


۱) ۱۷/۵ ۲) ۳۵

۳) ۲۵ ۴) ۱۲/۵

۱۰ تقسیم مساحت ذوزنقه

تقسیم مساحت توسط قطرها با رسم قطرهای هر ذوزنقه، چهار مثلث به وجود می‌آید که دارای ویژگی‌های زیر هستند:



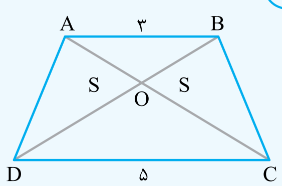
۱ مساحت مثلث‌های AOD و BOC برابر است.

۲ مساحت مثلث‌های ABD و ABC با هم و همچنین مساحت مثلث‌های ADC و BDC با هم برابر است.

۳ مثلث‌های AOB و DOC بنا بر ساختار پروانه‌ای متشابه‌اند؛ پس: $\boxed{\frac{S'}{S''}=(\frac{a}{b})^۲}$

۴ حاصل‌ضرب مساحت مثلث‌های مقابل به هم همدیگر برابر است: $\boxed{S^۲=S'S''}$ یا $\boxed{S\times S=S'\times S''}$

مثلاً بیایید به کمک نکات بالا مساحت نواحی مختلف ذوزنقهٔ مقابل را پیدا کنیم:



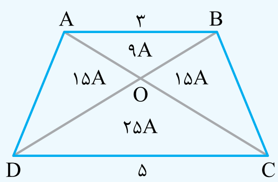
✓ ابتدا به کمک مورد (۳)، مساحت مثلث‌های AOB و DOC را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{S_{AOB}}{S_{DOC}}=(\frac{۳}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵}\Rightarrow\begin{cases}S_{AOB}=۹A\\S_{DOC}=۲۵A\end{cases}$$

✓ با توجه به مورد (۲)، مساحت مثلث‌های AOD و BOC را برابر S قرار می‌دهیم. حالا به کمک مورد (۴) داریم:

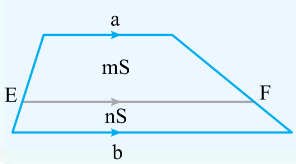
$$S\times S=۹A\times ۲۵A\Rightarrow S^۲=۹\times ۲۵\times A^۲\xrightarrow{\sqrt{\ }}S=۳\times ۵\times A=۱۵A$$

بنابراین مساحت نواحی مختلف ذوزنقه به صورت مقابل است:

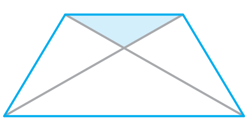


تقسیم مساحت توسط خط موازی قاعده‌ها اگر خطی که موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌شود، مساحت آن را به نسبت m به n تقسیم کند، طول آن برابر است با:

$$\boxed{EF^۲=\frac{mb^۲+na^۲}{m+n}}$$



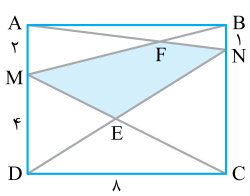
۷۰- قاعدهٔ بزرگ‌تر یک ذوزنقه دو برابر قاعدهٔ کوچک‌تر آن است. مساحت کل ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث رنگی است؟



۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۰

۷۱- مستطیل ABCD مطابق شکل مقابل مفروض است. مساحت چهارضلعی MENF کدام است؟ (سراسری ۱۴۰۰)



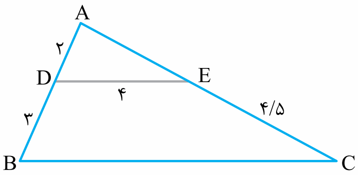
۱) $\frac{۱۰۴}{۹}$ ۲) ۱۳

۳) $\frac{۴۷}{۳}$ ۴) ۱۶

۷۲- اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقه‌ای ۵ و ۹ واحد است. پاره‌خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه چنان رسم می‌کنیم که ذوزنقه را به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم کند. اندازهٔ پاره‌خط کدام است؟ (سراسری ۹۹)

۱) ۷ ۲) $\sqrt{۵۳}$ ۳) $۴\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۵۷}$

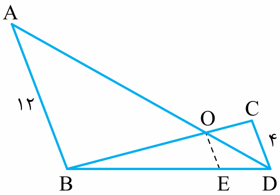
آزمون



۱- در شکل روبه‌رو، محیط مثلث ADE چند برابر محیط ذوزنقهٔ BDEC است؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$

۳) ۰/۴ ۴) $\frac{۱۸}{۴۳}$



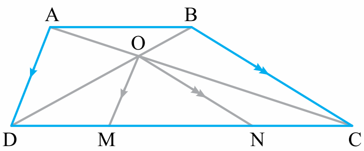
۲- در شکل روبه‌رو CD، OE و AB موازی‌اند. مساحت مثلث BOE، چند برابر مساحت مثلث EOD است؟

۱) ۱/۵

۲) ۲

۳) ۲/۵

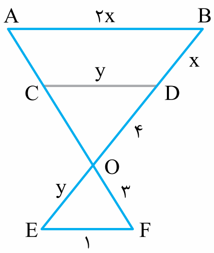
۴) ۳



۳- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، از محل تلاقی قطرهای ذوزنقه، پاره‌خط‌های OM و ON به ترتیب موازی با AD و BC رسم شده‌اند. اگر AB = ۵ و DC = ۲۰ باشد، طول پاره‌خط MN کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۲ ۴) ۱۳



۴- در شکل مقابل AB، CD و EF موازی‌اند. طول پاره‌خط AC کدام است؟ (تجربی خارج ۱۴۰۰)

۱) $\frac{۳}{۴}$

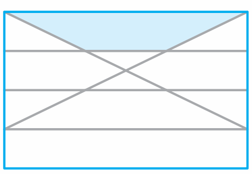
۲) $\frac{۴}{۳}$

۳) ۲

۴) ۳

۵- در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، قطر عمود بر ساق است. اگر اندازهٔ قاعدهٔ بزرگ‌تر و قطر آن به ترتیب ۱۰ و ۸ واحد باشند، اندازهٔ قاعدهٔ کوچک‌تر چند واحد است؟

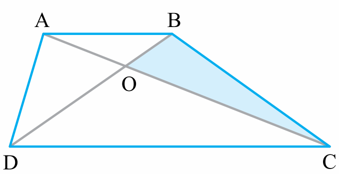
۱) ۲/۸ ۲) ۳/۲ ۳) ۳/۶ ۴) ۴/۲



۶- در شکل مقابل عرض‌های مستطیل به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. اگر مساحت مستطیل ۳۷/۵ واحد مربع باشد، مساحت ذوزنقهٔ رنگی کدام است؟

۱) ۴/۷۵ ۲) ۵/۷۵

۳) ۶/۲۵ ۴) ۷/۵



۷- در ذوزنقهٔ شکل مقابل، اگر مساحت مثلث ABC برابر ۳ و مساحت مثلث BDC برابر ۷ باشد، مساحت ناحیهٔ رنگی چند درصد مساحت کل ذوزنقه است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۰

۳) ۲۱ ۴) ۲۲

برای دیدن پاسخ‌های تشریحی این آزمون Qr Code مقابل را اسکن کنید.

۲۳ گزینه ۳ بازم نکته:

نکته برای مجموع طول میانه‌های هر مثلث، نامساوی زیر برقرار است:

محیط آن مثلث > مجموع طول سه میانه از هر مثلث > محیط آن مثلث $\times \frac{۳}{۴}$

اول باید محدودهٔ a را پیدا کنیم. برای این کار از نامساوی مثلث استفاده می‌کنیم:

$$|۵-۷|<a<۵+۷ \Rightarrow ۲<a<۱۲ \xrightarrow[\text{اشتراک}]{۸\le a} ۸\le a<۱۲$$

بنابراین محدودهٔ محیط مثلث می‌شود:

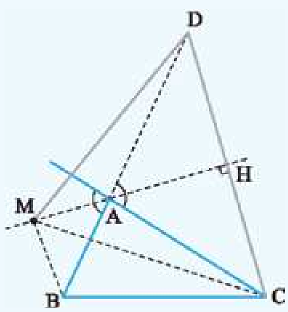
$$۸+۵+۷\le \text{محیط} <۱۲+۵+۷ \Rightarrow ۲۰\le \text{محیط}<۲۴$$

حالا یک بار به ازای «۲۴ = محیط» و بار دیگر به ازای «۲۰ = محیط» از نکتهٔ بالا استفاده می‌کنیم: محیط > مجموع طول سه میانه > محیط $\frac{۳}{۴}$

$$\xrightarrow{\text{محیط}=۲۰} \frac{۳}{۴}(۲۰)<\text{مجموع طول سه میانه}<۲۰$$
$$\Rightarrow ۱۵<\text{مجموع طول سه میانه}<۲۰$$
$$\xrightarrow{\text{محیط}=۲۴} \frac{۳}{۴}(۲۴)<\text{مجموع طول سه میانه}<۲۴$$
$$\Rightarrow ۱۸<\text{مجموع طول سه میانه}<۲۴$$

اشتراک ۲ نامساوی بالا می‌شود ۲۰ > مجموع طول سه میانه > ۱۸. در بین گزینه‌ها تنها عددی که در این بازه قرار دارد ۱۹ است.

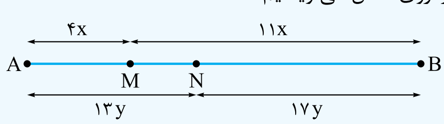
۲۴ گزینه ۱ *انصافاً مسئلهٔ سفتیه. یکم باید خلاقیت به خرج بدیم.* از رأس C عمودی بر امتداد نیمساز خارجی MA رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در نقطهٔ D قطع کند. حالا خوب به مثلث ADC نگاه کنید، در این مثلث ارتفاع AH نیمساز هم هست؛ بنابراین مثلث ACD متساوی‌الساقین و در نتیجه MH عمودمنصف DC است. با توجه به خاصیت عمودمنصف می‌توانیم بگوییم $AC=AD$ و $MC=MD$ است. حالا بیایید در مثلث BMD نامساوی مثلث را بنویسیم:



$$MB+MD>BD$$
$$\xrightarrow[BD=AB+AD]{MD=MC} MB+MC>AB+AD$$
$$\xrightarrow{AD=AC} MB+MC>AB+AC \Rightarrow \frac{MB+MC}{AB+AC}>۱$$

فصل دوم
قضیهٔ تالس، تشابه و کاربردهای آن

۲۵ گزینه ۱ ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از تناسب $\frac{AM}{MB}=\frac{۴}{۱۱}$ نتیجه می‌گیریم که $AM=۴x$ و $MB=۱۱x$ و همچنین از تناسب $\frac{NA}{NB}=\frac{۱۳}{۱۷}$ نتیجه می‌گیریم که $NB=۱۷y$ و $NA=۱۳y$ است. این اطلاعات را روی شکل می‌نویسیم:



حالا با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} AB=۴x+۱۱x=۱۵x \\ AB=۱۳y+۱۷y=۳۰y \end{cases} \Rightarrow ۱۵x=۳۰y \Rightarrow x=۲y$$

بنابراین نسبت $\frac{MN}{AB}$ برابر است با: $\frac{MN}{AB}=\frac{AN-AM}{AB}=\frac{۱۳y-۴x}{۳۰y}$

$$\xrightarrow{x=۲y} \frac{MN}{AB}=\frac{۱۳y-۴(۲y)}{۳۰y}=\frac{۵\cancel{y}}{۳۰\cancel{y}}=\frac{۱}{۶}$$

۲۶ گزینه ۱ فرض می‌کنیم $a=۱۰$ و $b=۱۵$ باشد، در این صورت چون مجموع ارتفاع‌های وارد بر این اضلاع برابر ارتفاع وارد بر ضلع سوم است، داریم:

$$h_a+h_b=h_c \xrightarrow{\div h_c} \frac{h_a}{h_c}+\frac{h_b}{h_c}=۱ \Rightarrow \frac{c}{a}+\frac{c}{b}=۱$$
$$\xrightarrow[b=۱۵]{a=۱۰} \frac{c}{۱۰}+\frac{c}{۱۵}=۱ \Rightarrow \frac{۵c}{۳۰}=۱ \Rightarrow c=\frac{۳۰}{۵}=۶$$

۲۷ گزینه ۱ ابتدا به کمک نوع اول جزءبه‌کل x را پیدا می‌کنیم:

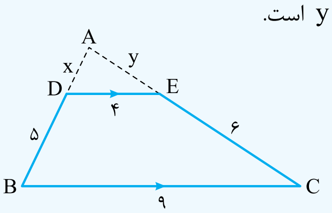
$$\frac{AE}{AB}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{۴}{۴+y}=\frac{x+۱}{y+x+۱}$$
$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۴}{۴+y-۴}=\frac{x+۱}{y+x+۱-(x+۱)}$$
$$\Rightarrow \frac{۴}{\cancel{y}}=\frac{x+۱}{\cancel{y}} \Rightarrow ۴=x+۱ \Rightarrow x=۳$$

حالا با استفاده از جزءبه‌جزء مقدار y را به دست می‌آوریم:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۵-x} \xrightarrow{x=۳} \frac{۴}{y}=\frac{y^۲}{۲}$$
$$\Rightarrow y^۳=۸ \Rightarrow y=۲$$

بنابراین $y-۲x=۲-۲(۳)=-۴$ است.

۲۸ گزینه ۴ اول با توجه به اطلاعات مسئله شکل مقابل را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم $AD=x$ و $AE=y$ باشد، در این صورت به کمک قضیهٔ تالس داریم:

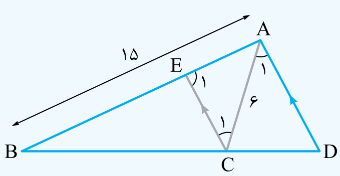


$\frac{x}{x+۵}=\frac{y}{y+۶}=\frac{۴}{۹}$:نوع اول جزءبه‌کل

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x}{۵}=\frac{y}{۶}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{۵}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow x=۴ \\ \frac{y}{۶}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow y=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸ \end{cases}$$

بنابراین محیط مثلثی که در بیرون ذوزنقه درست می‌شود (مثلث ADE) برابر $۴+۴+۴/۸=۱۲/۸$ است.

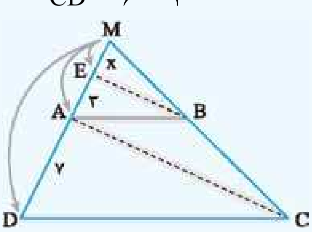
۲۹ گزینه ۲ چون $\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$، پس طبق عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب $AD \parallel EC$ است. از طرفی چون $\hat{C}_۱=\hat{E}_۱$، بنابراین مثلث ACE متساوی‌الساقین بوده و $AE=AC=۶$ است. حالا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث ABD داریم:



$\frac{AE}{AB}=\frac{CD}{BD} \xrightarrow[AB=۱۵]{AE=۶} \frac{۶}{۱۵}=\frac{CD}{BD}$:نوع دوم جزءبه‌کل

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD}=\frac{۱۵}{۶}=\frac{۵}{۲}$$

۳۰ گزینه ۲ فرض می‌کنیم $ME=x$ باشد، در این صورت به کمک ساختار W داریم:



$\overbrace{\text{حاصل‌ضرب فواصل M از رئوس کناری}}^{ME\times MD}$ W $=(\underbrace{\text{فاصلهٔ M از رأس وسط}}_{MA}$ W $)^۲$

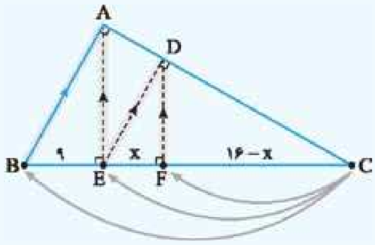
$\Rightarrow (x+۳)^۲=x(x+۱۰)\Rightarrow \cancel{x^۲}+۶x+۹=\cancel{x^۲}+۱۰x$

$\Rightarrow ۴x=۹\Rightarrow x=\frac{۹}{۴}=۲/۲۵$

در نتیجه فاصلهٔ MD برابر است با:

$MD=x+۳+۷=۲/۲۵+۳+۷=۱۲/۲۵$

۳۱ گزینه ۳ شکل را ببینید؛ باز هم ساختار W دیده می‌شود:



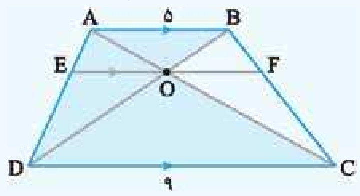
$\overbrace{\text{حاصل‌ضرب فواصل از رئوس کناری}}^{CF\times CB}$ W $=(\underbrace{\text{فاصلهٔ C از رأس وسط}}_{CE}$ W $)^۲$

$\Rightarrow (۱۶-x+x)^۲=(۱۶-x)(۱۶-x+x+۹)$

$\Rightarrow ۱۶^۲=(۱۶-x)(۱۶+۹)\Rightarrow ۱۶-x=\frac{۲۵۶}{۲۵}$

$\Rightarrow x=۱۶-\frac{۲۵۶}{۲۵}=\frac{۱۴۴}{۲۵}=۵/۷۶$

۳۲ گزینه ۱ محل برخورد قطرهای ذوزنقه را O در نظر می‌گیریم. حالا به قسمت رنگی در شکل زیر نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید در این قسمت می‌توانیم از ساختار مقاومت‌های موازی استفاده کنیم:

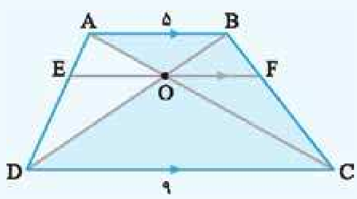


مجموع معکوس $\underbrace{\text{کناری‌ها}}_{\text{AB و DC}}$ = معکوس $\underbrace{\text{وسطی}}_{OE}$

$\Rightarrow \frac{۱}{OE}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۹}=\frac{۹+۵}{۴۵}\Rightarrow OE=\frac{۴۵}{۱۴}$

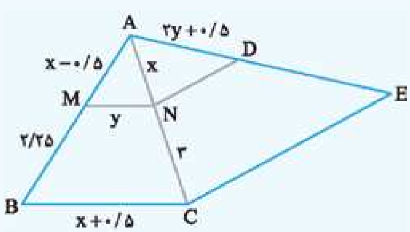
به همین ترتیب در شکل رنگی زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$\frac{۱}{OF}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۹}=\frac{۹+۵}{۴۵}\Rightarrow OF=\frac{۴۵}{۱۴}$



بنابراین طول پاره‌خط EF برابر است با: $EF=OE+OF=۲\times\frac{۴۵}{۱۴}=\frac{۴۵}{۷}$

۳۳ گزینه ۴ ابتدا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث ABC، مقادیر x و y را به دست می‌آوریم:



جزءبه‌جزء: $\frac{x-۰/۵}{۲/۲۵}=\frac{x}{۳}\Rightarrow ۳x-۱/۵=۲/۲۵x$

$\Rightarrow ۰/۷۵x=۱/۵\Rightarrow x=۲$

نوع اول جزءبه‌کل: $\frac{x}{x+۳}=\frac{y}{x+۰/۵}\xrightarrow{x=۲}\frac{۲}{۵}=\frac{y}{۲/۵}$

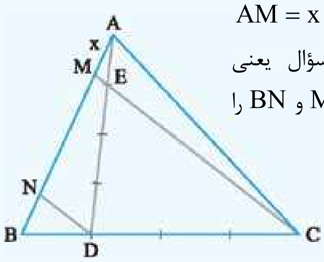
$\Rightarrow y=۱$

حالا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث ACE طول DE را پیدا می‌کنیم:

جزءبه‌جزء: $\frac{x}{۳}=\frac{۲y+۰/۵}{DE}\xrightarrow[y=۱]{x=۲}\frac{۲}{۳}=\frac{۲/۵}{DE}$

$\Rightarrow ۲DE=۷/۵\Rightarrow DE=۳/۷۵$

۳۴ گزینه ۳ فرض می‌کنیم AM = x باشد. برای پیداکردن خواستهٔ سؤال یعنی $\frac{AB}{AM}$ باید طول پاره‌خط‌های MN و BN را برحسب x به دست بیاوریم:



● **محاسبهٔ MN برحسب x:** از جزءبه‌جزء در مثلث AND استفاده می‌کنیم:

$\frac{AM}{MN}=\frac{AE}{ED}\Rightarrow \frac{x}{MN}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow MN=۳x\quad (۱)$

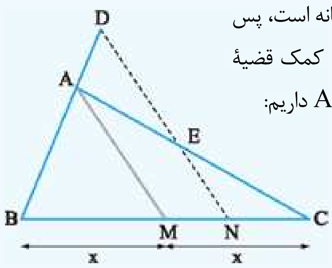
● **محاسبهٔ BN برحسب x:** از جزءبه‌جزء در مثلث BMC استفاده می‌کنیم:

$\frac{BN}{MN}=\frac{BD}{DC}\xrightarrow{(۱)}\frac{BN}{۳x}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow BN=x\quad (۲)$

حالا نسبت $\frac{AB}{AM}$ به راحتی پیدا می‌شود:

$\frac{AB}{AM}=\frac{AM+MN+BN}{AM}\xrightarrow[AM=x]{(۱),(۲)}\frac{AB}{AM}=\frac{x+۳x+x}{x}=\frac{۵x}{x}=۵$

۳۵ گزینه ۳ چون AM میانه است، پس MB = MC = x است. حالا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های NDB و AMC داریم:



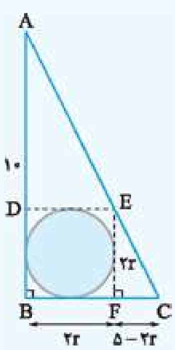
جزءبه‌جزء در $\overset{\Delta}{NDB}$: $\frac{AD}{AB}=\frac{MN}{x}$

نوع دوم جزءبه‌کل در $\overset{\Delta}{AMC}$: $\frac{AE}{AC}=\frac{MN}{x}$

سمت راست تساوی‌های بالا برابر هستند؛ پس سمت چپشان هم باید برابر باشند؛ یعنی: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}\xrightarrow{\text{جابه‌جایی وسطین}}\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$

$\xrightarrow{AB=\frac{۲}{۳}AC}\frac{AD}{AE}=\frac{\frac{۲}{۳}\cancel{AC}}{\cancel{AC}}=\frac{۲}{۳}$

۳۶ گزینه ۱ اگر شعاع دایره را r در نظر بگیریم، طول ضلع مربع BDEF می‌شود ۲r. چون AB || EF، پس می‌توانیم در مثلث ABC تالس بنویسیم:

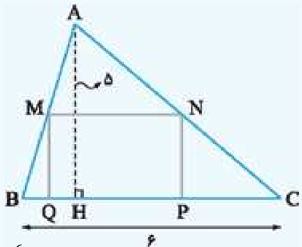


نوع اول جزءبه‌کل: $\frac{CF}{BC}=\frac{EF}{AB}\Rightarrow \frac{۵-۲r}{\cancel{۵}}=\frac{۲r}{\cancel{۱۰}_{۲}}$

$\Rightarrow ۵-۲r=r\Rightarrow ۳r=۵\Rightarrow r=\frac{۵}{۳}$

بنابراین مساحت دایرهٔ رنگی برابر $(\frac{۵}{۳})^۲\pi=\frac{۲۵}{۹}\pi$ است.

۳۷ گزینه ۲ فرض می‌کنیم $MQ = NP = x$ باشد، در این صورت چون نسبت طول به عرض مستطیل $\frac{۳}{۲}$ است، پس $MN = QP = \frac{۳}{۲}x$ است. حالا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث‌های ABH و ABC داریم:

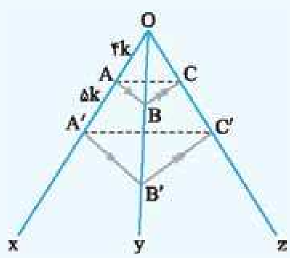


$$\begin{cases} \overset{\Delta}{ABH} \text{ در } : \text{نوع اول جزء‌به‌کل} \quad \frac{MB}{AB} = \frac{MQ}{AH} \\ \xrightarrow[AH=۵]{MQ=x} \frac{MB}{AB} = \frac{x}{۵} \\ \overset{\Delta}{ABC} \text{ در } : \text{نوع اول جزء‌به‌کل} \quad \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \\ \xrightarrow[BC=۶]{MN=\frac{۳}{۲}x} \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{۳}{۲}x}{۶} = \frac{x}{۴} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(+)} \frac{\overbrace{MB+AM}^{AB}}{AB} = \frac{x}{۵} + \frac{x}{۴} \Rightarrow ۱ = \frac{۹}{۲۰}x \Rightarrow x = \frac{۲۰}{۹}$$

بنابراین $MQ = \frac{۲۰}{۹}$ و $MN = \frac{۳}{۲} \times \frac{۲۰}{۹} = \frac{۱۰}{۳}$ و در نتیجه مساحت مستطیل برابر است با: $S_{MNPQ} = \frac{۱۰}{۳} \times \frac{۲۰}{۹} = \frac{۲۰۰}{۲۷}$

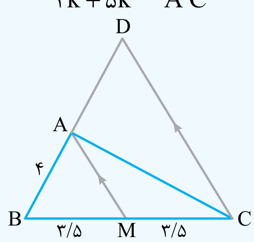
۳۸ گزینه ۴ چون $\frac{AA'}{OA} = \frac{۵}{۴}$، پس فرض می‌کنیم $AA' = ۵k$ و $OA = ۴k$ باشد. در مثلث $OA'B'$ چون $AB \parallel A'B'$ است، پس طبق قضیهٔ تالس $\frac{OB}{BB'} = \frac{OA}{AA'}$ است. از طرفی در مثلث $OB'C'$ هم چون $BC \parallel B'C'$ است، بنا بر قضیهٔ تالس $\frac{OB}{BB'} = \frac{OC}{CC'}$ است، بنابراین می‌توانیم بگوییم $\frac{OC}{CC'} = \frac{OA}{AA'}$ و در نتیجه طبق عکس قضیهٔ تالس در مثلث $OA'C'$، پاره‌خط AC موازی با $A'C'$ است. حالا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث $OA'C'$، نسبت $\frac{AC}{A'C'}$ را حساب می‌کنیم:



$$\overset{\Delta}{OA'C'} \text{ در } : \text{نوع اول جزء‌به‌کل} \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\Rightarrow \frac{۴k}{۴k+۵k} = \frac{AC}{A'C'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{۴}{۹}$$

۳۹ گزینه ۲ ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. چون AM میانه است، پس $MB = MC = ۳/۵$. حالا با توجه به این‌که $AM \parallel DC$، بنا بر قضیهٔ تالس داریم:

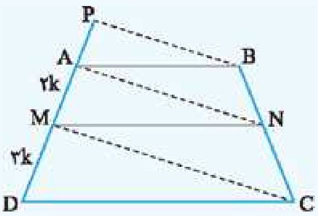


$$\overset{\Delta}{BDC} \text{ در } : \text{جزء‌به‌جزء} \quad \frac{۴}{AD} = \frac{۳/۵}{۳/۵} \Rightarrow AD = ۴$$

$$\xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{AD+DC=۱۲} DC = ۸$$

از طرفی چون $AB = AD$ و $BM = MC$ است، پس AM میان‌خط مثلث BCD بوده و $AM = \frac{DC}{۲} = ۴$ است.

۴۰ گزینه ۴ چون $AB \parallel MN \parallel DC$، پس طبق قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ $ABCD$ داریم:



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow{۳BN=۲NC \Rightarrow \frac{BN}{NC}=\frac{۲}{۳}} \frac{AM}{MD} = \frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow AM = ۲k \ , \ MD = ۳k$$

از طرفی چون $PB \parallel AN \parallel MC$، پس به کمک قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ $PBCM$ داریم:

$$\frac{PA}{AM} = \frac{BN}{NC} \xrightarrow[AM=۲k]{\frac{BN}{NC}=\frac{۲}{۳}} \frac{PA}{۲k} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow PA = \frac{۴}{۳}k$$

حالا با توجه به این‌که $PD = ۱۹$ است، k را پیدا می‌کنیم:

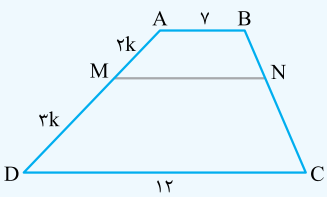
$$PD = ۱۹ \Rightarrow PA + AM + MD = ۱۹$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{۳}k + ۲k + ۳k = ۱۹ \Rightarrow \frac{۱۹}{۳}k = ۱۹ \Rightarrow k = ۳$$

بنابراین طول پاره‌خط MD برابر $MD = ۳k = ۳ \times ۳ = ۹$ است.

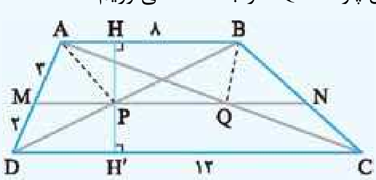
۴۱ گزینه ۳ از تساوی $\frac{MA}{MD} = \frac{۲}{۳}$ نتیجه می‌گیریم که $MA = ۲k$ و $MD = ۳k$ است.

حالا با توجه به این‌که اندازهٔ قاعده‌ها ۷ و ۱۲ است، طول پاره‌خط MN برابر می‌شود با:



$$MN = \frac{(۲k)(۱۲) + (۳k)(۷)}{۲k + ۳k} = \frac{۴۵k}{۵k} = ۹$$

۴۲ گزینه ۱ اول طول پاره‌خط PQ را به دست می‌آوریم:



$$PQ = \frac{۳ \times ۱۲ - ۲ \times ۸}{۳ + ۲} = \frac{۲۰}{۵} = ۴$$

از طرفی بنا بر قضیهٔ تالس در ذوزنقهٔ $ABCD$ داریم:

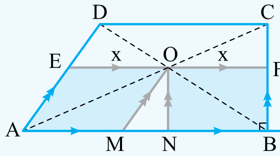
$$\frac{PH}{PH'} = \frac{۳}{۲} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{PH}{PH' + PH} = \frac{۳}{۲+۳} \Rightarrow \frac{PH}{HH'} = \frac{۳}{۵}$$

بنابراین نسبت مساحت ذوزنقهٔ $ABQP$ به مساحت ذوزنقهٔ $ABCD$ برابر است با:

$$\frac{S_{ABQP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۱}{\cancel{۲}}PH(PQ+AB)}{\frac{۱}{\cancel{۲}}HH'(AB+DC)} = \frac{PH(۴+۸)}{HH'(۸+۱۲)}$$

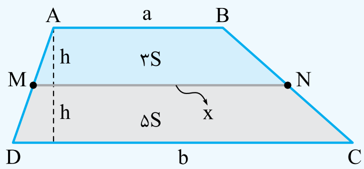
$$= \frac{PH}{HH'} \times \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳}{۵} \times \frac{۱۲}{۲۰} = \frac{۳۶}{۱۰۰}$$

۴۳ گزینه ۱ پاره‌خط EF را موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم، به طوری که از نقطهٔ برخورد قطرها بگذرد. می‌دانیم طول تکه‌هایی که روی این پاره‌خط درست می‌شود برابرند؛ یعنی $OE = OF = x$. از طرفی چون $AM \parallel OE$ و $AE \parallel OM$ است، بنابراین چهارضلعی AEOM متوازی‌الاضلاع و به همین ترتیب چهارضلعی NOFB هم متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویهٔ قائمه دارد، پس مستطیل است. بنابراین در این دو چهارضلعی، اضلاع مقابل به هم با یکدیگر برابرند، در نتیجه:



$$\begin{cases} AM = x \\ BN = x \end{cases} \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{x}{x} = ۱$$

۴۴ گزینه ۲ با توجه به اطلاعات مسئله شکل زیر را رسم می‌کنیم. چون MN پاره‌خطی است که وسط ساق‌های ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، بنابراین میان‌خط است و در نتیجه ارتفاع ذوزنقه را هم نصف می‌کند. سؤال می‌گوید، پاره‌خط MN مساحت ذوزنقه را به نسبت ۳ به ۵ تقسیم می‌کند، این یعنی می‌توانیم مساحت ذوزنقه‌های رنگی را ۳S و ۵S در نظر بگیریم. حالا فرض می‌کنیم $MN = x$ باشد، در این صورت داریم:



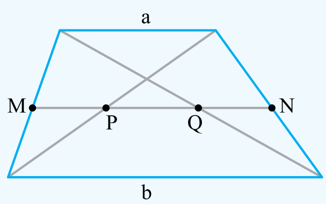
$$\frac{۳S}{۵S} = \frac{\frac{۱}{۲}h(x+a)}{\frac{۱}{۲}h(x+b)} \Rightarrow \frac{۳}{۵} = \frac{x+a}{x+b} \Rightarrow ۳x + ۳b = ۵x + ۵a$$

$$\Rightarrow ۲x = ۳b - ۵a$$

$$\xrightarrow{x=\frac{a+b}{۲}} ۲(\frac{a+b}{۲}) = ۳b - ۵a \Rightarrow a + b = ۳b - ۵a$$

$$\Rightarrow ۶a = ۲b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

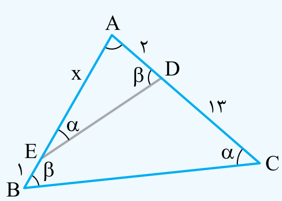
۴۵ گزینه ۱ اول شکل مسئله را رسم می‌کنیم. از آن‌جایی که میان‌خط توسط قطرها به سه قسمت مساوی تقسیم شده است؛ پس داریم:



$$MP = PQ = QN \Rightarrow \frac{b-a}{۲} = \frac{a}{۲} \Rightarrow b - a = a$$

$$\Rightarrow b = ۲a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{۱}{۲}$$

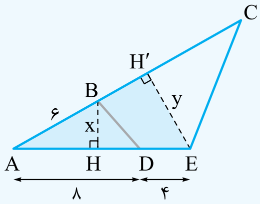
۴۶ گزینه ۳ مثلث‌های AED و ABC طبق ساختار اشتراکی با یکدیگر متشابه‌اند؛ بنابراین:



$$\underbrace{\frac{AE}{AC}}_{\text{رو به } \beta} = \underbrace{\frac{AD}{AB}}_{\text{رو به } \alpha} = \underbrace{\frac{ED}{BC}}_{\text{رو به } \hat{A}} \Rightarrow \frac{x}{۱۵} = \frac{۲}{x+۱} = \cancel{\frac{ED}{BC}}$$

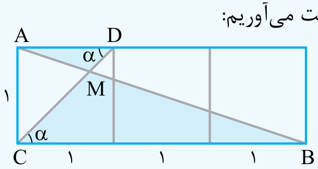
$$\Rightarrow \underbrace{x(x+۱)}_{\text{دو عدد متوالی}} = ۳۰ = \underbrace{۵ \times ۶}_{\text{دو عدد متوالی}} \Rightarrow x = ۵$$

۴۷ گزینه ۱ با کمی دقت متوجه می‌شویم که در شکل رنگی زیر، مثلث‌های ABH و AEH' طبق ساختار اشتراکی متشابه‌اند (*تو رأس* $\hat{A}$ *مشترکن و این‌که یه زاویهٔ قائمهٔ برابر هم دارن*)؛ بنابراین:



$$\underbrace{\frac{BH}{EH'}}_{\text{رو به } \hat{A}} = \underbrace{\frac{AB}{AE}}_{\text{رو به قائمه}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۶}{۸+۴} = \frac{۱}{۲}$$

۴۸ گزینه ۲ اول به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، طول پاره‌خط AB را به دست می‌آوریم:



$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ = ۱^۲ + ۳^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۱۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۱۰}$$

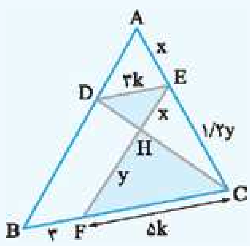
از طرفی مثلث‌های AMD و CMB طبق ساختار پروانه‌ای متشابه‌اند؛ بنابراین:

$$\underbrace{\frac{AM}{MB}}_{\text{رو به } \alpha} = \underbrace{\frac{AD}{BC}}_{\text{رو به } M} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{۱}{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{\underbrace{MB+AM}_{AB}} = \frac{۱}{۳+۱} \xrightarrow{AB=\sqrt{۱۰}} \frac{AM}{\sqrt{۱۰}} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$$

۴۹ گزینه ۱ چون $DE \parallel BC$ است، پس مثلث‌های DHE و CHF طبق ساختار پروانه‌ای متشابه‌اند؛ پس:



$$\frac{HE}{HF} = \frac{DE}{FC} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{DE}{FC}$$

$$\xrightarrow{۳y=۵x \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۳}{۵}} \frac{DE}{FC} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow DE = ۳k \,,\, FC = ۵k$$

حالا به کمک قضیهٔ تالس در مثلث ABC داریم:

$$\text{نوع اول جزء‌به‌کل:} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{x}{x+۱/۲y} = \frac{۳k}{۳+۵k}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{x}{۱/۲y} = \frac{۳k}{۳+۲k}$$

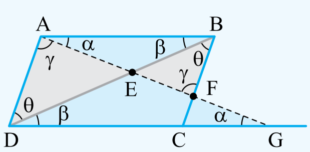
$$\xrightarrow{\frac{x}{y}=\frac{۳}{۵}=۰/۶} \frac{۰/۶}{۱/۲} = \frac{۳k}{۳+۲k}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۳k}{۳+۲k} \Rightarrow ۳ + ۲k = ۶k \Rightarrow k = \frac{۳}{۴}$$

بنابراین طول پاره‌خط BC برابر است با:

$$BC = ۳ + ۵k = ۳ + ۵(\frac{۳}{۴}) = \frac{۲۷}{۴} = ۶/۷۵$$

۵۰ گزینه ۱ مثلث‌های AEB و DEG طبق ساختار پروانه‌ای متشابه‌اند؛ پس:



$$\underbrace{\frac{AE}{EG}}_{\text{رو به } \beta} = \underbrace{\frac{BE}{DE}}_{\text{رو به } \alpha}$$

به همین ترتیب مثلث‌های AED و BEF هم متشابه‌اند، بنابراین:

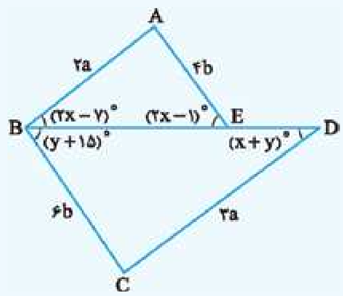
$$\underbrace{\frac{EF}{AE}}_{\text{رو به }\theta}=\underbrace{\frac{BE}{DE}}_{\text{رو به }\gamma}$$

از آن‌جایی که سمت راست تساوی‌های بالا برابرند، پس سمت چپشان هم باید برابر باشند؛ یعنی: $\frac{AE}{EG}=\frac{EF}{AE} \Rightarrow AE^۲=EF\times EG$

۵۱ گزینه ۲ می‌دانیم برای نوشتن نسبت تشابه باید اضلاع نظیر را زیر هم بنویسیم. نظیر a را نمی‌توانیم ضلع به طول b در نظر بگیریم، زیرا در این صورت اعداد ۵، ۴، ۷ و ۹ به هیچ عنوان نمی‌توانند متناسب باشند؛ پس a را یا باید با ۹ متناظر در نظر بگیریم یا با ۷. چون به دنبال بیشترین مقدار a هستیم، آن را با ۹ متناظر در نظر می‌گیریم. حالا دو حالت داریم:

$$(۱)\ \frac{a}{۹}=\frac{۴}{۷}=\frac{۵}{b} \Rightarrow a=\frac{۳۶}{۷}$$
$$(۲)\ \frac{a}{۹}=\frac{۵}{۷}=\frac{۴}{b} \Rightarrow a=\frac{۴۵}{۷} \Rightarrow \max(a)=\frac{۴۵}{۷}$$

۵۲ گزینه ۴ از تساوی $BE=۲DE$ نتیجه می‌گیریم که اگر $DE=c$ باشد، $BE=۲c$ است. حالا چون $\frac{\overset{AB}{۲a}}{\underset{CD}{۳a}}=\frac{\overset{AE}{۴b}}{\underset{BC}{۶b}}=\frac{\overset{BE}{۲c}}{\underset{BD}{c+۲c}}=\frac{۲}{۳}$، پس مثلث‌های ABE و BCD با سه ضلع متناسب متشابه هستند. می‌دانیم در نسبت تشابه ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر در یک نسبت زیر هم قرار می‌گیرند؛ پس:



رو به زوایای برابرن.

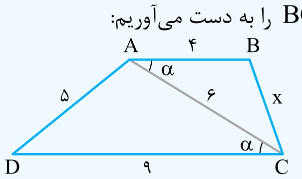
$$\boxed{\frac{AB}{CD}}=\boxed{\frac{AE}{BC}}=\frac{BE}{BD} \Rightarrow \begin{cases}۲x-۱=y+۱۵\\ ۲x-۷=x+y\end{cases}$$

رو به زوایای برابرن.

$$\Rightarrow \begin{cases}۲x-y=۱۶\\ x-y=۷\end{cases} \xrightarrow{(-)} x=۹ \xrightarrow[\text{جای‌گذاری}]{x-y=۷} y=۲$$

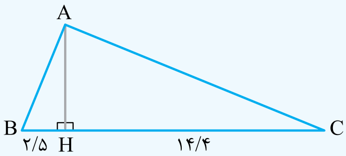
بنابراین $x+y=۹+۲=۱۱$ است.

۵۳ گزینه ۴ چون چهارضلعی ABCD ذوزنقه است، پس $AB \parallel DC$ و در نتیجه طبق قضیهٔ خطوط موازی و مورب می‌توانیم فرض کنیم که $B\hat{A}C=A\hat{C}D=\alpha$ باشد. (به شکل زیر نگاه کنید) از طرفی تناسب $\frac{\overset{DC}{۹}}{\underset{AC}{۶}}=\frac{\overset{AC}{۶}}{\underset{AB}{۴}}$ هم برقرار است. این یعنی مثلث‌های ACD و ABC با دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین برابر متشابه‌اند. حالا با نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث، خواستهٔ سؤال یعنی $BC=x$ را به دست می‌آوریم:



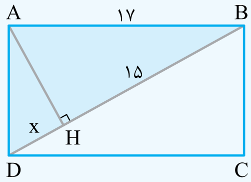
$$\frac{\overset{DC}{۹}}{\underset{AC}{۶}}=\frac{\overset{AC}{۶}}{\underset{AB}{۴}}=\frac{\overset{AD}{۵}}{\underset{BC}{x}} \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{۵}{x} \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

۵۴ گزینه ۲ ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. حال به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول ارتفاع وارد بر وتر را به دست می‌آوریم:



$$AH^۲=BH\times HC \Rightarrow AH^۲=۲/۵\times۱۴/۴=\frac{۲۵}{۱۰}\times\frac{۱۴۴}{۱۰}$$
$$=\frac{۲۵\times۱۴۴}{۱۰۰} \Rightarrow AH=\sqrt{\frac{۲۵\times۱۴۴}{۱۰۰}}=\frac{۵\times۱۲}{۱۰}=۶$$

۵۵ گزینه ۱ ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم $DH=x$ باشد، در این صورت طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB داریم:



$$AB^۲=BH\times BD \Rightarrow ۱۷^۲=۱۵(۱۵+x)$$
$$\Rightarrow ۲۸۹=۲۲۵+۱۵x \Rightarrow ۶۴=۱۵x \Rightarrow x=\frac{۶۴}{۱۵}=\frac{۶۰+۴}{۱۵}$$
$$=۴+\frac{۴}{۱۵}$$

بنابراین طول قطر مستطیل برابر $BD=x+۱۵=۱۹+\frac{۴}{۱۵}$ است که $\frac{۴}{۱۵}$ از عدد ۱۹ بیشتر است.

۵۶ گزینه ۲ ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول ضلع BC را به دست می‌آوریم: $BC=\sqrt{۶^۲+۸^۲}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$

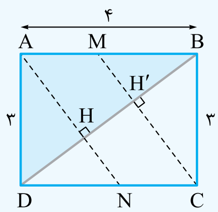
حالا با استفاده از روابط طولی در مثلث ABC، طول BH را به دست می‌آوریم:

$$AB^۲=BH\times BC \Rightarrow ۶^۲=BH\times۱۰ \Rightarrow BH=\frac{۳۶}{۱۰}=۳/۶$$

در نتیجه نسبت $\frac{HM}{BC}$ برابر است با:

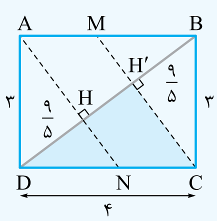
$$\frac{HM}{BC}=\frac{BM-BH}{BC}=\frac{\frac{۱۰}{۲}-۳/۶}{۱۰}=\frac{۱/۴}{۱۰}=۰/۱۴$$

۵۷ گزینه ۱ به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول قطر مستطیل برابر $BD=\sqrt{۳^۲+۴^۲}=۵$ به دست می‌آید. طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB داریم:



$$AD^۲=DH\times DB \Rightarrow ۳^۲=DH\times۵ \Rightarrow DH=\frac{۹}{۵}$$

به همین ترتیب در مثلث BDC، $BH'=\frac{۹}{۵}$ به دست می‌آید. حال به کمک قضیهٔ تالس در مثلث DH'C طول پاره‌خط NC را به دست می‌آوریم:



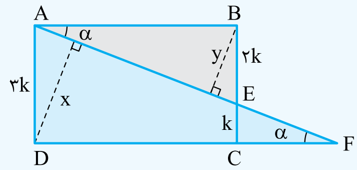
نوع دوم جزء‌به‌کل: $\frac{NC}{CD}=\frac{HH'}{H'D} \Rightarrow \frac{NC}{۴}=\frac{۵-۲(\frac{۹}{۵})}{۵-\frac{۹}{۵}}$

$$\Rightarrow \frac{NC}{۴}=\frac{\frac{۷}{۵}}{\frac{۱۶}{۵}} \Rightarrow NC=\frac{۷}{۴}$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع AMCN برابر است با:

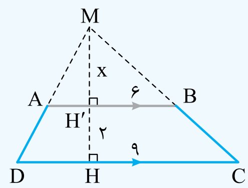
$$S_{AMCN} = NC\times BC = \frac{۷}{۴}\times ۳ = \frac{۲۱}{۴} = ۵/۲۵$$

۵۸ گزینه ۳ چون $AB \parallel DF$، بنا بر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $B\hat{A}E = A\hat{F}C = \alpha$ و از طرفی $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$ است؛ بنابراین مثلث‌های ABE و ADF متشابه‌اند و در نتیجه نسبت ارتفاع‌های نظیر آن‌ها برابر با نسبت تشابه است؛ پس داریم:



$$\frac{AD}{BE} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{۳\cancel{k}}{۲\cancel{k}} = \frac{۳}{۲}$$

۵۹ گزینه ۲ اول با توجه به اطلاعات مسئله، شکل زیر را رسم می‌کنیم.



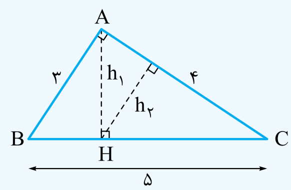
مثلث‌های AMB و MDC طبق ساختار تالسی با یکدیگر متشابه‌اند؛ بنابراین نسبت ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با نسبت تشابهشان برابر است، یعنی:

$$\frac{AB}{DC} = \frac{MH'}{MH} \Rightarrow \frac{۶}{۹} = \frac{x}{x+۲} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۶}{۳} = \frac{x}{۲}$$

$\Rightarrow x = ۴$

بنابراین فاصلهٔ M از قاعدهٔ بزرگ‌تر برابر است با: $MH = x+۲ = ۴+۲ = ۶$

۶۰ گزینه ۲ به کمک قضیهٔ فیثاغورس در مثلث ABC به دست می‌آید $BC = \sqrt{۳^۲+۴^۲} = ۵$.



از طرفی AH، ارتفاع وارد بر وتر در مثلث ABC است؛ پس مثلث‌های AHC و ABC متشابه‌اند و در نتیجه نسبت ارتفاع‌های آن‌ها برابر نسبت تشابهشان است؛ بنابراین:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{۴}{۵}$$

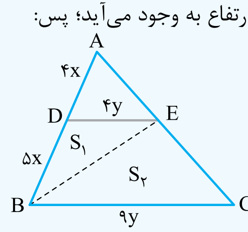
۶۱ گزینه ۲ برای نوشتن نسبت تشابه این دو مثلث نمی‌توانیم عدد ۳ را زیر ۳ بنویسیم، زیرا در این حالت دو مثلث بر هم منطبق هستند؛ بنابراین مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\frac{۴}{۳}$ یا $\frac{۵}{۳}$ متشابه است؛ چون محیط مثلث $A'B'C'$ برابر $۳+۴+۵=۱۲$ است؛ پس:

$$\frac{\text{محیط مثلث } A'B'C'}{\text{محیط مثلث } ABC} = \frac{۴}{۳} \text{ یا } \frac{۵}{۳} \Rightarrow \frac{۱۲}{\text{محیط مثلث } ABC} = \frac{۴}{۳} \text{ یا } \frac{۵}{۳}$$

$\Rightarrow$ محیط مثلث $ABC = ۹$ یا $۷/۲$

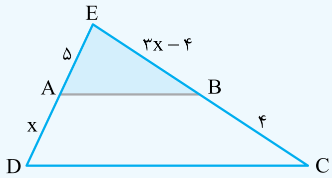
بنابراین بیشترین محیط مثلث ABC برابر ۹ است.

۶۲ گزینه ۲ اول رابطهٔ $\frac{AD}{DB} = \frac{۴}{۵}$ را به صورت $AD = ۴x$ و $DB = ۵x$ روی شکل زیر می‌نویسیم. حالا چون $DE \parallel BC$، بنا بر قضیهٔ تالس $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{۴}{۹}$ و در نتیجه $DE = ۴y$ و $BC = ۹y$ است. می‌دانیم با رسم قطر هر ذوزنقه، دو مثلث هم‌ارتفاع به وجود می‌آید؛ پس:



$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{۹y}{۴y} = ۲/۲۵$$

۶۳ گزینه ۲ اول به کمک قضیهٔ تالس مقدار x را به دست می‌آوریم:



جزءبه‌جزء: $\frac{۵}{x} = \frac{۳x-۴}{۴} \Rightarrow ۲۰ = x(۳x-۴)$

$$\Rightarrow ۳x^۲ - ۴x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴(۳)(-۲۰)}}{۶}$$

$$= \frac{۴\pm\sqrt{۲۵۶}}{۶} \xrightarrow{x>۰} x = \frac{۴+۱۶}{۶} = \frac{۱۰}{۳}$$

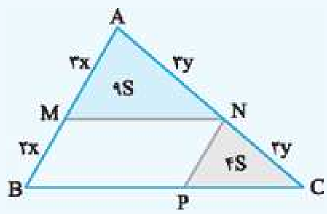
حالا با توجه به این‌که مثلث‌های AEB و DEC طبق ساختار تالسی متشابه هستند، داریم:

$$\frac{S_{AEB}}{S_{DEC}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^۲ = \left(\frac{۵}{۵+x}\right)^۲ \xrightarrow{x=\frac{۱۰}{۳}} \frac{S_{AEB}}{S_{DEC}} = \left(\frac{۵}{۵+\frac{۱۰}{۳}}\right)^۲$$

$$= \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{AEB} = ۹S \ , \ S_{DEC} = ۲۵S$$

بنابراین مساحت ذوزنقه $S_{ABCD} = ۲۵S - ۹S = ۱۶S$ بوده و نسبت مورد نظر برابر $\frac{S_{ABCD}}{S_{AEB}} = \frac{۱۶}{۹}$ است.

۶۴ گزینه ۱ چون $MN \parallel BC$، پس طبق قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} AM = ۳x \ , \ MB = ۲x \\ AN = ۳y \ , \ NC = ۲y \end{cases}$$

اطلاعات بالا را روی شکل می‌نویسیم. مثلث‌های AMN و ABC، طبق ساختار تالسی متشابه‌اند؛ پس نسبت مساحتشان می‌شود:

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{MB}\right)^۲ = \left(\frac{۳x}{۵x}\right)^۲ = \frac{۹}{۲۵} \Rightarrow S_{AMN} = ۹S, S_{ABC} = ۲۵S$$

به همین ترتیب برای مثلث‌های NPC و ABC هم داریم:

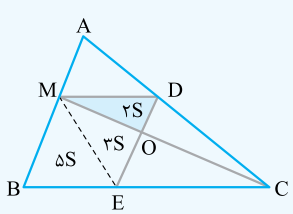
$$\frac{S_{NPC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{CN}{CA}\right)^۲ = \left(\frac{۲y}{۵y}\right)^۲ \xrightarrow{S_{ABC}=۲۵S} \frac{S_{NPC}}{۲۵S} = \frac{۴}{۲۵}$$

$\Rightarrow S_{NPC} = ۴S$

بنابراین نسبت مساحت متوازی‌الاضلاع MNPB به مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{S_{MNPB}}{S_{ABC}} = \frac{۲۵S - ۹S - ۴S}{۲۵S} = \frac{۱۲S}{۲۵S} = \frac{۴۸}{۱۰۰}$$

۶۵ گزینه ۱ از نمادگذاری شکل مقابل استفاده می‌کنیم. قطر ME از متوازی‌الاضلاع BMDE را رسم می‌کنیم. چون $DE \parallel AB$ است، پس $\frac{OD}{OE} = \frac{AM}{MB} = \frac{۲}{۳}$. از طرفی مثلث‌های MOD و MOE هم‌ارتفاع‌اند؛ بنابراین:

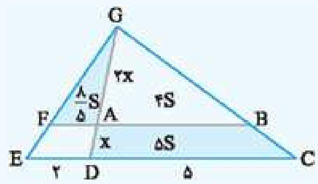


$$\frac{S_{MOD}}{S_{MOE}} = \frac{OD}{OE} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow S_{MOD} = ۲S \ , \ S_{MOE} = ۳S$$

می‌دانیم با رسم قطر هر متوازی‌الاضلاع دو مثلث همنهشت به وجود می‌آید؛ پس: $S_{BME} = S_{MOE} = ۲S + ۳S \Rightarrow S_{BME} = ۵S$

$$\Rightarrow \frac{S_{MOD}}{S_{BMDE}} = \frac{۲S}{۱۰S} = \frac{۲۰}{۱۰۰}$$

۶۶ گزینه ۳ چون $DG = ۳DA$، پس می‌توانیم فرض کنیم که $DA = x$، $DG = ۳x$ و در نتیجه $AG = ۲x$ باشد. از آن‌جایی که مثلث‌های AGB و DGC طبق ساختار تالسی متشابه‌اند، نسبت مساحتشان می‌شود:



$$\frac{S_{AGB}}{S_{DGC}} = (\frac{GA}{GD})^۲ = (\frac{۲x}{۳x})^۲ = \frac{۴}{۹} \Rightarrow S_{AGB} = ۴S , S_{DGB} = ۹S$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = ۹S - ۴S = ۵S$$

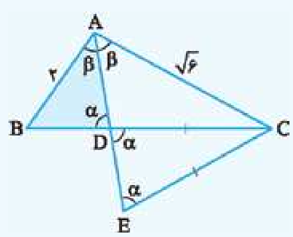
گفتیم که در شکل بالا رابطهٔ $\boxed{\frac{S_{AGB}}{S_{AGF}}} = \frac{S_{ABCD}}{S_{AFED}} = \frac{AB}{AF} = \boxed{\frac{DC}{DE}}$ برقرار است، پس:

$$\frac{S_{AGB}}{S_{AGF}} = \frac{DC}{DE} \Rightarrow \frac{۴S}{S_{AGF}} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow S_{AGF} = \frac{۸S}{۵}$$

بنابراین نسبت مساحت مثلث AGF به ذوزنقهٔ ABCD برابر است با:

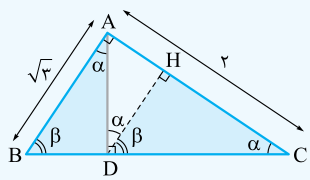
$$\frac{S_{AGF}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۸}{۵}S}{۵S} = \frac{۸}{۲۵} = \frac{۳۲}{۱۰۰}$$

۶۷ گزینه ۲ چون $CE = CD$ است، پس مثلث CDE متساوی‌الساقین و در نتیجه $\hat{D} = \hat{E} = \alpha$ است. از طرفی AD نیمساز زاویهٔ A است، بنابراین $B\hat{A}D = D\hat{A}C = \beta$ و در نتیجه مثلث‌های ABD و ACE با دو زاویهٔ برابر α و β متشابه بوده و نسبت مساحتشان می‌شود:



$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = (\frac{AB}{AC})^۲ = (\frac{۲}{\sqrt{۶}})^۲ = \frac{۲}{۳}$$

۶۸ گزینه ۳ ابتدا به کمک قضیهٔ فیثاغورس طول ضلع BC را به دست می‌آوریم:



$$BC = \sqrt{۲^۲ + \sqrt{۳}^۲} = \sqrt{۷}$$

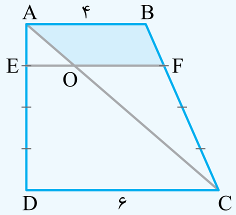
در ادامه به کمک روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC طول CD را حساب می‌کنیم:

$$AC^۲ = CD \times BC \Rightarrow ۲^۲ = CD \times \sqrt{۷} \Rightarrow CD = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$

حالا اگر زوایای برابر دو مثلث رنگی را مطابق شکل بالا مشخص کنیم، متوجه می‌شویم که مثلث‌های HDC و ABD با دو زاویهٔ برابر α و β متشابه‌اند؛ پس نسبت مساحتشان می‌شود:

$$\frac{S_{HDC}}{S_{ABD}} = (\underbrace{\frac{CD}{AB}}_{\text{رو به } ۹۰^\circ})^۲ \xrightarrow[CD=\frac{۴}{\sqrt{۷}}]{AB=\sqrt{۳}} \frac{S_{ABD}}{S_{HDC}} = (\frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}})^۲ = \frac{۱۶}{۲۱}$$

۶۹ گزینه ۱ از نمادگذاری شکل زیر استفاده می‌کنیم. چون $\frac{۱}{۳} = \frac{BF}{FC} = \frac{AE}{ED}$، پس طبق عکس قضیهٔ تالس در ذوزنقه، $EF \parallel AB \parallel DC$ است؛ بنابراین مثلث‌های COF و ABC طبق ساختار تالسی متشابه‌اند، در نتیجه:



$$\frac{S_{COF}}{S_{ABC}} = (\frac{CF}{BC})^۲ = (\frac{۳}{۴})^۲ = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow S_{COF} = ۹S , S_{ABC} = ۱۶S$$

$$\Rightarrow S_{ABFO} = ۱۶S - ۹S = ۷S$$

از طرفی مثلث‌های ABC و ADC هم‌ارتفاع هستند؛ بنابراین نسبت مساحت‌هایشان برابر است با نسبت قاعده‌هایشان، یعنی:

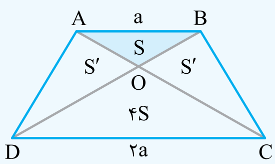
$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{DC} \xrightarrow{S_{ABC}=۱۶S} \frac{۱۶S}{S_{ADC}} = \frac{۴}{۶}$$

$$\Rightarrow S_{ADC} = ۲۴S \Rightarrow S_{ABCD} = ۲۴S + ۱۶S = ۴۰S$$

بنابراین نسبت مساحت ذوزنقهٔ ABFO به ذوزنقهٔ ABCD برابر است با:

$$\frac{S_{ABFO}}{S_{ABCD}} = \frac{۷S}{۴۰S} = \frac{۱۷/۵}{۱۰۰}$$

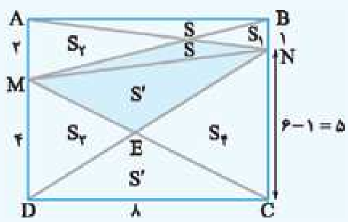
۷۰ گزینه ۳ فرض می‌کنیم طول قاعده‌های ذوزنقهٔ a و ۲a باشد؛ بنابراین مثلث‌های AOB و DOC با نسبت تشابه ۲ متشابه‌اند و در نتیجه می‌توانیم مساحت‌های آن‌ها را مطابق شکل S و ۴S در نظر بگیریم. از طرفی می‌دانیم در ذوزنقه، حاصل‌ضرب مساحت مثلث‌های روبه‌روی هم (AOD و BOC) برابرند؛ یعنی:



$$S'^۲ = S \times ۴S = ۴S^۲ \Rightarrow S' = ۲S$$

بنابراین نسبت مساحت ذوزنقه به مساحت مثلث رنگی برابر $\frac{S+۴S+۲S+۲S}{S} = ۹$ است.

۷۱ گزینه ۱ از M به N وصل می‌کنیم تا ذوزنقه‌های ABNM و MNCD درست بشوند. در ذوزنقهٔ ABNM داریم:



$$\frac{S_۱}{S_۲} = (\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \begin{cases} S_۱ = A \\ S_۲ = ۴A \end{cases} \xrightarrow{S^۲ = S_۱ \times S_۲} S^۲ = ۴A^۲$$

$$\Rightarrow S = ۲A$$

برای مساحت قسمت‌های مختلف ذوزنقهٔ MNCD هم می‌توانیم بنویسیم.

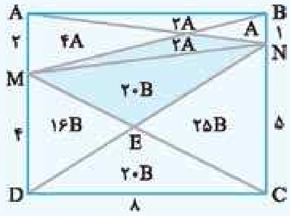
$$\frac{S_۳}{S_۴} = (\frac{۴}{۵})^۲ = \frac{۱۶}{۲۵} \Rightarrow \begin{cases} S_۳ = ۱۶B \\ S_۴ = ۲۵B \end{cases}$$

$$\xrightarrow{S'^۲ = S_۳ \times S_۴} S'^۲ = ۱۶ \times ۲۵ \times B^۲ \Rightarrow S' = ۴ \times ۵ \times B = ۲۰B$$

مثلث‌های AMN و MND هم‌ارتفاع‌اند، پس نسبت مساحت‌هایشان برابر نسبت قاعده‌هایشان است؛ یعنی: $\frac{S_{AMN}}{S_{MND}} = \frac{AM}{MD} \Rightarrow \frac{S+S_۲}{S'+S_۳} = \frac{۲}{۴}$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{۲A+۴A}^{۶A}}{\underbrace{۲۰B+۱۶B}_{۳۶B}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{A}{۶B} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A = ۳B \quad (*)$$

حالا با توجه به این‌که مساحت مستطیل برابر $48 = 8 \times 6$ است، مقدار B را پیدا می‌کنیم:



$$(A+4A+2A+2A)+(16B+25B+20B+20B)=48$$

$$\Rightarrow 9A+81B=48 \xrightarrow{(*)} 9(3B)+81B=48$$

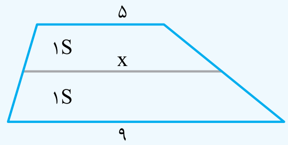
$$\Rightarrow 108B=48 \Rightarrow B=\frac{48}{108}=\frac{4}{9}$$

بنابراین مساحت ناحیهٔ رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}}=2A+20B=2(3B)+20B=26B$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=26\times\frac{4}{9}=\frac{104}{9}$$

۷۲ گزینه ۲ طول پاره‌خط مورد نظر برابر است با:



$$x^2=\frac{(1\times 9^2)+(1\times 5^2)}{1+1}=\frac{106}{2} \Rightarrow x^2=53 \Rightarrow x=\sqrt{53}$$

فصل سوم
چندضلعی‌ها

۷۳ گزینه ۱ فرض می‌کنیم با یک nضلعی طرف هستیم. در این صورت چون تعداد قطرها، یعنی $\frac{n(n-3)}{2}$، با تعداد اضلاع، یعنی n برابر است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{n(n-3)}{2}=n \Rightarrow \cancel{n}(n-3)=2\cancel{n} \Rightarrow n=5$$

بنابراین باید هر زاویهٔ داخلی یک ۵ضلعی منتظم را پیدا کنیم که می‌شود:

$$\frac{180^\circ(5-2)}{5}=36^\circ\times 3=108^\circ$$

۷۴ گزینه ۳ اول نکتهٔ زیر را ببینید:

نکته از هر رأس یک nضلعی، $n-3$ قطر می‌گذرد؛ مثلاً از هر رأس یک ۵ضلعی، $5-3=2$ قطر می‌گذرد.

فرض می‌کنیم تعداد اضلاع چندضلعیِ گفته‌شده n باشد، در این صورت چون تعداد قطرها ۲۰تا است؛ پس:

$$\frac{n(n-3)}{2}=20 \Rightarrow \underbrace{n(n-3)}_{\text{۳ واحد اختلاف}}=40=\underbrace{8\times 5}_{\text{۳ واحد اختلاف}} \Rightarrow n=8$$

بنابراین یک ۸ضلعی داریم که می‌خواهیم ببینیم از هر رأسش چند قطر می‌گذرد. طبق نکتهٔ بالا جواب می‌شود $8-3=5$.

۷۵ گزینه ۲ چون تعداد قطرهای هر nضلعی $\frac{n(n-3)}{2}$ است، پس با کم‌شدن یک ضلع، تعداد قطرها می‌شود:

$$\frac{(n-1)[(n-1)-3]}{2}=\frac{(n-1)(n-4)}{2}$$

به گفتهٔ سؤال با کم‌شدن یک ضلع، از تعداد قطرها ۱۶تا کم می‌شود؛ بنابراین:

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{(n-1)(n-4)}{2}=16$$

$$\Rightarrow \frac{(n^2-3n)-(n^2-5n+4)}{2}=16 \Rightarrow \frac{2n-4}{2}=16$$

$$\Rightarrow n-2=16 \Rightarrow n=18$$

بنابراین یک ۱۸ضلعی داریم که می‌خواهیم ببینیم اگر دو ضلع از ضلع‌هایش کم بشود، از تعداد قطرهایش چه‌قدر کم می‌شود. برای این کار تعداد قطرهای یک ۱۶ضلعی را از تعداد قطرهای یک ۱۸ضلعی کم می‌کنیم؛ ببینید:

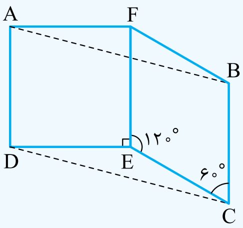
$$\frac{18(18-3)}{2}-\frac{16(16-3)}{2}=9\times 15-8\times 13=135-104=31$$

می‌توانستیم بدون محاسبهٔ عدد آخر هم به جواب برسیم:

عددی که رقم یکانش یکه $= \cdots 5 - \cdots 4 = \underbrace{9\times 15}_{\text{رقم یکان: ۵}} - \underbrace{8\times 13}_{\text{رقم یکان: ۴}} = \cdots$

$\xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}}$ ۳۱ جواب درسته

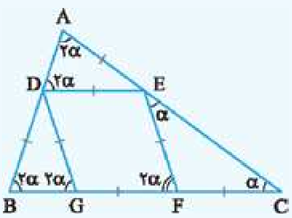
۷۶ گزینه ۲ می‌دانیم در لوزی زاویه‌های مجاور مکمل‌اند، پس مطابق شکل، $F\hat{E}C=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ و در نتیجه زاویهٔ DEC می‌شود:



$$D\hat{E}C=360^\circ-(90^\circ+120^\circ)=150^\circ$$

همان‌طور که در شکل می‌بینید، لوزی و مربع در ضلع EF مشترک‌اند، پس طول همهٔ اضلاع آن‌ها با هم برابر است. درنتیجه $DE=EC$ و مثلث DEC متساوی‌الساقین است؛ بنابراین زاویه‌های زیر ساق در این مثلث، $\frac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$ هستند. حالا خوب به متوازی‌الاضلاع ABCD نگاه کنید، زاویهٔ ADC در این متوازی‌الاضلاع برابر $90^\circ+15^\circ=105^\circ$ و زاویهٔ BCD برابر $60^\circ+15^\circ=75^\circ$ است؛ بنابراین بزرگ‌ترین زاویهٔ متوازی‌الاضلاع 105° است.

۷۷ گزینه ۲ اول زاویه‌های زیر ساق را در مثلث متساوی‌الساقین EFC برابر α قرار می‌دهیم. (به شکل مقابل نگاه کنید.) زاویهٔ EFG، زاویهٔ خارجی مثلث EFC است، پس این زاویه برابر می‌شود با جمع زاویه‌های $F\hat{E}C=\alpha$ و $E\hat{C}F=\alpha$؛ یعنی:



$$E\hat{F}G=\alpha+\alpha=2\alpha$$

حالا خوب به چهارضلعی DEFG نگاه کنید. همان‌طور که می‌بینید طول ضلع‌های این چهارضلعی برابرند، پس DEFG یک لوزی است. می‌دانیم ضلع‌های مقابل لوزی موازی‌اند؛ بنابراین با توجه به قضیهٔ خطوط موازی و مورب و متساوی‌الساقین‌بودن مثلث‌های BDG و ADE داریم:

$$\begin{cases} DG \parallel EF \\ BC: \text{مورب} \end{cases} \Rightarrow D\hat{G}B=E\hat{F}G=2\alpha$$

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{BDG}\ \text{متساوی‌الساقین است.}} D\hat{B}G=D\hat{G}B=2\alpha$$

$$\begin{cases} DE \parallel BC \\ AB: \text{مورب} \end{cases} \Rightarrow A\hat{D}E=\hat{B}=2\alpha$$

$$\xrightarrow{\overset{\Delta}{AED}\ \text{متساوی‌الساقین است.}} D\hat{A}E=A\hat{D}E=2\alpha$$

در آخر برای به دست آوردن زاویهٔ A، کافی است مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ABC را مساوی با 180° بگذاریم:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow 2\alpha+2\alpha+\alpha=180^\circ \Rightarrow 5\alpha=180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha=36^\circ \xrightarrow{\hat{A}=2\alpha} \hat{A}=2\times 36^\circ=72^\circ$$