

## سلام

با شنیدن کلمه جمع‌بندی یاد چه چیزهایی می‌افتید؟  
بسته‌بندی، خالی‌بندی، کادربندی، جدول‌بندی، چشم‌بندی، تیتربندی و ...  
راستش را بخواهید یک کتاب جمع‌بندی ممکن است به جای این که جمع‌بندی باشد، هر کدام از موارد بالا باشد!  
حتماً می‌پرسید چه‌طور؟ جوابش این است که این‌طور:

● اگر کتاب جمع‌بندی طوری نوشته شود که شامل تمام موارد و مفاهیم و نکات باشد و سعی کند هیچ چیزی را از قلم نیندازد، دیگر جمع‌بندی نیست، بلکه بسته‌بندی است. ما در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم این کار را نکنیم؛ فقط موارد اصلی و مهم و حیاتی را آورده‌ایم.

● اگر کتاب جمع‌بندی ادعا کند تمام کنکور را پوشش می‌دهد و همه چیز را دارد و می‌تواند دانش‌آموز را به درصد ۱۰۰ و یا حتی بالاتر برساند، باز هم جمع‌بندی نیست؛ خالی‌بندی است. ما اما، هدفمان در این کتاب‌ها تمرکز کردن روی نکات مهم است، همه چیز را نگفته‌ایم و سعی نکرده‌ایم همه تست‌های کنکور را حدس بزنی؛ فقط در حد لازم و البته کافی.

● اگر کتاب جمع‌بندی فرقی با کتاب تست معمولی این باشد که مطالب را در جدول و کادر و نمودار بیاورد، می‌شود کتاب کادربندی یا جدول‌بندی.

● اگر کتاب جمع‌بندی ادعا کند که می‌تواند در یک زمان کوتاه چند هفته‌ای، درصد دانش‌آموز را ۶۰ تا ۸۰ درصد بالا ببرد (تازه بعضی‌ها تا ۱۰۰ درصد هم ادعا می‌کنند) کتاب چشم‌بندی است.

● اگر کتاب جمع‌بندی، توضیح و مثال درست و حسابی نداشته باشد و مطالب را تیتروار بیان کند و سریع از هر موضوعی عبور کند، می‌شود کتاب تیتربندی.

خب، دیگر بس است، هر چه که توانستیم در مورد کتاب‌های دیگران غیبت کردیم. اصلاً به ما و شما چه ربطی دارد که بقیه چه‌طورند؟ ما کتابی نوشته‌ایم که قرار است:

● به شما کمک کند در زمان کوتاه یک دوره کامل از تمام مفاهیم اصلی و مهم کتاب درسی‌تان داشته باشید.

● تیپ‌ها و شکل‌های متداول سؤال‌ها را ببینید.

● با مثال‌ها و تمرین‌های مهم کتاب درسی آشنا شوید.

● نمونه سؤال‌های برگزیده آزمون‌های سراسری سال‌های قبل را ببینید.

با این هدف‌ها، برای نوشتن کتاب‌های جمع‌بندی، رفتیم سراغ حرفه‌ای‌ترین مؤلف‌ها: همه تلاشمان را کردیم که برای هر کدام از درس‌ها یک کتاب ویژه، خوب، به درد بخور، خوش‌دست، خواندنی و جمع‌وجور بنویسیم. به نظرم که توانسته‌ایم قسمت زیادی از آن چه را که می‌خواستیم، انجام دهیم.

اما این که خودمان بنشینیم و قربان خودمان برویم که کاری ندارد! شما هستید که باید بگویید کارمان چه‌طور بوده؟ آیا کتابی که در دست دارید همه این خوبی‌هایی که گفتیم را دارد؟

برای جواب دادن به این سؤال باید شروع کنید به خواندنش؛ جمع‌وجور و روان هم که هست، پس خیلی طول نمی‌کشد. بعدش برایمان بنویسید که به نظرتان چند چندیم؟ خوبی‌های کتاب و همین‌طور بدی‌هایش را به ما بگویید. به نظرتان چه چیزهایی باید اضافه یا کم شوند؟ و خلاصه‌اش این که ما برایتان یک کتاب جمع‌وجور نوشته‌ایم، اما شما برایمان یک جواب مفصل بنویسید.

خوش و خاطرمع باشید.

پرواز را یاد بگیر  
نه برای این که از زمین جدا شوی؛  
برای آن که به اندازه فاصله زمین تا آسمان گسترده شوی ...

## سلام به «خیلی سبز»ی های عزیز!

بدون هیچ مقدمه ای یک راست می رویم سراغ ساختار کتاب جمع بندی هندسه ۳ 😊  
در این کتاب (مثل کتاب درسی) با سه فصل روبه رو هستیم. هر فصل به چند موضوع تقسیم شده و در مورد هر موضوع توضیحات کافی داده شده و هر کجا لازم بوده برای حل مسائل، **استراتژی حل مسئله** ارائه شده تا یک دسته بندی خوب و کاربردی در ذهن شما شکل بگیرد؛ پس از آن چند نمونه تست که شامل تست های کنکورهای سراسری سال های گذشته و تست های برگرفته از تمارین کتاب درسی است آورده شده است. ضمناً در انتهای هر فصل یک آزمون گذاشتیم که خودتان را بیازمایید. 😊  
راستی! سه آزمون جامع هم در انتهای کتاب داریم؛ از حل تست های آن ها غافل نشوید!  
تمام تلاش ما بر این بوده که هر چه برای پاسخگویی به سؤالات کنکور نیاز دارید، در قالب کتابی با حجم کم برای شما تدارک ببینیم.  
مطمئن باشید اگر تسلط خوبی روی تمارین کتاب درسی و کنکورهای سال های قبل داشته باشید، به راحتی می توانید به تمام سؤالات هندسه ۳ در کنکور پاسخ دهید.  
در پایان لازم است از دوست خوبم دکتر کوروش اسلامی به خاطر همراهی هایش تشکر ویژه داشته باشم.  
از خانم ها مرادی، فلاحی و نظری به خاطر پیگیری های مداوم و منظم سپاس گزارم.  
از ویراستاران علمی به خصوص خانم زهرا جالینوسی و همکاران تولید بابت زحماتی که کشیدند ممنونم.  
بدون تردید نظرات یکایک معلمان گرامی و دانش آموزان عزیز برای ما بسیار مهم و ذی قیمت است و به ما در بهتر شدن این کتاب کمک شایانی خواهد کرد.  
منتظر نظرات شما از طریق سایت یا صفحات مجازی خیلی سبز هستیم.

در پناه خدا باشید

مهریار راشدی

mehryar.rashedi@modares.ac.ir

## فصل اول

- ۷ ..... ماتریس و کاربردها
- ۳۱ ..... پاسخنامه تشریحی آزمون فصل اول

## فصل دوم

- ۳۲ ..... آشنایی با مقاطع مخروط
- ۶۴ ..... پاسخنامه تشریحی آزمون فصل دوم

## فصل سوم

- ۶۶ ..... بردارها
- ۸۹ ..... پاسخنامه تشریحی آزمون فصل سوم

## آزمون‌های جامع

- ۹۰ ..... آزمون‌های جامع
- ۹۲ ..... پاسخنامه تشریحی آزمون‌های جامع
- ۹۶ ..... پاسخنامه کلیدی

# ماتریس و کاربردها

## فصل ۱

### ماتریس و اعمال روی ماتریس

ماتریس، آرایشی مستطیلی از اعداد حقیقی است که به هر عضو آن «درایه» می‌گوییم. هر ماتریس از تعدادی سطر و تعدادی ستون تشکیل شده است. اگر ماتریس  $A$ ،  $m$  سطر و  $n$  ستون داشته باشد، مرتبه ماتریس  $A$ ،  $m \times n$  است و آن را به صورت  $A_{m \times n}$  یا  $A = [a_{ij}]_{m \times n}$  نمایش می‌دهیم.  $a_{ij}$  یعنی درایه واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A$  است. ماتریس مقابل دارای ۳ سطر و ۲ ستون است، پس مرتبه آن  $3 \times 2$  است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{سطر اول} \\ \rightarrow \text{سطر دوم} \\ \rightarrow \text{سطر سوم} \end{array}$$

↑                    ↑  
ستون اول      ستون دوم

#### ماتریس‌های خاص

$$\bar{O}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[a \ b \ c \ d]_{1 \times 4}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

- ۱ **ماتریس صفر:** ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر است و آن را با  $\bar{O}$  نمایش می‌دهیم.
- ۲ **ماتریس سطری:** ماتریسی که فقط یک سطر دارد؛ مرتبه این ماتریس  $1 \times n$  است.
- ۳ **ماتریس ستونی:** ماتریسی که فقط یک ستون دارد؛ مرتبه این ماتریس  $n \times 1$  است.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

↓                    ↓  
قطر اصلی      قطر فرعی

۴ **ماتریس مربعی:** ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابرند؛ مرتبه این ماتریس  $n \times n$  است. این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی است. در درایه‌های بالای قطر اصلی ماتریس مربعی  $i < j$ ، روی قطر اصلی  $i = j$  و پایین قطر اصلی  $i > j$  است. ( $i$  شماره سطر و  $j$  شماره ستون درایه  $a_{ij}$  است.)

$$\begin{bmatrix} a & d & e \\ \cdot & b & f \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

۵ **ماتریس بالامثلثی:** ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ d & b & \cdot \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

۶ **ماتریس پائین‌مثلثی:** ماتریسی است مربعی که همه درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند.

$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & a & \cdot \\ \cdot & \cdot & a \end{bmatrix}$$

۷ **ماتریس اسکالر:** ماتریسی است قطری که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابرند.

$$\begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ \cdot & b & \cdot \\ \cdot & \cdot & c \end{bmatrix}$$

۸ **ماتریس همانی (واحد):** ماتریسی است اسکالر که درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشند.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

گاهی ماتریس همانی را به صورت  $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$  و  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  نمایش می‌دهند.

#### اعمال مقدماتی روی ماتریس‌ها

۱ **جمع و تفریق:** اگر دو ماتریس هم‌مرتبه باشند، با جمع و تفریق کردن درایه‌های نظیر دو ماتریس، جمع یا تفریق دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

**مثال** اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $a_{ij} = \begin{cases} i-j & i > j \\ i+j & i \leq j \end{cases}$ ، حاصل  $I - A$  کدام است؟

**خواست باشه**  $i$  شماره سطر و  $j$  شماره ستون درایه است. 😊

**پاسخ**  $I$  ماتریس همانی است که با آن آشنا هستیم؛ اگر تکلیف  $A$  را روشن کنیم، همه چیز حل است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 2-1 & 2+2 & 2+3 \\ 3-1 & 3-2 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

قبلاً گفته بودیم در درایه‌های بالای قطر اصلی  $i < j$ ، روی قطر اصلی  $i = j$  و پایین قطر اصلی  $i > j$  است؛ بنابراین:

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -5 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

**۲. ضرب عدد در ماتریس** اگر عددی در ماتریس ضرب شود، در تمام درایه‌های آن ضرب می‌شود.

$$-2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

### ویژگی‌های جمع و تفریق و ضرب عدد در ماتریس

- اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  هم‌مرتبه باشند:
- $A + B = B + A$  (خاصیت جابه‌جایی)
  - $A + \vec{0} = A$  (خاصیت عضو خنثی در جمع)
  - $0 \times A = \vec{0}$
  - $A \times I = I \times A = A$  (خاصیت عضو خنثی در ضرب)
  - $A + (-A) = \vec{0}$  (خاصیت عضو قرینه)
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$  (خاصیت شرکت‌پذیری)
  - $k(A \pm B) = kA \pm kB$  ( $k$  عددی حقیقی است).

**۳. ضرب دو ماتریس** اگر  $A_{m \times \ell}$  و  $B_{\ell \times n}$  باشد، در صورتی  $A \times B$  تعریف می‌شود که  $\ell = k$  باشد. یعنی ضرب دو ماتریس زمانی وجود دارد که تعداد ستون‌های ماتریس اول و تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشند.

$$A_{m \times \ell} \times B_{\ell \times n} = C_{m \times n} ; A_{2 \times 3} \times B_{3 \times 4} = C_{2 \times 4}$$

برای ضرب دو ماتریس، از ماتریس اول، سطر و از ماتریس دوم، ستون برمی‌داریم و درایه‌های هر سطر در ستون به صورت نظیر به نظیر ضرب و حاصل با هم جمع می‌شود و در ماتریس حاصل ضرب جایگزین می‌شود.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & -1+2 \\ -1+0 & 1+0 \\ 2+0 & -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

### ویژگی‌های ضرب دو ماتریس

- در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.  $AB \neq BA$
- (ضرب ماتریس همانی  $I$ ) در ماتریس  $A$  خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی:  $AI = IA = A$
- ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت‌پذیری دارد.  $(AB)C = A(BC)$
- در ضرب ماتریس‌ها خاصیت توزیع‌پذیری (و فاکتورگیری) برقرار است.  $A \times (B \pm C) = A \times B \pm A \times C$  و  $(B \pm C) \times A = B \times A \pm C \times A$
- حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست، یعنی اگر  $AB = AC$  باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت  $B = C$  است.
- اگر حاصل ضرب دو ماتریس صفر شود، نمی‌توان نتیجه گرفت یکی از دو ماتریس صفر بوده است.  $AB = \vec{0} \Rightarrow A = \vec{0}$  یا  $B = \vec{0}$
- حاصل ضرب دو ماتریس  $A$  و  $B$  صفر شده اما هیچ‌کدام صفر نبوده‌اند.
- حاصل ضرب دو ماتریس قطری، یک ماتریس قطری است و از ضرب نظیر به نظیر درایه‌های روی قطر اصلی دو ماتریس به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 0 & 0 \\ 0 & be & 0 \\ 0 & 0 & cf \end{bmatrix}$$

۱- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$  و  $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} i^2 + 1 & i = j \\ i + j & i > j \\ i - j + 2 & i < j \end{cases}$  و  $b_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i = j \\ i - j & i > j \\ j - i & i < j \end{cases}$  باشند، کدام  $A \times B$  است؟ (تمرین کتاب درسی)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 5 & 18 & 19 \\ 5 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad (4) \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \quad \begin{bmatrix} -1 & -5 & -5 \\ 5 & 18 & 19 \\ 5 & 11 & 13 \end{bmatrix} \quad (2) \quad \begin{bmatrix} -3 & -5 & -1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

پایخ کویف (۱۳) اول باید A و B را مشخص کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 - 1 & 2 - 1 \\ 2 - 1 & 2^2 - 1 \\ 3 - 1 & 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 + 1 & 1 - 2 + 2 & 1 - 3 + 2 \\ 2 + 1 & 2^2 + 1 & 2 - 3 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 11 & 16 & 3 \\ 7 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، به ازای کدام مقدار x، مجموع درایه‌های قطر اصلی و فرعی ماتریس D برابر هستند؟

(سراسری ریاضی ۱۴۰۲)

$$6 \quad (4) \quad 5 \quad (3) \quad -3 \quad (2) \quad -4 \quad (1)$$

پایخ کویف (۱۱) ابتدا حاصل  $A \times B$  را پیدا می‌کنیم و سپس در ماتریس C ضرب می‌کنیم تا درایه‌های D مشخص شود.

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & \bigcirc & x+1 \\ \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ -2x-7 & \bigcirc & -3 \end{bmatrix}$$

با مساوی قراردادن مجموع درایه‌های قطر اصلی و قطر فرعی داریم:

$$(x+5) + 0 + (-3) = (x+1) + 0 + (-2x-7) \Rightarrow 2 = -2x-6 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$

۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $A \times B$  یک ماتریس قطری باشد، مجموع درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی  $B \times A$  کدام است؟

$$24 \quad (4) \quad 14 \quad (3) \quad 8 \quad (2) \quad \text{صفر} \quad (1)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8 \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix}$$

پایخ کویف (۱۶) همین اول کار باید تکلیف  $A \times B$  را روشن کنیم!

$$\begin{cases} b-3=0 \Rightarrow b=3 \\ 2a-8=0 \Rightarrow a=4 \end{cases}$$

برای این که  $A \times B$  قطری باشد، باید درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی صفر باشند، پس:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 18 & 10 \end{bmatrix}$$

حالا که A و B را داریم،  $B \times A$  را می‌یابیم:

$$6 + 18 = 24$$

بنابراین مجموع درایه‌های غیرواقعی بر قطر اصلی  $B \times A$  برابر است با:

حواست باشه اگر  $A \times B$  قطری باشد، دلیلی وجود ندارد که  $B \times A$  هم قطری باشد.

۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$  و ماتریس  $AB$  به ازای  $y \in \mathbb{Z}$  ماتریس اسکالر باشد، مقدار  $xy$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۱)

**پاسخ** گزینه (۲) ابتدا باید  $AB$  را پیدا کنیم و سپس از اسکالربودن  $AB$  برای یافتن  $x$  و  $y$  کمک بگیریم.

$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xz - 2z & 0 & 2x + 4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz + 2z^2 & \frac{y}{2} + \frac{z}{2} & 2y - 4yz \end{bmatrix}$$

در هر ماتریس اسکالر (۱) درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفرند و (۲) درایه‌های واقع بر قطر اصلی با هم برابرند.

$2xz + 4y = 0 \Rightarrow x = -2y$   $AB$  اسکالر است؛ پس باید درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی، صفر و درایه‌های واقع بر قطر اصلی، برابر باشند.

$\frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow z = -y$

$2y - 4yz = 2 \Rightarrow y - 2yz = 1 \xrightarrow{z=-y} y - 2y(-y) = 1 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow (2y - 1)(y + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \\ y = -1 \end{cases}$

از آن جا که در صورت سؤال گفته شده  $y$  عددی صحیح است، پس  $y = -1$  قابل قبول است. با داشتن مقدار  $y$ ، مقدار  $x$  به راحتی به دست می‌آید.

$x = -2y \Rightarrow x = -2(-1) = 2$

$xy = (2)(-1) = -2$

بنابراین:

۵- از رابطه ماتریسی  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ ، عدد غیر صفر  $x$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۸)

(۱)  $\frac{2}{9}$  (۲)  $\frac{3}{8}$  (۳)  $\frac{4}{9}$  (۴)  $\frac{3}{5}$

**پاسخ** گزینه (۱) ابتدا حاصل ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}$  را به دست می‌آوریم.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2x - 1 \\ 4x + 0 + 2 \\ x + 4x + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 1 \\ 4x + 2 \\ 5x \end{bmatrix}$$

حالا باید حاصل ضرب ماتریس  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  را در ماتریس بالا به دست آوریم و برابر صفر قرار دهیم تا  $x$  پیدا شود.

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 1 \\ 4x + 2 \\ 5x \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x(x - 1) + 2x(4x + 2) - 1(5x) = 0 \Rightarrow x^2 - x + 8x^2 + 4x - 5x = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0$

$\Rightarrow x(9x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{9} \end{cases}$

سؤال، عدد غیر صفر  $x$  را خواسته؛ پس جواب سؤال  $x = \frac{2}{9}$  است.

۶- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی  $2 \times 2$  باشند که  $BA = \begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ b+1 & 2c \end{bmatrix}$  و  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$  و  $A + B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ ، حاصل  $a + b + c$  کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) -۶

**پاسخ** گزینه (۲) در عبارت ماتریسی داده شده در صورت سؤال، از  $A$  (از راست) و از  $B$  (از چپ) فاکتور می‌گیریم، داریم:

$B \left( \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \right) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow B \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow B(2I)A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

در صورت سؤال هم  $BA$  را داریم، البته با سه تا مجهول!

$\begin{bmatrix} a-1 & 2 \\ b+1 & 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a-1=1 \Rightarrow a=2 \\ b+1=3 \Rightarrow b=2 \\ 2c=4 \Rightarrow c=2 \end{cases}$

کافی است این  $BA$  را مساوی آن  $BA$  قرار دهیم. 😊

$a + b + c = 2 + 2 + 2 = 6$

بنابراین:

۷- ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  مفروض است. اگر ضرب دو ماتریس  $A$  و  $B$  تعویض پذیر باشد، مجموع درایه‌های روی قطر فرعی ماتریس  $B$  کدام است؟

۱) -۱      ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) بستگی به درایه‌های ماتریس  $B$  دارد.

**پاسخ** گزینه (۳) **روش اول:** ماتریس  $B$  را به صورت  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در نظر می‌گیریم. ضرب دو ماتریس  $A$  و  $B$  خاصیت جابه‌جایی دارد یعنی باید  $AB = BA$  باشد.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a-2c & 3b-2d \\ 2a+3c & 2b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+2b & -2a+3b \\ 3c+2d & -2c+3d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a-2c = 3a+2b \\ 3b-2d = -2a+3b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2c = 2b \Rightarrow b = -c \Rightarrow b+c = 0 \\ -2d = -2a \Rightarrow a = d \end{cases}$$

بنابراین:

$b+c$  صفر است، یعنی مجموع درایه‌های روی قطر فرعی صفر است.

**روش دوم:** ضرب دو ماتریس به فرم  $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$  (که درایه‌های روی قطر اصلی برابر و درایه‌های روی قطر فرعی قرینه‌اند) تعویض پذیرند و مجموع درایه‌های روی قطر فرعی آن‌ها صفر است.

### استراتژی حل مسئله

۱) اگر  $AB = C$  باشد، آن‌گاه درایه  $c_{ij}$  از ضرب سطر  $i$ ام ماتریس  $A$  و ستون  $j$ ام ماتریس  $B$  به دست می‌آید. مثلاً:

$$c_{33} = (\text{سطر دوم ماتریس } A) \times (\text{ستون سوم ماتریس } B)$$

۲) اگر  $ABC = D$  باشد، آن‌گاه درایه  $d_{ij}$  (درایه واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $D$ ) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d_{ij} = [\text{ستون } i\text{ام } A] \times [\text{ماتریس } B] \times [\text{سطر } j\text{ام } C]$$

$$d_{31} = [\text{سطر سوم ماتریس } A] \times B \times [\text{ستون اول ماتریس } C]$$

مثلاً:

۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ، درایه واقع در سطر دوم و ستون سوم  $BA - AB$  کدام است؟

۱) ۲      ۲) صفر      ۳) ۱      ۴) -۱

**پاسخ** گزینه (۳) برای یافتن درایه سطر دوم ستون سوم  $BA - AB$  باید درایه سطر دوم ستون سوم  $BA$  را منهای درایه سطر دوم ستون سوم  $AB$  کرد.

(درایه سطر دوم ستون سوم  $AB$ ) - (درایه سطر دوم ستون سوم  $BA$ ) = (درایه سطر دوم ستون سوم  $BA - AB$ )

$$= [\text{ستون سوم } B] [\text{سطر دوم } A] - [\text{سطر دوم } A] [\text{ستون سوم } B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = (0+2+1) - (0+0+4) = -1$$

۹- فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس  $A$  کدام است؟ (سراسری ریاضی ۱۴۰۰)

۱) ۳      ۲) ۵      ۳) ۱۲      ۴) ۱۳

**پاسخ** گزینه (۳) یک راه این است که دو ماتریس اول را ضرب کنیم و سپس حاصل را در ماتریس سوم ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس  $A$  مشخص شود. اما ساده‌تر این است که سطر سوم ماتریس اول را در دو ماتریس بعدی ضرب کنیم تا سطر سوم ماتریس  $A$  (مستقیم) به دست آید.

$$A \text{ سطر سوم ماتریس } = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:  $A$  سطر سوم ماتریس  $= \begin{bmatrix} 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$   $\Rightarrow$  مجموع درایه‌های سطر سوم ماتریس  $A$  برابر با  $7+1-5=3$  است.



۱۰- مجموع درایه‌های حاصل  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$  کدام است؟

۹ (۱)      ۷ (۲)      ۳ (۳) صفر      ۴ (۴) -۴

**پاسخ** گزینه (۱) در حالت کلی حاصل ضرب دو ماتریس  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$  به شکل  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$  است، بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -21 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -21 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -18 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به حاصل ضرب‌های بالا، درایه سطر دوم ستون اول ماتریس حاصل ضرب از مجموع درایه‌های سطر دوم ستون اول ماتریس‌های داده شده به دست می‌آید.

پس ماتریس حاصل ضرب به شکل  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$  و مجموع درایه‌های آن ۹ است.

**ماتریس و اتحاد** در حالت کلی اتحادها در ماتریس‌ها برقرار نیستند. مثلاً:  $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$  در صورتی رابطه بالا شکل اتحاد به خود می‌گیرد که  $AB = BA$  باشد.

### انستراتژی حل مسئله

اگر دو ماتریس  $A$  و  $B$  تعویض پذیر باشند یعنی  $AB = BA$  باشد، اتحادهای زیر برقرارند و اگر اتحادها در ماتریس‌ها برقرار باشند، دو

ماتریس تعویض پذیرند.  $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$        $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$        $A^2 + B^2 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

$A^2 - B^2 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$

**دقت کنید** اتحادهای فوق در مورد  $A$  و  $I$  برقرارند. (چرا؟) چون  $A$  و  $I$  تعویض پذیرند.

۱۱- اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ b+2 & 7 \end{bmatrix}$  و  $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$ ، حاصل  $a-b$  کدام است؟

۹ (۱)      ۷ (۲)      -۷ (۳)      -۹ (۴)

**پاسخ** گزینه (۱) چون بین دو ماتریس مربعی  $A$  و  $B$  اتحاد برقرار است، پس ضرب دو ماتریس  $A$  و  $B$  خاصیت جابه‌جایی دارد، یعنی  $AB = BA$  است، بنابراین:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ b+2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+6b & 45 \\ 8+(a-1)(b+2) & 7a-1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ b+2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & a-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3a+21 \\ b+16 & 6b+7a+5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 16+6b = 10 \Rightarrow b = -1 \\ 3a+21 = 45 \Rightarrow a = 8 \end{cases} \Rightarrow a-b = 8 - (-1) = 9$$

از آن‌جا که  $AB = BA$  است، پس:

اگر نکته دوست دارید! بدانید که ضرب ماتریس‌های  $2 \times 2$  هنگامی خاصیت جابه‌جایی دارد که نسبت درایه‌های نظیر قطر فرعی آن‌ها برابر با نسبت تفاضل درایه‌های قطرهای اصلی آن‌ها باشد.

$$AB = BA \Rightarrow \frac{6}{3} = \frac{2}{b+2} = \frac{a-1-1}{7-4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b+2} = 2 \Rightarrow b+2=1 \Rightarrow b=-1 \\ \frac{a-2}{3} = 2 \Rightarrow a-2=6 \Rightarrow a=8 \end{cases}$$

$$a-b = 8 - (-1) = 9$$

بنابراین:

**توان ماتریس‌ها** اگر ماتریس  $A$  مربعی باشد (چون با هر توانی از خودش تعویض پذیر است)، داریم:

$$A^1 = A, A^2 = A.A, A^3 = A.A^2 = A^2.A, \dots, A^n = A.A^{n-1} = A^{n-1}.A$$

اگر  $A$  ماتریس مربعی،  $m$  و  $n$  اعدادی طبیعی و  $k$  عددی حقیقی باشد، آن‌گاه:

**دقت کنید**

①  $I^n = I$       ②  $(kA)^n = k^n A^n$       ③  $A^m \times A^n = A^{m+n}$       ④  $(A^m)^n = A^{mn}$



**توان ماتریس های خاص** برای محاسبه توان های ماتریس مربعی  $A$  (به طور خاص در مورد توان های بزرگ!)، راه کلی این است که بین  $A$ ،  $A^2$ ،  $A^3$  و ... رابطه ای برقرار کنیم؛ اما در مورد برخی ماتریس های خاص، توان های بزرگ به راحتی قابل محاسبه اند. این ماتریس ها عبارتند از:

$$1 \text{ اگر } A \text{ مثلثی باشد به طوری که تمام درایه های روی قطر اصلی آن صفر باشند، تمام توان های بزرگ تر با مساوی مرتبه آن برابر صفر است.}$$

$$A = \begin{bmatrix} \circ & a \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{n \geq 2} = \bar{O}, \quad B = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ a & \circ & \circ \\ b & c & \circ \end{bmatrix} \Rightarrow B^{n \geq 3} = \bar{O}$$

**ماتریس خودتوان** اگر ماتریس  $A$  مربعی و  $A^2 = A$  باشد، این ماتریس را خودتوان گوئیم؛ یعنی تمام توان های طبیعی  $A$  با  $A$  برابر می شوند.

$$A^2 = A \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} A^n = A$$

**ماتریس I**، یک ماتریس خودتوان است، یعنی به هر توان طبیعی برسد برابر با خودش می شود. ( $I^n = I$ )

**ماتریس متناوب** اگر  $A^2 = I$  باشد، این ماتریس را متناوب گوئیم زیرا توان های زوج این ماتریس برابر  $I$  و توان های فرد آن برابر با خود ماتریس می شوند.

$$A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} A^{\text{فرد}} = A \\ A^{\text{زوج}} = I \end{cases}$$

**ماتریس قطری** اگر  $A$  قطری باشد، برای محاسبه  $A^n$  کافی است درایه های روی قطر اصلی را به توان  $n$  برسانیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & \circ & \circ \\ \circ & b^n & \circ \\ \circ & \circ & c^n \end{bmatrix}$$

### استراتژی حل مسئله

برای محاسبه توان های بزرگ ماتریس ها، ابتدا توان دوم را به دست می آوریم. اگر خودتوان یا متناوب بود، هر توانی از آن به راحتی قابل محاسبه است، در غیر این صورت سعی می کنیم بین توان های اول، دوم و سوم ماتریس رابطه ای برقرار کنیم. (در مورد توان های کوچک می توانیم از ضرب ماتریس در خودش استفاده کنیم تا به توان دلخواه برسیم.)



(سراسری ریاضی ۸۳)

۱۲- اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^5 - A^4$  کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

**پاسخ گزینه (۱)** ابتدا  $A^2$  را پیدا می کنیم تا بعد ببینیم چه اتفاقی می افتد ...

چون  $A^2 = I$  شده پس ماتریس  $A$  متناوب است؛ یعنی توان های زوج ماتریس  $A$  برابر  $I$  و توان های فرد ماتریس  $A$  برابر با خود ماتریس  $A$  می شوند.

بنابراین  $A^4 = I$  و  $A^5 = A$  است و ...

$$A^5 - A^4 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

(ریاضی قارچ ۱۴۰۱)

۱۳- اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، درایه های سطر اول ماتریس  $A^3$  کدام است؟

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 9 & 12 & 16 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

**پاسخ گزینه (۲)** یک راه این است که  $A^3$  را به دست آوریم و گزینه ای که در سطر اول می بینیم را به عنوان پاسخ انتخاب کنیم.

اما راه دیگر این است که ابتدا سطر اول  $A^2$  را به دست آوریم. برای این کار باید سطر اول  $A$  را در  $A$  ضرب کنیم.  $A^2$  سطر اول  $A$   $\times$   $A$  = [سطر اول  $A$ ]

$$A^2 \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

برای یافتن سطر اول  $A^3$  کافی است سطر اول  $A^2$  را در  $A$  ضرب کنیم و تمام. 😊

$$A^3 \text{ سطر اول} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 16 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

۱۴- اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ، آن گاه  $A^{1403} - A^{1400}$  کدام است؟

(۱)  $A$  (۲)  $\bar{O}$  (۳)  $I$  (۴)  $-A$

**پاسخ گزیده (۱۲)** ماتریس  $A$  مثلثی و درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند، پس تمام توان‌های بزرگ‌تر مساوی مرتبهٔ ماتریس برابر با صفرند؛ یعنی  $A^{n \geq 2} = \bar{O}$ . بنابراین:

$$A^{1403} - A^{1400} = \bar{O} - \bar{O} = \bar{O}$$

۱۵- اگر  $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix}$ ، ماکزیمم مقدار مجموع درایه‌های ماتریس  $A^{1403} + A^{1402}$  چه قدر است؟

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) به  $x$  بستگی دارد.

**پاسخ گزیده (۱۱)** چون با توان‌های  $A$  سروکار داریم، پس باید اول  $A^2$  را پیدا کنیم.

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \cos x \sin x - \sin x \cos x \\ \sin x \cos x - \cos x \sin x & \sin^2 x + \cos^2 x \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

چون  $A^2 = I$  شده، پس ماتریس متناوب است؛ یعنی توان‌های زوج  $A$  برابر  $I$  و توان‌های فرد  $A$  برابر  $A$  هستند.

$$A^{1403} + A^{1402} = A + I = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \cos x & \sin x \\ \sin x & 1 - \cos x \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های  $A^{1403} + A^{1402}$  برابر با  $2 + 2 \sin x$  است؛ زمانی این مجموع ماکزیمم می‌شود که  $\sin x$  حداکثر مقدار خود یعنی ۱ را داشته باشد.  $A^{1403} + A^{1402}$  ماکزیمم مجموع درایه‌های  $2 + 2(1) = 4$

۱۶- اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه بوده،  $BA = A$  و  $AB = -B$ ، حاصل  $A^T B^T$  کدام است؟

(۱)  $AB$  (۲)  $BA$  (۳)  $-AB$  (۴)  $-BA$

**پاسخ گزیده (۳)** باید ابتدا به جای  $A$  و  $B$  در  $A^T B^T$  به ترتیب  $BA$  و  $-AB$  جایگزین کنیم و سپس هر جا  $AB$  و  $BA$  دیدیم به جای آن‌ها  $-B$  و  $A$  قرار دهیم.

$$A^T B^T = AA \times BB = (BA \times BA)((-AB)(-AB)) = (B(AB)A)(A(BA)B)$$

$$A^T B^T = \underbrace{(B(AB)A)}_{-B} \underbrace{(A(BA)B)}_A = (-B \underbrace{(BA)}_A) \underbrace{(A \underbrace{(AB)}_{-B})}_{-B} = (-BA)(-AB) = (-A)(B) = -AB$$

بنابراین:

۱۷- اگر  $\bar{O} = A^2 + A - I$  باشد،  $A^6$  کدام است؟

(۱)  $8A - 5I$  (۲)  $-8A + 5I$  (۳)  $8A + 5I$  (۴)  $-8A - 5I$

**پاسخ گزیده (۲)** **روش اول:** از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال،  $A^2$  را پیدا می‌کنیم و سعی می‌کنیم  $A^6$  را بسازیم.

$$A^2 + A - I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = I - A$$

طرفین رابطهٔ بالا را به توان ۳ می‌رسانیم و هر جا  $A^2$  دیدیم، به جای آن  $I - A$  قرار می‌دهیم.

$$A^2 = I - A \xrightarrow{\text{توان } 3} A^6 = (I - A)^3 = I^3 - 3I^2 A + 3A^2 I - A^3 \Rightarrow A^6 = I - 3A + 3(I - A) - (I - A)A$$

$$A^6 = I - 3A + 3I - 3A - A + A^2 = 4I - 7A + (I - A) = 5I - 8A$$

بنابراین:

**روش دوم:** اتحاد چاق و لاغر  $A^3 - I^3 = (A - I)(A^2 + A + I)$  را خوب می‌شناسیم؛ با توجه به این که از عبارت  $A^2 + A + I$  می‌توان اتحاد چاق و لاغر ساخت، ابتدا از رابطهٔ داده‌شده در صورت سؤال  $A^2 + A + I$  را به دست می‌آوریم:

$$A^2 + A - I = \bar{O} \xrightarrow{+2I} A^2 + A + I = 2I$$

حالا طرفین رابطهٔ بالا را در  $A - I$  ضرب می‌کنیم، داریم:  $A^3 - I = 2A - 2I \Rightarrow A^3 = 2A - I$

کافی است طرفین رابطهٔ بالا را به توان ۲ برسانیم تا  $A^6$  به دست آید؛ فقط هر جا  $A^2$  دیدیم به جای آن  $I - A$  جایگزین می‌کنیم:

$$A^2 = 2A - I \xrightarrow{\text{توان } 2} A^6 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I^2 \Rightarrow A^6 = 4(I - A) - 4A + I = 5I - 8A$$

**نکته کنیز** (۱)  $AI = A$  (۲)  $I^n = I$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

**رابطهٔ کیلی - همیلتون** شاید اسم مرحوم همیلتن و شادروان کیلی به گوشتان خورده باشد!

نخستین بار مفهوم ماتریس در کارهای این دو نفر مطرح شده است.

رابطهٔ کیلی - همیلتن می‌گوید: «هر ماتریس  $2 \times 2$  به شکل  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  در رابطهٔ  $A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$  صدق می‌کند.»

۱۸- اگر  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$  و  $A^2 = \alpha A + \beta I$ ، دوتایی  $(\alpha, \beta)$  کدام است؟

(۴, ۳) (۴)                      (۴, ۱۱) (۳)                      (۲, ۱۳) (۲)                      (۲, ۱۱) (۱)

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}$$

**پاسخ** گزینه (۱) **روش اول:** بدون فوت وقت!  $A^2$  را به دست می‌آوریم:

$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  را از قبل می‌شناسیم. (بله!  $I$  ماتریس همانی است.)

$$A^2 = \alpha A + \beta I \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta - 2\alpha & \alpha \\ 5\alpha & 4\alpha + \beta \end{bmatrix}$$

کاملاً واضح است که  $\alpha = 2$  است. با قراردادن  $\alpha = 2$  در معادله  $\beta - 2\alpha = 9$ ، داریم:  $\beta - 4 = 9 \Rightarrow \beta = 13$   
بنابراین دوتایی  $(\alpha, \beta)$ ،  $(2, 13)$  است.

**روش دوم:** به کمک رابطه کیلی - همیلتن داریم:

$$A^2 - (-2+4)A + (-1-5)I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = 2A + 13I \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 13$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (-2 \times 4) - (1 \times 5) = -13$$

**دقت کنید** دترمینان ماتریس  $A$  برابر است با:

۱۹- اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & m \\ 2 & n \end{bmatrix}$  و  $A^2 = 2A - 3I$ ، در این صورت  $m^2 + n^2$  چه قدر است؟

۲ (۴)                      ۱۳ (۳)                      ۱۸ (۲)                      ۲۵ (۱)

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & m \\ 2 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & m \\ 2 & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m+1 & mn-m \\ 2n-2 & n^2+2m \end{bmatrix}$$

**پاسخ** گزینه (۱) **روش اول:** اول  $A^2$  را به دست می‌آوریم:

با جایگزین کردن  $A^2$  در رابطه  $A^2 = 2A - 3I$  داریم:

$$\begin{bmatrix} 2m+1 & mn-m \\ 2n-2 & n^2+2m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2m \\ 4 & 2n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2m \\ 4 & 2n-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2m+1 = -5 \Rightarrow m = -3 \\ 2n-2 = 4 \Rightarrow n = 3 \end{cases}$$

بنابراین:

$$m^2 + n^2 = (-3)^2 + 3^2 = 18$$

پس:

**روش دوم:** ماتریس  $A$  یک ماتریس  $2 \times 2$  است و در رابطه کیلی - همیلتن صدق می‌کند، پس:

$$A^2 - (-1+n)A + \begin{vmatrix} -1 & m \\ 2 & n \end{vmatrix} I = \bar{O} \Rightarrow A^2 + (1-n)A + (-n-2m)I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = (n-1)A + (n+2m)I$$

$$\begin{cases} n-1 = 2 \Rightarrow n = 3 \\ n+2m = -3 \xrightarrow{n=3} m = -3 \end{cases}$$

با توجه به رابطه  $A^2 = 2A - 3I$  که در صورت سؤال داده شده، داریم:

$$m^2 + n^2 = (-3)^2 + 3^2 = 18 \text{ بنابراین:}$$